DATE / / 400109843 SUBJECT : پویا آب

سوال ۱)

الف)

$$x(t)\begin{cases}1, & -\pi<t<0\\ 0, & 0<t<\pi\end{cases}, \quad T=2\pi \quad \omega_0=\frac{2\pi}{T}=1$$

$$a_k=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-j\omega_0kt}dt=\frac{1}{T}\int_{-\pi}^{0}e^{-j\omega_0kt}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}e^{-jkt}dt$$

$$\Rightarrow a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}dt=\frac{\pi}{2\pi}=\frac{1}{2}$$

$$a_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}e^{-jkt}dt=\frac{1}{2\pi}\times\frac{1}{jk}\left(e^{-jk\pi}-1\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi jk}\Big(\cos(k\pi)-j\underbrace{\sin(k\pi)}_{\to 0}-1\Big)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_k=\frac{1}{2\pi jk}\left(\cos(k\pi)-1\right)=\frac{1}{2\pi jk}\left((-1)^k-1\right)$$

ب)

$$x(t)\begin{cases}0, & -\pi<t<0\\ t, & 0<t<\pi\end{cases}, \quad T=2\pi \Rightarrow \omega_0=1$$

$$a_k=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-j\omega_0kt}dt=\frac{1}{T}\int_0^{\pi}te^{-j\omega_0kt}dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}te^{-jkt}dt$$

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}t\,dt=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{t^2}{2}\right)_0^{\pi}=\frac{\pi}{4}$$

$$a_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}t\,e^{-jkt}dt=\frac{1}{2\pi}\times\frac{1}{(-jk)}\int_{t=0}^{\pi}t\,d(e^{-jkt})$$

$$= -\frac{1}{2\pi j k_x}\left(t e^{-jk_x t}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^{-jk_x t}\, dt \right) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi j k_x}\left(\pi e^{-jk_x \pi} + \frac{1}{jk_x} e^{-jk_x t}\Big|_{t=0}^{\pi} \right) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi j k}\left(\pi \cos(k\pi) + \frac{1}{jk}\cos(k\pi) \right) =$$

$$= \frac{1}{2jk}(-1)^{k+1} + \frac{(-1)^k}{2\pi k^2} = \frac{(-1)^k}{2k}\left(\frac{1}{\pi k} - \frac{1}{j}\right)$$

$$\boxed{a_0 = \frac{\pi}{4}, \quad a_k = \frac{(-1)^k}{2k}\left(\frac{1}{\pi k} + j\right)}$$

ج) طبق شکل داریم: $\omega_0 = \pi/3 \Leftarrow T = 6$

$$x(t)\begin{cases} 1 & -2 < x < -1 \\ -1 & 1 < x < 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \rightsquigarrow T = 6 \rightsquigarrow \omega_0 = \pi/3$$

بازه‌ی تناوب را 3 تا 3- در نظر می‌گیریم

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-3}^{3} x(t)\, dt = 0$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-3}^{3} x(t) e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T}\left\{\int_{-2}^{-1} e^{-jk\omega_0 t}\, dt - \int_{1}^{2} e^{-jk\omega_0 t}\, dt\right\}$$

$$= \frac{1}{T}\times\frac{1}{jk\omega_0}\left\{ e^{2jk\omega_0} - e^{jk\omega_0} - e^{-2jk\omega_0} + e^{-jk\omega_0} \right\}$$

$$= \frac{1}{T} \times \frac{1}{jk\omega_0} \left\{ 2j \sin(2k\omega_0) - 2j \sin(k\omega_0) \right\} =$$

$$\boxed{a_k = \frac{1}{\pi k} \left\{ \sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{k\pi}{3}\right) \right\} \quad , a_0 = 0}$$

(ج)

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left\{ \delta(t-kT) - 2\delta(t-1-kT) \right\} \quad , T = 2 \Rightarrow \omega_0 = \pi$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-1/2}^{3/2} \left\{ \delta(t) - 2\delta(t-1) \right\} e^{-jk\omega_0 t} dt =$$

$$= \frac{1}{T} \left\{ \int_{-1/2}^{3/2} \delta(t) e^{-jk\omega_0 t} dt - 2 \int_{-1/2}^{3/2} \delta(t-1) e^{-jk\omega_0 t} dt \right\} =$$

$$= \frac{1}{T} \left\{ 1 - 2e^{-jk\omega_0} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ 1 - 2e^{-jk\pi} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ 1 - 2(\cos(k\pi) - j\sin(k\pi)) \right\} =$$

$$= \boxed{\frac{1}{2} \left\{ 1 - 2(-1)^k \right\} = a_k}$$

سوال 2) ت)

