小马加编信息学教案(二十五)

二分查找

- 一. 课程内容
- 二. 知识讲解
  - 1. 定义与基本思路
    - 1. 1 定义
    - 1. 2 基本思路
  - 2. 时间复杂度分析
  - 3. 优点和缺点
- 三. 经典例题
- 四. 提高巩固

一. 课程内容

1. 定义与基本思路
2. 时间复杂度分析
3. 优点和缺点

二. 知识讲解

1. 定义与基本思路

1. 1 定义

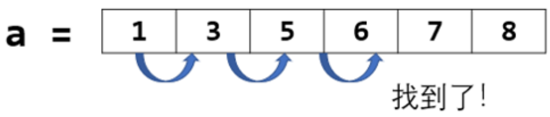
> 二分查找也叫折半查找，主要用来解决查找一个有序序列中某个元素的位置的问题，不同于直接按顺序查找，其通过特殊的查找方式来提高效率。

1. 2 基本思路

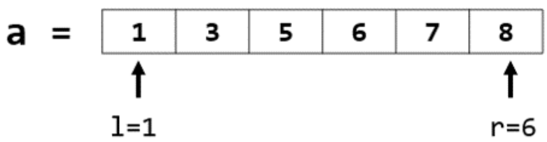
> 现在有问题：问一个标号为$1\sim n$的有序序列$a[1..n]$，哪个位置的数等于 k，若没有则输出 -1。

> 数据如下
> $n=6$
> a[] = $\{1,3,5,6,7,8\}$
> $k=7$

> 1. 顺序查找：直接从 1开始往后一个个找，当找到第一个大于 k 的位置时结束，若找到k就输出位置。这种做法要访问整个数组，时间复杂度是 $O(n)$。

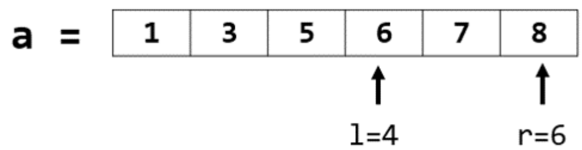


> 2. 二分查找：我们不直接一个个找到 k的位置，我们设置一个区间 $[l, r]$，表示我们要找的数在区间 $[l, r]$中，一开始 $l = 1, r = n$。



> 接着令区间中点$mid = \frac{l+r}{2}$，则$a[mid]$与k有3种关系：
>
> 1. 若$a[mid] = k$则证明查找到了k所在的位置，结束程序
> 2. 若$a[mid] > k$由于数组有序，那么k肯定在mid左边，令$r = mid - 1$
> 3. 若$a[mid] < k$由于数组有序，那么k肯定在mid右边，令$l = mid + 1$

> $a[mid] < k$即为第三种情况，令$l = mid + 1$



> 然后再求出$[l, r]$的中点mid，与k比较。不断重复这个过程，缩小k所在的区间的长度，若中途找到k则，算法结束，否则，当$l > r$ 说明不存在k所在的区间，即k不在a中。

> 核心代码

```
	int l = 1, r = n, ans;
	while (l <= r) {
		int mid = (l + r) / 2;
		if (a[mid] == k) {
			ans = mid;
			break;
		}
		// 第一种情况
		if (a[mid] > k) r = mid - 1;
		// 第二种情况
		if (a[mid] < k) l = mid + 1;
		// 第三种情况
	}
```

> 根据上面的过程，不难发现二分查找就是每次将我们可能查找的区间分为两块，然后通过比较$a[mid]$和k的大小关系判断k在哪一边，由于是分成两块，因此称之为二分查找。

2. 时间复杂度分析

> 我们知道顺序查找的复杂度是$O(n)$的，那么二分查找的复杂度是多少呢?

> 一开始我们规定k所在的区间是$[1,n]$，即整个a数组，每一轮操作将当前区间分成两半，通过与$a[mid]$比较，确定k是在哪一半，然后将缩小查找区间为原来的一半。
> 由于每次查找都会减少一半长度的区间，那么进行log_2^n次操作后，区间长度就会变成0，算法结束。

> 那么我们得出结论，二分查找算法最多进行log_2^n次，所以时间复杂度是$O(log_2^n)$的，远远低于顺序查找的$O(n)$。

3. 优点和缺点

> 优点：查找的时间复杂度为是$O(log_2^n)$远好于$O(n)$。

> 缺点：查找数组中的元素要有序，而排序本身就至少要$O(nlog_2^n)$的复杂度。

三. 经典例题

1. 查找元素（1）

> 给定有序序列`1,2,4,6,7,10,11,15,19,21,23,27`，要求用二分查找寻找21在序列中排第几个。求出一共要查找多少轮，并写下每一轮的l,r,mid。

2. 查找元素（2）

> 输入n,k，和一个有n个元素的从小到大的有序整数序列a，a中元素各不相同，若k在有序序列中出现，则输出其位置，否则输出-1。

> 输入格式：
> 第一行两个整数n,k分别表示元素个数和待查找的数。
> 第二行n个数，表示有序序列a。
> $n \leq 10^5$
> $k,a_i \leq 10^9$

> 输出格式：
> 一个整数，表示k的位置或-1。

样例输入	样例输出
7 10 1 2 4 6 7 10 11	6

3. 寻找排名

> 输入n,k，和一个有n个元素的无序整数序列a，保证a中元素互不相同。问k是a中第几大的元素，保证k在a中出现。
> 用排序加二分实现。

> 输入格式：
> 第一行两个整数n,k分别表示元素个数和待查找的数。
> 第二行n个数，表示序列a。
> $n \leq 10^5$
> $k,a_i \leq 10^9$

> 输出格式：
> 一个整数表示k在a中的排名。

样例输入	样例输出
7 10 5 3 10 7 2 11 19	3

四. 提高巩固

1. 查找元素（3）

> 输入n, k，和一个有n个元素的从小到大的有序整数序列a，a中元素互不相同。k为完全平方数，问是否存在位置i满足$a_i^2 = k$，若存在则输出位置i否则输出-1。

> 输入格式：
> 第一行两个整数n, k分别表示元素个数和完全平方数。
> 第二行n个数，表示有序序列a。
> $n \leq 10^5$
> $k, a_i \leq 10^9$

> 输出格式：
> 一个整数，表示位置或-1。

样例输入	样例输出
7 49 1 2 4 6 7 10 11	5

2. 范围查找

> 输入n, k，和一个有n个元素的从小到大的有序整数序列a（可能出现重复元素）。问k在数组a中出现的最左端的位置和最右端的位置，分别用二分查找实现，保证k在a数组中出现。

> 输入格式：
> 第一行两个整数n, k分别表示元素个数和待查找的数。
> 第二行n个数，表示有序序列a。
> $n \leq 10^5$
> $k, a_i \leq 10^9$

> 输出格式：
> 一行两个整数l, r，分别表示k出现的最左端和最右端的位置。

样例输入	样例输出
7 7 1 2 7 7 7 10 11	3 5

3. 查找峰值

> 给定一个含n整数的序列a，a中元素互不相同，满足存在一个峰值点i，其左边的元素单调递增，右边的元素单调递减，a_i为序列的最大值，要求用二分查找找到峰值点是多少？

> 输入格式：
> 第一行一个整数n表示元素的个数。
> 第二行n个整数，表示序列a。

> $n \leq 10^5$
> $a_i \leq 10^9$

> 输出格式:
> 一个整数表示峰值点的位置。

样例输入	样例输出
7 1 2 4 6 5 3	4

> 样例解释:
> 6所在的位置4为峰值点。