

## Umrechnung zwischen geographischen Koordinaten (Länge und Breite) und dem UTM-Format

### Vorbemerkungen

Im Amateurfunk ist weltweit die Angabe des eigenen Standortes in Form des 6-stelligen Maidenhead Locators üblich. Dieser läßt sich sehr einfach aus den geographischen Koordinaten Länge und Breite bestimmen. Neuere Karten (z. B. Wanderkarten des Bayerischen Vermessungsamtes von 2003 im Maßstab 1:25.000 und die Deutschland Karten 2004 des ADAC für seine Mitglieder im Maßstab 1:200.000 und auch die vom ADAC neu herausgebrachten Stadtatlanten im Maßstab 1:20.000) zeigen nicht mehr die gewohnten Koordinaten in Grad und Minuten, sondern nur noch das km-Netz der sog. UTM-Kartenprojektion.

UTM steht dabei für die **U**niversale **T**ransversale **M**erkatorprojektion. Die Umrechnung von UTM-Positionen aus der Karte in Länge und Breite (und umgekehrt) ist leider nicht trivial und erfordert entweder ein GPS-Gerät, das dieses Format unterstützt und die Eingabe von 'Wegpunkten' erlaubt, oder Excel-Arbeitsblätter, die man z. B. im Internet findet. Dabei bleibt allerdings der Umrechnungsvorgang dem Benutzer verborgen. Und man fragt sich, worin die Vorteile (oder Nachteile?) der Positionsangabe nach UTM liegen.

Diese Ausarbeitung soll dem Funkamateurler verständlich machen, was die UTM-Projektion ist, wie die Umrechnung funktioniert und was bei der Verwendung von UTM-Kartenmaterial zu beachten ist. Der Autor ist aber kein Experte auf dem Gebiet der Kartographie oder Vermessung, so daß die Darstellung des Sachverhaltes an vielen Stellen laienhaft sein wird - und damit hoffentlich allgemein verständlich.

### Bezugssysteme

Aus der Benutzung von GPS-Geräten, wie sie seit einigen Jahren im Handel sind, ist allgemein bekannt, daß die Positionen üblicherweise im WGS84-System angezeigt werden (WGS = World Geodetic System). Da die meisten in Gebrauch befindlichen Karten unterschiedliche - und vom WGS84 abweichende - Bezugssysteme verwenden, ist ggf. eine Umstellung auf ein anderes "Datum" erforderlich, damit die ermittelten Daten mit Positionen auf der Karte in Einklang stehen. Auch die manuelle "Korrektur" der WGS84-Position ist üblich. So findet man z. B. auf einer Seekarte der Kroatischen Adria von 1998 den Hinweis: "Mit GPS nach WGS84 ermittelte Koordinaten müssen um 0,01' nach Norden und 0,28' nach Osten "korrigiert" werden, damit sie mit dieser Karte übereinstimmen." Es ist also wünschenswert, wenn neuere Karten bereits auf das WGS84-Datum umgestellt sind und dies auf der Karte auch vermerkt ist.

In Europa wurde 1989 ein Bezugssystem eingeführt, das die Bezeichnung ETRS89 (European Terrestrial Reference System) trägt. Es basiert auf dem internationalen geodätischen Referenz-System GRS80. Zum Glück ist dieses mit dem WGS84 so gut wie identisch, denn die Abweichungen betragen nur 1..2 Meter. Es kann also insofern bei der GPS-Einstellung WGS84 bleiben.

### Die Universale Transversale Merkator Projektion (UTM)

Es gibt eine große Anzahl von Kartenprojektionsmethoden. Eine davon ist die UTM-Projektion, die insbesondere in den USA und innerhalb der NATO schon lange angewendet wird. Sie ist eng verwandt mit der in Deutschland üblichen Gauss-Krüger-Projektion.

Jede Projektion hat die Aufgabe einen (relativ kleinen oder auch größeren) Teil der gekrümmten Erdoberfläche möglichst verzerrungsarm auf eine ebene Fläche abzubilden (zu projizieren).

Bei der UTM-Projektion wird die Erde (gedanklich) so in einen Zylinder geschoben, daß sie den Zylinder mit einem ihrer Meridiane berührt. Man muss sich das so vorstellen, daß man einen Globus (Nordpol oben, Südpol unten) in ein passendes waagrecht liegendes durchsichtiges Rohr steckt. Das Rohr muss dazu den gleichen elliptischen Querschnitt haben wie die Erde, damit es den Globus an einem Meridian auf ganzer Länge berührt. Ein Meridian ist eine Linie konstanter geographischer Länge, wie z. B. die Linie 9 Grad Ost vom Nordpol bis zum Südpol.

Dieser Meridian verläuft im Übrigen mitten durch Deutschland und ist der Bezugsmeridian für die UTM Zone 32 in der der größte Teil Deutschlands liegt. Damit die Verzerrungen möglichst klein bleiben, wird die Erde in 60 Segmenten abgebildet, also um jeweils 6 Grad gedreht und dann um den neuen Bezugsmeridian herum als **getrennte** Karte abgebildet - für 9 Grad Ost also zwischen 6 Grad und 12 Grad Ost. Die Zone 31 geht demzufolge von 0 Grad (Greenwich) bis 6 Grad Ost mit 3 Grad E als Bezugsmeridian, Zone 33 von 12 Grad bis 18 Grad Ost mit 15 Grad E als Bezugsmeridian.

Da die Randbegrenzungen dieser einzelnen Projektionsstreifen (zwischen Süd- und Nordpol) gekrümmte Linien sind, ist es nicht möglich, zwei nebeneinander liegende Zonen "aneinander zu

kleben", um sie (genauer gesagt: Teile daraus) in **einer** Karte gemeinsam darzustellen. Macht man es doch, geht das nur in kleinen Teilbereichen, wenn die daraus resultierenden Fehler klein bleiben sollen. Unvermeidlich ist dabei, daß die Nord-Süd-Richtung mit zunehmendem Abstand vom Bezugsmeridian erheblich von der senkrechten Kartenseitenkante abweicht. Außerdem springen die Ost-West-Zahlenangaben des UTM-Formates an der Schnittpunktlinie plötzlich von einem Extrem ins andere (z.B. zwischen Bad Doberan und Rostock von 696 km auf 304 km), die Nordwerte bleiben dagegen gleich.

Ein weiterer Effekt der UTM-Projektion ist, daß Orte mit gleicher geographischer Breite nicht auf einer geraden waagerechten Linie liegen, sondern daß diese Linien (sofern dieses Netz überhaupt noch eingedruckt wird) von der Mitte des Bereiches aus (d. h. vom Bezugsmeridian aus) nach beiden Seiten hin ansteigen. In unseren Breiten sind das je etwa 4 km. Warum das so ist, wird später noch gezeigt.

