m

۱/

سوال ①

آ)

$$A = \frac{1+j}{e^{j\pi/4}} = \frac{1-j}{e^{j\pi/4}} = \frac{1-j}{\cos\pi/4 + j\sin\pi/4} =$$

$$= \sqrt{2} \times \frac{1-j}{1+j} = \frac{\sqrt{2} \times (1-j)^2}{(1+j)(1-j)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times (1-2j+j^2) =$$

$$= -j\sqrt{2}$$

ب)

$$z_2 = 1-j \qquad z_1 = 2+6j$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+6j}{1-j} \rightsquigarrow \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{2-6j}{1+j} = \frac{(2-6j)(1-j)}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(2+6j^2-8j\right) = -\frac{8j+4}{2} = -(2+4j)$$

ج)

$$\sin\theta/_2 = \mathrm{Im}\left(e^{j\theta/2}\right) = \frac{e^{j\theta/2} - e^{-j\theta/2}}{2j}$$

$$e^{\frac{j(\theta-\pi)}{2}} = e^{j\theta/2} \times e^{-j\pi/2} = e^{j\theta/2}\left(\cos\pi/_2 - j\sin\pi/_2\right) = -je^{j\theta/2}$$

$$2\sin\theta/_2 \times e^{\frac{j(\theta-\pi)}{2}} = \frac{1}{j}\left(\exp(j\theta/_2) - \exp\left(-\frac{j\theta}{2}\right)\right) \times \left(-j\exp\left(\frac{j\theta}{2}\right)\right)$$

$$= -\left(\exp(j\theta) - 1\right) = 1 - e^{j\theta}$$

DATE / /　　　　SUBJECT :

سؤال 2)

آ) $z^* = re^{-j\theta} = r(\cos\theta - j\sin\theta)$

ب) $z^2 = r^2 e^{2j\theta} = r^2(\cos 2\theta - j\sin 2\theta)$

ج) $jz = jre^{j\theta} = jr(\cos\theta + j\sin\theta) =$

$= r(-\sin\theta + j\cos\theta) = r\left(\cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) + j\sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)\right)$

د) $zz^* = re^{j\theta} \times re^{-j\theta} = r^2 = r^2(\cos 0 + j\sin\theta)$

ه) $\frac{z}{z^*} = \frac{re^{j\theta}}{re^{-j\theta}} = e^{2j\theta} = \cos 2\theta + j\sin 2\theta$

سؤال 3)

$x_1[n] = \begin{cases} n & \text{if } 0 < n \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$ $\longrightarrow$ در اینجا سیگنال یک سیگنال گسسته است.

$E_\infty = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_1[n]|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 = \lim_{k\to\infty} \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} = +\infty$

$P_\infty = \cancel{\frac{1}{2}} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \sum_{n=-T}^{+T} |x[n]|^2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 =$

$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \times \frac{T(T+1)(2T+1)}{6} = +\infty$

سیگنال نه انرژی و توان

$$x_2[n] = \begin{cases} n & \text{if } 0 < n < 5 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases} \rightarrow$$ در اینجا، سیگنال یک نوع سیگنال گسسته است.

$$E_\infty = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=1}^{4} n^2 = \frac{4(4+1)(2\times4+1)}{6} = \frac{4\times5\times9}{6} =$$

$$E_\infty = 30 \longrightarrow$$ سیگنال انرژی

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \sum_{-T}^{+T} |x[n]|^2 = \lim_{T\to\infty} \frac{30}{2T} = 0$$

$$x_3(t) = A\sin(\omega_0 t + \phi) \rightarrow$$ در اینجا سیگنال یک سیگنال پیوسته است.

$$E_\infty = \int_{-\infty}^{+\infty} x_3^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 \sin^2(\omega_0 t+\phi)\,dt = A^2 \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos(2(\omega_0 t+\phi))}{2}\,dt$$

$$= A^2 \times \frac{1}{2}\left(t \cancel{+} - \frac{1}{2\omega_0}\sin(2(\omega_0 t+\phi))\right)\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} = \infty$$

