GUÍA N° 5

1. Escribir un programa que le pemita resolver ecuaciones diferenciales usando los métodos de Euler, Euler modificado y Runge-kutta.

2. Resolver el siguiente problema de valores iniciales por el método de Euler

$$\frac{dy}{dx} = 2xy, \qquad y(0) = 1$$

   a) Utilizando un paso $h = 0{,}1$ avanzar 5 pasos el cálculo de la solución numérica.

   b) Calcular el error en $x = 0{,}5$ sabiendo que la solución exacta es $y(x) = e^{x^2}$

3. Resolver el siguiente problema de valores iniciales por el método de Euler

$$\frac{dy}{dt} = -y + t + 1, \qquad y(0) = 1$$

   a) Utilizando un paso $h = 0{,}1$ avanzar 10 pasos el cálculo de la solución numérica.

   b) Calcular el error en $t = 1$ sabiendo que la solución exacta es $y(t) = t + e^{-t}$

4. Dada la ecuación diferencial

$$\frac{du}{dt} + u = 0 \qquad u(0) = 1$$

   calcular $u(0{,}6)$ y $u(6)$ utilizando:

   a) Método Euler, con pasos h = 0.2 y h = 0.1.

   b) Método Euler modificado h = 0.2 y h = 0.1.

   c) Método Runge-Kutta con pasos h=0.2 y h=0.1

5. Transformar la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \mu \cdot \frac{du}{dt} + w^2 \cdot u = 0, \qquad \mu > 0$$

   en un sistema de ecuaciones de primer orden y resolver, tomando $\mu = w = 1$, para las condiciones iniciales; $u(0) = 1$, $u'(0) = 1$:

   a) Método Euler.

   b) Método Euler modificado.

6. Resolver el siguiente sistema utilizando un método numérico apropiado.

$$\begin{aligned} u' + 2000u - 1000w &= 1 \\ w' - u &= 0 \end{aligned}$$

   $u(0) = 0$, $w(0) = 0$

Anexo

Definamos un problema de valor inicial como:

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

- Método de Euler de un paso $t_{n+1} = t_n + h$ es:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n).$$

- Método de Euler modificado (Heun) de un paso $t_{n+1} = t_n + h$ es:

$$y^*_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n).$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y^*_{n+1})\right).$$

- Método RK4 para este problema esta dado por la siguiente ecuacion:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

donde

$$\begin{aligned}
k_1 &= f\left(t_n, y_n\right), \\
k_2 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right), \\
k_3 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right), \\
k_4 &= f\left(t_n + h, y_n + hk_3\right).
\end{aligned}$$

Así, el siguiente valor (y_{n+1}) es determinado por el presente valor (y_n) mas el producto del tamaño del intervalo (h) por una pendiente estimada. La pendiente es un promedio ponderado de pendientes: En efecto:

- $k1$ es la pendiente al principio del intervalo.
- $k2$ es la pendiente en el punto medio del intervalo, usando $k1$ para determinar el valor de y en el punto $t_n + h/2$ usando el método de Euler.
- $k3$ es otra vez la pendiente del punto medio, pero ahora usando $k2$ para determinar el valor de y.
- $k4$ es la pendiente al final del intervalo , con el valor de y determinado por $k3$.

Promediando las cuatro pendientes, se le asigna mayor peso a las pendientes en el punto medio:

$$\text{pendiente} = \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}.$$

El método RK4 es un método de cuarto orden lo cual significa que el error por paso es del orden de h5 , mientra que el error total acumulado tiene el orden h^4