## Das UTM Format

Eine Positionsangabe im UTM Format hat die Form

**32 P 666666 UTM 1234567**

Darin bedeuten

- 32 UTM-Zone 32 mit dem Bezugsmeridian 9 Grad Ost. Die Zonen zählen von 1 (180 bis 174 Grad West) in östlicher Richtung bis 60 (174-180 Grad E)
- P□ Teilbereich zwischen 8 Grad Nord und 16 Grad Nord. Den Teilbereichen von je 8 Grad sind Buchstaben zugeordnet, beginnend mit C (80 bis 72 Grad Süd) bis X (72 bis 80 Grad Nord) unter Auslassung der Buchstaben I und O. C bis M liegen auf der Südhalbkugel, N bis X nördlich des Äquators.
- 1234567□ Nord- oder Hochwert des Ortes in Meter. Für einen Ort auf dem Bezugsmeridian (und nördlich des Äquators) ist das die Länge des Meridianbogens gemessen vom Äquator bis zum Ort, multipliziert mit einem Skalenfaktor von 0,9996.
- 666666□ Ost- oder Rechts-Wert des Ortes. Er liegt in diesem Beispiel rund 166666 Meter östlich des Bezugsmeridians, denn am Bezugsmeridian beträgt der Ost-Wert immer genau 500000 Meter. Für Orte östlich oder westlich davon wird der Abstand zum "Offset" (wieder multipliziert mit dem Skalenfaktor von 0,9996) hinzu addiert oder abgezogen (West = minus, Ost = plus).

Der Skalenfaktor von 0,9996 mit dem alle in der Projektion ermittelten Meterangaben multipliziert werden müssen, bevor sie gültige UTM-Daten sind, wurde eingeführt, damit die Abweichung des Skalenfaktors in West-Ost-Richtung innerhalb einer UTM-Zone möglichst klein wird. So ist der Skalenfaktor etwa 180 km westlich und östlich des Bezugsmeridians gleich 1,0000 und am Rand der UTM-Zone 1,0010, wobei dieser Wert mit zunehmendem Abstand vom Äquator abnimmt. Ein willkommener Nebeneffekt ist, daß ohne diesen Skalenfaktor die Nordwerte am Pol über 9999999 Meter hinaus gehen würden. Die Südwerte rechnen übrigens vom Äquator aus "rückwärts", wobei der Äquator als 10 000 000 m angesetzt ist. 8 Grad Nord sind 0884298 und 8 Grad Süd demzufolge 9115702. Strenggenommen ist dies auch eine Offsetdarstellung, in der alle Nordwerte (ausgehend von 10 000 000) größer als 10 Millionen (also 8-stellig) sind, jedoch wird die führende 1 kurzerhand unterdrückt und Doppeldeutigkeiten durch die Kennbuchstaben der Teilzonen beseitigt.

In den Polarbereichen (90 bis 80 Grad Süd, Kennbuchstabe A und 80 bis 90 Grad Nord, Kennbuchstabe Z) wird anstelle des UTM-Formates das UPS-Format verwendet, auf das hier aber nicht näher eingegangen wird. UPS steht für die "**U**niversal **P**olar **S**terographic" Projection.

Um zu verstehen, wie die Nord-Süd- und Ost-West-Zahlenangaben in der UTM-Positionsangabe eines GPS-Gerätes oder auf der Karte ermittelt werden, folgt jetzt eine genauere Betrachtung des Projektionsverfahrens und der Berechnungsmethoden.

Dabei wird zunächst angenommen, dass die Erde kein Ellipsoid sondern eine Kugel ist, da die sphärische Projektion einerseits noch geschlossen berechenbar ist und andererseits weitere "Spezialitäten" der UTM-Projektion eindrucksvoll darstellbar sind.

## Die sphärische UTM-Projektion

Das Bild utm-sph.gif zeigt links oben einen Schnitt durch das Kugelmodell entlang eines Bezugsmeridians mit dem Ort B (auf dem Bezugsmeridian, geographische Breite  $\varphi$ ) und dem Ort E mit gleicher geographischer Breite wie B und der Länge  $\lambda$  (stark übertrieben dargestellt, denn  $\lambda$  kann in der Praxis ja nur maximal 3 Grad werden).

Gleichzeitig ist dieser Teil des Bildes auch ein Schnitt durch den Projektionszylinder, der ja den Bezugsmeridian auf seiner gesamten Länge berührt. Der Bezugsmeridian ist auf dem abgewickelten Projektionszylinder eine Gerade vom "Südpol bis zum Nordpol" - natürlich abzüglich der beiden Polarregionen, die durch die UPS-Projektion abgebildet werden.

Die Projektion des Ortes E auf den Zylinder ist E\*. Dieser Ort liegt auf einer geraden Linie, die senkrecht zum Bezugsmeridian verläuft und diesen am Ort F schneidet. Dies ist im Bild rechts oben als Abwicklung des Projektionszylinders dargestellt. Aus beiden Bildern ist deutlich zu sehen, dass der Ort E auf dem Projektionszylinder nicht mit der Breite  $\varphi$  des Ortes B sondern der (größeren) Breite  $\varphi_1$  des Ortes F abgebildet wird.

Das Bild unten links zeigt einen Schnitt durch den Breitenparallel des Ortes E. Auf einem Breitenparallel liegen alle Orte, die die gleiche geographische Breite  $\varphi$  haben. Gestrichelt ist der Äquator und die Verbindungslinie von E zu seinem Spiegelbild E' eingezeichnet.  $u_1$  ist der Radius des Breitenparallels (aus dem oberen Bild) und  $u_2$  und  $w$  sind Hilfsgrößen für die weiteren Berechnungen. Das Bild rechts unten schließlich zeigt einen Schnitt durch den Großkreis, auf dem der Ort E, sein Spiegelbild E' und der Ort F liegen. Im Bild oben links ist der Radius dieses Großkreises als gestrichelte Linie OE''F zu sehen, wobei O in beiden Bildern der Erdmittelpunkt ist. Außerdem ist der Schnitt durch die Projektionsebene  $-x \dots +x$  mit den Orten F und E\* dargestellt.