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} x_3^2(t)\,dt\right\} = \lim_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} A^2\sin^2(\omega_0 t+\phi)\,dt\right\} =$$

$$= \lim_{T\to\infty}\left\{\frac{A^2}{2T}\int_{-T}^{T}\frac{1-\cos(2(\omega_0 t+\phi))}{2}\,dt\right\} =$$

$$= \lim_{T\to\infty}\left\{\frac{A^2}{2T}\left[\frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{2\omega_0}\sin(2(\omega_0 t+\phi))\right)\right]_{-T}^{T}\right\} =$$

$$= \lim_{T\to\infty}\left\{\frac{A^2}{2T}\times\frac{2T}{2}\right\} = \frac{A^2}{2} \longrightarrow$$ سیگنال توان

$x_4[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n) \longrightarrow$ این سیگنال، یک سیگنال گسسته است.

$$E_\infty = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \dots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_\infty = 4/3 \longrightarrow$$

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \sum_{n=-T}^{T} \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \sum_{n=0}^{T} \left(\frac{1}{4}\right)^n =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \times \frac{1-4^{-(T+1)}}{1-\frac{1}{4}} = 0 \longrightarrow$$ سیگنال انرژی

سؤال 4

$$x_1[n] = 3e^{j\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi n}{6}\right)} + 3e^{-j\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi n}{6}\right)} =$$

$$= 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi n}{6}\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi n}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi n}{6}\right) - j\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi n}{6}\right)\right)$$

$$= 6\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi n}{6}\right)$$

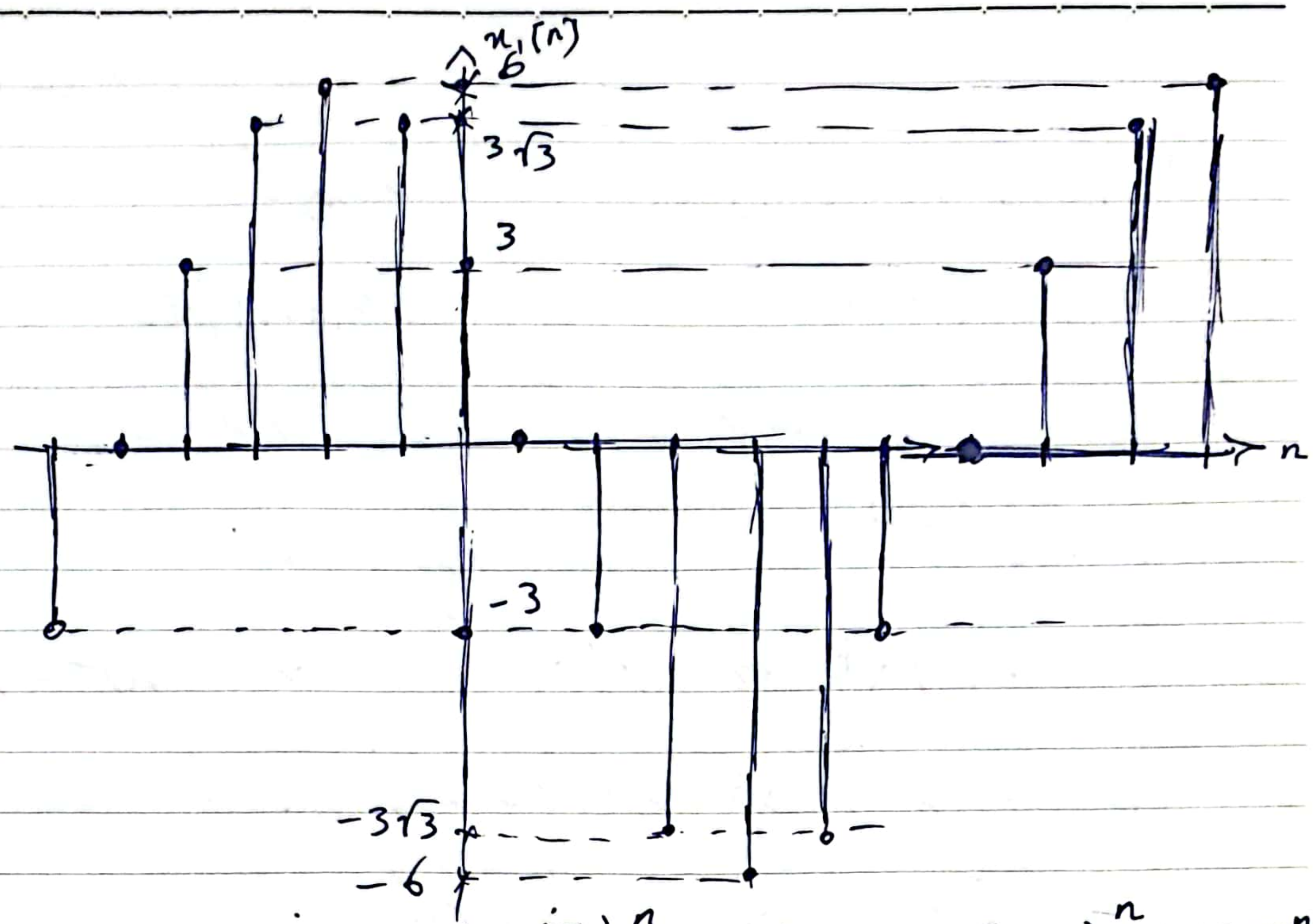
$x_1[0] = 3$ $\quad x_1[1] = 0$ $\quad x_1[2] = -3$ $\quad x_1[3] = -3\sqrt{3}$

