



سیگنال‌ها و سیستم‌ها

بهار ۱۴۰۲

استاد: مینا سادات محمودی

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی کامپیوتر

گردآورندگان: پوریا عارفی جمال، نرگس عرفان، محمدحسین موثقی نیا

مهلت ارسال: ۱۸ اردیبهشت

مباحث تمرین: تبدیل فوریه پیوسته در زمان

تمرین چهارم

- مهلت ارسال پاسخ تا ساعت ۲۳:۵۹ روز مشخص شده است.
- لطفاً تصویری واضح از پاسخ سوالات نظری بارگذاری کنید. در غیر این صورت پاسخ شما تصحیح نخواهد شد.
- تمام پاسخ‌های خود را در یک فایل با فرمت HW#_[SID]_[Fullname].pdf روی کوئرا قرار دهید.
- راه حل مسائل دو روز پس از بارگذاری این تکلیف و در تاریخ ۱۴ اردیبهشت ارائه خواهد شد. توجه کنید که تحویل این تکلیف اجباری است ولی بارم آن نصف تکالیف دیگر است.
- لطفاً از این تکلیف برای یادگیری بهتر درس و آمادگی برای امتحان میان‌ترم در روز پنج‌شنبه ۲۱ اردیبهشت و همین‌طور از کلاس‌های حل تمرین برای رفع اشکال استفاده کنید.

سوالات نظری (۱۰۰ نمره)

۱. تبدیل فوریه و عکس تبدیل فوریه (۲۰ نمره)

(آ) تبدیل فوریه توابع زیر را بیابید.

$$x(t) = [te^{-3t} \sin(4t)]u(t) \quad \text{i.}$$

$$x(t) = [e^{-at} \cos(w_0 t)]u(t), a > 0 \quad \text{ii.}$$

$$x(t) = e^{-3t}[u(t+2) - u(t-3)] \quad \text{iii.}$$

$$x(t) = \frac{e^{2jt}}{2\pi} \text{sinc}(3t) \quad \text{iv.}$$

(ب) تبدیل معکوس فوریه را برای توابع زیر بیابید.

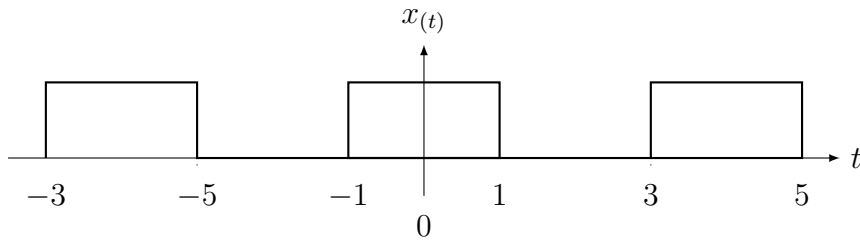
$$X(jw) = 3\delta(w-1) + j2\delta(w-2) + 3\delta(w+1) - j2\delta(w+2) \quad \text{i.}$$

$$X(jw) = \frac{\sin \frac{w}{2}}{jw+2} e^{-2jw} \quad \text{ii.}$$

$$X(jw) = \frac{9+3jw}{(2+jw)(4+jw)} \quad \text{iii.}$$

توجه: در این سوال از رابطه‌ی اصلی تبدیل فوریه و انتگرال‌گیری مستقیم استفاده نکنید.

۲. پاسخ خروجی بر حسب ورودی متناوب (۱۸ نمره)



با در نظر گرفتن شکل فوق به موارد زیر پاسخ دهید.

(آ) ابتدا توجه کنید سیستمی LTI داریم با پاسخ ضربه زیر

$$h(t) = \frac{\sin \frac{3\pi}{4}t}{\pi t}$$

ورودی این سیستم پنجره مستطیلی متناوب شکل بالا است. می‌خواهیم خروجی $y(t)$ این سیگنال را بدست آوریم.

برای این هدف ابتدا در این قسمت یک دوره تناوب پنجره مستطیلی را در نظر گرفته و تبدیل فوریه آن را بدست آورید. (پیشنهاد این است برای راحتی پنجره حول ۰ را در نظر بگیرید.) حاصل را $\hat{X}(j\omega)$ بنامید.

