



Московский государственный университет имени  
М.В.Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики  
Кафедра вычислительных технологий и моделирования

Поворознюк Александра Павловна

**Метод объемных интегральных уравнений в задаче  
электромагнитного рассеяния на диэлектрическом теле**

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА**

**Научный руководитель:**

д.ф-м.н., профессор  
А.В.Сетуха

Москва  
2024

# Содержание

<b>Введение</b>	<b>5</b>
<b>1. Постановка задачи</b>	<b>6</b>
<b>2. Сведение к интегральным уравнениям</b>	<b>7</b>
<b>3. Численная схема для метода коллокаций</b>	<b>9</b>
3.1. Дискретизация области . . . . .	9
3.2. Дискретизация системы . . . . .	9
3.3. Составление СЛАУ . . . . .	10
<b>4. Численная схема для метод Галёркина</b>	<b>11</b>
4.1. Дискретизация области . . . . .	11
4.2. Дискретизация системы . . . . .	11
4.3. Составление СЛАУ . . . . .	12
<b>5. Вычисление эффективной площади рассеяния</b>	<b>14</b>
<b>6. Примеры расчётов</b>	<b>15</b>
6.1. Константы . . . . .	15
6.2. Входные данные . . . . .	15
6.3. Точки коллокации и диэлектрическая проницаемость . . . . .	16
6.3.1. Обнаружение точек коллокации . . . . .	16
6.3.2. Среднее значение $\varepsilon_i$ на каждой ячейке . . . . .	16
6.4. Рассеяние на шаре методом коллокаций . . . . .	17
6.4.1. Составление и решение СЛАУ . . . . .	17
6.4.2. Расчёт ЭПР . . . . .	17
6.5. Рассеяние на шаре методом Галёркина . . . . .	18
6.5.1. Составление и решение СЛАУ . . . . .	18
6.5.2. Расчёт ЭПР . . . . .	18
6.6. Сравнение численного решения с аналитическим . . . . .	19
<b>Заключение</b>	<b>20</b>
<b>Список литературы</b>	<b>21</b>

## Введение

В работе описывается применение метода объемных интегральных уравнений (МОИУ) для моделирования рассеяния на диэлектрических объектах.

Актуальность исследования заключается в том, что данный метод применяется для расчета рассеяния ЭМ-волн на диэлектрических объектах, таких как сферы, цилиндры, плоские и вогнутые поверхности. Поэтому необходимо выделить сильные и слабые стороны метода. Но сначала опишем основные методы решения задач электродинамики.

### **Метод конечных разностей (МКР).**

МКР заключается в замене частных производных в дифференциальных операторах их приближенными значениями, выраженными через дискретные значения функции в узлах расчетной сетки. Схема строится на регулярной четырех угольной сетке. Описание вариантов этой схемы и примеры приложений можно найти в работах [2]-[3].

МКР применим для моделирования нестационарных полей. Решение задач в частотной области возможно при рассмотрении гармонической временной зависимости. Однако метод не очень удобен для расчета характеристик монохроматических полей. Необходимо проводить моделирование развития поля до установления на достаточно большом временном интервале. При этом проблема возникновения и развития паразитных волн на внешних границ расчетной области усугубляется в силу их накопления в расчетной области.

### **Метод конечного объёма (МКО).**

МКО можно рассматривать как обобщение МКР во временной области. В основе метода лежит интегрирование уравнений Максвелла, записанных в консервативной форме, по объемам, занимаемым ячейками разбиения. Узловые точки находятся в центрах ячеек. Также, как и для МКР, для каждого элемента составляется уравнение, получается система линейных уравнений. Решая ее, находятся значения искомых переменных в узловых точках.

При использовании прямоугольной сетки возникает схема, аналогичная схеме МКР, но данная схема обобщается на случай неструктурированной тетраэдральной сетки. При наличии идеально проводящих поверхностей граничное условие обычно ставится на гранях ячеек. Однако, в отличие от случая МКР, за счет использования тетраэдральной сетки возможна триангуляционная аппроксимация поверхностей, достаточно точно передающая их форму. Описание метода и примеры решенных задач можно найти в [4]-[5].

В МКО, как и в МКР, существенной проблемой является возникновение паразитных волн при отражении от внешних границ расчетной области.

### **Метод конечных элементов (МКЭ).**

Основная идея МКЭ состоит в аппроксимации неизвестных полей в рассматриваемой пространственной области линейной комбинацией конечного набора базисных функций с локальными носителями. Обычно используется разбиение (аппроксимация) расчетной области системой тетраэдров и каждая базисная функция отлична от нуля на конечном наборе этих тетраэдров. Как отмечено в [6], при решении векторных уравнений Максвелла в трехмерной области с помощью МКЭ возможно появление ложных мод при неудачном выборе сетки дискретизации, так как узловые базисные функции для каждой из трех декартовых компонент поля принципиально не обеспечивают непрерывность производных полей. Поэтому в этом случае необходимо применять векторные конечные элементы (ВКЭ) [7]. В отличие от классического узлового МКЭ базисные функции векторного МКЭ связаны не с узлами дискретизации, а с ребрами и гранями ячейки дискретизации, что обеспечивает непрерывность производных полей.

Для записи дискретных уравнений используется схема Галеркина - ортогональное проектирование на линейную оболочку тех же базисных функций. Метод широко применяется

в пространственных областях сложной формы, в том числе для комбинации идеально проводящих, кусочно-однородных и неоднородных диэлектрических объектов. Легко учитываются и другие специфические свойства материалов и граничных условий. Изложение теории и приложений метода конечных элементов для задач электродинамики можно найти в работах [8]-[9].

МКЭ может успешно применяться как для решения уравнений Максвелла во временной области, так и в частотной.

### **Метод моментов(метод интегральных уравнений)**

Метод моментов применим для задач в частотной области. Идея этого метода основана на записи интегрального выражения для электрического и магнитного полей через поверхностные токи, возникающие на границах области, в которой решается задача. Далее задача сводится к граничным интегральным уравнениям относительно поверхностных токов. В случае задачи рассеяния электромагнитных волн на идеально проводящих объектах, поверхностные токи размещаются на поверхностях этих объектов. Метод так же применим для задач рассеяния на кусочно-однородных диэлектрических телах, в том числе, в комбинации с идеально проводящими объектами. В этом случае поверхностные токи размещаются как на поверхностях идеально проводящих объектов, так и на границах раздела диэлектрических сред с различными свойствами. При этом уравнения электродинамики вне тела и граничные условия на бесконечности выполняются автоматически. Для нахождения неизвестных поверхностных токов необходимо написать интегральное уравнение, обеспечивающее выполнение краевого условия на поверхности тела, а также условия сопряжения на границах диэлектрических сред с различными свойствами.

Наиболее употребительная схема метода моментов основана на методе Галеркина с использованием конечно-элементной аппроксимации касательных векторных полей на граничных поверхностях на треугольных сетках. Один из первых вариантов метода, основанный на триангуляции поверхностей, восходит к статье [10] (метод RWG). В настоящее время существует множество вариантов метода моментов, применимого к поверхностным сеткам различных типов. Другой подход основан на кусочно-постоянной аппроксимации поверхностных токов и методе коллокаций. По сравнению с методом RWG, этот метод проще в реализации, и набор элементов матрицы системы линейных уравнений при меньших затратах времени ЭВМ. Однако, метод RWG показывает более высокую устойчивость результатов.

### **Метод объемных интегральных уравнений (МОИУ).**

МОИУ может применяться для задачи рассеяния на диэлектрических телах. В этом методе наличие диэлектрических объектов описывается размещением в этих областях объемных токов, которые создают добавочное электромагнитное поле, описывающее влияние этих объектов на суммарное поле. В результате задача рассеяния сводится к нахождению объемных токов. В случае комбинации идеально проводящих и диэлектрических объектов суммарное поле ищется как суперпозиция поверхностных токов, размещенных на идеально проводящих поверхностях, и объемных токов, размещенных в диэлектрических объектах. При этом предполагается, что эти объемные токи находятся в пространстве, имеющем свойства (диэлектрическую и магнитную проницаемости) внешней среды.