$x_1[4] = -6$ $\quad x_1[5] = -3\sqrt{3}$ $\quad x_1[6] = -3$ $\quad x_1[7] = 0$

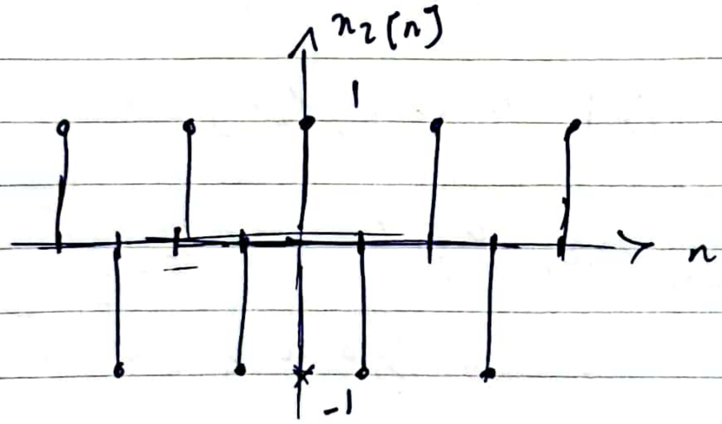
$x_1[8] = 3$ $\quad x_1[9] = 3\sqrt{3}$ $\quad x_1[10] = 6$ $\quad x_1[11] = 3\sqrt{3}$

این سیگنال یک سیگنال گسسته است با دورهٔ تناوب $n=12$

DATE / / SUBJECT :



$$x_2[n] = e^{-j\pi n} = (e^{-j\pi})^n = (\cos\pi - j\sin\pi)^n = (-1)^n$$



سوال ۶ (5

$y_1[n] = n^3 x[n-1] \rightarrow$ ناپایدار است.

$\hookrightarrow y_1[n] < n^3 B$ اگر $x[n-1] < B$ باشد

است که حد بالایی برای آن پیدا نمی‌شود.