دوره تناوب $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$

$$x_1(t) \circledast x_2(t) = \int_{T} x_1(\tau)\, x_2(t-\tau)\, d\tau = \int_{-T/2}^{T/2} x_1(\tau)\, x_2(t-\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_{-T_1}^{T_1} x_1(\tau)\, x_2(t-\tau)\, d\tau$$

$$x_1(t) = x_2(t) = \begin{cases} A & -T_1 < t < T_1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

و $T = T$ پس دوره تناوب

لازم به ذکر است که جواب $x_1(t) \circledast x_2(t)$ نیز متناوب با دامنه نوسان T هستند.

$i.\ 2T_1 = \frac{T}{4}$

سیگنال ها را در بازه $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ بررسی می کنیم.

~~با توجه به اینکه $x(\tau)$ تنها در بازه $[-T_1, T_1]$ غیر صفر است جواب سیگنال را در بازه بررسی می کنیم.~~

$t < -2T_1 \rightarrow x_2(t-\tau)\, x_1(\tau) = 0$

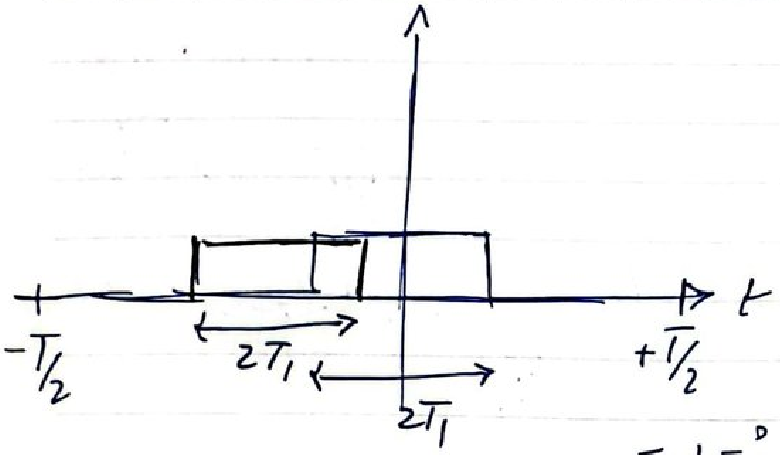
دو تابع با هم برهم نهی ندارند پس

$t > 2T_1$ پس $x_2(t-\tau)\, x_2(\tau) = 0$

$-2T_1 < t < 2T_1$ پس $\int_{-T_1}^{T_1} x_1(\tau)\, x_2(t-\tau)\, d\tau = \cancel{A^2\left(1 - \left|\frac{t}{2T_1}\right|\right) T_1}$

$= 2A^2 T_1 \left(1 - \left|\frac{t}{2T_1}\right|\right)$

DATE / / SUBJECT :



با توجه به اینکه مربع

در زمان $t=-2T_1$

$t=-T/4$

می‌شود و از $-T/2$ بیشتر است.

در بازه‌ی $t<-2T_1$ و $t>2T_1$ جواب برابر صفر است.

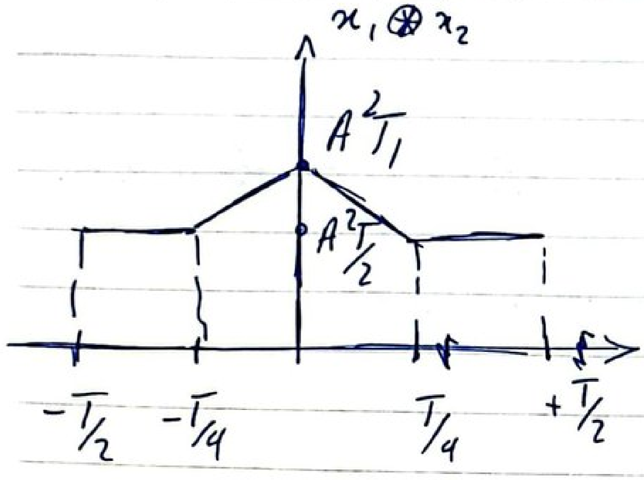
نکته: $2T_1 = \frac{3T}{4}$

در این سؤال $-2T_1$ و $+2T_1$ در بازه‌ی مورد بررسی برای جواب نیست زیرا $2T_1 > T/2$ است در نتیجه $\int_{-T_1}^{+T_1} x_1(\tau)\, x_2(t-\tau)\, d\tau$ به ازای همه‌ی t ها بزرگتر از صفر است