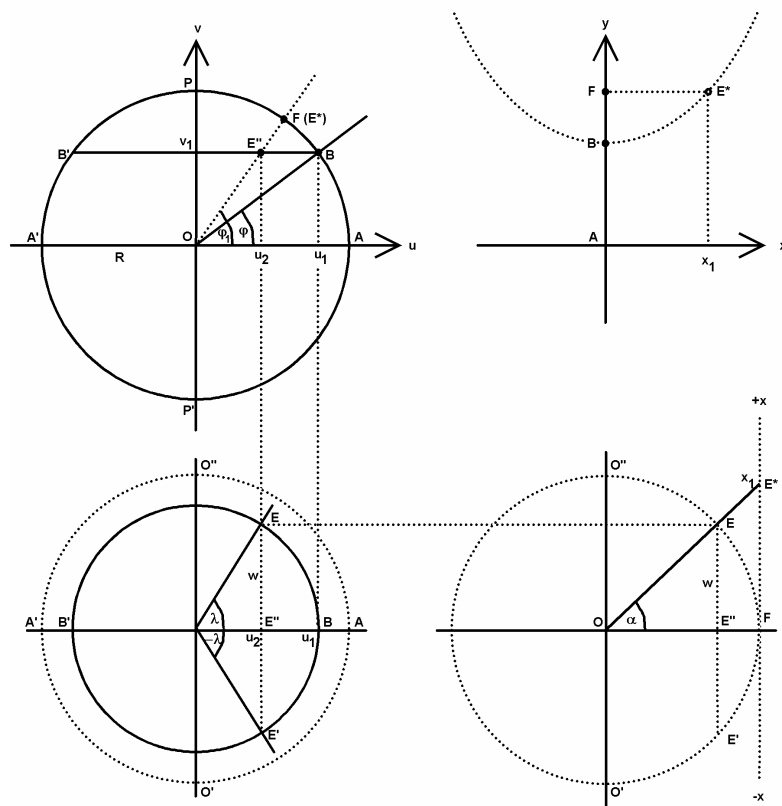


Bild utm-sph.gif - Ableitung der formelmäßigen Zusammenhänge im sphärischen Modell

### Mathematische Ableitung für den sphärischen Fall

Aus den erläuterten Abbildungen lassen sich alle erforderlichen Zusammenhänge ablesen:

- (1)  $u_1 = R \cdot \cos \varphi$
- (2)  $v_1 = R \cdot \sin \varphi$
- (3)  $u_2 = u_1 \cdot \cos \lambda$
- (4)  $w = u_1 \cdot \sin \lambda$
- (5)  $\alpha = \arcsin (w / R) = \arcsin (\cos \varphi \cdot \sin \lambda)$
- (6)  $x_1 = R \cdot \tan \alpha = R \cdot \tan (\arcsin (\cos \varphi \cdot \sin \lambda))$

$$(7) \quad \tan \varphi_1 = v_1 / u_2 = (R * \sin \varphi) / (R * \cos \varphi * \cos \lambda) = \tan \varphi / \cos \lambda$$

$$(7a) \quad \varphi_1 = \arctan (\tan \varphi / \cos \lambda)$$

Der UTM-Hochwert des Ortes E (und F) ist der Bogen des Winkels  $\varphi_1$  vom Äquator bis zum Ort F multipliziert mit dem Erdradius R (und dem hier weggelassenen Skalenfaktor  $k_0 = 0,9996$ )

$$(8) \quad y = R * \arcsin \varphi_1 = R * \arctan (\tan \varphi / \cos \lambda)$$

Die Formel (6) für der Ost-Wert  $x_1$  wird zweckmäßiger Weise noch mit Hilfe der Beziehung

$$\arcsin z = \arctan (z / (1 - z^2)^{1/2})$$

vereinfacht und lautet schließlich - ebenfalls ohne Skalenfaktor - allgemein

$$(6a) \quad x = R * \cos \varphi * \sin \lambda / (1 - \cos^2 \varphi * \sin^2 \lambda)^{1/2}$$

oder in Parameterdarstellung

$$(6b) \quad x = R * f(z) \quad \text{mit} \quad f(z) = z / (1 - z^2)^{1/2} \quad \text{und} \quad z = \cos \varphi * \sin \lambda$$

### Prüfung und Herstellung der Orthogonalität

Obige Formeln beschreiben die transversale Merkatorprojektion in ihrer "reinsten" Form. In der Praxis wird jede Art von Projektion aber noch an weiteren Faktoren gemessen, die für den jeweiligen Anwendungsfall von Bedeutung sein können. Dies sind z.B. die Richtungstreue (wichtig in der Seeschifffahrt), Flächentreue und Winkeltreue (Orthogonalität).

Der Flächentreue wurde durch den Skalenfaktor bereits teilweise Rechnung getragen. Offen ist aber, ob der rechte Winkel zwischen Nord-Süd- und Ost-West-Richtungen, wie er für wirkliche Flächentreue erforderlich ist, bei der reinen transversalen Merkatorprojektion erhalten bleibt und ob dies ggf. durch Modifikation der Formel für den Ost-West-Wert erreicht werden kann.

Damit die Kurven von  $x$  (für konstantes  $\lambda$ ) und  $y$  (für konstantes  $\varphi$ ) an jedem beliebigen Punkt auf einander senkrecht stehen (orthogonal sind) muss das Produkt ihrer Steigungen überall gleich -1 sein:

$$(9) \quad (\partial y / \partial \varphi) / (\partial x / \partial \varphi) * (\partial y / \partial \lambda) / (\partial x / \partial \lambda) = -1$$

Diese Beziehung lässt sich auch schreiben als

$$(10) \quad (\partial x / \partial \varphi) * (\partial x / \partial \lambda) = - (\partial y / \partial \varphi) * (\partial y / \partial \lambda)$$

Das Produkt der partiellen Ableitungen der Funktionen  $y = f(\varphi, \lambda)$  (6b) und  $x = f_1(\varphi, \lambda)$  (8) muss also zwei identische Formeln ergeben, die sich nur im Vorzeichen voneinander unterscheiden. Damit ist eine Überprüfung sehr einfach. Und bei fehlender Übereinstimmung ermöglicht diese Beziehung, die zu  $y = f(\varphi, \lambda)$  passende orthogonale Funktion  $x = g(\varphi, \lambda)$  zu bestimmen.

Für die Untersuchungen wird zur Vereinfachung  $R=1$  gesetzt. Somit ergibt sich für die Funktion (8) das Produkt der partiellen Ableitungen nach einiger Umrechnung zu

$$(8.1) \quad \partial y^2 / (\partial \varphi * \partial \lambda) = + \sin \varphi * \sin \lambda * \cos \varphi * \cos \lambda / (1 - \cos^2 \varphi * \sin^2 \lambda)^2$$

Für die Funktion (6b) erhält man

$$(6b.1) \quad \partial x^2 / (\partial \varphi * \partial \lambda) = - \sin \varphi * \sin \lambda * \cos \varphi * \cos \lambda / (1 - \cos^2 \varphi * \sin^2 \lambda)^3$$

Da der Exponent im Nenner im ersten Fall 2 und im zweiten Fall 3 ist, ist die Orthogonalität nicht erfüllt und es muss eine Funktion  $x = g(z)$  mit  $z = \cos \varphi * \sin \lambda$  gefunden werden, für die gilt

$$g'(z) = 1 / (1 - z^2)$$

denn es ist  $\partial z / \partial \varphi = - \sin \varphi * \sin \lambda$  und  $\partial z / \partial \lambda = \cos \varphi * \cos \lambda$

