

Алгоритм HO-SVD

Поворознюк Александра

МГУ ВМК 303 группа

20 декабря 2022 г.

1 Проблемы работы с каноническим разложением

2 HO-SVD (Разложение Таккера)

3 Немного вычислений

4 Выводы

Каноническое разложение

$$A_{i_1, \dots, i_d} = \sum_{\alpha=1}^R u_{\alpha}^{(1)}(i_1) u_{\alpha}^{(2)}(i_2) \dots u_{\alpha}^{(d)}(i_d)$$

R - ранг канонического разложения

$$R = \text{trank}(A)$$

Проблемы:

- Точный тензорный ранг очень трудно вычислить
- Даже если есть ранг, точное разложение вычислить еще труднее

Следовательно, нужна альтернатива каноническому разложению - разложение Таккера

HO-SVD (Разложение Таккера)

Разложение Таккера

Представление тензора $A(i_1, \dots, i_d)$

в виде $A(i_1, \dots, i_d) = g(\alpha_1, \dots, \alpha_d) u_1(i_1, \alpha_1) \dots u_d(i_d, \alpha_d)$

Ядро разложения Таккера

Тензор $g(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$

Матрицы разложения Таккера

Двумерные тензоры $u_1(i_1, \alpha_1), \dots, u_d(i_d, \alpha_d)$

Сложность

$$N^d \longrightarrow R_i \dots R_d + N(R_1 + \dots + R_d) \longrightarrow R^d + dNR$$

$$R = \max(R_1, \dots, R_d)$$

Для наглядности рассмотрим разложение Таккера на примере тензора 3-го ранга:

$$A(i,j,k) = \sum_{\alpha=1}^{R_1} u_{\alpha}(i) \sigma_{\alpha} v_{\alpha}(j, k) = \sum_{\alpha=1}^{R_1} \tilde{u}(\alpha, i) v(\alpha, jk) =$$

$$\left\{ v(\alpha, jk) \implies v(\alpha j, k) \right\} = \sum_{\alpha=1}^{R_1} \tilde{u}(\alpha, i) v(\alpha j, k) =$$

$$\sum_{\alpha=1}^{R_1} \tilde{u}(\alpha, i) \sum_{\beta=1}^{R_2} \hat{v}(\alpha j, \beta) \tilde{w}(\beta, k) =$$

$$\left\{ \hat{v}(\alpha j, \beta) \implies \hat{v}(\alpha \beta, j) = \sum_{\gamma=1}^{R_3} g(\alpha, \beta, \gamma) \tilde{v}(\gamma, i) \right\} =$$

$$\sum_{\alpha=1}^{R_1} \sum_{\beta=1}^{R_2} \sum_{\gamma=1}^{R_3} g(\alpha, \beta, \gamma) \tilde{u}(\alpha, i) \tilde{v}(\gamma, i) \tilde{w}(\beta, k)$$

Затем проверим разложение при $N = 64$ и $R_1 = R_2 = R_3 = 4$ на $\sin(i+2j+3k)$ и посчитаем ошибку вычисления

Плюсы:

- Устойчивость
- Быстрый доступ к элементам
- Свёртывание тензоров в формате Таккера быстрее при не очень большом d
- Из канонического разложения всегда можно сделать формат Таккера

Минусы:

- При большом d , например 100, не уходим от проклятия размерности

Спасибо за внимание!