(ب) در ادامه می‌خواهیم تبدیل فوریه سیگنال x را بدست آوریم. نتیجه قسمت قبل را نگه دارید، حال بیاید و سیگنال $x(t)$ را به صورت جمع تناوب‌های آن از منفی بینهایت تا مثبت بی‌نهایت بنویسید. (احتمالاً جواب به صورت یک سیگما خواهد بود.)

(ج) در این قسمت می‌خواهیم از سیگما قسمت قبل تبدیل فوریه بگیریم. برای این منظور می‌دانیم که تبدیل فوریه کانولوشن در حوزه فرکانس معادل ضرب است. از این نکته استفاده کنید و تبدیل فوریه سیگنال x را محاسبه کنید. آن را $X(j\omega)$ می‌نامیم.

(د) پاسخ فرکانسی $h(t)$ یا همان تابع تبدیل را بدست آورید و مشخص کنید کدامیک از ضربه‌های ورودی قادرند از این سیستم عبور کنند.

(ه) حال $y(t)$ را بدست آورید.

۳. قضیه دوگانی یا همزادی (۱۲ نمره)

تبدیل فوریه سیگنال زیر را در نقطه $w = \frac{\pi}{4}$ بدست آورید. (جواب را تا ۳ رقم اعشار گرد کنید.)

$$x(t) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+t^2}$$

۴. روابط تبدیل فوریه (۱۵ نمره)
اگر سیگنال $x(t)$ به فرم

$$x(t) = \begin{cases} 3, & -1 \leq t \leq 0, 4 \leq t \leq 5 \\ |t - 2| + 1, & 0 \leq t \leq 4 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (۱)$$

باشد و $X(j\omega)$ تبدیل فوریه آن باشد مقادیر خواسته شده را بدست آورید.

(آ) $X(0)$

(ب) $\angle X(j\omega)$

(ج) $\int_{-\infty}^{\infty} X^2(j\omega) d\omega$

(د) $\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$

(ه) $\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{2j\omega} d\omega$

(و) سیگنال $x(t)$ باید چه شرایطی داشته باشد تا حاصل قسمت (ج) و (د) برابر باشد؟

۵. پیدا کردن سیگنال (۱۰ نمره)

گزاره های زیر درمورد سیگنال $x(t)$ با تبدیل فوریه $X(j\omega)$ می دانیم.

(آ) $x(t)$ حقیقی است.

(ب) $x(t) = 0, \quad t \leq 0$

(ج) $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Re } X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = |t| e^{-|t|}$

عبارت بسته $x(t)$ را بدست آورید.

۶. سیستم علی LTI (۱۲ نمره)

یک سیستم علی LTI با خروجی $y(t)$ و ورودی $x(t)$ به صورت زیر تعریف می شود.

$$\frac{dy(t)}{dt} + 20y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) z(t - \tau) d\tau - x(t)$$

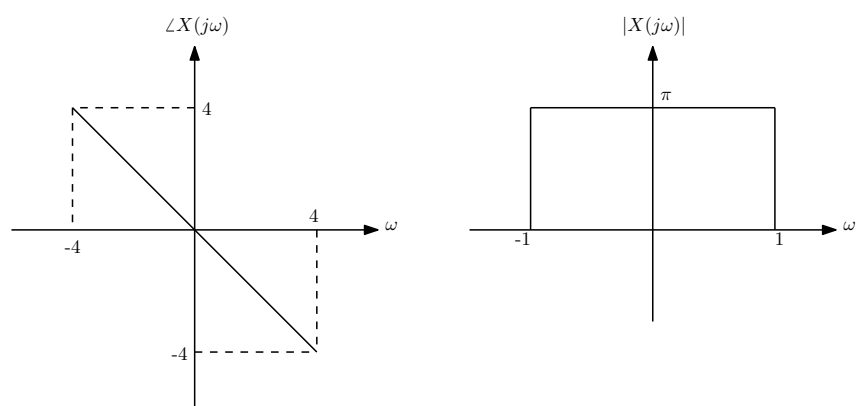
و $z(t) = e^t u(t) + 2\delta(t)$

(آ) پاسخ فرکانسی $H(j\omega) = \frac{X(j\omega)}{Y(j\omega)}$ سیستم را بدست آورید.

(ب) پاسخ ضربه سیستم را بدست آورید.

۷. فاز تبدیل فوریه (۱۳ نمره)

در صورتی که اندازه و فاز تبدیل فوریه سیگنال $x(t)$ به شکل زیر باشد.



فاز تبدیل فوریه $y(t) = |x(t)|^2$ را به دست آورید.