

小马加编信息学教案(三十五)

区间动态规划

- [一. 课程内容](#)
- [二. 知识讲解](#)
 - [1. 区间动态规划](#)
- [三. 经典例题](#)
- [四. 提高巩固](#)

一. 课程内容

1. 区间动态规划

二. 知识讲解

1. 区间动态规划

动态规划的题目与模型数不胜数，其中比较常见的一种是区间动态规划。

区间动态规划的特点是，这一类问题一般是让你在一个序列之中做决策。决策一般只能在序列相邻元素之间做出，且对于决策间的先后顺序不太重要。对于这类题目，我们会设计状态 $f[i][j]$ 表示序列的第 i 个元素到第 j 个元素已经做完决策。状态中是否还要表示其他信息，需要根据具体题目确定。

这节课主要是通过题目来帮助理解 and 解决区间动态规划问题。

三. 经典例题

1. 回文字串

回文词是一种对称的字符串。任意给定一个字符串，通过插入若干字符，都可以变成回文词。此题的任务是，求出将给定字符串变成回文词所需要插入的最少字符数。

比如“Ab3bd”插入2个字符后可以变成回文词“dAb3bAd”或“Adb3bdA”，但是插入少于2个的字符无法变成回文词。

注：此问题区分大小写

输入格式：

一个字符串($0 < \text{strlen} \leq 1000$)

输出格式：

有且只有一个整数，即最少插入字符数

样例输入	样例输出
Ab3bd	2

2. 算式

给出N个数字，不改变它们的相对位置，在中间加入K个乘号和N-K-1个加号，（括号随便加）使最终结果尽量大。因为乘号和加号一共就是N-1个了，所以恰好每两个相邻数字之间都有一个符号。例如：

N=5, K=2, 5个数字分别为1、2、3、4、5，可以加成：

$$1 * 2 * (3 + 4 + 5) = 24$$

$$1 * (2 + 3) * (4 + 5) = 45$$

$$(1 * 2 + 3) * (4 + 5) = 45$$

.....

输入格式：

输入文件共有二行，第一行为两个有空格隔开的整数，表示N和K，其中($2 \leq N \leq 15, 0 \leq K \leq N-1$)。第二行为 N个用空格隔开的数字。

（每个数字在0到9之间）

输出格式：

输出文件仅一行包含一个整数，表示要求的最大的结果

最后的结果 $\leq \text{maxlongint}$

样例输入	样例输出
5 2 1 2 3 4 5	120

四. 提高巩固

1. 石子合并

在一个圆形操场的四周摆放N堆石子,现要将石子有次序地合并成一堆.规定每次只能选相邻的2堆合并成新的一堆，并将新的一堆的石子数，记为该次合并的得分。

试设计出1个算法,计算出将N堆石子合并成1堆的最小得分和最大得分.

输入格式:

数据的第1行试正整数N, $1 \leq N \leq 100$, 表示有N堆石子.第2行有N个数,分别表示每堆石子的个数.

输出格式:

输出共2行,第1行为最小得分,第2行为最大得分.

样例输入	样例输出
4	43
4 5 9 4	54

2. 能量项链

在Mars星球上, 每个Mars人都随身佩带着一串能量项链.在项链上有N颗能量珠.能量珠是一颗有头标记与尾标记的珠子, 这些标记对应着某个正整数.并且, 对于相邻的两颗珠子, 前一颗珠子的尾标记一定等于后一颗珠子的头标记.因为只有这样, 通过吸盘(吸盘是Mars人吸收能量的一种器官)的作用, 这两颗珠子才能聚合成一颗珠子, 同时释放出可以被吸盘吸收的能量.如果前一颗能量珠的头标记为m, 尾标记为r, 后一颗能量珠的头标记为r, 尾标记为n, 则聚合后释放的能量为 $m \times r \times n$, 新产生的珠子的头标记为m, 尾标记为n.

需要时, Mars人就用吸盘夹住相邻的两颗珠子, 通过聚合得到能量, 直到项链上只剩下一颗珠子为止.显然, 不同的聚合顺序得到的总能量是不同的, 请你设计一个聚合顺序, 使一串项链释放出的总能量最大.

例如: 设N=4, 4颗珠子的头标记与尾标记依次为(2,3)(3,5)(5,10)(10,2).我们用记号 \oplus 表示两颗珠子的聚合操作, $(j \oplus k)$ 表示第j,k两颗珠子聚合后所释放的能量.则第4、1两颗珠子聚合后释放的能量为:

$$(4 \oplus 1) = 10 \times 2 \times 3 = 60.$$

这一串项链可以得到最优值的一个聚合顺序所释放的总能量为:

$$((4 \oplus 1) \oplus 2) \oplus 3 = 10 \times 2 \times 3 + 10 \times 3 \times 5 + 10 \times 5 \times 10 = 710.$$

输入格式:

第一行是一个正整数N($4 \leq N \leq 100$), 表示项链上珠子的个数.第二行是N个用空格隔开的正整数, 所有的数均不超过1000.第i个数为第i颗珠子的头标记($1 \leq i \leq N$), 当 $i < N$ 时, 第i颗珠子的尾标记应该等于第 $i+1$ 颗珠子的头标记.第N颗珠子的尾标记应该等于第1颗珠子的头标记.

至于珠子的顺序, 你可以这样确定: 将项链放到桌面上, 不要出现交叉, 随意指定第一颗珠子, 然后按顺时针方向确定其他珠子的顺序.

输出格式:

一个正整数E($E \leq 2.1 \times 10^9$), 为一个最优聚合顺序所释放的总能量.

样例输入	样例输出
4 2 3 5 10	710