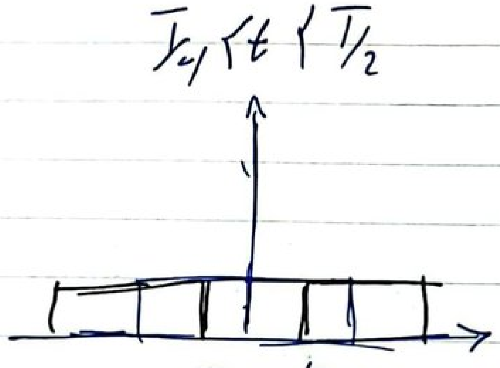
با توجه به اینکه $2T_1$ برابر با $3T/4$ است، فاصله‌ی هر دو مربع در $x_1(\tau)$ با $x_2(t-\tau)$ برابر با $T/4$ است در نتیجه در دو بازه‌ی $[T/4, T/2]$ و $[-T/2, -T/4]$ $\int_{-T_1}^{+T_1} x_1(\tau)\, x_2(t-\tau)\, d\tau$ همواره جواب برابر با $A^2 T/2$ (شکل ②) است و در بازه‌ی $[-T/4, +T/4]$ این مقدار

از $A^2 T/2$ به $2A^2 T_1$ می‌رسد و دوباره به $A^2 T/2$ می‌رسد

به صورت شکل ②:



شکل ②



شکل ①

در نهایت جواب این بخش به صورت زیر است:

i. $$\begin{cases} 0 & -T/2 < t < -T/4 \\ \frac{A^2 T}{4}\left(1-\left|\frac{4t}{2T}\right|\right) & -T/4 < t < T/4 \\ 0 & T/4 < t < T/2 \end{cases}$$

دامنه تناوب و $T = \bar{T}$ جدید

ii. $$\begin{cases} A^2 T/2 & -T/2 < t < -T/4 \\ \frac{A^2 T}{2} + \frac{A^2 T}{4}\left(1-\left|\frac{4t}{T}\right|\right) & -T/4 < t < T/4 \\ A^2 T/2 & T/4 < t < T/2 \end{cases}$$

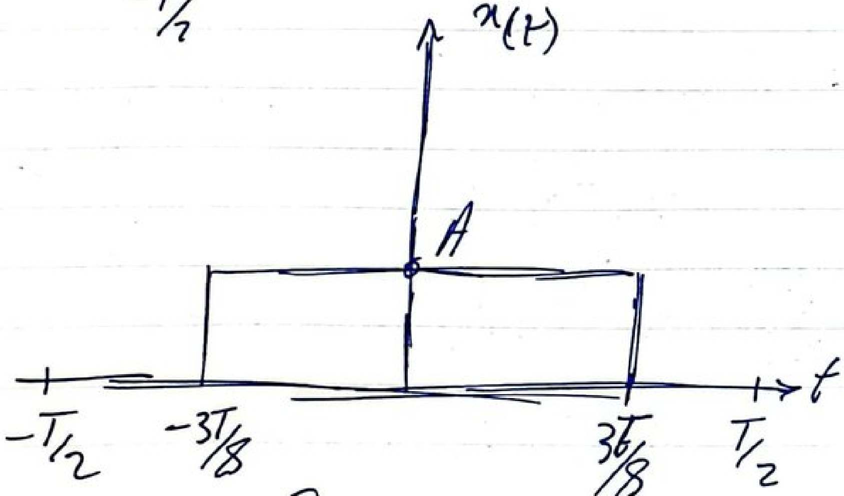
دامنه تناوب و $T = \bar{T}$ جدید

ج)