$y_2[n] = e^{x[n]} \longrightarrow$ علّی و پایدار

$\hookrightarrow x[n] < B \Rightarrow y[n] < e^{B} = B' \rightarrow$ پایدار است ~~علی است~~

با توجه به اینکه $y_2[n]$ تنها به لحظهٔ n مربوط دارد در نتیجه $y_2[n]$ علّی است

$y_3[n] = x[3n] \longrightarrow$ علّی نمی‌باشد

$\hookrightarrow$ $y_3[n]$ به لحظات بعدی مربوط است، در نتیجه علّی نمی‌باشد.

$y_4[n] = \left(\sum_{k=0}^{n} x[n] - x[n-1]\right) u[n] \rightarrow$ علّی است

$\hookrightarrow y_4[n] = \left(\sum_{k=0}^{n} \delta[k]\right) u[n]$ در هر لحظه مقدار $y[n]$

به لحظات قبل از n مربوط است.

$y_5[n] = u\{x(t)\} \longrightarrow$ پایدار است

$\hookrightarrow x(t) < B \Rightarrow y_5[n] < 1 \Rightarrow$

$y_6(t) = x(t-5) - x(3-t) \rightarrow$ علّی نمی‌باشد

این تابع، به لحظات بعدی مربوط است در نتیجه علّی نمی‌باشد.

$y_7(t) = 3x(t)\cos(\omega_0 t + \alpha) \rightarrow$ علّی است. Time dependent

در هر لحظه $y[n]$ تنها به مقدار همان لحظه $x[n]$ مربوط است.

Ex: $x_1(t) \rightarrow y_1(t) = 3x_1(t)\cos(\omega_0 t + \alpha)$

$x_2(t) = x_1(t-t_0) \Rightarrow y_2(t) = 3x_1(t-t_0)\cos(\omega_0 t + \alpha)$

$y_1(t-t_0) = 3x_1(t-t_0)\cos(\omega_0(t-t_0) + \alpha) \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{y_1(t)}\ y_1(t-t_0) \neq y_2(t) \rightarrow$ Time Dependent

$\cancel{y_8(t)} = y_8[n] = x[n+1] - x[n] \rightarrow$ Time Independent

$x_1[n] \rightarrow y_1[n] = x[n+1] - x[n]$

$x_2[n] = x_1[n-n_0] \rightarrow y_2[n] = x_1[n-n_0+1] - x_1[n-n_0]$

$\cancel{y_2[n]}\ y_1[n-n_0] = x_1[n-n_0+1] - x_1[n-n_0]$

$\rightarrow$ Time Independent

$y_9[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \rightarrow$ Time Dependent

$\rightarrow x_2[n] = x_1[n-n_0] \rightarrow y_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x_1[k-n_0]$

$y_1[n-n_0] = \sum_{k=-\infty}^{n-n_0} x_1[k]$

$y_1[n-n_0] \neq y_2[n] \rightarrow$

$y_{10}[n] = \begin{cases} 0 & a<n \\ x[n] & o.w. \end{cases} \rightarrow$ Time Dependent

$\rightarrow x_2[n] = x_1[n-n_0] \Rightarrow y_2[n] = \begin{cases} 0 & a<n \\ x_2[n-n_0] & o.w. \end{cases}$

$y_1[n-n_0] = \begin{cases} 0 & a<n-n_0 \\ x_1[n-n_0] & o.w. \end{cases}$

$y_1[n-n_0] \neq y_2[n] \rightarrow$ Time Dependent

$y_{11}[n] = \frac{1}{m_1+m_2+1} \sum_{k=-m_1}^{m_2} x[n-k] \rightarrow$ Time Independent

$x_2[n] = x_1[n-n_0] \rightarrow y_2[n] = \frac{1}{m_1+m_2+1} \sum_{k=-m_1}^{m_2} x_1[n-n_0-k]$

