DATE / / 400109843 SUBJECT: پویا لی

سوال ①:

آ)

1.آ) $x_1[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} u[-n-1]$

$x_{11}[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \rightarrow X_{11}(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} \quad |z| > \frac{1}{3}$

$x_{12}[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} u[-n-1] \rightarrow X_{12}(z) = -\frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}z^{-1}} \quad |z| < \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$

ROC: $|z| < \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \cap |z| > \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} < |z| < 2$

$X_1(z) = X_{11}(z) + X_{12}(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} - \frac{1}{1-2z^{-1}} = \cancel{-\frac{1}{6} \times \frac{1}{(1-\frac{1}{}}}$

$\hookrightarrow X_1(z) = -\frac{1}{6} \times \frac{1}{(1-2z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})}$

2.آ) $x_2[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$

$x_{21}[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \rightarrow X_{21}(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \quad |z| > \frac{1}{2}$

$x_{22}[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \rightarrow X_{22}(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} \quad |z| > \frac{1}{4}$

ROC: $|z| > \frac{1}{2} \cap |z| > \frac{1}{4} \rightarrow |z| > \frac{1}{2}$

$X_2(z) = X_{21}(z) + X_{22}(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$

DATE / /

SUBJECT

3.T)

ج

1.→) $X_1(z) = \dfrac{1+3z^{-1}}{1+3z^{-1}+2z^{-2}}$ ROC: $|z|>2$

$$X_1(z) = \frac{1+3z^{-1}}{(1+2z^{-1})(1+z^{-1})} = \frac{-1}{1+2z^{-1}} + \frac{2}{1+z^{-1}} =$$

$$= -\frac{1}{1-(-2)z^{-1}} + \frac{2}{1-(-1)z^{-1}} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow x_1[n] = -(-2)^n u[n] + 2(-1)^n u[n]$$

2.→) $X_2(z) = \dfrac{1-2z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-2}} = \dfrac{1-2z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+\frac{1}{2}z^{-1})} =$

$$= -\frac{3}{2}\times\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{5}{2}\times\frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} \quad \text{ROC: } |z|>2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2[n] = -\frac{3}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{5}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

3.→) $X_3(z) = \dfrac{z^{-1}-\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})^2} = 3\times\dfrac{\frac{1}{2}z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})^2} - \frac{1}{2}\times\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$

ROC: $|z| < \frac{1}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_3[n] = -n\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]$$

4. →

$$X_1(s) = \frac{s^2+5s+7}{s^2+3s+2} = 1+\frac{2s+5}{(s^2+3s+2)},$$

$$= 1+\frac{2s+5}{(s+1)(s+2)} = 1+\frac{3}{s+1}-\frac{1}{s+2}$$

$$-2 < Re\{s\} < -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1(t) = \delta(t) - e^{-2t}u(t) - 3e^{-t}u(-t)$$

DATE / / SUBJECT :

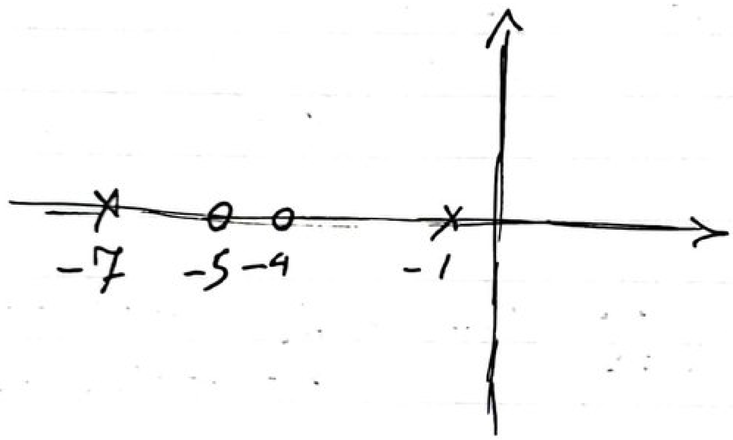
سؤال 2 (T

$$H(s) = -\frac{1}{s+7} + \frac{s+3}{s+1} = \frac{s^2+10s+21-s-1}{(s+1)(s+7)},$$

$$= \frac{s^2+9s+20}{(s+1)(s+7)} = \frac{(s+4)(s+5)}{(s+1)(s+7)}$$

zeros → $s=-4$ $s=-5$

poles → $s=-1$. $s=-7$



ب)

$$H(s) = -\frac{1}{s+7} + 1 + \frac{2}{s+1} \rightsquigarrow \cancel{h(t) = -e^{-7t}}$$

