



سیگنال‌ها و سیستم‌ها

بهار ۱۴۰۲

استاد: مینا سادات محمودی

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی کامپیوتر

گردآورندگان: زهرا رزاقی، پارسا شریفی، سینا رشیدی

مهلت ارسال: ۱۴ اسفند

مباحث تمرین: اعداد مختلط، ویژگی‌های سیگنال‌ها و سیستم‌ها

تمرین اول

- مهلت ارسال پاسخ تا ساعت ۲۳:۵۹ روز مشخص شده است.
- هم‌فکری شما در انجام تمرین مانعی ندارد اما پاسخ ارسالی هر کس حتماً باید توسط خود او **خلق و نوشته** شده باشد.
- در صورت هم‌فکری و یا استفاده از هر منابع خارج درسی، نام هم‌فکران و آدرس منابع مورد استفاده برای حل سوال مورد نظر را ذکر کنید.
- لطفاً تصویری واضح از پاسخ سوالات نظری بارگذاری کنید. در غیر این صورت پاسخ شما تصحیح نخواهد شد.
- تمام پاسخ‌های خود را در یک فایل با فرمت HW#_[SID]_[Fullname].zip روی کوئرا قرار دهید.

سوالات نظری (۱۰۰ + ۱۰ نمره)

۱. محاسبات اعداد مختلط (۱۰ نمره)

(آ) عبارت مختلط زیر را ساده کنید.

$$A = \frac{1-j}{e^{j\frac{\pi}{4}}}$$

(ب) مزدوج مختلط عدد $\frac{z_1}{z_2}$ را بیابید به طوری که $z_1 = 2 + 6j$ و $z_2 = 1 - j$ باشد.

(ج) رابطه زیر را ثابت کنید.

$$1 - e^{j\theta} = 2 \sin \frac{\theta}{2} e^{j\frac{(\theta-\pi)}{2}}$$

۲. فرم قطبی اعداد مختلط (۱۰ نمره)

فرض کنید $z = re^{j\theta}$. توابع زیر را که بر حسب z هستند به فرم قطبی بازنویسی کنید.

(آ) z^*

(ب) z^2

(ج) jz

(د) zz^*

(ه) $\frac{z}{z^*}$

۳. انرژی و توان سیگنال (۲۴ نمره) انرژی و توان سیگنال‌های زیر را تعیین کنید و نوع سیگنال را ذکر کنید.

$$x_1[n] = \begin{cases} n & \text{if } 0 < n \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

$$x_2[n] = \begin{cases} n & \text{if } 0 < n < 5 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

$$x_3(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi)$$

$$x_4[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)$$

۴. رسم سیگنال (۱۰ نمره) سیگنال های زیر را رسم کنید.

$$x_1[n] = 3e^{\frac{-j\pi}{3}} e^{\frac{-j\pi n}{6}} + 3e^{\frac{j\pi}{3}} e^{\frac{j\pi n}{6}}$$

$$x_2[n] = e^{-j\pi n}$$

۵. ویژگی های سیستم (۲۶ نمره) برای هر سیستم زیر، ویژگی های ذکر شده را تعیین کنید.

$$y_1[n] = n^3 x[n-1] \quad (\text{پایداری})$$

$$y_2[n] = e^{x[n]} \quad (\text{پایداری ، علیت})$$

$$y_3[n] = x[3n] \quad (\text{علیت})$$

$$y_4[n] = (\sum_{k=0}^n x[k] - x[n-1])u[n] \quad (\text{علیت})$$

$$y_5(t) = u\{x(t)\} \quad (\text{پایداری})$$

$$y_6(t) = x(t-5) - x(3-t) \quad (\text{علیت})$$

$$y_7(t) = 3x(t) \cos(\omega_0 t + \alpha) \quad (\text{تغییر پذیری با زمان ، علیت})$$

$$y_8[n] = x[n+1] - x[n] \quad (\text{تغییر پذیری با زمان})$$

$$y_9[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] \quad (\text{تغییر پذیری با زمان})$$

$$y_{10}[n] = \begin{cases} 0 & 0 < n \\ x[n] & \text{o.w.} \end{cases} \quad (\text{تغییر پذیری با زمان})$$

$$y_{11}[n] = \frac{1}{m_1+m_2+1} \sum_{k=-m_1}^{m_2} x[n-k] \quad (\text{تغییر پذیری با زمان})$$

۶. سیگنال های مختلط (۱۲ نمره)

(آ) الف) اندازه و فاز سیگنال های زیر را بدست آورید .

i.

$$x_1(\omega) = \frac{1}{\alpha + j\omega}$$

ii.

$$x_2(x, y) = x + jy$$

iii.

$$x_3(\omega) = e^{j\omega}$$

(ب) با توجه به سیگنال زیر ، موارد خواسته شده را رسم کنید .

$$x(t) = \sqrt{2}(1+j)e^{j\frac{\pi}{4}}e^{(-1+2\pi j)t}$$

i.

$$\text{Re}\{x(t)\}$$

ii.

$$\text{Im}\{x(t)\}$$

iii.

$$x(t+2) + x^*(t+2)$$

۷. سیگنال‌های متناوب (۱۰+۸ نمره)

(آ) فرض کنید $x(t)$ و $y(t)$ سیگنال‌های متناوبی هستند که دوره تناوب آن‌ها به ترتیب T_1 و T_2 است. تحت چه شرایطی مجموع $x(t) + y(t)$ متناوب است؟ و در صورت متناوب بودن دوره تناوب پایه آن چیست؟

(ب) فرض کنید $x[n]$ و $y[n]$ سیگنال‌های متناوبی هستند که دوره تناوب آن‌ها به ترتیب N_1 و N_2 است. تحت چه شرایطی مجموع $x[n] + y[n]$ متناوب است؟ و در صورت متناوب بودن دوره تناوب پایه آن چیست؟

(ج) (امتیازی) سیگنال‌های زیر را در نظر بگیرید.

$$x(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 2\sin\left(\frac{16\pi t}{3}\right)$$

$$y(t) = \sin(\pi t)$$

نشان دهید که $z(t) = x(t)y(t)$ متناوب است و $z(t)$ را به صورت یک ترکیب خطی از نمایی‌های مختلط بنویسید . به عبارت دیگر عدد T و اعداد مختلط c_k را طوری پیدا کنید که :

$$z(t) = \sum_k c_k e^{jk\frac{(2\pi)}{T}t}$$