В этом методе строится объемная сетка, которая, в отличие от рассмотренных выше сеточных методов, строится только в области, занятой диэлектриками (в области, в которой значения диэлектрической и магнитной проницаемостей отличаются от соответствующих значений для окружающей среды).

Одним из преимуществ МОИУ является возможность расчёта рассеяния на сложной геометрии объектов, включая объекты с произвольными поверхностями и волноводы.

МОИУ обладает достоинствами, перечисленными для метода моментов, при этом позволяет моделировать неоднородные диэлектрики. Метод позволяет учитывать нелинейные диэлектрические свойства объектов и учитывать дисторсию поля в связи с его взаимодействием со стенками, что увеличивает точность расчёта. Однако МОИУ также имеет некоторые ограничения, такие как необходимость разбиения объекта на ячейки для расчёта интегралов на поверхности объектов, что может приводить к большому количеству вычислений при расчётах на сложных конфигурациях объектов.

В целом, МОИУ является мощным инструментом для анализа электродинамических процессов и расчёта электромагнитного рассеяния на объектах различной формы и состава. Он может использоваться для моделирования оптических и радиочастотных явлений в широком диапазоне приложений, включая радиофизику, обнаружение и идентификацию целей, фотонику, радиолокацию, медицинскую диагностику и другие.

В данной работе реализованы два численных метода решения объемного уравнения: метод коллокаций и метод Галёркина. В обоих методах для аппроксимации решения используется кусочно-постоянная функция. Были реализованы оба алгоритма и проведено их сравнение.

# 1. Постановка задачи

Пусть диэлектрическое тело занимает ограниченную область  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , границей которой является замкнутая поверхность  $\Sigma$ . Мы предполагаем, что электродинамические свойства диэлектрического тела определяются диэлектрической и магнитной проницаемостями  $\varepsilon = \varepsilon' \varepsilon_0$  и  $\mu = \mu' \mu_0$  где  $\varepsilon_0$  и  $\mu_0$  есть диэлектрическая и магнитная проницаемости окружающей среды (являются константами),  $\varepsilon' = \varepsilon'(x)$  и  $\mu' = \mu'(x)$  – относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости.

Задача рассматривается в монохроматической постановке. Напряженности электрического и магнитного полей должны удовлетворять в области  $\Omega$ , занятой диэлектриком, уравнениям Максвелла для пространственных составляющих этих полей:

$$\begin{cases} \text{rot} \vec{H}(x) = -i\omega \varepsilon \vec{E}(x) \\ \text{rot} \vec{E}(x) = i\omega \mu \vec{H}(x). \end{cases} \quad (1)$$

Будем предполагать, что неизвестное электромагнитное поле  $\vec{E}(x), \vec{H}(x)$  формируется при рассеянии заданного первичного поля  $\vec{E}_{inc}(x), \vec{H}_{inc}(x)$ . В роли этого первичного поля может выступать плоская волна, определяемая формулами:

$$\vec{E}_{inc}(x) = \vec{E}_0 e^{i\vec{k}\vec{r}}, \quad \vec{H}_{inc}(x) = \frac{e^{i\vec{k}\vec{r}}}{\omega \mu \mu_0} \vec{k} \times \vec{E}_0,$$

где волновой вектор  $\vec{k}$  – произвольный вектор, удовлетворяющий условию  $|\vec{k}| = k$ ,  $\vec{r}$  – радиус-вектор точки  $x$ , вектор поляризации плоской волны  $\vec{E}_0$  – произвольный вектор, удовлетворяющий условию  $\vec{E}_0 \vec{k} = 0$ . Либо иное поле, создаваемое некоторыми источниками излучения. В последнем случае будем предполагать, что источники излучения занимают некоторое множество  $D$ , которое отделено конечным расстоянием от области  $\Omega$ . При этом первичное поле  $\vec{E}(x), \vec{H}(x)$  определено и удовлетворяет уравнениям (1) с  $\varepsilon = \varepsilon_0$  и  $\mu = \mu_0$  всюду вне источников излучения (вне множества  $D$ ), в том числе и в области  $\Omega$ . В случае плоской волны, считаем, что  $D$  есть пустное множество.

В данной задаче мы будем трактовать поле  $\vec{E}(x), \vec{H}(x)$  как полное поле, это поле должно быть определено всюду вне источников излучения (множества  $D$ ) и при этом вне диэлектрического тела должны выполняться уравнения (1) с  $\varepsilon = \varepsilon_0$  и  $\mu = \mu_0$ .

Пусть  $\vec{E}_{sc}(x), \vec{H}_{sc}(x)$  (scattered field) есть вторичное (рассеянное) поле, определяемое всюду вне источников излучения соотношениями:

$$\begin{cases} \vec{E}_{sc}(x) = \vec{E}(x) - \vec{E}_{inc}(x) \\ \vec{H}_{sc}(x) = \vec{H}(x) - \vec{H}_{inc}(x). \end{cases} \quad (2)$$

При этом предполагается, что вторичное поле  $\vec{E}_{sc}(x), \vec{H}_{sc}(x)$  может быть продолжено на множество  $D$  (т.е. это поле определено и внутри источников излучения) так, что всюду вне диэлектрического тела (вне замыкания области  $\Omega$ ) это поле удовлетворяет уравнениям (1) с  $\varepsilon = \varepsilon_0$  и  $\mu = \mu_0$ . При этом вторичные поля  $\vec{E}_{sc}(x), \vec{H}_{sc}(x)$  должны удовлетворять условиям излучения на бесконечности. На поверхности диэлектрика  $\Sigma$  полные поля  $\vec{E}(x), \vec{H}(x)$  должны иметь краевые значения, одинаковые с обеих сторон поверхности.

## 2. Сведение к интегральным уравнениям

Задача может быть сведена к объемным интегральным уравнениям путём представления уравнений (1) в виде:

$$\begin{cases} \text{rot} \vec{H}(x) = -i\omega\varepsilon_0 \vec{E}(x) + \vec{J}_E(x) \\ \text{rot} \vec{E}(x) = i\omega\mu_0 \vec{H}(x) - \vec{J}_M(x), \end{cases} \quad (3)$$

где  $\vec{J}_E(x)$  и  $\vec{J}_M(x)$  - объемные электрические и магнитные токи соответственно, такие что:

$$\begin{cases} \vec{J}_E(x) = -i\omega(\varepsilon' - 1)\varepsilon_0 \vec{E}(x) \\ \vec{J}_M(x) = -i\omega(\mu' - 1)\mu_0 \vec{H}(x). \end{cases} \quad (4)$$

При этом вне диэлектрического тела (вне области  $\Omega$ ) эти функции равны 0, то есть  $\varepsilon' - 1 = \mu' - 1 = 0$ . Поэтому, доопределив функции нулем в области  $D$ , можно считать, что эти функции определены во всем пространстве. В задаче рассеяния полное поле ищется в виде (2). Поскольку первичное поле  $\vec{E}_{inc}(x), \vec{H}_{inc}(x)$  определено в области  $\Omega$  и удовлетворяет уравнениям:

$$\begin{cases} \text{rot} \vec{H}_{inc}(x) = -i\omega\varepsilon_0 \vec{E}_{inc}(x) \\ \text{rot} \vec{E}_{inc}(x) = i\omega\mu_0 \vec{H}_{inc}(x), \end{cases}$$

соотношения (3) можно переписать в виде:

$$\begin{cases} \text{rot} \vec{H}_{sc}(x) = -i\omega\varepsilon_0 \vec{E}_{sc}(x) + \vec{J}_E(x) \\ \text{rot} \vec{E}_{sc}(x) = i\omega\mu_0 \vec{H}_{sc}(x) - \vec{J}_M(x), \end{cases} \quad (5)$$