$\hookrightarrow h(t) = (2e^{-t} - e^{-7t})u(t) + \delta(t)$

$\hookrightarrow$ Response to impulse

$$H(s) = \frac{s^2+9s+20}{s^2+8s+7} = \frac{Y(s)}{X(s)} \Rightarrow$$

$\cancel{\text{Dif Eq} : \frac{d^2}{dt^2}(y(t)) + 8\frac{d}{dt}(y(t)) +}$

Dif Eq :

$$\frac{d^2}{dt^2}(y_{(t)}) + 8\frac{d}{dt}(y_{(t)}) + 7y_{(t)} = \frac{d^2}{dt^2}(x_{(t)}) + 9\frac{d}{dt}(x_{(t)}) + 20x_{(t)}$$

(ج

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau)\,d\tau + \int_{0}^{+\infty} (2e^{-t} - e^{-7t})\,dt =$$

$$= 1 + 2 - \frac{1}{7} = \frac{20}{7} < +\infty \checkmark$$

این سیستم، یک سیستم پایدار است.

(د

$$LTI \rightarrow h(0^+) = \lim_{s\to\infty} sH(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{s(s+4)(s+5)}{(s+1)(s+7)} = +\infty$$

$$LTI \rightarrow H(\infty) = \lim_{s\to 0} sH(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s(s+4)(s+5)}{(s+1)(s+7)} = 0$$

DATE / SUBJECT

(T : 3) سوال

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}$$

$$C_{xx}[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, x[n+k] \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{z-transform}: \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, x[n+k] \right) z^{-n} \right\} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left\{ x[k] \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(x[n+k] z^{-n} \right) \right\} =$$

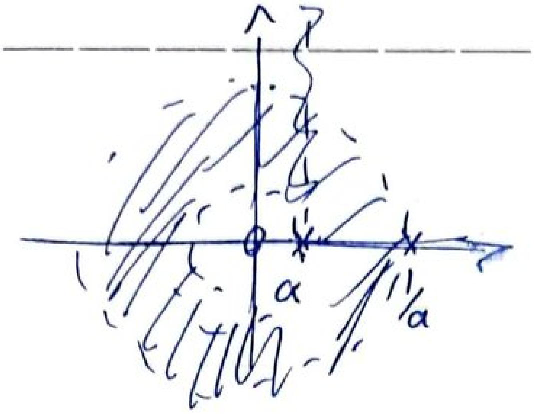
$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] z^{k} \times X(z) = X(z) \times X(1/z)$$

$$x[n] = a^{n} u[n] \;,\; |a| < 1 \rightsquigarrow X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} \quad |z| \cancel{>} |a|$$

$$X(z^{-1}) = \frac{1}{1-az} \Rightarrow \cancel{Z(C_{xx}[n]) = \frac{z/a}{(z-a)(\frac{1}{a}-z)}}$$

$$Z(C_{xx}[n]) = \frac{z/a}{(z-a)(\frac{1}{a}-z)}$$

zeros: 0 poles: $z = a$, $z = 1/a$



$$C_{xx}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,x[n+k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^{k} u[k]\, a^{n+k} u[n+k] =$$

$$\cancel{= \sum_{k=-\infty}^{+\infty}} \quad n \geq 0: \sum_{k=0}^{+\infty} a^{k} \cancel{u[k]}\, a^{n+k} =$$

$$= a^{n} \times \sum_{k=0}^{+\infty} a^{2k} = \frac{a^{n}}{1-a^{2}}$$

$$n < 0: \sum_{k=-n}^{+\infty} a^{k} \times a^{n+k} = a^{n} \sum_{k=-n}^{+\infty} a^{2k} = \frac{a^{-2n} \times a^{n}}{1-a^{2}}$$

$$= \frac{a^{-n}}{1-a^{2}}$$

$$C_{xx}[n] = \frac{a^{n}}{1-a^{2}} u[n] + \frac{a^{-n}}{1-a^{2}} u[-n-1]$$

سوال ۴ :

