به نام خدا

سیگنال‌ها و سیستم‌ها

بهار ۱۴۰۲

استاد: مینا سادات محمودی

گردآورندگان: علیرضا جعفری، علی گرکانی

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

تمرین پنجم | مباحث تمرین: تبدیل فوریه زمان گسسته | مهلت ارسال: ۶ خرداد

- مهلت ارسال پاسخ تا ساعت ۲۳:۵۹ روز مشخص‌شده است.
- هم‌فکری شما در انجام تمرین مانعی ندارد اما پاسخ ارسالی هر کس حتماً باید توسط خود او **خلق** و **نوشته** شده باشد.
- در صورت هم‌فکری و یا استفاده از هر منابع خارج درسی، نام هم‌فکران و آدرس منابع مورد استفاده برای حل سوال مورد نظر را ذکر کنید.
- لطفا تصویری واضح از پاسخ سوالات نظری بارگذاری کنید. در غیر این صورت پاسخ شما تصحیح نخواهد شد.
- تمام پاسخ‌های خود را در یک فایل با فرمت HW#_[SID]_[Fullname].pdf روی کوئرا قرار دهید.

سوالات نظری (۱۰۰ نمره)

۱. **تبدیل فوریه گسسته و عکس آن** (۳۶ نمره)

تبدیل فوریه سیگنال‌های گسسته در زمان زیر را حساب کنید.

(آ)

$$x[n] = \frac{1}{5}^{-n} u[-n-1]$$

(ب)

$$x[n] = u[n+2] - u[n-3]$$

(ج)

$$x[n] = 2\delta[4-2n]$$

(د)

$$x[n] = \sin(\frac{5\pi n}{3}) + \cos(\frac{7\pi n}{3})$$

(ه)

$$x[n] = \begin{cases} 0.5 + 0.5\cos(\frac{\pi}{N}n) & |n| \leq N \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(و)

$$x[n] = [\frac{\sin(\frac{\pi}{4}n)}{\pi n}] * [\frac{\sin(\frac{\pi}{4}(n-8))}{\pi(n-8)}]$$

عکس تبدیل فوریه سیگنال‌های زیر را حساب کنید.

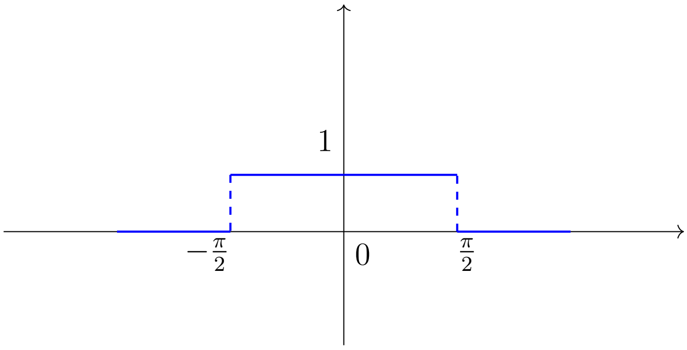
(آ)

$$X(e^{j\omega}) = \cos^2(\omega) + \sin^2(3\omega)$$

(ب)

$$X(e^{j\omega}) = e^{\frac{j\omega}{2}}, \quad for\ \pi \geq \omega \geq -\pi$$

(ج) شکلی سیگنالی در حوزه‌ی فرکانس به صورت زیر است. (طبیعی است که شکل با دوره تناوب 2π متناوب است)



(د)

$$X(e^{j\omega}) = \cos(2\omega) + j\sin(2\omega)$$

(ه)

$$X(e^{j\omega}) = \cos(\omega) + j\cos(\frac{\omega}{2})$$

(و)

$$|X(e^{j\omega})| = \begin{cases} 1 & \pi/4 < |\omega| < 3\pi/4 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$argX(e^{j\omega}) = -4\omega$$

۲. **تجزیه به مقادیر جزئی** (۸ نمره)

با استفاده از بسط تجزیه به مقادیر جزئی، DTFT معکوس سیگنال های زیر را بدست آورید.

(آ)

$$X(e^{j\omega}) = \frac{2e^{-j\omega}}{-0.25e^{-j2\omega} + 1}$$

(ب)

$$X(e^{j\omega}) = \frac{6 - 2e^{-j\omega} + 0.5e^{-j2\omega}}{(-0.25e^{-j2\omega} + 1)(1 - 0.25e^{-j\omega})}$$

۳. **DTFT سیگنال نامتعارف** (۸ نمره)

سیگنال $x[n]$ دارای تبدیل فوریه $X(e^{jw})$ است. اگر $y[n] = x\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$ باشد. تبدیل فوریه $y[n]$ را بیابید. (منظور از $\lfloor u\rfloor$، بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی u است.)

۴. **فاز تبدیل** (۸ نمره)

یک فیلتر FIR با پاسخ ضربه $h[n]$ و تابع تبدیل $H(\omega) = |H(\omega)|e^{j\theta(\omega)}$ مفروض است. می‌دانیم $h[n]$ سیگنالی حقیقی بوده و در بازه $n < 0$ و $n \geq N$ برابر با صفر است. اگر $h[n] = h[N-1-n]$ باشد. آن‌گاه فاز تبدیل این فیلتر که به صورت زیر است را بر حسب a ، b و c بدست آورید.

$$\theta(\omega) = (aN + b)\omega + c$$

۵. **معادله تفاضلی** (۱۲ نمره)

(آ) یک سیستم LTI زمان گسسته علی با معادله‌ی تفاضلی زیر توصیف می‌شود.

$$y[n] + \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] - x[n-1]$$

به ازای ورودی $x[n]$ توان متوسط خروجی این سیستم، $y[n]$ را حساب کنید.

$$x[n] = \begin{cases} 3 & \text{if } \text{ n is even} \\ 2 & \text{if } \text{ n is odd} \end{cases}$$

(ب) معادله‌ی تفاضلی مربوط به پاسخ فرکانسی زیر را بدست آورید.

$$X(e^{j\omega}) = 1 + \frac{e^{-j\omega}}{(1-0.5e^{-j\omega}+1)(1+0.25e^{-j\omega})}$$

(ج) معادله‌ی تفاضلی مربوط به پاسخ ضربه‌ی زیر را بدست آورید.

$$h[n] = \delta[n] + 2(0.5)^2 u[n] + (-0.5)^n u[n]$$

۶. **اثبات خواص** (۱۶ نمره)

خواص DTFT زیر را اثبات کنید.

(آ) خاصیت شیفت زمانی

(ب) خاصیت کانولوشن

(ج) خاصیت ضرب

(د) خاصیت Expansion Time

۷. **محاسبه‌ی مقدار لحظه‌ای هر دنباله بازگشتی خطی با ضرایب ثابت** (۱۲ نمره)

دنباله‌ی زیر را در نظر بگیرید.

$$1, \frac{3}{4}, \frac{7}{16}, \frac{15}{64}, ..$$

فرض کنید این دنباله خروجی یک سیستم LTI و علی با ورودی ضربه واحد است.

(آ) معادلات تفاضلی خطی سیستم به صورت زیر و بر حسب پارامتری از a و b می‌باشد. پارامتر های a و b را بیابید.

$$y[n] - ay[n-1] + by[n-2] = x[n]$$

(ب) جمله‌ی عمومی دنباله را بدست آورید.(منظور از جمله‌ی عمومی فرمولی است که بتوان عنصر n ام را بر حسب n و بدون نیاز به جملات قبلی بدست آورد)

تنها راه رسیدن به موفقیت، زحمت و تلاش بی‌وقفه است