где токи  $\vec{J}_E(x)$  и  $\vec{J}_M(x)$  выражаются в виде (4) через полное электрическое и магнитное поля. При этом рассеянное поле  $\vec{E}_{sc}(x), \vec{H}_{sc}(x)$  должно быть определено и непрерывно во всем пространстве, удовлетворять уравнениям (5) в области  $\Omega$  и в области  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$  (с  $\vec{J}_E(x) = 0$  и  $\vec{J}_M(x) = 0$  при  $x \in \setminus \bar{\Omega}$ ) и удовлетворять условию излучения на бесконечности. Это вторичное поле связано с токами  $\vec{J}_E(x)$  и  $\vec{J}_M(x)$  интегральными соотношениями:

$$\begin{aligned} \vec{E}(x) &= \frac{i}{\omega\varepsilon_0} \left\{ \text{grad div} \int_{\Omega} \vec{J}_E(y) F(x-y) dy + k^2 \int_{\Omega} \vec{J}_E(y) F(x-y) dy \right\} - \\ &\quad - \text{rot} \int_{\Omega} \vec{J}_M(y) F(x-y) dy, \\ \vec{H}(x) &= \frac{i}{\omega\mu_0} \left\{ \text{grad div} \int_{\Omega} \vec{J}_M(y) F(x-y) dy + k^2 \int_{\Omega} \vec{J}_M(y) F(x-y) dy \right\} + \\ &\quad + \text{rot} \int_{\Omega} \vec{J}_E(y) F(x-y) dy. \end{aligned}$$

Тогда соотношения (2), выполненные в области  $\Omega$ , можно записать в виде объемных интегральных уравнений относительно неизвестных функций  $\vec{E}(x), \vec{H}(x)$ , определенных в области  $\Omega$  (т.е уравнения рассматриваются только при  $x \in \Omega$ ):

$$\begin{aligned}\vec{E}(x) = & \vec{E}_{inc}(x) + i\omega\mu_0 rot \int_{\Omega} (\mu'(y) - 1) \vec{H}(y) F(x-y) dy + \\ & + grad div \int_{\Omega} (\varepsilon'(y) - 1) \vec{E}(y) F(x-y) dy + k^2 \int_{\Omega} (\varepsilon'(y) - 1) \vec{E}(y) F(x-y) dy,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{H}(x) = & \vec{H}_{inc}(x) - i\omega\varepsilon_0 rot \int_{\Omega} (\varepsilon'(y) - 1) \vec{E}(y) F(x-y) dy + \\ & + grad div \int_{\Omega} (\mu'(y) - 1) \vec{H}(y) F(x-y) dy + k^2 \int_{\Omega} (\mu'(y) - 1) \vec{H}(y) F(x-y) dy.\end{aligned}$$

Будем рассматривать случай, когда  $\mu' = 1$ , тогда уравнения примут вид:

$$\begin{aligned}\vec{E}(x) = & \vec{E}_{inc}(x) + grad div \int_{\Omega} (\varepsilon'(y) - 1) \vec{E}(y) F(x-y) dy + k^2 \int_{\Omega} (\varepsilon'(y) - 1) \vec{E}(y) F(x-y) dy, \\ \vec{H}(x) = & \vec{H}_{inc}(x) - i\omega\varepsilon_0 rot \int_{\Omega} (\varepsilon'(y) - 1) \vec{E}(y) F(x-y) dy.\end{aligned}$$

Обозначим через  $K$  следующий оператор:

$$K[D, \vec{j}](x) = grad div \int_D \vec{j}(y) \Phi(x-y) dy + k^2 \int_D \vec{j}(y) \Phi(x-y) dy,$$

где  $k = \sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$  - волновое число, соответствующее внешней среде,  $\Phi(x-y) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r}$ ,  $r = |x-y|$ ,  $D$  - некоторое множество,  $\vec{j}(y)$  - векторное поле, заданное на множестве  $D$ . В случае, когда  $D$  есть область  $\Omega$ , интеграл понимается как объемный. Тогда полное электрическое поле может быть представлено в виде:

$$\vec{E}(x) = \vec{E}_{inc}(x) + K[\Omega, (\varepsilon' - 1)\vec{E}](x). \quad (6)$$

Будем рассматривать определенное в области  $\Omega$  векторное поле  $\vec{g}(x) = \vec{E}(x)$  как неизвестное векторное поле. Тогда соотношение (6) можно записать в виде интегрального уравнения:

$$\vec{g}(x) = K[\Omega, (\varepsilon' - 1)\vec{g}](x) + \vec{E}_{inc}(x), \quad x \in \Omega \quad (7)$$

Далее будет описываться численное решение этого интегрального уравнения методом коллокаций и методом Галёркина.



### 3. Численная схема для метода коллокаций

#### 3.1. Дискретизация области

Будем рассматривать случай задачи рассеяния на неоднородном диэлектрическом теле. Для решения уравнения (7) в первую очередь необходимо дискретизировать объемную область. Для этого поместим диэлектрический объект внутрь некоторого параллелепипеда  $\Omega'$  и будем считать, что диэлектрическая область есть  $\Omega'$ .

Будем решать уравнение для области  $\Omega'$  и поверхности  $\Sigma$ , доопределив  $\varepsilon' = 1$  в области  $\Omega'$  вне области  $\Omega$ .

Для численного решения задачи осуществим разбиение области  $\Omega'$  на кубические ячейки  $\sigma_{v,i}$  и пусть  $v$  - объем каждой такой ячейки  $x_{v,i}$ ,  $i = 1, \dots, N_v$  - число ячеек объемной сетки.

#### 3.2. Дискретизация системы

На каждой ячейке объемной сетки  $\sigma_{v,i}$ ,  $i = 1, \dots, N_v$ , введем неизвестный поверхностный ток  $\vec{g}_i$ , аппроксимирующий значение тока  $\vec{g}(x)$  в точке коллокации  $x^i$ . Все неизвестные токи разложим в декартовом базисе:

$$\vec{g}_i = g_i^1 \vec{e}_1 + g_i^2 \vec{e}_2 + g_i^3 \vec{e}_3,$$

где  $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$ ,  $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$  - орты декартовой системы координат.

Представим функцию  $\vec{K}(\vec{j}, x, y) = \text{grad}_x \text{div}_x(\vec{j}\Phi(x-y)) + k^2 \vec{j}\Phi(x-y)$  в виде:

$$\begin{aligned}\vec{K}(\vec{j}, x, y) &= \vec{K}_0(\vec{j}, x, y) + \vec{K}_1(\vec{j}, x, y), \\ \vec{K}_0(\vec{j}, x, y) &= \text{grad}_x \text{div}_x(\vec{j}\Phi(x-y)), \\ \vec{K}_1(\vec{j}, x, y) &= k^2 \vec{j}\Phi(x-y).\end{aligned}$$

Справедливо:

$$\begin{aligned}\vec{K}_0(\vec{j}, x, y) &= \frac{1}{4\pi} e^{ikr} \left\{ \vec{j} \left( -\frac{1}{r^3} + \frac{ik}{r^2} \right) + \frac{x-y}{r} \left( \vec{j}, \frac{x-y}{r} \right) \left( \frac{3}{r^3} - \frac{3ik}{r^2} - \frac{k^2}{r} \right) \right\} \\ \vec{K}_1(\vec{j}, x, y) &= \frac{1}{4\pi} e^{ikr} \vec{j} \frac{k^2}{r}\end{aligned}$$

Для аппроксимации значения оператора  $\tilde{K}[\Omega, (\varepsilon' - 1)\vec{g}](x)$  в точке  $x = x_{v,i}$ , являющейся одной из точек объемной сетки, используем выражение:

$$\begin{aligned}\tilde{K}[\Omega, (\varepsilon' - 1)\vec{g}](x) &= \sum_{j \neq i} \vec{K}(\vec{g}_j, x_{v,i}, x_{v,j}) (\varepsilon'(x_{v,j}) - 1)v + \\ &+ (\varepsilon'(x_{v,i}) - 1) \int_{\sigma_{v,i}} \vec{K}_1(\vec{g}_i, x_{v,i}, y) dy - \frac{(\varepsilon'(x_{v,i}) - 1)}{3} \vec{g}_i\end{aligned}$$