Diese Bedingung erfüllt die Area-Funktion (Umkehrfunktion des Tangens hyperbolicus)

$$g(z) = \operatorname{artanh} z$$

Damit muss (6a) bzw. (6b) ersetzt werden durch (6c)

$$(6c) \quad x = R * \operatorname{artanh} (\cos \varphi * \sin \lambda)$$

Interessant ist nun die Frage, in wie weit sich der Maßstabsfehler in x-Richtung - also in Abhängigkeit von  $\lambda$  - mit der neuen Funktion verändert hat. Es sollte ja im Idealfall bei  $\varphi = 0$  (Äquator)  $x = R * \arcsin(\lambda)$  sein, also  $x = R * \lambda$  mit  $\lambda$  im Bogenmaß. Dazu entwickelt man beide Formeln (6a) und (6c) für  $\varphi = 0$  und  $R = 1$  in eine Potenzreihe und erhält

$$(6a.2) \quad x = \lambda + \lambda^3 / 3 + \lambda^5 * 2 / 15 + \dots$$

$$(6c.2) \quad x = \lambda + \lambda^3 / 6 + \lambda^5 / 24 + \dots$$

Erfreulicher Weise hat die orthogonale Funktion (6c) nur den halben Fehler gegenüber der ursprünglichen Funktion (6a) wie man am Divisor des einflußreichsten Störgliedes  $\lambda^3$  sieht.

Zur korrekten UTM-Projektion gehört noch die Multiplikation des Ergebnisses von (8) und (6c) mit dem Skalenfaktor  $k_0 = 0,9996$ . Er bewirkt, dass Längen in der Nähe des Bezugsmeridians um 0,04% zu kurz abgebildet werden. Mit zunehmendem Abstand vom Bezugsmeridian steigt der Skalenfaktor von anfangs 0,9996 am Bezugsmeridian auf 1,0000 bei einer geogr. Länge von ca. 180 km vom Bezugsmeridian bis auf maximal 1,0010 bei  $\lambda = 3$  Grad am Äquator (Rand des Projektionsstreifens). Mit zunehmendem Abstand vom Äquator wird dieser Maximalfehler kleiner, erreicht bei einer geogr. Breite von ca.  $\varphi = 57,3$  Grad und  $\lambda = 3$  Grad den Wert 1,0000 und nimmt darüber hinaus weiter ab.

Die Formel für den Maßstabsfaktor  $k$  ergibt sich aus den Steigungen von (8) und (6c) bezüglich  $\varphi$  oder  $\lambda * \cos \varphi$

$$(11) \quad k = 0,9996 * ( (\delta y / \delta \varphi)^2 + (\delta x / \delta \varphi)^2 )^{1/2} \quad \text{oder}$$

$$(12) \quad k = 0,9996 * ( (\delta y / \delta \lambda)^2 + (\delta x / \delta \lambda)^2 )^{1/2} / \cos \varphi$$

und ist in beiden Fällen gleich und lautet

$$(13) \quad k = 0,9996 / (1 - \cos^2 \varphi * \sin^2 \lambda)^{1/2}$$

Auf die Herleitung der Umkehrfunktionen zu (6c) und (8) sei hier verzichtet. Man findet sie in [1]

$$(14) \quad \varphi = \arcsin [ \sin (y / (R * k_0)) / \cosh (x / (R * k_0)) ]$$

$$(15) \quad \lambda = \arctan [ \sinh (x / (R * k_0)) / \cos (y / (R * k_0)) ]$$

## Das Rotationsellipsoid der Erde und die UTM-Projektion

Die Herleitung von Berechnungsformeln für den elliptischen Fall ist erheblich komplexer und ist mir nur für den  $y$ -Wert (Nord-Süd-Wert) gelungen.

Das Bild utm-ell.gif (Seite 6) zeigt einen Schnitt durch das Erdellipsoid entlang des Bezugsmeridians PAP' bzw. PA'P'. Die Linie PP' ist die Polachse, AA' repräsentiert die Äquatorebene.

Die geographische Breite eines Punktes B auf dem Bezugsmeridian hat nicht etwa die Breite  $\alpha_1$  (Winkel BOA), sondern  $\varphi_1$ . Der Grund liegt darin, daß die Breite der Winkel ist, den die Tangente im Punkt B mit der Polachse bildet. In dieser Höhe über dem Horizont sehen wir auch den Polarstern! Die Senkrechte zur Tangente  $t$  heißt Normale  $n$  und bildet mit der Äquatorebene ebenfalls den Winkel  $\varphi_1$ .

$a$  ist die große Halbachse (Äquatorradius) und  $b$  die kleine Halbachse des Erdellipsoids.

Die Ellipsengleichung (16) lautet bekanntlich

$$(16) \quad (u/a)^2 + (v/b)^2 = 1$$

Einen besonders leichten Einstieg in die mathematische Betrachtung erhält man, wenn man von der zeichnerischen Konstruktion eines Punktes der Ellipse ausgeht. Dazu zeichnet man 3 konzentrische Kreise mit den Radien  $b$ ,  $a$  und  $a+b$ .

Eine beliebige Gerade vom Zentrum O der Kreise schneidet diese in den Punkten D, C und H. Zeichnet man weiter parallele Geraden zum Achsenkreuz durch die Punkte C und D, so schneiden sich diese im Punkt B. Mathematisch hat B also die Koordinaten

$$(17) \quad u_1 = a * \cos \tau_1$$

$$(18) \quad v_1 = b * \sin \tau_1$$

Um zu prüfen ob dieser Punkt tatsächlich ein Punkt auf der Ellipse ist, setzt man die Beziehungen (17) und (18) in (16) ein und erhält die Identität

