



سیگنال ها و سیستم ها

بهار ۱۴۰۲

استاد: مینا سادات محمودی

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی کامپیوتر

گردآورندگان: زهرا رزاقی، زینب جعفریان، سیدعماد ذوالحواریه

مهلت ارسال: ۱۵ خرداد

مباحث تمرین: تبدیل لاپلاس، تبدیل Z، نمونه برداری

تمرین ششم

- مهلت ارسال پاسخ تا ساعت ۲۳:۵۹ روز مشخص شده است.
- همفکری شما در انجام تمرین مانعی ندارد اما پاسخ ارسالی هر کس حتماً باید توسط خود او **خلق و نوشته** شده باشد.
- در صورت همفکری و یا استفاده از هر منابع خارج درسی، نام همفکران و آدرس منابع مورد استفاده برای حل سوال مورد نظر را ذکر کنید.
- لطفاً تصویری واضح از پاسخ سوالات نظری بارگذاری کنید. در غیر این صورت پاسخ شما تصحیح نخواهد شد.
- تمام پاسخ‌های خود را در یک فایل با فرمت HW#[SID]_[Fullname].pdf روی کوئرا قرار دهید.

سوالات نظری (۱۰+۱۰۰ نمره)

۱. محاسبه تبدیل لاپلاس و Z و معکوس آنها (۲۰ نمره)

(آ) تبدیل z سیگنال‌ها را به همراه ناحیه همگرایی (ROC) آن‌ها نشان دهید.

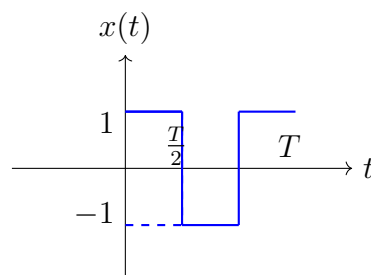
۱.آ

$$x_1[n] = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^n & n \geq 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} & n < 0 \end{cases}$$

۲.آ

$$x_2[n] = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)u[n]$$

۳.آ تبدیل لاپلاس سیگنال زیر را محاسبه کنید سپس ناحیه همگرایی را نمایش دهید.



(ب) اگر تبدیل z سیگنال $x[n]$ را به صورت زیر داشته باشیم، مقدار سیگنال $x[n]$ را بدست آورید. ناحیه همگرایی هر سیگنال به شما داده شده است.

۱.ب

$$X_1(z) = \frac{1 + 3z^{-1}}{1 + 3z^{-1} + 2z^{-2}} \quad \text{ROC: } |z| > 2$$

۲.ب

$$X_2(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-2}} \quad \text{ROC: } |z| > \frac{1}{2}$$

ب. ۳.

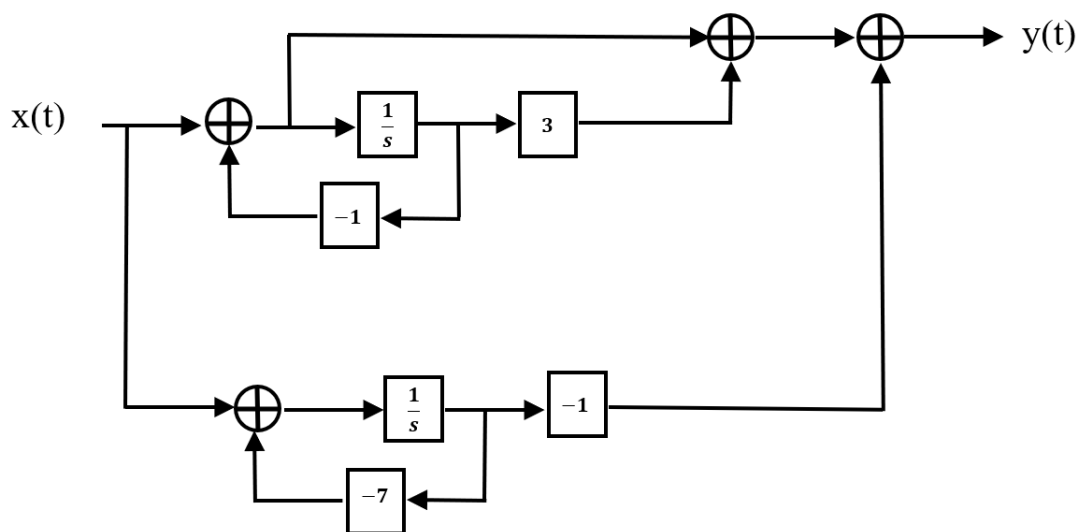
$$X_3(z) = \frac{z^{-1} - \frac{1}{2}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})^2} \quad \text{ROC : } |z| < \frac{1}{2}$$