با توجه به شکل $\hat{x}_1(t)$ و $\hat{x}_2(t)$ داریم

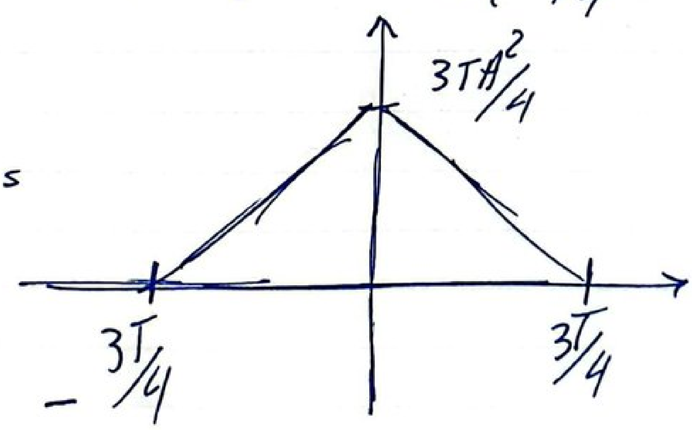
$$\hat{y}(t) = \hat{x}_1(t) * \hat{x}_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}_1(\tau)\,\hat{x}_2(t-\tau)\,d\tau =$$

$$= \int_{-T/2}^{+T/2} x_1(t)\,\hat{x}_2(t-\tau)\,d\tau$$



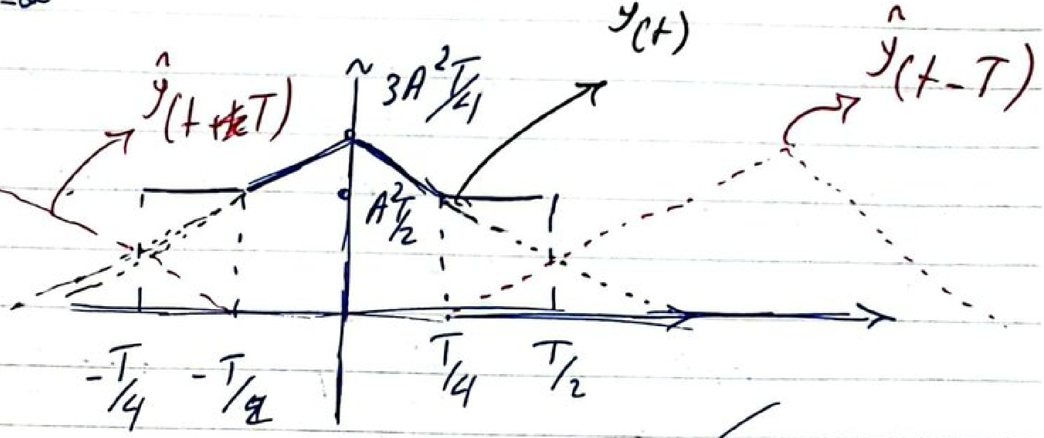
$$\hat{y}(t) = \begin{cases} 0 & t < -3T/4 \\ \frac{3TA^2}{4}\left(1 - \left|\frac{4t}{3}\right|\right) & -3T/4 < t < 3T/4 \\ 0 & t > 3T/4 \end{cases}$$

$\hat{y}(t) =$



DATE / / SUBJECT :

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{y}(t-kT)$$



به همان معادلی که در قسمت الف) رسیده بودیم، رسیدیم.

ج)

$$x_1(t) * \hat{x}_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}_2(\tau)\, x_1(t-\tau)\, d\tau = \int_{-T/2}^{+T/2} x_2(\tau)\, x_1(t-\tau)\, d\tau$$

$$x_1(t) \circledast x_2(t) = \int_{-T/2}^{T/2} x_2(\tau)\, x_1(t-\tau)\, d\tau \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1(t) \circledast x_2(t) = x_1(t) * \hat{x}_2(t)$$

DATE / / SUBJECT :

سوال 3)

$x(t) = 1-|t| \quad , -2 < t < 2 \Rightarrow T_0 = 4 \Rightarrow \omega_0 = \pi/2$

$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\,dt = \frac{1}{4}\left\{\int_{-2}^{0}(1+t)\,dt + \int_{0}^{2}(1-t)\,dt\right\} =$