Такая аппроксимация обоснована тем, что

$$\int_{\sigma_{v,i}} \vec{K}_0(\vec{g}_i, x_{v,i}, y) dy = -\frac{1}{3} \vec{g}_i$$

Если точка  $x$  есть точка общего вида, используем приближенное выражение:

$$\tilde{K}[\Omega, (\varepsilon' - 1)\vec{g}](x) = \sum_{j=1}^N \vec{K}(\vec{g}_j, x, x_{v,j}) \theta \left( \frac{|x - x_{v,j}|}{\delta} \right) (\varepsilon'(x_{v,j}) - 1)v - \frac{\varepsilon(x^*) - 1}{3} \vec{g}^*,$$

где  $\delta$  выбиралось равным удвоенному шагу объемной сетки,  $x^* = x^*(x)$  - ближайшая к точке  $x$  узловая точка  $x_{v,j}$ ,  $\vec{g}^* = 0$ , если ближайшая к точке  $x$  узловая точка  $x_{v,j}$  объемной сетки лежит на расстоянии большем шага объемной сетки от точки  $x$ ,  $\vec{g}^*$  - значение, выбираемое из набора  $\vec{g}_j$ , где  $x_{v,j}$  - ближайшая точка к  $x$  узловая точка, в противном случае,  $\theta(r)$  - сглаживающая функция, которая выбиралась как

$$\theta(r) = \begin{cases} 1, & \text{если } r > 1; \\ 3r^2 - 3r^3, & \text{если } 0 \leq r \leq 1. \end{cases}$$

### 3.3. Составление СЛАУ

Теперь можем решаемое интегральное уравнение заменить дискретной системой линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $g_i^p$ :

$$\sum_{\substack{j=1,\dots,N_v \\ q=\overline{1,3}}} a_{i,j}^{p,q} g_j^q = f_i^p \quad (8)$$

$$a_{i,j}^{p,q} = \begin{cases} \left( \vec{K}(\vec{e}_q, x_{v,i}, x_{v,j})(\varepsilon'(x_{v,j}) - 1)v, \vec{e}_p \right), & \text{при } i \neq j; \\ \left( (\varepsilon'(x_{v,i}) - 1) \int_{\sigma_{v,i}} \vec{K}_1(\vec{e}_q, x_{v,i}, y) dy, \vec{e}_p \right) - \delta_p^q \left( 1 + \frac{\varepsilon'(x_{i,v}) - 1}{3} \right), & \text{при } i = j. \end{cases}$$

где  $i = 1, \dots, N_v$ ,  $p = \overline{1,3}$ .

Причем

$$f_i^p = -(E_{inc}^{\vec{x}}(x_i), \vec{e}^p)$$

$$E_{inc}^{\vec{x}} = \vec{E}_0 e^{i\vec{k}\vec{x}_i},$$

где  $\vec{k} = (-k, 0, 0)$ ,  $k$  - волновое число

## 4. Численная схема для метод Галёркина

### 4.1. Дискретизация области

Для решения уравнения (7) в первую очередь необходимо дискретизировать объемную область. Для этого поместим диэлектрический объект внутрь некоторого параллелепипеда  $\Omega'$  и будем считать, что диэлектрическая область есть  $\Omega'$ .

Будем решать уравнение для области  $\Omega'$  и поверхности  $\Sigma$ , доопределив  $\varepsilon' = 1$  в области  $\Omega'$  вне области  $\Omega$ .

Для численного решения задачи осуществим разбиение области  $\Omega'$  на кубические ячейки  $V_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , где  $N$  — число ячеек объемной сетки.

### 4.2. Дискретизация системы

На каждой ячейке объемной сетки  $V_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ , введем неизвестный поверхностный ток  $\vec{g}_j$ , аппроксимирующий значение тока  $\vec{g}(x)$  в точке  $x^j$ . Все неизвестные токи разложим в декартовом базисе ( $\vec{e}_k$ ,  $k = 1, \dots, 3$  — орты декартовой системы координат):

$$\vec{g}(x) = \sum_{j=1, \dots, N} \vec{g}_j(x) = \sum_{\substack{j=1, \dots, N \\ k=1, \dots, 3}} g_j^k \vec{e}_j^k(x)$$

$$\vec{e}_j^k(x) = \begin{cases} \vec{e}_k, & x \in V_j \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Умножим уравнение (7) на  $\vec{e}_i^l$ :

$$(\vec{e}_i^l, \vec{g}(x)) - (\vec{e}_i^l, K[\Omega, (\varepsilon' - 1)\vec{g}](x)) = (\vec{e}_i^l, \vec{E}_{inc}(x)), \quad x \in \Omega$$

Пусть  $(\vec{e}_i^l, \vec{E}_{inc}(x)) = f_i^l$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $l = 1, \dots, 3$ , тогда:

$$\sum_{\substack{j=1, \dots, N \\ k=1, \dots, 3}} (\vec{e}_i^l, \vec{e}_j^k) g_j^k - \sum_{\substack{j=1, \dots, N \\ k=1, \dots, 3}} (\vec{e}_i^l, K[\Omega, \vec{e}_j^k]) (\varepsilon_j' - 1) g_j^k = f_i^l. \quad (9)$$

Обозначим за  $\mu(V_i)$  объём  $i$ -ой ячейки разбиения:

$$\sum_{\substack{j=1, \dots, N \\ k=1, \dots, 3}} (\vec{e}_i^l, \vec{e}_j^k) g_j^k = \delta_{ij} \delta_{lk} \mu(V_i) g_j^k,$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad \delta_{lk} = \begin{cases} 1, & l = k \\ 0, & l \neq k \end{cases} - \text{символ Кронекера.}$$

В результате система (9) примет вид:

$$\left( \delta_{ij} \delta_{lk} \mu(V_i) - \sum_{\substack{j=1, \dots, N \\ k=1, \dots, 3}} (\vec{e}_i^l, K[\Omega, \vec{e}_j^k]) (\varepsilon_j' - 1) \right) g_j^k = f_i^l, \quad (10)$$

при  $i, j = 1, \dots, N$ ,  $l, k = 1, \dots, 3$ .

### 4.3. Составление СЛАУ

Пусть  $a_{ij}^{lk} = \delta_{ij}\delta_{lk}\mu(V_i) - (\vec{e}_i^l, K[\Omega, \vec{e}_j^k])(\varepsilon_j' - 1)$ , где  $a_{ij}^{lk}$  - элемент матрицы  $A = (A_{ij})_{i,j=1}^N$  размера  $3N \times 3N$ , состоящей из блоков  $A_{ij} = (a_{ij}^{lk})_{l,k=1}^3$  размера  $3 \times 3$ , тогда система (10) примет вид:

$$Ag^k = f^l.$$

**Расчёт элементов матрицы**

$$a_{ij}^{lk} = \delta_{ij}\delta_{lk}\mu(V_i) - (\vec{e}_i^l, K[\Omega, \vec{e}_j^k])(\varepsilon_j' - 1)$$

Представим  $(\vec{e}_i^l, K[\Omega, \vec{e}_j^k])(\varepsilon_j' - 1)$  в виде суммы двух интегралов  $I_1$  и  $I_2$ :

$$I_1 = \int_{V_i} \vec{e}^l \left( \text{grad div} \int_{\Omega} \vec{e}_j^k F(x-y) dy \right) dx$$

$$I_2 = k^2 \int_{V_i} \vec{e}^l dx \int_{V_j} \vec{e}^k F(x-y) dy,$$

где  $k$  - волновое число,  $V_i$  - объемная ячейка.

Рассмотрим интеграл  $I_1$ . Обозначим за  $\varphi(x)$ :

$$\varphi(x) = \text{div} \int_{\Omega} \vec{e}_j^k F(x-y) dy, \quad (11)$$

тогда интеграл  $I_1$  примет вид:

$$I_1 = \int_{V_i} \vec{e}^l \text{grad} \varphi(x) dx = \int_{V_i} \text{div}(\vec{e}^l \varphi(x)) dx = \int_{\sigma_i} (\vec{e}^l \times \vec{n}) \varphi(x) dx = \int_{\sigma_i^{l+}} \varphi(x) dx - \int_{\sigma_i^{l-}} \varphi(x) dx,$$

где  $\sigma_i^{l\pm}$  - противоположные грани ячейки разбиения  $V_i$ .