$$(19) \quad \cos^2 \tau_1 + \sin^2 \tau_1 = 1$$

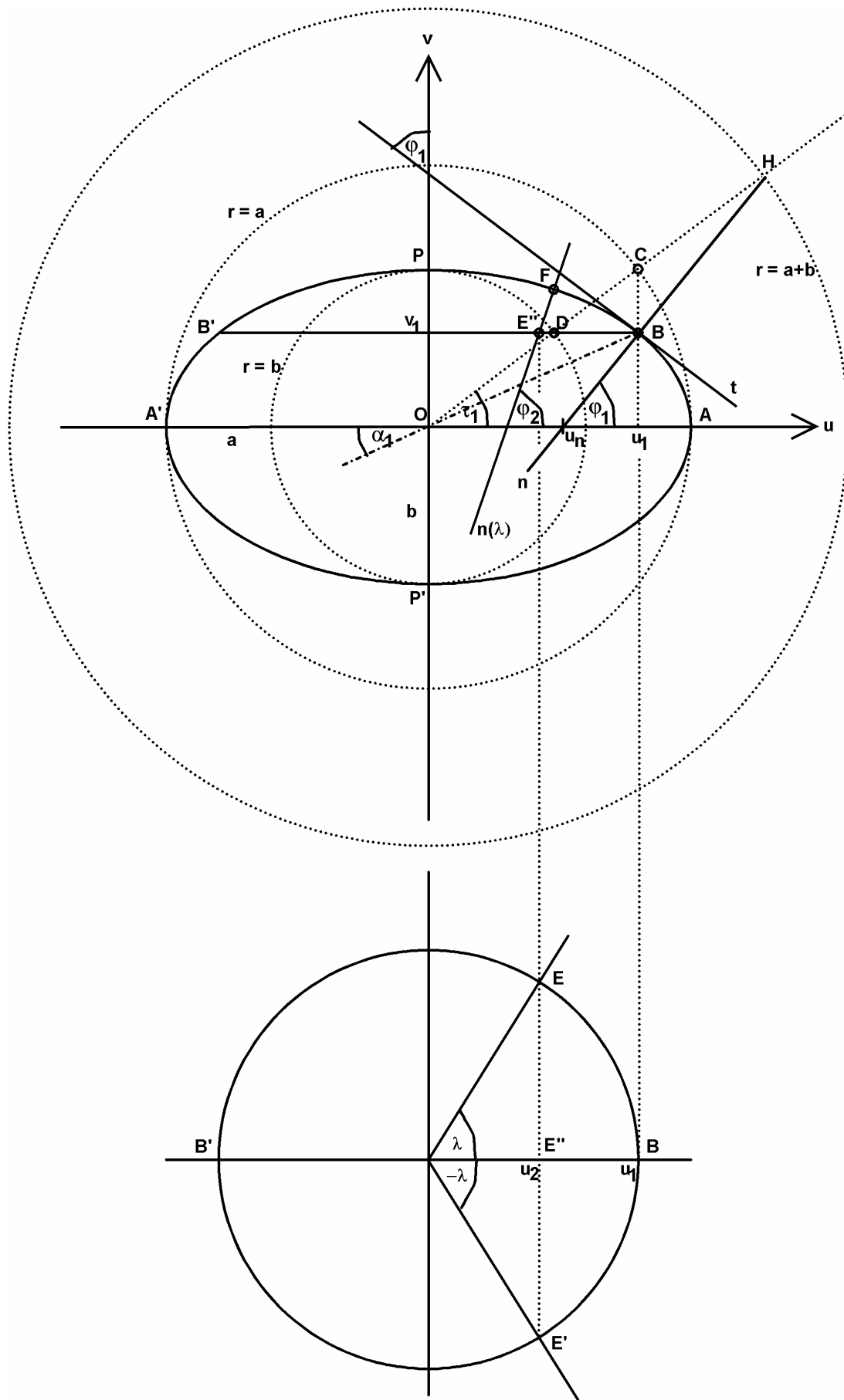


Bild utm-ell.gif : Definition der Winkel bei der elliptischen UTM-Projektion

Die Gerade vom Punkt B zum Punkt H auf dem Kreis mit dem Radius  $a+b$  steht in B senkrecht auf der Ellipse (und der Tangente im Punkt B) und wird Normale  $n$  genannt. Den Winkel  $\varphi_1$  erhält man aus den Differenzen der Koordinaten von H und B zu

$$(20) \quad \tan \varphi_1 = (v_H - v_1) / (u_H - u_1) = [(a+b) \cdot \sin \tau_1 - b \cdot \sin \tau_1] / [(a+b) \cdot \cos \tau_1 - a \cdot \cos \tau_1] = \tan \varphi_1 = a/b \cdot \tan \tau_1$$

Mit dem Quadrat der numerischen Exzentrizität  $e^2$

$$(21) \quad e^2 = (a^2 - b^2) / a^2$$

wird daraus

$$(22) \quad \tan \varphi_1 = \tan \tau_1 / (1 - e^2)^{1/2}$$

Auf ähnliche Weise erhält man auch den Winkel  $\alpha_1$  zu  $\tan \alpha_1 = v_1 / u_1 = b/a \cdot \tan \tau_1$  oder

$$(23) \quad \tan \alpha_1 = \tan \tau_1 \cdot (1 - e^2)^{1/2}$$

Zwischen den Winkeln  $\alpha$ ,  $\varphi$  und  $\tau$  besteht also ein fester Zusammenhang.  $\alpha$  ist immer etwas kleiner als  $\tau$  und  $\varphi$  immer etwas größer als  $\tau$ .

### Der UTM-Nord-Wert

Der UTM-Nord-Wert des Punktes B entspricht dem Teilstück des Ellipsenumfanges von A nach B und zwar je nach Lösungsansatz als Funktion von  $\tau$ ,  $\varphi$  oder  $\alpha$ . Die Berechnung dieser Bogenlänge führt auf eine nicht geschlossen lösbare Funktion, ein elliptisches Integral 2. Gattung, das auf einem PC durch numerische Integration berechenbar ist.

In der Parameterdarstellung der Ellipse (17) und (18) ist die Bogenlänge  $s$

$$(24) \quad s = \sum (u'^2 + v'^2)^{1/2} \Delta\tau$$

mit den Integrationsgrenzen  $\tau = 0$  und  $\tau = \tau_1$ . Mit den Ableitungen  $u' = -a \cdot \sin \tau$  und  $v' = b \cdot \cos \tau$  wird daraus

$$(25) \quad s = a \cdot \sum [1 - e^2 \cdot \cos^2 \tau]^{1/2} \Delta\tau$$

Dabei ist  $s$  in der Abwicklung des Projektionszylinders der aus der sphärischen Betrachtung bereits bekannte Hochwert  $y$ . Anstatt zuerst  $\tau$  aus  $\varphi$  mit Hilfe von (22) zu bestimmen und damit den Wert von  $y = s$  zu berechnen, kann man in (25) auch gleich  $\tau$  durch  $\varphi$  ersetzen und erhält die Formel

$$(26) \quad y = s = a \cdot (1 - e^2) \cdot f(\varphi) \quad \text{wobei} \quad f(\varphi) = \int [1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi]^{-3/2} \Delta\varphi$$

mit den Integrationsgrenzen  $\varphi = 0$  bis  $\varphi = \varphi_1$

Die numerische Berechnung von  $f(\varphi)$  erfolgt zweckmäßig mit der Simpsonschen Regel, da diese wesentlich schneller konvergiert als die einfache Euler-Formel (auch Trapezregel genannt). Mit jeder Halbierung der Schrittweite (Verdoppelung von  $n$ ) sinkt die Differenz zum vorhergehenden Ergebnis um den Faktor 16. Nutzt man dies aus und erzeugt eine modifizierte Simpson-Formel, die 1/15 der letzten Verbesserung schon "vorsorglich" hinzufügt, erhält man die gleiche Genauigkeit wie mit der 4-fachen Stützstellenanzahl ohne Prädiktion. Man spart sich also 75% der Rechenzeit. Die so modifizierte Simpsonsche Formel setzt voraus, daß  $n$  durch 4 teilbar ist. Mit

$$\Delta\varphi = \varphi_1 / n \quad n = 4, 8, 12, \dots$$

lautet sie

$$f(\varphi_1) = \Delta\varphi \cdot (14v_0 + 64v_1 + 24v_2 + 64v_3 + 28v_4 + 64v_5 + 24v_6 + 64v_7 + 28v_8 + \dots + 14v_n) / 45$$

Damit ist das Ergebnis mit  $n = 16$  schon genauer, als die üblicherweise in Excel-Arbeitsblättern verwendeten Näherungsformeln. Mit  $n = 64$  ist das Ergebnis bereits genauer als 1 mm.