$y_1[n-n_0] = \frac{1}{m_1+m_2+1} \sum_{k=-m_1}^{m_2} x_1[n-n_0-k]$

$y_1[n-n_0] = y_2[n]$

DATE / / SUBJECT :

~~آ~~ سوال 6)

آ)

i. $\frac{1}{\alpha + j\omega} = x_1(\omega) = \frac{1}{\alpha + j\omega} = \frac{\alpha - j\omega}{\alpha^2 + \omega^2} =$

$= \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} e^{-j\,tg^{-1}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)}$

$\hookrightarrow$ اندازه : $\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}$ فاز : $-tg^{-1}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$

ii. $x + jy = \sqrt{x^2 + y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + j \times \frac{y}{\sqrt{y^2+x^2}}\right) =$

$= \sqrt{x^2+y^2}\, e^{j\,tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)}$

$\hookrightarrow$ اندازه : $\sqrt{x^2+y^2}$ فاز : $tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

iii. $e^{j\omega} \longrightarrow$ اندازه : 1 فاز : ω

ب)

$x(t) = \sqrt{2}(1+j)e^{j\pi/4} e^{(-1+2\pi j)t} =$

$= \sqrt{2}(1+j) \times \frac{\sqrt{2}}{2}(1+j)e^{-t} \times e^{2\pi j t} \cancel{=1} =$

$= \cancel{\sqrt{2}}(1+j)^2 e^{-t} / =$

DATE / / SUBJECT :

ب

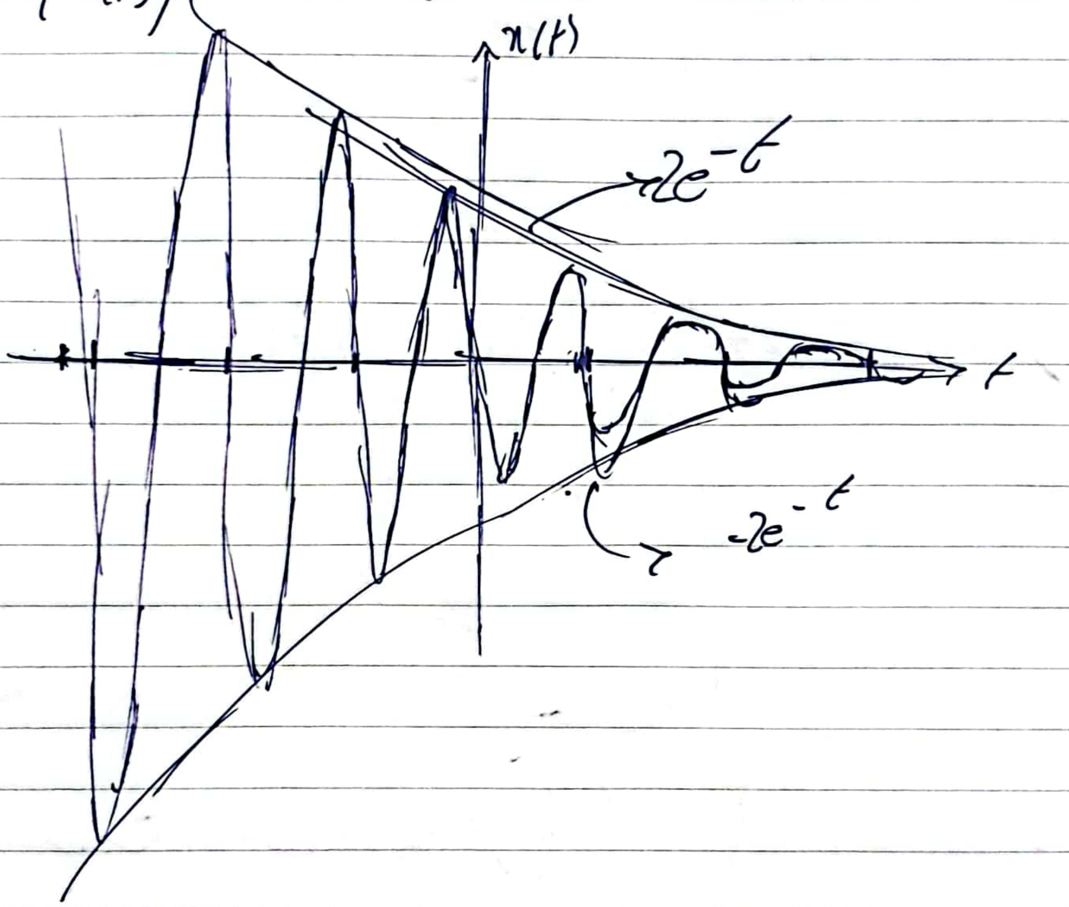
$$x(t) = \sqrt{2}(1+j)e^{j\pi/4}e^{(-1+2\pi j)t} =$$

