



# سیگنال ها و سیستم ها

بهار ۱۴۰۲

استاد: مینا سادات محمودی

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی کامپیوتر

گردآورندگان: امیرحسین مباحثی، پارسا شریفی، زینب جعفریان، سینا رشیدی

مهلت ارسال: ۲۷ اسفند

مباحث تمرین: سیستم های خطی تغییرناپذیر با زمان

تمرین دوم

- مهلت ارسال پاسخ تا ساعت ۲۳:۵۹ روز مشخص شده است.
- هم فکری شما در انجام تمرین مانعی ندارد اما پاسخ ارسالی هر کس حتماً باید توسط خود او خلق و نوشته شده باشد.
- در صورت هم فکری و یا استفاده از هر منابع خارج درسی، نام هم فکران و آدرس منابع مورد استفاده برای حل سوال مورد نظر را ذکر کنید.
- لطفا تصویری واضح از پاسخ سوالات نظری بارگذاری کنید. در غیر این صورت پاسخ شما تصحیح نخواهد شد.
- تمام پاسخ های خود را در یک فایل با فرمت HW#\_[SID]\_[Fullname].pdf روی کوئرا قرار دهید.

## سوالات نظری (۱۰۰ نمره)

### ۱. علیت و پایداری (۱۸ نمره)

پایداری و علیت سیستم های خطی تغییرناپذیر با زمان زیر را مشخص کنید.

$$h[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n+2] \quad (\text{آ})$$

$$h[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n-3] \quad (\text{ب})$$

$$h[n] = \left(\frac{1}{n}\right) u[n-1] \quad (\text{ج})$$

$$h[n] = 10^n u[4-n] \quad (\text{د})$$

$$h(t) = e^{-t} u(2-t) \quad (\text{ه})$$

$$h(t) = e^{-3|t|} \quad (\text{و})$$

### ۲. محاسبه کانولوشن (۱۵ نمره)

کانولوشن زوج سیگنال های زیر را حساب کنید.

$$x_2[n] = u[n], x_1[n] = u[n-1] - u[n] \quad (\text{آ})$$

$$x_2[n] = u[n+2], x_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{(n-2)} u[n-2] \quad (\text{ب})$$

$$x_2[n] = 3^n u[-n-1], x_1[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \quad (\text{ج})$$

$$x_2(t) = \sin t, x_1(t) = e^{-t} \quad (\text{د})$$

$$x_2(t) = u(t-2) - u(t+2), x_1(t) = e^{-|t|} \quad (\text{ه})$$

### ۳. خواص کانولوشن (۸ نمره)

گزاره های زیر را اثبات کنید.

$$f(t) * g(t) = g(t) * f(t) \quad (\text{آ})$$

$$(f(t) * g(t)) * h(t) = f(t) * (g(t) * h(t)) \quad (\text{ب})$$

۴. **پایداری سیستم** (۲۰ نمره) در درس دیدیم که جمع پذیری مطلق تابع پاسخ ضربه شرط کافی برای پایداری سیستم است. با ذکر یک مثال نشان دهید این شرط لازم نیز است. به عبارت دیگر، نشان دهید که برای همه سیستم‌هایی که پاسخ ضربه شان مطلقاً جمع پذیر نیست، یک سیگنال ورودی کران‌دار وجود دارد که خروجی را بی کران کند.

۵. **معادلات دیفرانسیل** (۱۲ نمره)

معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x(t) = 0, x(0) = 2, x'(0) = 0 \quad (\text{آ})$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x(t) = 0, x(0) = 0, x'(0) = 2 \quad (\text{ب})$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x(t) = 0, x(0) = 1, x'(0) = -1 \quad (\text{ج})$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x(t) = 0, x(0) = 0, x'(0) = 0 \quad (\text{د})$$

۶. **شرط سکون اولیه** (۱۰ نمره)

سیستم گسسته زمان زیر را در نظر بگیرید.

$$y[n] = \frac{y[n-1]}{2} + x[n]$$

(آ) نشان دهید در صورت برقراری شرط سکون اولیه، سیستم خطی و تغییرناپذیر با زمان است.

(ب) نشان دهید در صورتی که سیستم شرط سکون اولیه را ارضا نکند اما شرط کمکی  $y[0] = 0$  برای آن برقرار باشد، انگاه سیستم علی نیست

۷. **معادله تفاضل سیستم گسسته زمان** (۱۷ نمره)

سیستم گسسته زمان با معادله تفاضل زیر را در نظر بگیرید.

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n]$$

همچنین فرض کنید:

$$x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

خروجی سیستم را می توان به صورت جمع یک جواب خصوصی و یک جواب همگن که در رابطه زیر صدق کند در نظر گرفت:

$$y_h[n] - \frac{1}{2}y_h[n-1] = 0$$

(آ) تایید کنید که جواب همگن به فرم  $y_h[n] = A\left(\frac{1}{2}\right)^n$  است.

(ب) حال می خواهیم جواب همگن را پیدا کنیم. یعنی معادله مورد توجه ما خواهد بود:

$$y_p[n] - \frac{1}{2}y_p[n-1] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

با این فرض که جواب خصوصی برای  $n$  های نامنفی به فرم  $B\left(\frac{1}{3}\right)^n$  است و جایگذاری در معادله مقدار  $B$  را بیابید.

(ج) با استفاده از نتایج قسمت قبل و در نظر گرفتن شرط سکون اولیه، پاسخ کامل معادله را پیدا کنید.