ب. ۴. برای سیگنال علی زیر معکوس تبدیل لاپلاس را بدست بیاورید.

$$X_l(s) = \frac{s^2 + 5s + 7}{s^2 + 3s + 2} \quad -2 < \text{Re}\{s\} < -1$$

۲. توصیف سیستم از روی دیاگرام صفرها و قطبها و دیاگرام بلوکی (۱۴ نمره)

(آ) یک سیستم LTI علی دارای نمایش بلوک دیاگرام زیر است. دیاگرام صفر و قطب سیستم را رسم کنید.



(ب) پاسخ ضربه سیستم و معادله دیفرانسیل مربوط به ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ را بدست آورید.

(ج) پایداری سیستم را تعیین کنید.

(د) اگر $h(t)$ پاسخ ضربه سیستم باشد، در صورت امکان $h(0)$ و $h(\infty)$ را بدست آورید.

۳. تابع خودهمبستگی (۱۰ نمره)

تابع خودهمبستگی برای یک سیگنال حقیقی $x[n]$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$c_{xx}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]x[n+k]$$

(آ) تبدیل z سیگنال $c_{xx}[n]$ را برحسب $X(z)$ (یعنی تبدیل z سیگنال $x[n]$) بیابید.

برای دو قسمت بعدی، فرض کنید $|a| < 1$ ، $x[n] = a^n u[n]$.

(ب) نمودار صفر و قطب $C_{xx}(z)$ را رسم کنید و ناحیه همگرایی آن را مشخص کنید.

(ج) فرم زمانی $c_{xx}[n]$ را بیابید.

۴. تحلیل سیستم LTI (۱۴ نمره)

(آ) (۶ نمره) سیستم پیوسته LTI با معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید.

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 6y(t) = \frac{d^2 x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} + 6x(t)$$

آیا این سیستم وارون پذیر است؟ در صورت وارون پذیری، درباره علیت و پایداری وارون سیستم بحث کنید.

(ب) (۸ نمره) اگر $h[n]$ پاسخ ضربه سیستم گسسته LTI با معادله تفاضلی زیر باشد، به ازای دو حالت خواسته شده، $h[n]$ را بدست آورید.

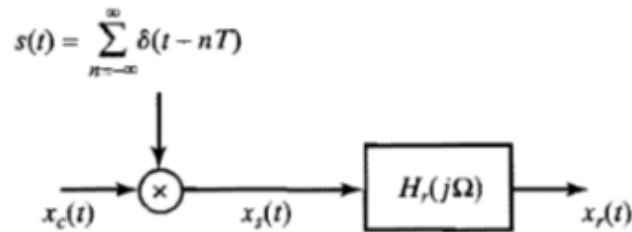
i. سیستم علی باشد.

ii. سیستم پایدار باشد.

$$y[n-2] + 2y[n-1] - 3y[n] = 4x[n-1] + 4x[n]$$

۵. نمونه برداری (۱۴ نمره)

سیستم موجود در شکل زیر با مشخصات گفته شده را در نظر بگیرید.



