

ЗАДАНИЕ 3:
ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА С ОСОБЕННОСТЬЮ

Москва
2023

1 Постановка задачи

Рассматривается процесс численного решения краевой задачи для уравнения Пуассона в квадратной области. Уравнение имеет вид

$$-\Delta u \equiv -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega = (0; 1)^2$$

и дополняется граничными условиями

$$u|_{\partial\Omega} = g(x, y).$$

В общем случае процесс численного решения можно описать так:

1. Строится сетка;
2. Как-либо методом дискретизации (методы конечных разностей, объемов, элементов) исходная задача сводится к системе алгебраических уравнений относительно дискретных неизвестных, расположенных на сетке;
3. Полученная (линейная) система численно решается.

В данном задании рассматриваются **треугольные сетки** (кое-какие знания для их построения в **Gmsh** у нас уже есть) и **метод конечных элементов** с кусочно-линейными базисными функциями. Конечноэлементный решатель предоставляется в собранном виде.

Целью задания является демонстрация полезности адаптивных сеток. В качестве точного решения используется функция

$$u(x, y) = ((x - y)^2 + 10^{-3})^{-1.5}, \quad (1)$$

имеющая особенность у диагонали квадрата.

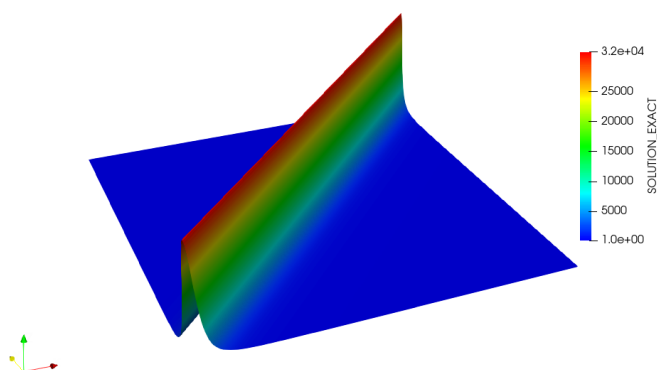


Рис. 1: Точное решение

Для хорошего воспроизведения такого решения сетка должна быть достаточно мелкой вблизи диагонали $y = x$.

2 Численное решение и визуализация

2.1 Конечноэлементный решатель

Поставляется в собранном виде (`2d_poisson_fem.exe` для Windows, `2d_poisson_fem` для учебных компьютеров в ИВМ). В решатель зашито точное решение (1). Решатель работает максимально просто: в качестве единственного аргумента командной строки предоставляется путь к файлу `.vtk` с треугольной сеткой в единичном квадрате (построенной в `Gmsh`). В ходе работы решатель выдает некоторую информацию о числе элементов сетки, времени выполнения разных этапов работы, C -норму ошибки численного решения, диаметр сетки (максимальное расстояние между узлами ячейки).

Выводимый файл `res.vtk` содержит в себе записанные на сетке численное решение (`SOLUTION`) и точное решение (`SOLUTION_EXACT`), а также некоторые вспомогательные данные.

2.2 Визуализация в ParaView

До сих пор построенные сетки мы рассматривали только непосредственно при их создании в `Gmsh`. Но ничего, кроме области и элементов сетки таким образом мы не увидим. А после работы конечноэлементного решателя сохраняется новый `.vtk`-файл, в котором записаны сеточные решения, которые надо отрисовать.

Для визуализации используем `ParaView` (<https://paraview.org/download>). Вероятно, это самый распространенный визуализатор данных в формате VTK, обладающий огромным количеством функций, из которых мы возьмем простейшие.

Для отображения решения в `ParaView` откройте `res.vtk`. Общий интерфейс представлен на рисунке 2. Нажмите на зеленую кнопку **Apply**. Сетка должна отобразиться, ее можно раскрасить разными данными, среди которых нас интересуют `SOLUTION` и `SOLUTION_EXACT`. Посмотрим на ошибку численного решения. Это полезно: можно увидеть, что ошибка сосредоточена вблизи плохого (плоского или вытянутого) треугольника, и сетку нужно подкорректировать. Пригодится это и в дальнейшем при разработке собственного кода для численного решения: например, если ошибка сконцентрирована вдоль одной из границ сетки, вероятно наличие бага в обработке граничных условий. Основная работа с данными на сетках в `ParaView` делается с помощью *фильтров*. Среди **Filters** найдите **Calculator** и задайте вычисление ошибки как модуля разности численного и точного решений, как на рисунке 2.

3 Отчетность

Необходимо опробовать конечноэлементный решатель на сетках двух типов (см. рис. 3). Структурированные сетки получаются из сетки, представленной на рис. 4, последовательным применением **Refine by splitting**. Сетки со сгущением задаются разбиением диагонали различной степени. Например, представленная на рис. 3 сетка имеет 400 узлов на диагонали и по 10 узлов на сторонах квадрата, при этом разбиение сторон квадрата имеет сгущение к вершинам квадрата, которые соединены диагональю.