Für die weiteren Berechnungen wird die Gleichung der Normalen  $n$  benötigt. Die Normale zum Punkt B schneidet die Achse  $AA'$  bei  $u_n$ , wobei sich  $u_n$  unter Verwendung von (22) und (23) leicht aus dem Ansatz

$$v_1 = u_1 \cdot \tan \alpha_1 \quad \text{und} \quad v_1 = (u_1 - u_n) \cdot \tan \varphi_1$$

durch gleich setzen bestimmen läßt. Die Beziehung lautet schließlich

$$(27) \quad u_n = e^2 \cdot u_1$$

und zeigt, daß  $u_n$  in einer festen Relation zum Radius des jeweils zugehörigen Breitenparallels steht. Unter Verwendung von  $u_n$  lautet die Gleichung der Normalen im Punkt B (28)

$$(28) \quad v = (u - u_n) \cdot \tan \varphi_1$$

Ersetzt man  $u_n$  unter Verwendung der bereits bekannten Beziehungen (27), (17) und (22), erhält man die allgemeine Normalengleichung (29) als Funktion von  $a$ ,  $e^2$  und  $\varphi$  (anstatt  $\varphi_1$ )

$$(29) \quad v = (u - a \cdot e^2 \cdot [1 + (1 - e^2) \cdot \tan^2 \varphi]^{-1/2}) \cdot \tan \varphi$$

Die Normale  $n$  bildet eine Achse einer Schnitt-Ellipse, die in B senkrecht auf dem UTM-Projektionszylinder steht. Alle Punkte des Erdellipsoids, die auf der Schnittellipse liegen, werden auf dem Projektionszylinder als Gerade abgebildet. Diese Gerade verläuft senkrecht zu dem Bezugsmeridian des UTM-Feldes. Damit haben alle diese Punkte den gleichen UTM-Nord-Wert wie der Punkt B.

Im Unterschied dazu haben alle Punkte, die auf dem durch B definierten Breitenparallel liegen, zwar die gleiche geographische Breite wie B, sie liegen aber - bis auf B selbst - nicht auf der durch die Normale  $n$  definierten Schnittellipse. Zu diesen Punkten gehören andere Schnittlinien, deren Normalen einen größeren Winkel  $\varphi_2(\lambda) > \varphi_1$  haben. Die Punkte auf dem Breitenparallel haben damit durchweg einen größeren UTM-Nord-Wert als der zentrale Punkt B. Damit wird auch klar, warum die Linien konstanter geographischer Breite zu den Rändern des UTM-Streifens hin ansteigen.

Eine andere Erklärung folgt aus der Angabe, daß die UTM-Projektion **orthogonal** ist. Und damit der rechte Winkel, den ein Breitenparallel mit jedem Meridian bildet, auch in der Karte ein rechter Winkel ist, muss die Linie konstanter Breite z. B. den Meridian am Rand des Projektionsstreifens "schräg aufwärts" treffen, da der Meridian "schräg nach innen" geneigt ist (auf der Nordhalbkugel östlich des Bezugsmeridians). Das hat übrigens zur Folge, daß die Lage der Windrose in unseren Breiten an den Rändern eines UTM-Streifens um gut 2 Grad gedreht ist. Eine UTM-Karte ist daher weder zur genauen Bestimmung von Himmelsrichtungen, noch zur Orientierung per Kompaß geeignet!

Die Lage der Schnittellipse auf der der Ort E ( $\varphi_1, \lambda$ ) liegt, wird durch ihre Normale  $n(\lambda)$  beschrieben, die mit der Äquatorebene den Winkel  $\varphi_2(\lambda)$  bildet. Man benötigt also den zu den gegebenen Winkeln  $\varphi_1$  und  $\lambda$  gehörenden Winkel  $\varphi_2(\lambda)$ . Mit  $\varphi_2(\lambda)$  ist auch der Punkt F auf dem Bezugsmeridian bestimmt und der Bogen AF berechenbar, mit dem der UTM-Nordwert von E in einer Karte einzuzichnen wäre. Zur Berechnung von  $\varphi_2(\lambda)$  setzt man in der allgemeinen Normalengleichung (29) die Bedingungen für den Punkt E" ein, die sich aus dem Bild utm-ell.gif ablesen lassen

$$v = v_1 \quad \text{und}$$

$$u = u_2 = u_1 \cdot \cos \lambda$$

wobei sich  $u_1$  und  $v_1$  mit (17), (18) und (22) in Abhängigkeit von  $\varphi_1$  berechnen lassen. Es wird

$$u_1 = a \cdot [1 + (1 - e^2) \cdot \tan^2 \varphi_1]^{-1/2}$$

$$v_1 = u_1 \cdot (1 - e^2) \cdot \tan \varphi_1$$

$$u_2 = u_1 \cdot \cos \lambda$$

Mit den nun bekannten Werten  $v_1$  und  $u_2$  erhält man eine Bestimmungsgleichung für  $\varphi_2$

$$(30) \quad v_1 = \{u_2 - a \cdot e^2 \cdot [1 + (1 - e^2) \cdot \tan^2 \varphi_2]^{-1/2}\} \cdot \tan(\varphi_2)$$

Daraus muss  $\varphi_2$  bestimmt werden. Statt die Gleichung 4. Grades für  $\tan \varphi_2$  zu lösen, ermittelt man  $\varphi_2$  am besten durch Iteration. Dazu wird (30) umgestellt in (31)

$$(31) \quad \tan \varphi_2 = v_1 / \{u_2 - a \cdot e^2 \cdot [1 + (1 - e^2) \cdot \tan^2 \varphi_2]^{-1/2}\}$$

und die Iteration mit dem aus der sphärischen Projektion (8) bekannten Anfangswert (32)



$$(32) \quad \tan \varphi_2 = \tan \varphi_1 / \cos \lambda$$

gestartet. Der Endwert ist nach spätestens fünf Iterationen erreicht (nach einer Iteration schon auf 7 Stellen genau). Den zu  $\varphi_2$  gehörigen Hochwert  $y_2$  erhält man wieder mit (26).