$= \frac{1}{4}\left\{\left(t+\frac{t^2}{2}\right)\Big|_{-2}^{0} + \left(t-\frac{t^2}{2}\right)\Big|_{0}^{2}\right\} = \frac{1}{4}\left\{+2-\frac{4}{2}+2-\frac{4}{2}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_0 = 0$

$a_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{4}\left\{\int_{-2}^{0}(1+t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt + \int_{0}^{2}(1-t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt\right\}$

$= \frac{1}{4}\left\{\int_{-2}^{2}e^{-jk\omega_0 t}\,dt + \int_{-2}^{0}te^{-jk\omega_0 t}\,dt - \int_{0}^{2}te^{-jk\omega_0 t}\,dt\right\}$

$\int_{a}^{b}e^{-jk\omega_0 t}\,dt = -\frac{1}{jk\omega_0}e^{-jk\omega_0 t}\Big|_{a}^{b}$

$\int_{a}^{b}te^{-jk\omega_0 t}\,dt = -\frac{1}{jk\omega_0}\int_{a}^{b}t\,d\left(e^{-jk\omega_0 t}\right) =$

$= -\frac{1}{jk\omega_0}\left\{te^{-jk\omega_0 t}\Big|_{a}^{b} - \int_{a}^{b}e^{-jk\omega_0 t}\,dt\right\} =$

DATE / / SUBJECT :

$$= -\frac{1}{jk\omega_0}\left\{ te^{-jk\omega_0 t}\Big|_a^b + \frac{1}{jk\omega_0} e^{-jk\omega_0 t}\Big|_a^b \right\} =$$

$$= -\frac{te^{-jk\omega_0 t}}{jk\omega_0}\Big|_a^b + \frac{1}{k^2\omega_0^2} e^{-jk\omega_0 t}\Big|_a^b \Rightarrow$$

$$a_k = \frac{1}{4}\left\{ -\frac{1}{jk\omega_0}\left(e^{-2jk\omega_0} - e^{2jk\omega_0}\right) + \right.$$

$$\left. -\frac{1}{jk\omega_0} \times 2e^{2jk\omega_0} + \frac{(1-e^{-2jk\omega_0})}{k^2\omega_0^2} + \frac{2e^{-2jk\omega_0}}{jk\omega_0} + \frac{(1-e^{+2jk\omega_0})}{k^2\omega_0^2} \right\}$$

$$\Rightarrow a_k = \frac{1}{4}\left\{ \frac{1}{jk\omega_0}\left(e^{-jk\pi} - e^{jk\pi}\right) + \frac{1}{k^2\omega_0^2}\left(2 - e^{-jk\pi} - e^{jk\pi}\right) \right\}$$

$$\Rightarrow a_k = \frac{1}{4k^2\omega_0^2} \times \left(2 - 2\cos(k\pi)\right) = \frac{2}{k^2\pi^2}\left(1 - (-1)^k\right)$$

$$\Rightarrow a_0 = 0 \ , \ a_k \begin{cases} \frac{4}{k^2\pi^2} , & k \text{ ~~even~~ odd} \\ 0 , & k \text{ ~~odd~~ even} \end{cases} \rightsquigarrow a_k = a_{-k}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \pi^2/6 \ \rightsquigarrow \sum_{n\in O}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n\in E}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \pi^2/6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n\in O}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \pi^2/6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n\in O}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \pi^2/8 \ , \ \sum_{n\in E} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{24}$$

آ) $S_1 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} j^k a_k = \sum_{k=1}^{k=+\infty}\left(j^k a_k + j^{-k} a_{-k}\right) = \sum_{k=1}^{k=+\infty}\left(j^k \cancel{a_k} + j^{-k}\right) a_k =$

$\cancel{=\sum_{k=1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(j^{2n+1} + j^{-(2n+1)}\right) a_{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(j^{2n+1} - j^{2n+1}\right) a_{2n+1} \Rightarrow$

$\cancel{\Rightarrow} \Rightarrow S_1 = 0$

ب) $S_2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k a_k = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^{2n+1} a_{2n+1} = -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_{2n+1} =$

$= -2\times\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} = -2\times\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)^2\pi^2} = -2\sum_{k\in O}\frac{4}{k^2\pi^2} =$