Далее распишем равенство (11), перейдя от объёмного интеграла к интегралам по граням объёмной ячейки:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \text{div} \int_{V_j} \vec{e}^k F(x-y) dy = \int_{V_j} \vec{e}^k \text{grad}_x F(x-y) dy = - \int_{V_j} \vec{e}^k \text{grad}_y F(x-y) dy = \\ &= - \int_{V_j} \text{div}(\vec{e}^k F(x-y)) dy = - \int_{\sigma_j} (\vec{n} \times \vec{e}^k) F(x-y) dy = - \int_{\sigma_j^{k+}} F(x-y) dy + \int_{\sigma_j^{k-}} F(x-y) dy. \end{aligned}$$

Подставляя данную формулу для  $\varphi(x)$  в полученное ранее уравнение для  $I_1$ , имеем:

$$\begin{aligned} I_1 &= - \int_{\sigma_i^{l+}} \left( \int_{\sigma_j^{k+}} F(x-y) dy \right) dx + \int_{\sigma_i^{l+}} \left( \int_{\sigma_j^{k-}} F(x-y) dy \right) dx + \\ &+ \int_{\sigma_i^{l-}} \left( \int_{\sigma_j^{k+}} F(x-y) dy \right) dx - \int_{\sigma_i^{l-}} \left( \int_{\sigma_j^{k-}} F(x-y) dy \right) dx. \end{aligned}$$

Рассмотрим интеграл  $I_2$ :

$$I_2 = k^2 \int_{V_i} \vec{e}^l dx \int_{V_j} \vec{e}^k F(x-y) dy = \delta_{lk} k^2 \int_{V_i} \left( \int_{V_j} F(x-y) dy \right) dx, \quad \delta_{lk} = \begin{cases} 1, & l = k \\ 0, & l \neq k. \end{cases}$$

Мы получили формулы для интегралов  $I_1$  и  $I_2$ , теперь запишем конечную систему для нахождения коэффициентов матрицы:

$$a_{ij}^{lk} = \begin{cases} \mu(V_i) - (I_1 + I_2)(\varepsilon'_j - 1), & i = j, k = l \\ -(I_1 + I_2)(\varepsilon'_j - 1), & i \neq j, k = l \\ -I_1(\varepsilon'_j - 1), & i \neq j, k \neq l. \end{cases}$$

Система имеет вид:

$$\sum_{\substack{j=1,\dots,N \\ k=1,\dots,3}} a_{ij}^{lk} g_j^k = f_i^l, \quad i = 1, \dots, N, \quad l = 1, \dots, 3, \quad (12)$$

причем

$$\begin{aligned} f_i^l &= (\vec{e}_i^l, \vec{E}_{inc}(x_i)) \\ \vec{E}_{inc} &= \vec{E}_0 e^{i\vec{k}\vec{x}_i}, \end{aligned}$$

где  $\vec{k} = (-k, 0, 0)$ ,  $k$  - волновое число

Интегралы  $I_1$  и  $I_2$  являются несобственными. Они вычисляются численно по формуле прямоугольников с доразбиением ячейки на более мелкие ячейки второго уровня. При этом для устранения особенностей применяется домножение на сглаживающую функцию. В этих интегралах вместо исходной функции  $F$  используется функция  $F(x-y)\theta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)$ , где  $\theta$  — сглаживающая функция, такая что:

$$\theta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) = \begin{cases} 3\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^2 - 2\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^3, & \text{если } 0 \leq \frac{r}{\varepsilon} \leq 1; \\ 1, & \text{если } \frac{r}{\varepsilon} > 1. \end{cases}$$

## 5. Вычисление эффективной площади рассеяния

В электродинамике важную роль играет понятие эффективной площади рассеяния (ЭПР). ЭПР является количественной мерой свойства объекта рассеивать электромагнитную волну. Она представляет собой площадь, которая, будучи идеальной отражающей сферической поверхностью, создавала бы такую же мощность рассеянного излучения, как и рассматриваемый объект. ЭПР конкретного объекта зависит от разных факторов, в том числе от его формы, размеров, материала, из которого он изготовлен, частоты используемого электромагнитного излучения и т.д. ЭПР имеет важное значение в радарных технологиях, где она используется для:

- Определения размера, формы, состава материала и других характеристик объектов;
- Обнаружения и отслеживания целей, таких как самолеты, корабли и ракеты;
- Оценки дальности и скорости путем анализа интенсивности и фазы рассеянного сигнала;
- Снижения заметности объектов (радиолокационная невидимость) для радаров.

Диаграмма рассеяния выражает зависимость ЭПР от направления на точку наблюдения и направления падения волны. ЭПР в направлении единичного вектора  $\vec{\tau}$  называется величина:

$$\sigma_0(\vec{\tau}) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{4\pi R^2}{|\vec{E}_{inc}|^2} |\vec{E}(R\vec{\tau})|^2$$

Величину ЭПР  $\sigma_0(\vec{\tau})$  можно вычислить через объемные токи по формуле:

$$\sigma_0(\vec{\tau}) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{E}_{inc}|^2} \left| \int_{V_i} e^{-ik(\vec{\tau}, x)} (\varepsilon'(x) - 1) k^2 [\vec{g}(x) - \vec{\tau}(\vec{g}(x), \vec{\tau})] dx \right|^2,$$

где  $\alpha = 0 \dots 180$ ,  $\vec{\tau}(\alpha) = (\cos \alpha, \sin \alpha, 0)$ .

Формулу можно записать в виде суммы:

$$\sigma_0(\vec{\tau}) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{E}_{inc}|^2} \left| \sum_{i=1}^N e^{-ik(\vec{\tau}, x_i)} (\varepsilon'(x_i) - 1) k^2 [\vec{g}(x_i) - \vec{\tau}(\vec{g}(x_i), \vec{\tau})] \mu(V_i) \right|^2, \quad (13)$$

где  $N$  — число ячеек объемной сетки,  $\varepsilon'(x_i)$  — среднее значение диэлектрической проницаемости на  $i$ -ой ячейке,  $\mu(V_i)$  — объем  $i$ -ой ячейки,  $k$  — волновое число,  $\alpha = 0 \dots 180$ ,  $\vec{\tau}(\alpha) = (\cos \alpha, \sin \alpha, 0)$ .

Для перевода значения  $\sigma_0(\vec{\tau})$  в Децибелы воспользуемся формулой:

$$\sigma_{dB} = 10 \lg \left( \frac{\sigma}{\pi} \right)$$

## 6. Примеры расчётов

Была рассмотрена задача рассеяния плоской волны на однородном диэлектрическом шаре.

Теперь опишем, какими входными данными мы оперировали и какие константы использовали в расчётах.

### 6.1. Константы

Опишем используемые константы:

$c = 3 \cdot 10^8$  - скорость света

$\omega = 0.15 \cdot 2\pi \cdot 10^9$  - угловая скорость в Гц

$k = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = \frac{\omega}{c}$  - волновое число

$\vec{E}_0 = (0, 1, 0)$  - единичный вектор

### 6.2. Входные данные

В первую очередь следует отметить, что задача решалась при условии, что в во внешней среде относительные проницаемости  $\varepsilon' = \mu' = 1$ , внутри же тела  $\mu' = 1$ , а  $\varepsilon'$  - есть функция, зависящая от  $x$ . Возьмем  $\varepsilon' = 4$ .

В решаемой задаче рассматривается диэлектрическое тело в форме шара радиусом  $R = 1$  и центром в точке  $O = (0, 0, 0)$ , вокруг которого описывается параллелепипед со сторонами  $L_1 = L_2 = L_3 = 2$ , центром в точке  $O = (0, 0, 0)$  и разбиениями сторон  $N_1 = N_2 = N_3 = N$ . Значения  $N$  брались 5, 10, 15.