Если сравнить структурированную сетку и сетку со сгущением примерно одного и того же количества ячеек, C -норма ошибки численного решения будет ниже для сетки со сгущением. Необходимо построить график, подобный представленному на рисунке 5, но с большим числом точек. На приведенном графике видно, что для одной и той же нормы ошибки сетки со сгущением имеют меньше ячеек. Постарайтесь сохранить эту тенденцию

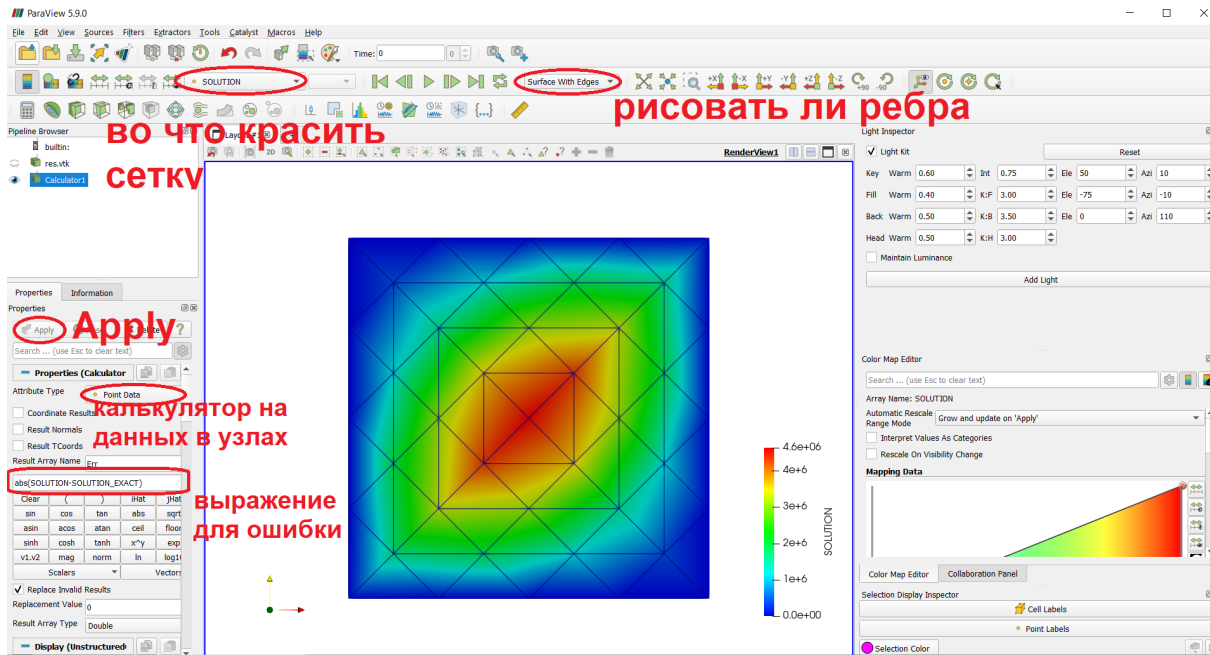


Рис. 2: Интерфейс ParaView

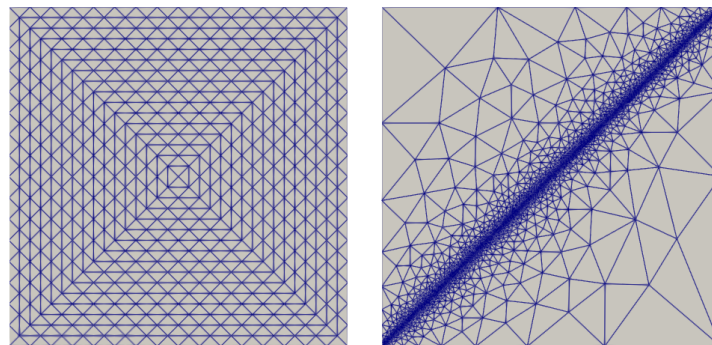


Рис. 3: Сетки двух типов: структурированная (слева) и сгущающаяся к диагонали (справа)

и для малых значений нормы ошибки (< 1000). К графику необходимо приложить отрисованные в ParaView ошибки на сетке.

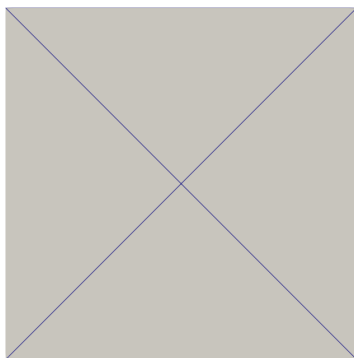


Рис. 4: Первичная структурированная сетка

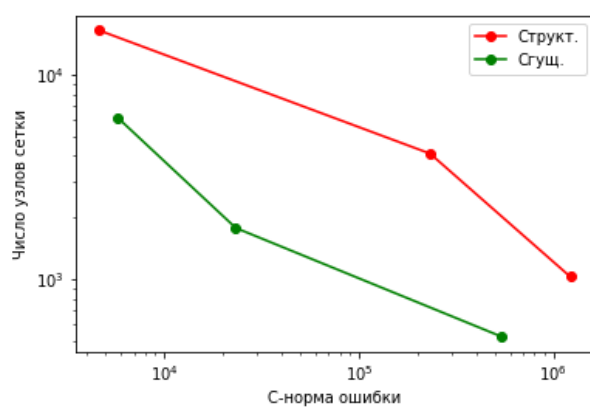


Рис. 5: Зависимость числа узлов сетки от C -нормы ошибки