$$= \sqrt{2}(1+j)\frac{\sqrt{2}}{2}(1+j)e^{-t}e^{2\pi jt} =$$

$$= (1+j)^2e^{-t}e^{2\pi jt} = 2je^{-t}(\cos 2\pi t + j\sin 2\pi t) =$$

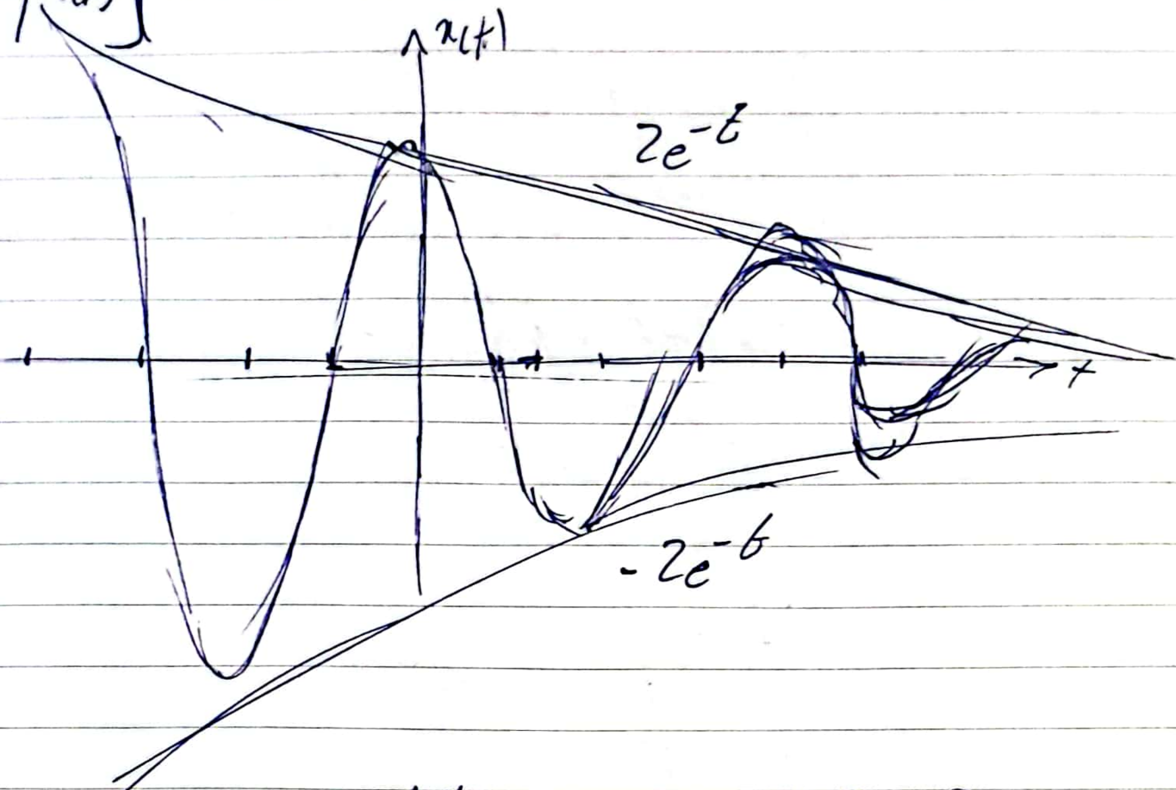
$$= 2e^{-t}(-\sin 2\pi t + j\cos 2\pi t)$$