ت)

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} - 6y(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{5dx(t)}{dt} + 6x(t)$$

با استفاده از تبدیل لاپلاس داریم که :

$$(s^2+s-6)Y(s) = (s^2+5s+6)X(s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{(s+3)(s+2)}{(s+3)(s-2)} = \frac{s+2}{s-2} \qquad s \neq -3$$

$$\Rightarrow H(s) = 1 + \frac{4}{s-2}$$

~~با توجه به اینکه ROC~~

$\cancel{H(s)}$

با توجه به اینکه ROC می‌تواند هر دو مقدار

$|s|<2$ و $|s|>2$ ~~s/t~~ را در بر داشته باشد.

نمی‌توانیم ~~در باره~~ بگوییم این سیستم وارون پذیر است.

DATE / / SUBJECT

ب)

$$y[n-2]+2y[n-1]-3y[n] = 4x[n-1]+4x[n] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z^{-2}Y(z)+2z^{-1}Y(z)-3Y(z) = 4z^{-1}X(z)+4X(z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H(z) = Y(z)/X(z) = \frac{4(1+z^{-1})}{z^{-2}+2z^{-1}-3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{4+4z^{-1}}{(z^{-1}+3)(z^{-1}-1)} = \frac{2}{3}\times\frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}} + 2\times\frac{1}{1-z^{-1}}$$

این سیستم دو قطب یکی در $z=1$ و دیگری در $z=-\frac{1}{3}$ دارد.

اگر سیستم پایدار باشد: $ROC: \frac{1}{3} < |z| < 1$

در نتیجه

$$h[n] = \frac{2}{3}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] + 2u[-n-1]$$

پایدار و بدون

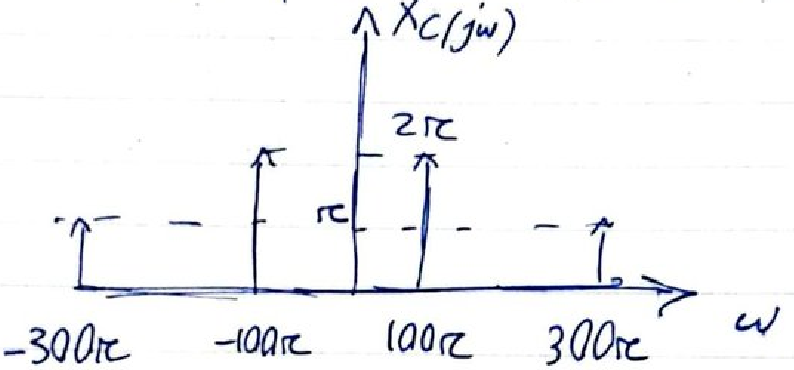
اگر سیستم علّی باشد. $ROC: |z| > 1$

$$h[n] = \frac{2}{3}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] - 2\times u[n]$$

سوال (5) :