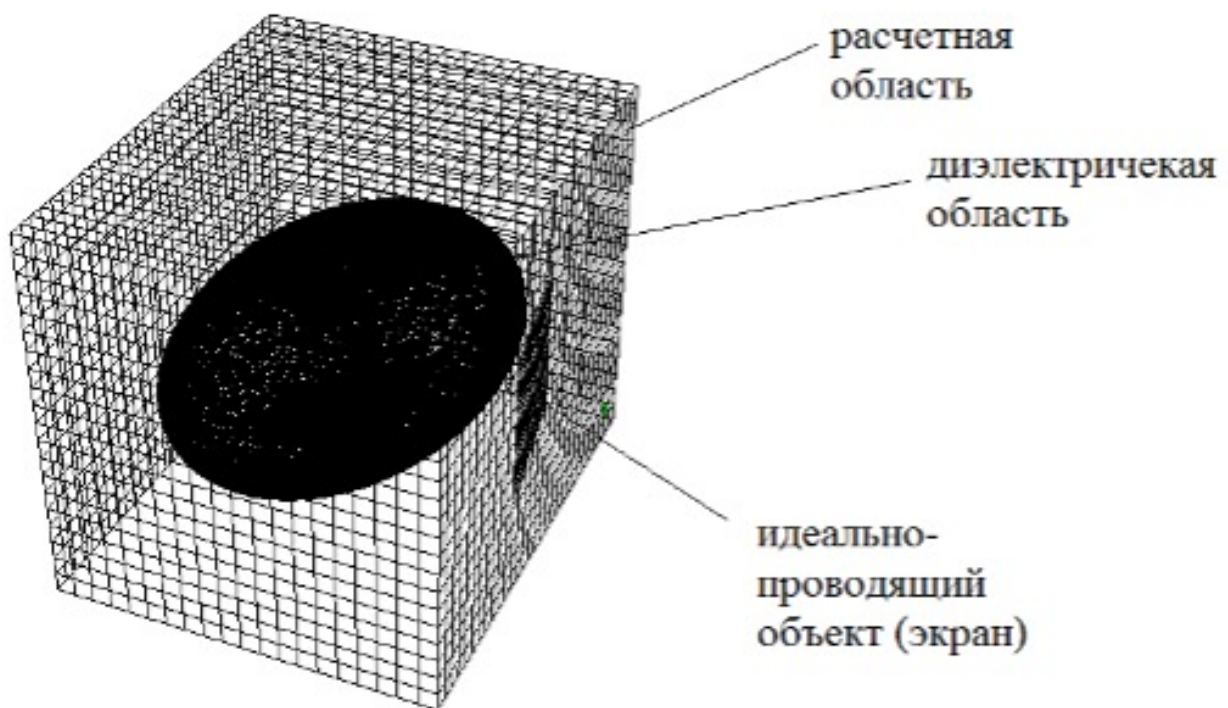


Рисунок 6.1. Исследуемый объект внутри расчётной сетки.

## 6.3. Точки коллокации и диэлектрическая проницаемость

### 6.3.1. Обнаружение точек коллокации

Впишем исследуемое шарообразное диэлектрическое тело в параллелепипед и разобьем каждую из сторон на число точек  $N_i, i = 1, 2, 3$ .

В результате разбиения формируем массив точек коллокации, каждая из которых является серединой параллелепипеда со сторонами  $\frac{L_i}{N_i}, i = 1, 2, 3$ . Таким образом, общее количество точек  $n = N_1 \cdot N_2 \cdot N_3$ .

### 6.3.2. Среднее значение $\varepsilon_i$ на каждой ячейке

Будем рассматривать каждый параллелепипед разбиения по отдельности. Для большей точности, ускорения расчётов и уменьшения требования по памяти разобьем каждый такой параллелепипед на меньшие (каждую его сторону разобьем на  $m = 30$  точек) со сторонами  $\frac{L_i}{N_i \cdot m}, i = 1, 2, 3$ . Далее суммируем  $\varepsilon(x)$  с  $x$  в центрах объектов разбиения, лежащих внутри рассматриваемого шара, и находим среднее значение  $\varepsilon_i, i = 0 \dots n - 1$  на каждом параллелепипеде.



## 6.4. Рассеяние на шаре методом коллокаций

### 6.4.1. Составление и решение СЛАУ

Для решения интегрального уравнения (7) решаем СЛАУ (8), описанную в пункте 3.3.

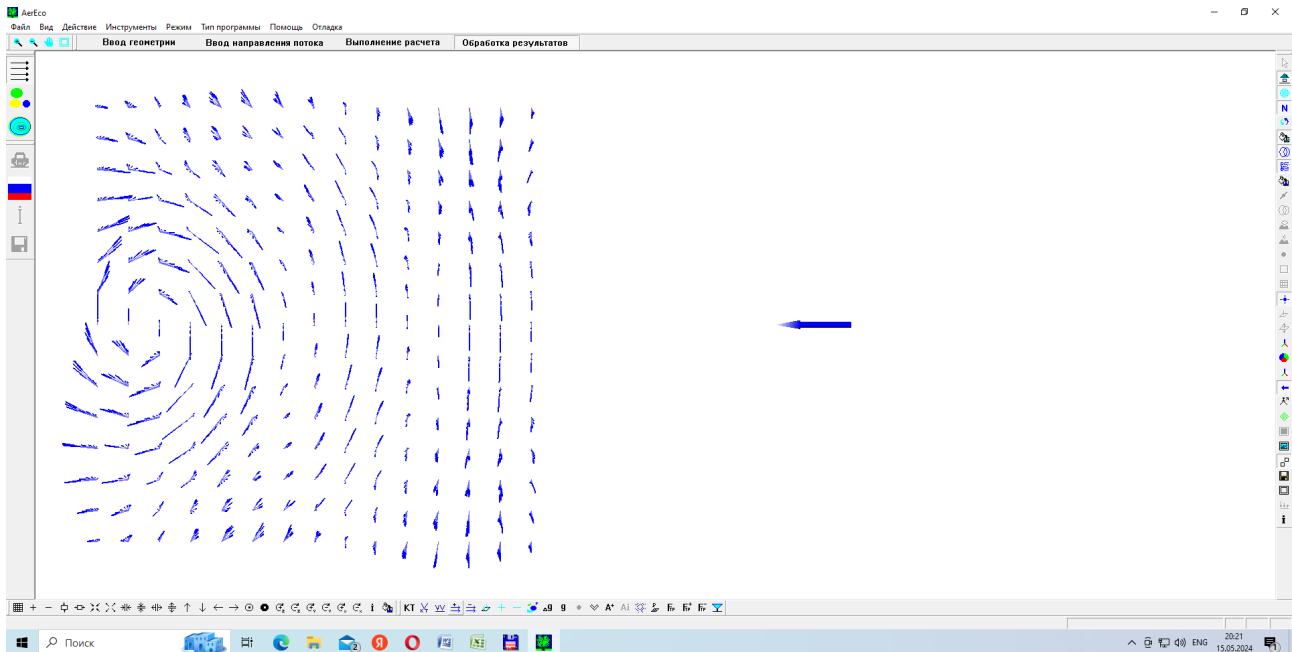


Рисунок 6.2. Рассеяние на шаре (мнимое значение вектора поля).

### 6.4.2. Расчёт ЭПР

Для расчёта ЭПР воспользуемся формулой (13).