i. $Re\{x(t)\} = -2e^{-t}\sin 2\pi t$

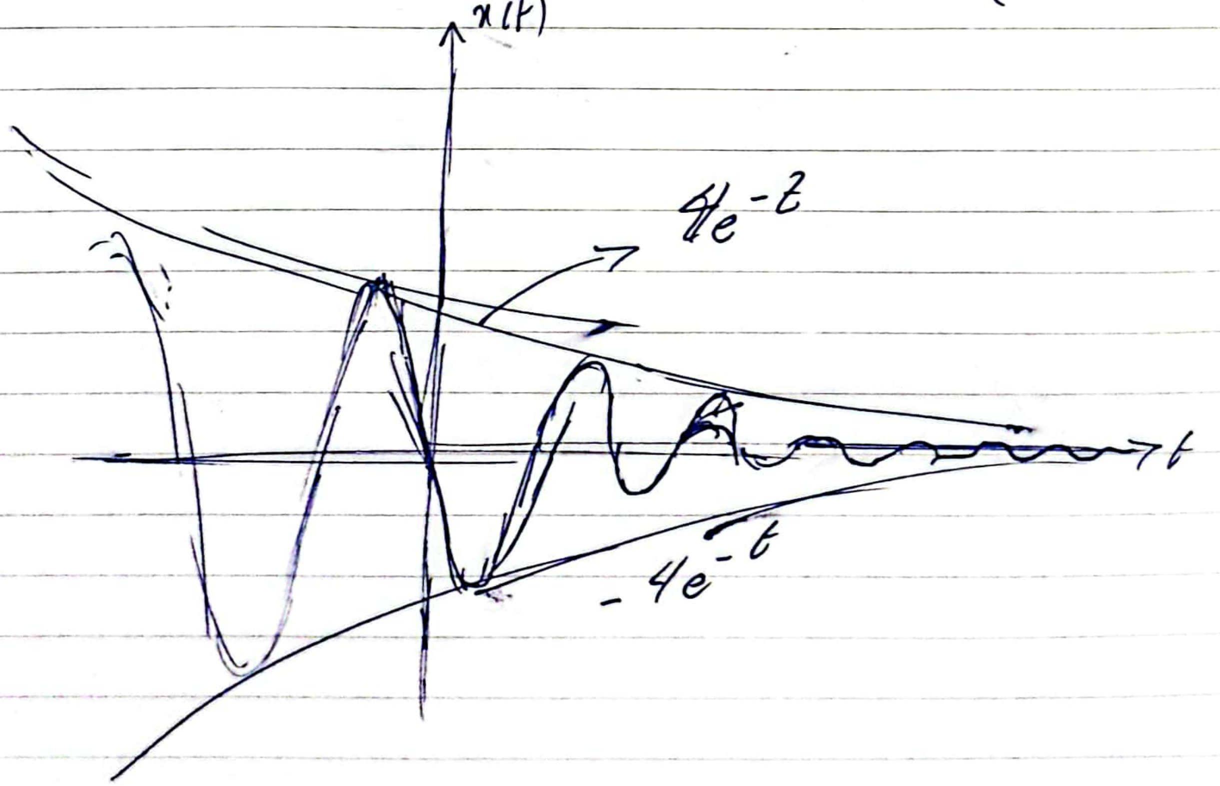


DATE / / SUBJECT :

ii. $Im\{x(t)\} = 2e^{-t}\cos 2\pi t$



iii. $x(t+2) + x^*(t+2) = 2\times Re\{x(t)\}$



DATE / / SUBJECT :