Vergleicht man die mit diesen Beziehungen ermittelten UTM-Nord-Werte mit Ergebnissen aus EXCEL-Arbeitsblättern von Dr. Don Stierman (Geology Department - University of Toledo) [3] oder tgachoki [4], so betragen die Abweichungen ein bis zwei Millimeter, was auch an der Ungenauigkeit der in den Excel-Arbeitsblättern verwendeten Näherungsformeln liegen kann. Voraussetzung ist aber, daß in allen Fällen das gleiche Bezugsellipsoid Verwendung findet. Zu empfehlen ist entweder das GRS80, das dem ETRS89 zu Grunde liegt oder aber das Bezugsellipsoid mit dem das WGS84 arbeitet. Beide unterscheiden sich nur geringfügig. Aus Gründen der Vergleichbarkeit mit meinem GARMIN GPS12 bevorzuge ich das WGS84. Die Daten [6] sind:

WGS84:  $a = 6378,137 \text{ km}$ ,  $f = 1:298,257223563$  und  $e^2 = 0,00669438$  (genau: 0,00669437999013)  
GRS80:  $a = 6378,137 \text{ km}$ ,  $f = 1:298,257222101$  und  $e^2 = 0,006694380023$

### Bestimmung der UTM-Ost-Werte

Die UTM-Ost-Werte entstehen - wie im sphärischen Fall - durch Projektion eines vom Bezugsmeridian abweichenden Ortes auf den Zylinder. Da im sphärischen Fall bereits nachgewiesen wurde, dass eine mathematisch korrekte Abbildung auf den Zylinder die Bedingung der Orthogonalität verletzt, erübrigt sich eine solche Untersuchung. Um die Formel für den x-Wert über die partiellen Ableitungen der Formel für den y-Wert zu bestimmen, müßte diese Formel in geschlossener - oder zumindest differenzierbarer - Form vorliegen, was nicht der Fall ist. Jedenfalls übersteigt diese Aufgabe meine mathematischen Fähigkeiten, so dass ich auf eine Herleitung verzichten muss. Ich muss mich daher - wie viele andere Anwender sicher auch - zumindest beim x-Wert (Ost- oder rechts-Wert) auf die Reihenentwicklungen verlassen, die in der Literatur [1] und [5] angegeben sind.

Betrachten möchte ich aber noch, ob die dort angegebene Reihenentwicklung für x mit der des sphärischen Falles am Äquator ( $\lambda = 0$ ) übereinstimmt und ob die Formel damit ebenfalls von der einer idealen Projektion abweicht.

Setzt man in der weiter unten angegebenen Reihenentwicklung für x die geographische Breite zu Null, erhält man

$$(33) \quad x = k_0 * a * [\lambda + \lambda^3 / 6 / (1-e^2) + \lambda^5 / 24 * (1 + 14e^2 / (5-5e^2)) + \dots]$$

Diese Formel stimmt mit der des sphärischen Falles (6c.2) überein, wenn man  $e = 0$  setzt und a und  $k_0$  mit 1 normiert

$$(6c.2) \quad x = \lambda + \lambda^3 / 6 + \lambda^5 / 24 + \dots$$

Wieso aber die Excentrizität schon in der Äquatorebene in den x-Wert eingeht, ist - zunächst zumindest - unverständlich, denn der Äquator ist ein Kreis und alle projizierten Punkte des Äquators liegen in der Karte auf einer Geraden. Die einzige Erklärung wäre, dass dies aus der Forderung nach Orthogonalität herrührt. Vielleicht ist ja einer der zufälligen Leser fachkundig genug mich in diesem Punkt aufzuklären. Über Hinweise zu den Zusammenhängen würde ich mich sicher freuen!

Auf jeden Fall möchte ich noch versuchen, die Orthogonalität der von Snyder [1] angegebenen Reihenentwicklungen zu überprüfen. Aber die Differentiationen und Multiplikationen der entstehenden Reihen wird eine etwas längliche Angelegenheit werden, wofür mir im Moment die Zeit fehlt.

### Umrechnungsformeln als Potenzreihen

John P. Snyder hat in seinem Standardwerk [1], das in vielen guten Bibliotheken verfügbar ist, leicht anzuwendende Potenzreihen für die Umrechnung zwischen geographischen Koordinaten und UTM-Koordinaten angegeben, deren Genauigkeit für die allermeisten praktischen Anwendungen ausreicht. Sie sind auch Grundlage für die Excel-Arbeitsblätter [3] und [4], auf die in der von Karen Nakamura im Internet zusammengestellten Sammlung [2] verwiesen wird. Genauere Formeln werden in [5] angegeben. Sie bestehen aus den von Snyder angegebenen Reihen mit einigen zusätzlichen Gliedern. Diese sind in Form der Ausdrücke  $G_1$  bis  $G_8$  angegeben, die bei Snyder zu Null zu setzen sind, dem interessierten Programmierer aber einen einfachen Zugang zu den Formeln mit Millimetergenauigkeit geben.

### Umrechnung von $\varphi$ und $\lambda$ in die UTM-Koordinaten $x$ und $y$

$k$  ist der Maßstabsfaktor am Ort ( $\varphi$ ,  $\lambda$ ) wobei  $\lambda$  nicht die tatsächliche Länge sondern die Abweichung vom Bezugsmeridian (positiv in östlicher Richtung) ist. Am Bezugsmeridian ist also  $\lambda = 0$   
Es werden - mit Ausnahme von  $E$  für  $e^2$  - die von Snyder benutzten Bezeichnungen verwendet.

$$k_0 = 0.9996$$

$$E = e^2 / (1 - e^2)$$

$$N = a / (1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi)^{1/2}$$

$$T = \tan^2 \varphi$$

$$C = E \cdot \cos^2 \varphi$$

$$A = \lambda \cdot \cos \varphi \quad \text{mit } \lambda \text{ in Radians} \quad (\lambda \text{ ist die Abweichung der Länge vom Bezugsmeridian)}$$

$$M = a \cdot [ (1 - e^2/4 - 3e^4/64 - 5e^6/256 - \dots) \cdot \varphi \\ - (3e^2/8 + 3e^4/32 + 45e^6/1024 + \dots) \cdot \sin 2\varphi \\ + (15e^4/256 + 45e^6/1024 + \dots) \cdot \sin 4\varphi \\ - (35e^6/3072 + \dots) \cdot \sin 6\varphi + \dots ]$$

$M$  ist die wahre Entfernung entlang des zentralen Meridians vom Äquator zur Breite  $\varphi$ .

$$x = k_0 N [ A + (1 - T + C) \cdot A^3/6 + (5 - 18T + T^2 + 72C - 58E + G_1) \cdot A^5/120 + G_2 ]$$

$$y = k_0 \{ M + N \cdot \tan \varphi \cdot [ A^2/2 + (5 - T + 9C + 4C^2) \cdot A^4/24 \\ + (61 - 58T + T^2 + 600C - 330E + G_3) \cdot A^6/720 ] + G_4 \}$$

$$k = k_0 [ 1 + (1 + C) / 2 \cdot A^2 + (5 - 4T + 42C + 13C^2 - 28E - 48C^2T + 4C^3 - 24C^3T) \cdot A^4/24 \\ + (61 - 148T + 16T^2) \cdot A^6/720 + \dots ]$$

mit  $\varphi$  in Radians.