$= \cancel{-8\times\sum_{k\in O}} \; -\frac{8}{\pi^2}\sum_{k\in O}\frac{1}{k^2} = -\frac{8}{\pi^2}\times\frac{\pi^2}{8} = -1$

ج) $\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|^2 = \sum_{k\in O} |a_k|^2 = \sum_{k\in O}\frac{16}{k^4\pi^4} = \frac{16}{\pi^4}\sum_{k\in O}\frac{1}{k^4}$

$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90} \Rightarrow \sum_{k\in O}^{+\infty}\frac{1}{k^4} + \frac{1}{16}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90} \Rightarrow \sum_{k\in O}^{+\infty}\frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{96} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|^2 = \frac{16}{\pi^4}\times\frac{\pi^4}{96} = \frac{1}{6}$

د) $S_4 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{2k+1} = 2\times\sum_{k\in O} a_k = 2\times\sum_{k\in O}\frac{4}{k^2\pi^2} =$

$= \frac{8}{\pi^2}\times\sum_{k\in O}\frac{1}{k^2} = \frac{8}{\pi^2}\times\frac{\pi^2}{8} = 1$

DATE / / SUBJECT :

سوال ۱۴ (ج)

$$\left.\begin{array}{l} x^*(t) \xrightarrow{F.S} a^*_{-k} \\ x(-t) \xrightarrow{F.S} a_{-k} \end{array}\right\} \Rightarrow x^*(-t) \xrightarrow{F.S.} a^*_k$$

$$x(t) = C(t) + jd(t) \Rightarrow x^*(t) = C(t) - jd(t)$$

$$2\mathcal{Im}\{a_k\} = \frac{a_k - a^*_k}{j}$$

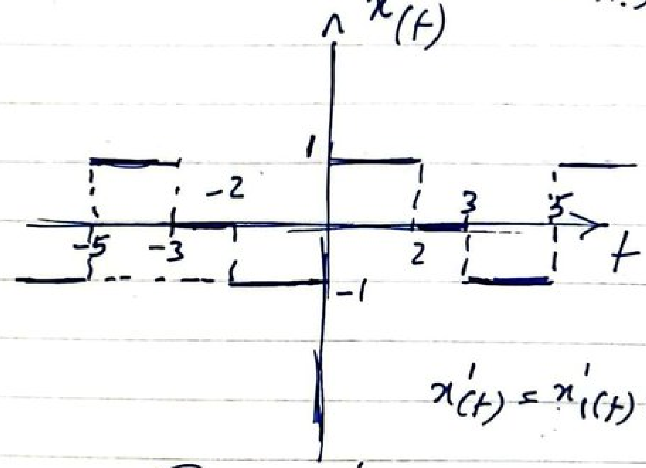
$$y(t) \xrightarrow{F.S.} 2\mathcal{Im}\{a_k\} = \frac{a_k - a^*_k}{j} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{j}\left(x(t) - x^*(-t)\right)$$

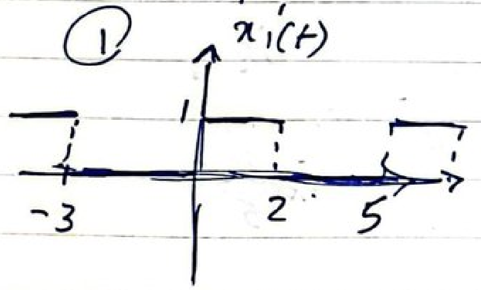
DATE / / SUBJECT :

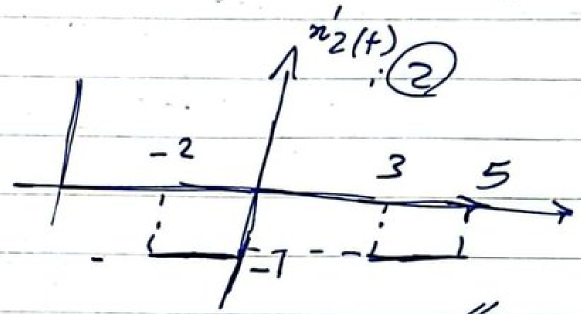
سوال 5)

برای مشتق این تابع به صورت روبرو است :



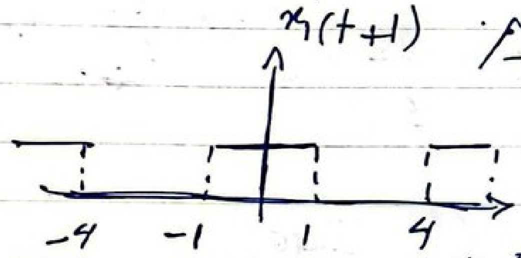
که می توانیم این تابع را به صورت جمع دو سیگنال مربعی که در پایین آمده است در نظر بگیریم: $x'(t) = x_1'(t) + x_2'(t)$





ابتدا سیگنال ① را مورد بررسی قرار می دهیم.