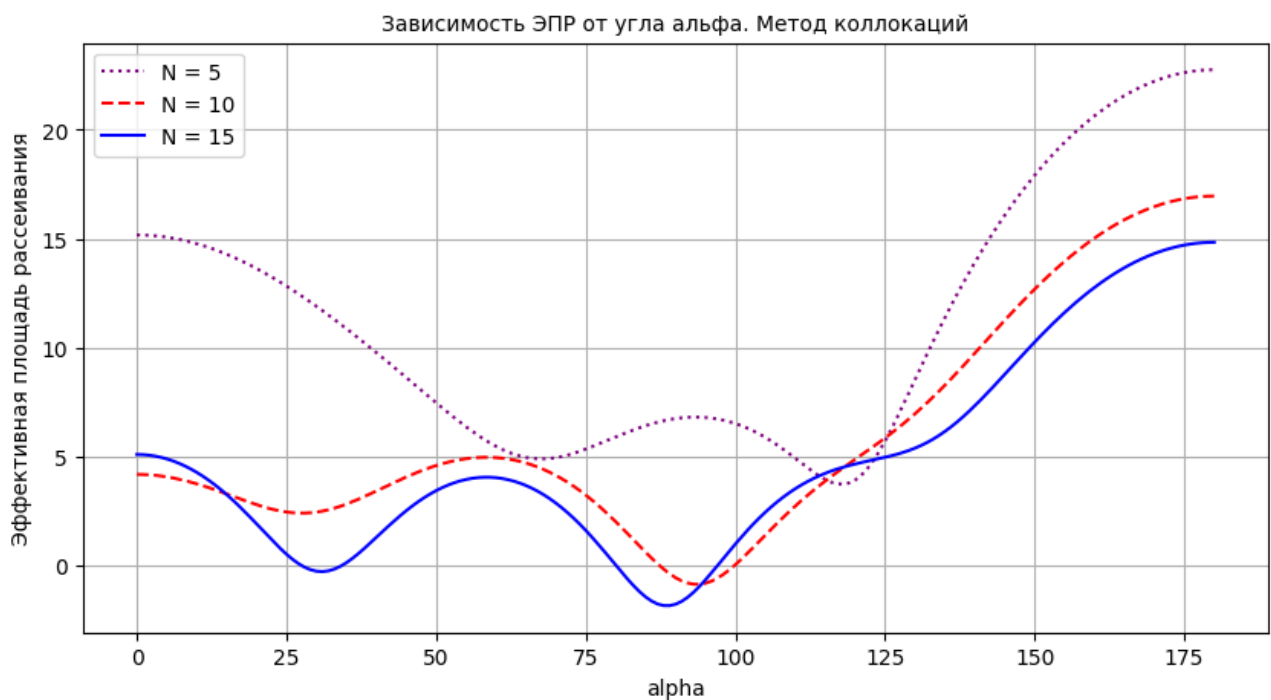


Рисунок 6.3. Расчёт ЭПР методом колокаций для разного разбиения сетки.

## 6.5. Рассеяние на шаре методом Галёркина

### 6.5.1. Составление и решение СЛАУ

Для решения интегрального уравнения (7) решаем СЛАУ (12), описанную в пункте 4.3.

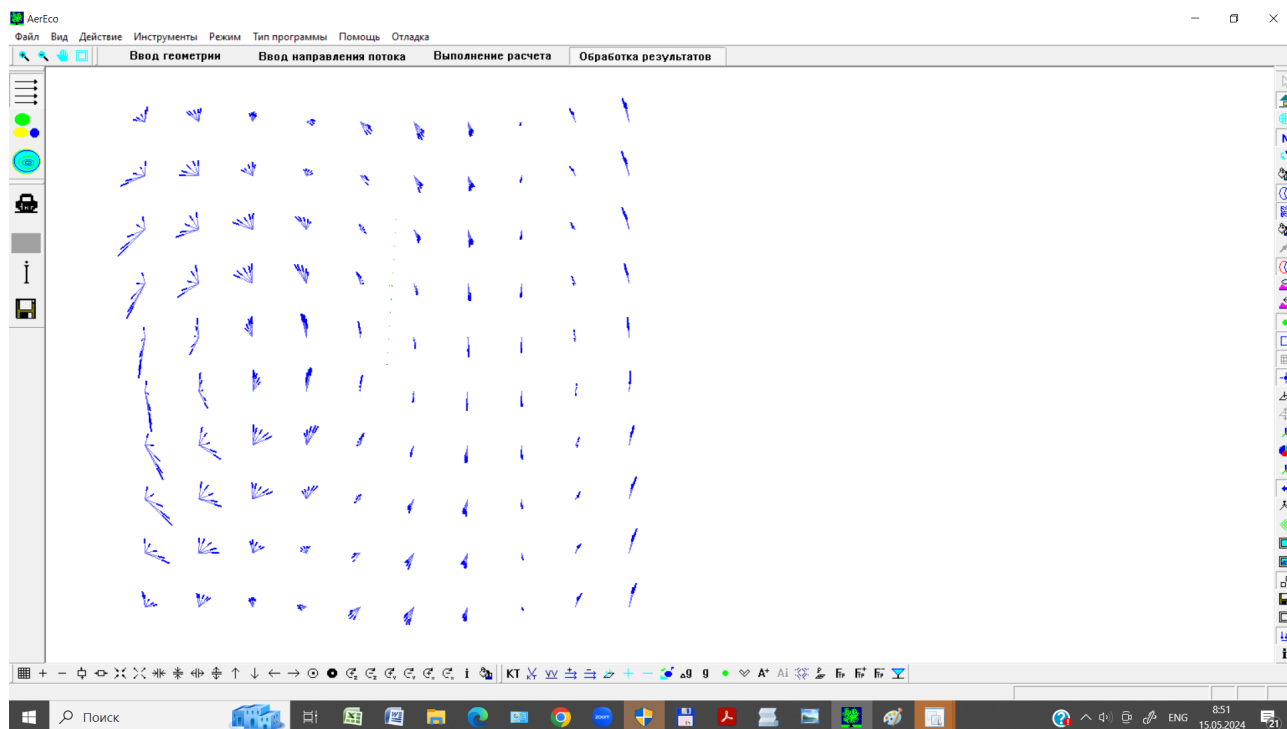


Рисунок 6.4. Рассеяние на шаре (мнимое значение вектора поля).

### 6.5.2. Расчёт ЭПР

Для расчёт ЭПР воспользуемся формулой (13).

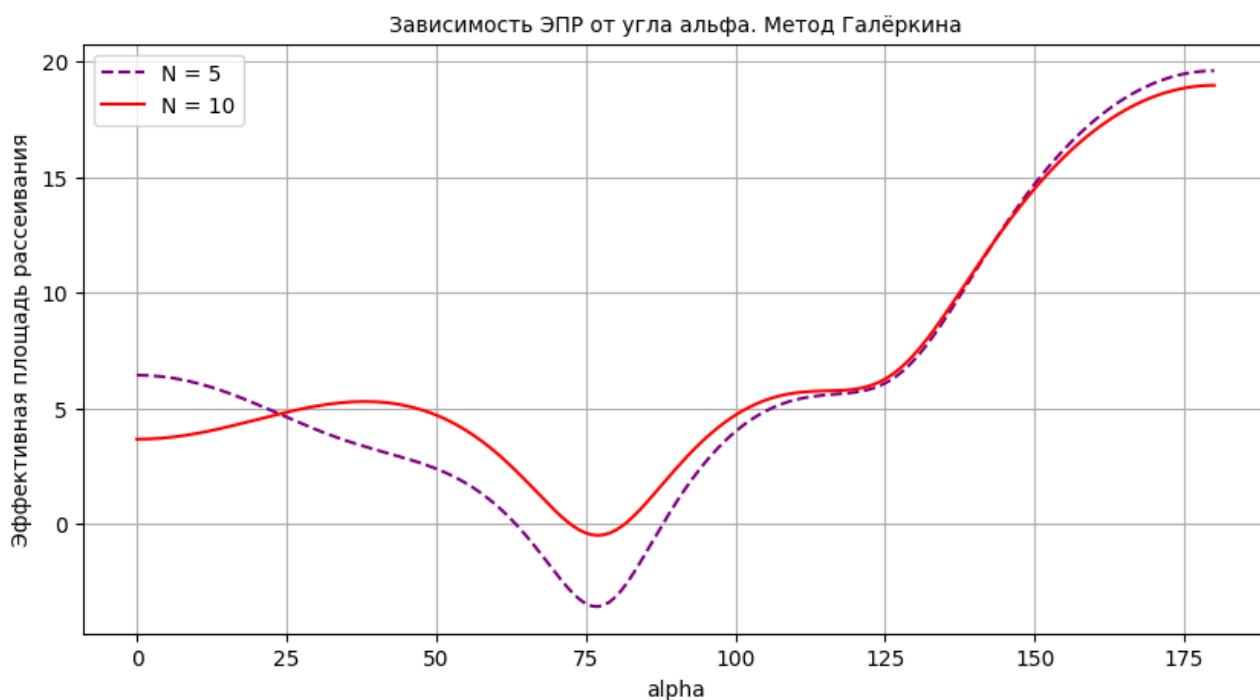


Рисунок 6.5. Расчёт ЭПР методом Галёркина для разного разбиения сетки.