Die Glieder höherer Ordnung nach Thomas [5] sind

$$G_1 = 13C^2 + 4C^3 - 64C^2T - 24C^3T$$

$$G_2 = (61 - 479T + 179T^2 - T^3) \cdot A^7/5040$$

$$G_3 = 445C^2 + 324C^3 - 680C^2T + 88C^4 - 600C^3T - 192C^4T$$

$$G_4 = (1385 - 3111T + 543T^2 - T^3) \cdot A^8/40320$$

Der Wert von  $x$  muss noch um den UTM-Offset von 500000 m erhöht und die UTM-Zone bestimmt werden, um die endgültigen UTM-Daten zu erhalten.

### Umrechnung der UTM-Koordinaten $x$ und $y$ in Länge $\varphi$ und Breite $\lambda$

$\lambda$  ist hier auch wieder nur die Abweichung der Länge vom Bezugsmeridian. In einem ersten Schritt wird die Fußpunktbreite  $\varphi_1$  des Ortes ( $\varphi, \lambda$ ) berechnet. Das ist die Breite eines Ortes auf dem Bezugsmeridian, der den gleichen  $y$ -Wert wie der Ort ( $\varphi, \lambda$ ) hat. Dazu werden die Hilfsgrößen  $k_0$ ,  $E_1$ ,  $M_1$  und  $\mu$  benötigt:

$$k_0 = 0.9996$$

$$E_1 = [1 - (1 - e^2)^{1/2}] / [1 + (1 - e^2)^{1/2}]$$

$$M_1 = y / k_0$$

$$\mu = M_1 / [a \cdot (1 - e^2/4 - 3e^4/64 - 5e^6/256 - \dots)]$$

$$\varphi_1 = \mu + (3E_1/2 - 27E_1^3/32 + \dots) \sin 2\mu + (21E_1^2/16 - 55E_1^4/32 + \dots) \sin 4\mu + \\ + (151E_1^3/96 + \dots) \sin 6\mu + (1097E_1^4/512 - \dots) \sin 8\mu$$

Weitere Abkürzungen ähnlich denen der umgekehrten Umrechnung (siehe weiter oben)

$$E = e^2 / (1 - e^2)$$

$$C_1 = E \cdot \cos^2 \varphi_1$$

$$T_1 = \tan^2 \varphi_1$$

$$N_1 = a / (1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi_1)^{1/2}$$

$$R_1 = a (1 - e^2) / (1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi_1)^{3/2}$$

$$D = x / (N_1 \cdot k_0)$$

In der letzten Formel ist für x der um 500000 m verringerte UTM-Ost-Wert einzusetzen.

Damit erhält man (im Bogenmaß)

$$\varphi = \varphi_1 - (N_1 / R_1 \cdot \tan \varphi_1) \cdot [D^2/2 - (5 + 3T_1 + 10C_1 - 4C_1^2 - 9E) \cdot D^4/24 + (61 + 90T_1 + 298C_1 + 45T_1^2 - 252E - 3C_1^2 + G_5) \cdot D^6/720 + G_6]$$

$$\lambda = [D - (1 + 2T_1 + C_1) / 6 \cdot D^3 + (5 - 2C_1 + 28T_1 - 3C_1^2 + 8E + 24T_1^2 + G_7) \cdot D^5/120 + G_8] / \cos \varphi_1$$

Die Glieder höherer Ordnung nach Thomas [5] sind

$$G_5 = -90C_1T_1^2 - 66C_1^2T_1 + 255C_1^2T_1^2 + 100C_1^3 + 84C_1^3T_1 + 88C_1^4 - 192C_1^4T_1$$

$$G_6 = - (1385 + 3633T_1 + 4095T_1^2 + 1574T_1^3) \cdot D^8/40320$$

$$G_7 = -4C_1^3 + 4C_1^2T_1 + 24C_1^3T_1$$

$$G_8 = - (61 + 662T_1 + 1320T_1^2 + 720T_1^3) \cdot D^7/5040$$

Ein Programm zur Umrechnung zwischen Geografischen und UTM-Koordinaten ist auf meiner Homepage verfügbar. Es ist in HTML und JavaScript geschrieben und wurde mit Mozilla Firefox V1.5.0.6 und MS Explorer V6.0 unter Windows 2000 getestet. Name des Programmes: utm\_calc.htm + utm\_calc.js

## Literatur

- [1] John P. Snyder, "Map Projections - A Working Manual", USGS Professional Paper 1395, second printing, 1989 (First printing: 1987)
- [2] Im Internet <http://www.gpsy.com/gpsinfo/geotoutm/> wird in einer umfangreichen Übersicht von Karen Nakamura mehrfach das Buch [1] als Referenz angeführt.
- [3] Excel-Arbeitsblatt von Don Stierman, Dr., Geology Department - University of Toledo (enthalten in der Ausarbeitung von Karen Nakamura [2]). Die Formeln von [1] für x und y sind jeweils ohne das letzte Glied der Reihenentwicklung realisiert und daher etwas ungenauer. Ausserdem werden westliche Längen positiv angesetzt und der Vorzeichenfehler bei der Subtraktion des Bezugsmeridians berücksichtigt.
- [4] tgachoki, Excel-Arbeitsblatt ebenfalls in [2]
- [5] Thomas, P. D., 1952, Conformal Projections in Geodesy and Cartography: U. S. Coast and Geodetic Survey Spec. Pub. 251, p. 2-3, 6 (Das Buch ist in Deutschland nur im Lesesaal der Universitätsbibliothek Kiel vorhanden)
- [6] Bauer, Manfred, Vermessung und Ortung mit Satelliten GPS und andere Satellitengestützten Navigationssysteme, Herbert Wichmann Verlag, Hüthig GmbH Co. KG, Heidelberg, 2003

Antworten und Anregungen erbitte ich an meine e-mail-Adresse beim Deutschen Amateur Radio Club e.V. <mailto:dh2mic@darf.de> oder auch per Telefon.

Hartwig Harm, DH2MIC, Ortsverband Vaterstetten, DOK C01, Tel. 089-4604768, [dh2mic@darf.de](mailto:dh2mic@darf.de)

Stand: 17.11.2008