با شیفت دادن تابع به شکل روبرو می رسیم:



$\to T = 5,\ T_1 = 1 \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{5}$

$\xrightarrow{F.S.} d = \frac{2T_1}{T} = \frac{2}{5} \Rightarrow$

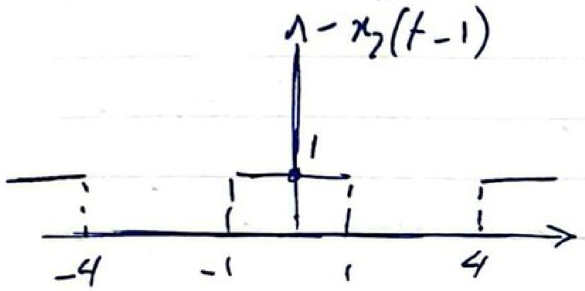
$\Rightarrow x_1'(t+1) \xrightarrow{F.S.} 1 \times \frac{2}{5} \times Sinc\left(\frac{2k}{5}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1'(t) \xrightarrow{F.S.} \frac{2}{5} Sinc\left(\frac{2k}{5}\right) \times e^{-jk\omega_0} =$

$= \frac{2}{5} Sinc\left(\frac{2k}{5}\right) \times e^{-jk \times \frac{2\pi}{5}}$

حال سیگنال 2 را مورد بررسی قرار می دهیم:

با شیفت دادن و اسکیل کردن تابع به تابع زیر می رسیم:



$T_2 = 5$ و $T_1 = 1 \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{5}$

$d = \frac{2}{5}$

$$-x'_2(t-1) \xrightarrow{F.S.} \frac{2}{5} \times \operatorname{sinc}\left(\frac{2k}{5}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x'_2(t) \xrightarrow{F.S.} -\frac{2}{5} \operatorname{sinc}\left(\frac{2k}{5}\right) e^{jk\omega_0}$$

$$= -\frac{2}{5} \operatorname{sinc}\left(\frac{2k}{5}\right) e^{j \times \frac{2k\pi}{5}}$$

$$x'(t) = x'_1(t) + x'_2(t) \xrightarrow{F.S.} \frac{2}{5} \operatorname{sinc}\left(\frac{2k}{5}\right)\left(e^{-j \times \frac{2k\pi}{5}} - e^{j \times \frac{2k\pi}{5}}\right)$$

$$= \frac{2}{5} \operatorname{sinc}\left(\frac{2k}{5}\right) \times \left(-2\cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right)\right)$$

$$= -\frac{2}{5} \times \frac{\sin\left(\frac{4k\pi}{5}\right)}{\frac{2k\pi}{5}} = -\frac{\sin\left(\frac{4k\pi}{5}\right)}{k\pi}$$

با استفاده از قانون مشتق داریم که

$$x(t) \xrightarrow{F.S.} \frac{1}{jk\omega_0} \times -\frac{\sin\left(\frac{4k\pi}{5}\right)}{k\pi}$$

DATE / / SUBJECT :

$$\Rightarrow x(t) \xrightarrow{F.S.} j \times \frac{5}{2} \times \frac{\sin\left(\frac{4k\pi}{5}\right)}{k^2\pi^2}$$

برای a_0 نیز از مشتق نمی‌توانیم استفاده کنیم و باید

به صورت مستقیم از خود تابع انتگرال بگیریم، زیرا مقدار ثابت

شیفت دادن در $x(t)$، هنگام مشتق گرفتن از بین می‌رود.

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_T h(t)\,dt = \frac{1}{5} \times 4 = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow a_0 = \frac{4}{5} \qquad a_k = \frac{5j}{2} \times \frac{\sin\left(\frac{4k\pi}{5}\right)}{k^2\pi^2}$$