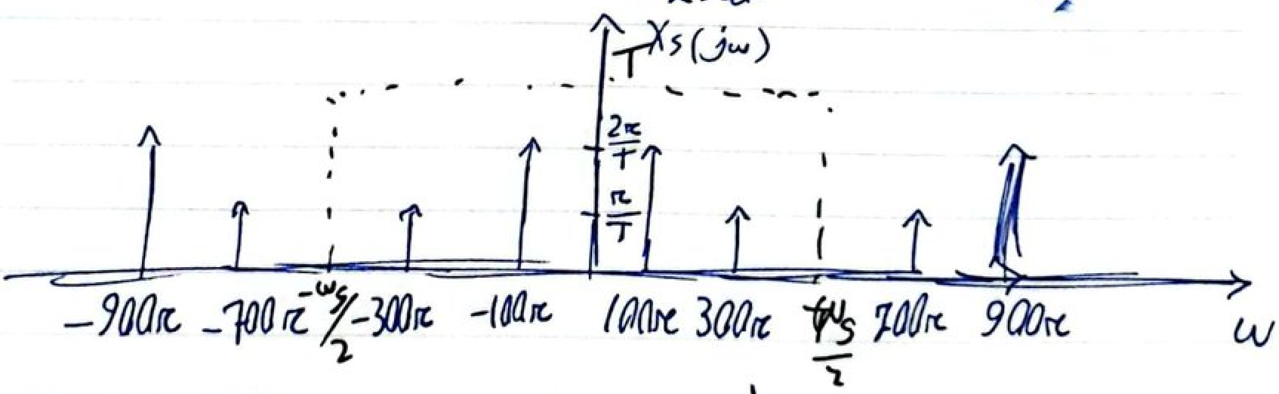
$$x_c(t) = 2\cos(100\pi t) + \cos(300\pi t) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow X_C(j\omega) = 2\pi\big(\delta(\omega-100\pi) + \delta(\omega+100\pi)\big)$$
$$+\pi\big(\delta(\omega-300\pi) + \delta(\omega+300\pi)\big)$$



$$f_s = \frac{1}{T} = 500\ \frac{\text{sample}}{\text{sec}} \rightsquigarrow \omega_s = \frac{2\pi}{T} = 1000\pi\ \frac{\text{sample}}{\text{sec}}$$

$$\omega_s > 2\times 300\pi \Rightarrow X_s(j\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\big(j(\omega - k\omega_s)\big)$$

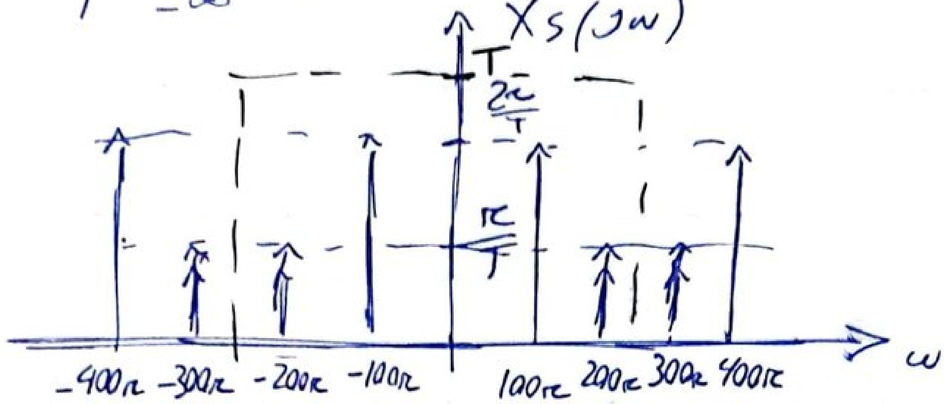


$$X_r(j\omega) = 2\pi\big(\delta(\omega-100\pi) + \delta(\omega+100\pi)\big)$$
$$+\pi\big(\delta(\omega-300\pi) + \delta(\omega+300\pi)\big)$$

$$x_r(t) = 2\cos(100\pi t) + \cos(300\pi t)$$

~~ω_s~~ $f_s = \frac{1}{T} = 250$ $\quad \omega_s = \frac{2\pi}{T} = 500\pi$ (2

$$X_s(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{-\infty}^{+\infty} X(j(\omega - k\omega_s))$$



$$X_r(j\omega) = 2\pi\left(\delta(\omega - 100\pi) + \delta(\omega + 100\pi)\right) + \pi\left(\delta(\omega - 200\pi) + \delta(\omega + 200\pi)\right)$$

$$x_r(t) = 2\cos(100\pi t) + \cos(200\pi t)$$

DATE / /　　　　　SUBJECT :

سؤال ⑥ :