سوال ۷

آ)

دو سیگنال متناوب روبرو را در نظر بگیرید

$$x(t) = A_1 \sin\left(\frac{2\pi}{T_1} t + \phi_1\right)$$

$$y(t) = A_2 \sin\left(\frac{2\pi}{T_2} t + \phi_2\right)$$

$$x(t) + y(t) = A_1 \sin\left(\frac{2\pi}{T_1} t + \phi_1\right) + A_2 \sin\left(\frac{2\pi}{T_2} t + \phi_2\right)$$

اگر بخواهیم سیگنال ، متناوب شود. باید در یک تناوب $x(t)$ و $y(t)$ هر کدام به اندازه α و β تناوب داشته باشند یعنی به صورت کلی داریم که

$$\alpha T_1 = \beta T_2 \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \alpha/\beta$$

در نتیجه نسبت T_1 و T_2 ، باید مقداری گویا شود که در این شرایط $x(t)+y(t)$ مقداری متناوب باشد. دوره تناوب پایه را نیز می‌توان با کوچکترین مضرب مشترک پیدا کرد. به صورتی که $T = \mathrm{lcm}(T_1, T_2)$

ب)

همانند دلیلی که در قسمت آ) آوردیم. می‌توان این سیگنال را تنها در شرایطی که $\frac{N_1}{N_2}$ گویا شود، متناوب گرفت و

$$N = \mathrm{lcm}(N_1, N_2)$$

iman NOTEBOOK

ج)

$$x(t) = \cos\frac{2\pi}{3}t + 2\sin\frac{16\pi t}{3} =$$

$$= \frac{e^{\frac{2\pi}{3}tj} + e^{-\frac{2\pi}{3}tj}}{2\cancel{j}} + \frac{e^{\frac{16\pi t}{3}j} - e^{-\frac{16\pi t}{3}j}}{j}$$

$$y(t) = \sin \pi t = \frac{1}{2}\left\{\frac{e^{\pi t j} - e^{-\pi t j}}{j}\right\}$$

$$z(t) = x(t)\,y(t) =$$

$$= \frac{1}{2j}\left\{\frac{1}{2\cancel{j}}\left(e^{\frac{5\pi}{3}tj} - e^{\frac{\pi}{3}tj} + e^{-\frac{\pi}{3}tj} - e^{-\frac{5\pi}{3}t}\right) + \frac{1}{j}\left(e^{\frac{19\pi t}{3}j} - e^{\frac{13\pi t}{3}j} - e^{-\frac{13\pi t}{3}j} + e^{-\frac{19\pi t}{3}j}\right)\right\}$$

$$= -\frac{1}{2}e^{\frac{19\pi t}{3}j} + \frac{1}{2}e^{\frac{13\pi t}{3}j} + \frac{1}{2}e^{-\frac{13\pi t}{3}j} - \frac{1}{2}e^{-\frac{19\pi t}{3}j} +$$

$$+ \frac{1}{4j}e^{\frac{5\pi t}{3}j} + \frac{1}{4j}e^{-\frac{\pi t}{3}j} - \frac{1}{4j}e^{\frac{\pi}{3}tj} - \frac{1}{4j}e^{-\frac{5\pi}{3}tj}$$

با توجه به اینکه توانستیم سیگنال $z(t)$ را به صورت

$$\sum_k C_k e^{jk\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}$$

بنویسیم (هر یک از جملاتی که بدست آوردیم، فاز آنها ضریبی از $\frac{\pi t}{3}$ است) در نتیجه طبق نتایج قسمت قبل می‌توان گفت که

$z(t)$ یک تابع نوسانی پریودیک است و $T = \frac{2\pi}{\pi/3} = 6s$