## 6.6. Сравнение численного решения с аналитическим

Численное решение методом коллокаций (кривая 1) сравнивается с теоретическим решением, полученное через ряды по специальным функциям (кривая 2). Разбиение куба  $N_i = 25$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

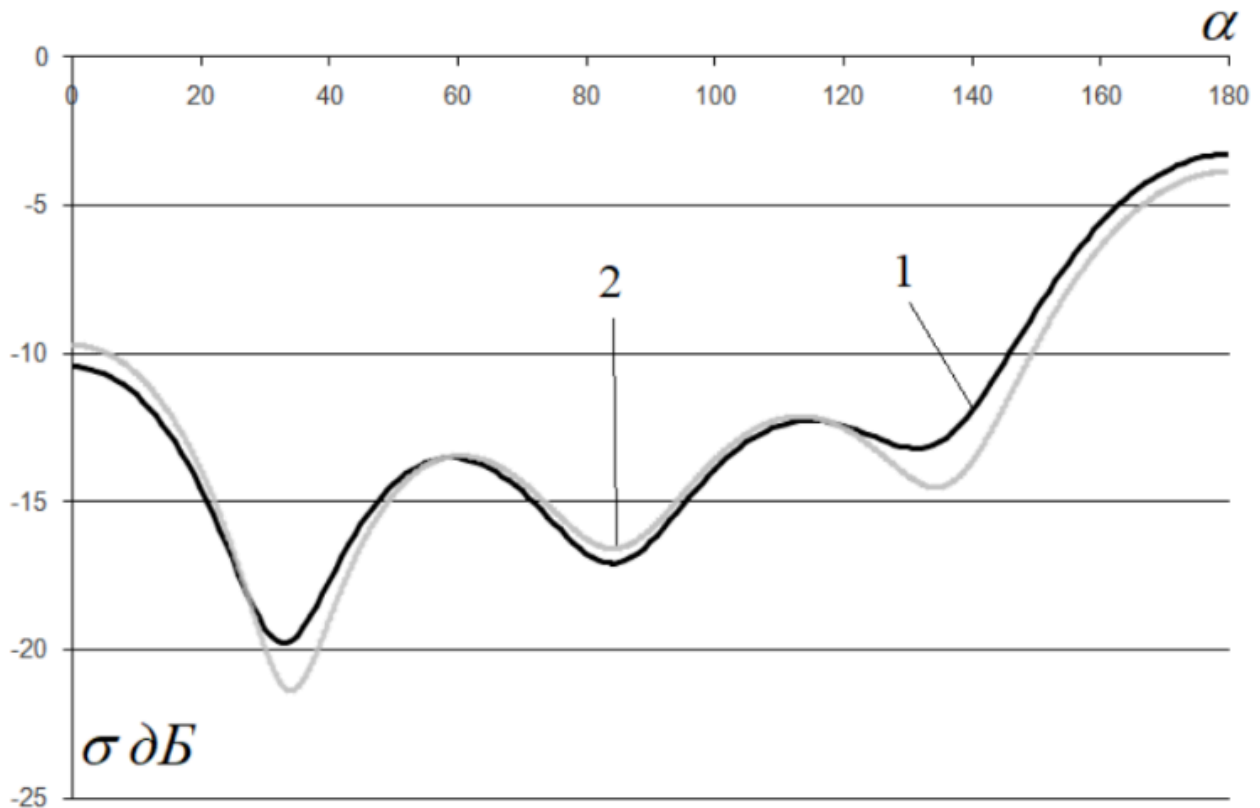


Рисунок 6.6. Диаграмма рассеяния для диэлектрической сферы.

Аналитическое решение любезно предоставлено Ставцевым С.Л. (ИВМ РАН)

**Вывод:** Метод коллокаций показывает лучшую точность по сравнению с методом Галёркина, кроме того, он работает быстрее.

## Заключение

Метод объемных интегральных уравнений (МОИУ) - это численный метод для решения уравнений Максвелла дискретного распределения точечных диэлектрических объектов. Он позволяет определить распределение электромагнитного поля в пространстве и на объектах путем решения интегральных уравнений. В рамках метода используются математические операторы, называемые ядрами интегрального уравнения, которые учитывают взаимодействие между точечными диэлектрическими объектами и внешним электромагнитным полем. В работе для решения объемного уравнения применялись два метода: метод коллокаций и метод Галёркина (и тот, и другой с применением кусочно-постоянной аппроксимации неизвестных функций). При этом метод коллокаций ранее был описан в работах А.Б.Самохина [12],[13], а метод Галёркина в работах Смирнова Ю.Г. и Цупака А.А. [14]. Были реализованы алгоритмы численных методов на языке программирования C++ и проведено тестирование программы на примере задачи о рассеянии плоской волны на диэлектрической сфере.

## Список литературы

- [1] Сетуха А.В. Метод интегральных уравнений в математической физике. — Издательство, 2023.
- [2] A.Taflove and S.C.Hagness, Computational Electrodynamics:The Finite-Difference Time-Domain Method.Norwood, MA:Artech, 2000.
- [3] G. Mur, "Absorbing Boundary Conditions for the Finite-Difference Approximation of the Time-Domain Electromagnetic-Field Equations," inIEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility, vol. EMC-23, no. 4,pp. 377-382, Nov. 1981, doi: 10.1109/TEMPC.1981.303970.
- [4] R. Holland, V.P. Cable, and L.C. Wilson, "Finite-volume time-domain (FVTD) techniques for EM scattering," IEEE Trans. on Electromag. Compat., vol. 33, no. 4, pp. 281-294, Nov. 1991.
- [5] P. Bonnet, X. Ferrieres, F. Paladian, J. Grando, J. Alliot, and J. Fontaine, "Electromagnetic wave diffraction using a finite volume method," Electronics Letters, vol. 33, no. 1, pp. 31-32, 1997.
- [6] Кудин В.П. Метод конечных элементов в прикладной электродинамике. // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. — 2017. — т. 102. — № 3. — с. 153-159.
- [7] Nedelec, J.C. A new family of mixed finite elements in R3 // Numer. Math. — 1986. — Vol. 50. — P. 57–81.
- [8] R. Coccioli, T. Itoh, G. Pelosi and P. P. Silvester, “Finite Element Method in Microwaves: A Selected Bibliography,” IEEE Antennas and Propagation Magazine, Vol. 38, No. 6, pp. 34-47, Dec. 1996.
- [9] Jian-Ming Jin. The Finite Element Method in Electromagnetics, 3rd Edition, 2014. Wiley-IEEE Press/ 876 Pages.
- [10] S.M. Rao, D.R. Wilton, A.W. Glisson, Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape, IEEE Trans. Antennas Propag. AP-30 (3) (1982) 409–418.
- [11] J. H. Richmond, “Scattering by a dielectric cylinder of arbitrary cross section shape,” IEEE Trans. Antennas Propagat., vol. AP-13, pp. 334-341, May 1965.
- [12] Самохин А.Б. Объемные сингулярные интегральные уравнения электродинамики. — М.:Техносфера, 2021. — 218 с.
- [13] Самохин А. Б. Интегральные уравнения и итерационные методы в электромагнитном рассеянии. — М.: Радио и связь, 2001. — 160 с.
- [14] Смирнов, Ю. Г., Цупак А.А. Математическая теория дифракции акустических и электромагнитных волн на системе экранов и неоднородных тел. — М.: КноРус, 2016. — 224 р.