آ)

$$X(z) = \frac{(1+2z^{-1})}{(1-0{,}2z^{-1})(1+0{,}6z^{-1})} =$$

$$= (1+2z^{-1})(1-0{,}2z^{-1})^{-1}(1+0{,}6z^{-1})^{-1} =$$

$$\simeq (1+2z^{-1})(1+0{,}2z^{-1}+0{,}04z^{-2})(1+0{,}6z^{-1}+0{,}36z^{-2}) \simeq$$

$$\simeq 1+1{,}6z^{-1}+(2\times0{,}2-2\times0{,}6-0{,}6\times0{,}2+0{,}04+0{,}36)z^{-2}$$

$$= 1+1{,}6z^{-1}-0{,}52z^{-2} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow x[0]=1 \;,\; x[1]=1{,}6 \quad x[2]=-0{,}52$$

ب)

$$X(z) = \frac{11}{4}\times\frac{1}{1-0{,}2z^{-1}} - \frac{7}{4}\times\frac{1}{1+0{,}6z^{-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x[n] = \frac{11}{4}\times\left(\frac{2}{10}\right)^n u[n] - \frac{7}{4}\times\left(-\frac{6}{10}\right)^n u[n]$$

$$x[0] = \frac{11}{4}-\frac{7}{4} = 1$$

$$x[1] = \frac{11}{4}\times\frac{2}{10}+\frac{7}{4}\times\frac{6}{10} = \frac{1}{10}\left(\frac{11}{2}+\frac{21}{2}\right) = 1{,}6$$

$$x[2] = \frac{11}{4}\times\frac{4}{100}-\frac{7}{4}\times\frac{36}{100} = \frac{1}{100}\times(11-63) = -0{,}52$$

سوال ⑦ :

آ)

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

$$\Rightarrow X(e^{j\omega}) = X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}$$

ب)

Convergence: $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| < \infty$

طبعاً طبق رابطه داده شده $\alpha > 0$ است.

$$x[n]k^n \xrightarrow{z\text{-transform}} \frac{1}{1-\alpha k z^{-1}} \quad ROC: |z| < \alpha k$$

$z = 1 \rightarrow$ شرط همگرایی می‌شود

در نتیجه $1 < \alpha k \Longrightarrow 1/\alpha < k$

ج) علّی بودن و پایدار بودن

DATE / / SUBJECT :

سوال 8 :

طبق ویژگی د) داریم که سیستم یک صفر در بی نهایت داشته باشد.

در نتیجه باید $\boxed{\text{درجه مخرج } 2 \text{ درجه صورت}}$ باشد.

در نتیجه سیستم ب) و ج) رد می شوند.

طبق ویژگی ب)

پاسخ سیستم به ورودی $x(t) = e^{-t}u(t)$ مطلقاً انتگرال پذیر است.

باید $s=-1$ در ROC باشد.

در نتیجه سیستم الف) رد می شود.

طبق ویژگی الف)

پاسخ پله را $g(t)$ در نظر می گیریم

$$G(s) = \frac{1}{s} \times H(s)$$

$$g(+\infty) = \lim_{s \to 0} sG(s) = \lim_{s \to 0} H(s)$$

که برای تمامی سیستم ها درست است.

طبق ویژگی ج)

$h''(t) + 5h'(t) + 6h(t) \rightarrow$ محدود است.

تبدیل لاپلاس $\Rightarrow (s^2+5s+6)H(s) = (s+2)(s+3)H(s)$

و همچنین ROC با ROC $H(s)$ یکسان است.

سیستم الف) $\rightsquigarrow (s+2)(s+3)H(s) = s+1 \rightarrow$ قطبی ندارد

در نتیجه سیگنال محدود است.

سیستم ه) $\rightarrow (s+2)(s+3)H(s) = \frac{-2(s-1)(s+3)}{(s+6)}$

در نتیجه این سیگنال محدود نمی‌باشد.

در نهایت

$$H(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)} \quad ROC: -2 < Re\{s\}$$ سیستم د)

تمامی ویژگی ها را دارد.