فرض کنید سیگنال ورودی به صورت زیر بوده است

$$x_c(t) = 2\cos(100\pi t) + \cos(300\pi t) \quad -\infty < t < +\infty$$

خط و فیلتر بازسازی را نیز به شکل زیر در نظر بگیرید:

$$H_r(j\omega) = \begin{cases} T & |\omega| \leq \frac{\pi}{T} \\ 0 & |\omega| > \frac{\pi}{T} \end{cases}$$

(آ) (۶ نمره) $X_c(j\omega)$ ، تبدیل فوریه سیگنال $x_c(t)$ را به دست آورده و به عنوان تابعی از ω رسم نمایید

(ب) (۴ نمره) فرض کنید $f_s = \frac{1}{T} = 500 \text{ sample/sec}$ و تبدیل فوریه سیگنال $x_s(t)$ که آن را با $X_s(j\omega)$ نشان می‌دهیم در بازه $-\frac{2\pi}{T} \leq \omega \leq \frac{2\pi}{T}$ رسم نمایید. خروجی $x_r(t)$ در این حالت چیست؟ (رابطه دقیق ریاضی آن را بیان کنید).

(ج) (۴ نمره) حال فرض کنید $f_s = \frac{1}{T} = 250 \text{ sample/sec}$. قسمت قبل را مجدداً حل نمایید.

۶. بسط چند جمله ای (۱۰ نمره) فرض کنید تبدیل z سیگنال علی $x[n]$ به صورت زیر باشد.

$$X(z) = \frac{z(z+2)}{(z-0.2)(z+0.6)}$$

(آ) (۵ نمره) با استفاده از بسط چند جمله ای مقادیر $x[0]$ ، $x[1]$ و $x[2]$ را بدست آورید.

(ب) (۵ نمره) معکوس تبدیل z سیگنال فوق را بدست آورده و با جایگذاری $n=0$ ، $n=1$ و $n=2$ صحت موارد بدست آمده در قسمت قبل را بررسی کنید.

۷. همگرایی تبدیل فوریه (۱۲ نمره)

تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید.

$$X(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}} \quad |z| < 2$$

(آ) با چه جایگذاری از z میتوانیم به تبدیل فوریه زمان گسسته سیگنال $x[n]$ برسیم. علت این کار را بیان کنید.

(ب) فرض کنید سیستم علی نباشد و معادله به صورت زیر باشد.

$$X(z) = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} \quad |z| < \alpha$$

حال درباره همگرایی تبدیل فوریه $x[n]k^n$ بحث کنید. و نسبت α با k به چه صورت است؟ در مورد شرط کلی جایگذاری برای تبدیل فوریه $x[n]k^n$ بحث کنید.

(ج) دلیل جایگذاری قسمت آ را با توجه به تحلیل خودتان از قسمت ب بیان کنید. شرط این جایگذاری کدام یک از ویژگی های زیر در سیستم است؟

- علی بودن
- ناپایداری
- معکوس پذیر بودن
- پایداری

۸. ROC و خواص سیستم LTI (۱۶ نمره)

سیستم های زیر را با توابع تبدیل داده شده در نظر بگیرید.

$$\frac{s+1}{(s+2)(s+3)} \quad -3 < \Re(s) < -2 \quad (\text{آ})$$

$$\frac{-(s+1)(s-1)}{(s+2)(s+3)} \quad -2 < \Re(s) \quad (\text{ب})$$

$$\frac{(s+1)(s-1)}{(s+2)(s-3)} \quad -2 < \Re(s) < 3 \quad (\text{ج})$$

$$\frac{s+1}{(s+2)(s+3)} \quad -2 < \Re(s) \quad (\text{د})$$

(۵)

$$\frac{-2(s-1)}{(s+2)(s+6)} \quad -2 < \Re(s)$$

با محاسبه دقیق بیان کنید کدام یک از سیستم‌ها می‌تواند بیانگر سیستم LTI علی و پایدار با ویژگی‌های زیر باشد.

(آ) پاسخ پله سیستم در حالت پایدار برابر $\frac{1}{6}$ است.

(ب) پاسخ سیستم به ورودی $x(t) = e^{-t}u(t)$ مطلقاً انتگرال پذیر است.

(ج) سیگنال $h''(t) + 5h'(t) + 8h(t)$ محدود است.

(د) سیستم حتماً یک صفر در بی نهایت دارد.