GUÍA N° 6

Péndulo no lineal
Conside un péndulo que consiste en una varilla ideal de longitud l unido a una masa puntual m. Supongamos que el movimiento del péndulo se limita a un plano vertical, sobre él actua la fuerza de gravedad, una fuerza motriz fd y una fuerza resistiva fr. El movimiento del péndulo es descrita por la segunda ley de Newton a lo largo de la dirección tangencial al movimiento circunferencial.

$$ma_t = f_g + f_d + f_r$$

donde $f_g = -mgsen(\theta)$, θ en ángulo de la cuerda con la vertical $a_t = l\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$ es la aceleración tangencial
Considerando una fuerza externa periodica en el tiempo de la forma:
$f_d(t) = f_0cos(\omega_o t)$ y la fuerza resistiva $f_r = -kv$, donde $v = ld\theta/dt$ es la velocidad de la masa y k es una constante positiva.

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgsen(\theta) - kl\frac{d\theta}{dt} + f_0cos(\omega_o t)$$

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} + kl\frac{d\theta}{dt} + mgsen(\theta) = f_0cos(\omega_o t)$$

Rescribimos esta ecuación en forma adimensional escogiendo $\sqrt{l/g}$ como unidad de tiempo.
$t = \sqrt{l/g}t' \Rightarrow dt = \sqrt{l/g}dt' \Rightarrow dt^2 = (l/g)dt'^2$

$$ml\frac{d^2\theta}{(l/g)dt'^2} + kl\frac{d\theta}{\sqrt{l/g}dt'} + mgsen(\theta) = f_0cos(\omega_o' t')$$

$$mg\frac{d^2\theta}{dt'^2} + k\sqrt{lg}\frac{d\theta}{dt'} + mgsen(\theta) = f_0cos(\omega_o' t')$$

$$\frac{d^2\theta}{dt'^2} + q\frac{d\theta}{dt'} + sen(\theta) = bcos(\omega_o' t')$$

donde $q = \dfrac{k}{m}\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ y $b = \dfrac{f_0}{mg}$ Para transformar esta ODE de segundo orden en un conjunto de ODEs de primer orden hacemos $y_1 = \theta$ y $y_2 = \omega = d\theta/dt$, asi obtenemos

$$\frac{dy_1}{dt'} = y_2, \tag{1}$$

$$\frac{dy_2}{dt'} = -q\,y_2 - sen(y_1) + b\,cos(\omega_o'\,t'). \tag{2}$$

Por razones física confinamos los valores del ángulo θ entre 0 y 2π. En fortran esto es fácil usando la función intrínseca mod(y1,2.0*pi).
ACTIVIDADES:

1. Resuelva la ecuaciones (1) y (2) para el caso que no exitan fuerzas de roce ($q = 0$) y forzante ($b = 0$), esto es, considerando sólo el efecto no lineal. Barrra unos 10 grados entre 5 grados y 180 grados. Realice un gráfico con todos los plots en el espacio de fase (θ, ω), en el programa esto es (y_1, y_2). Las condiciones iniciales son $y_2(0) = 0$ y $y_1(0) =$ ángulo que estamos barriendo.

2. Resuelva la ecuaciones (1) y (2) para el caso que no exita fuerza motriz, esto es péndulo no lineal amortiguado. Realice un gráfico en el espacio de fase (θ, ω). Las condiciones iniciales son $y_2(0) = 0$ y $y_1(0) = \pi/2$, $q = 0.01$ y $b = 0$. ¿Qué ocurre si q aumenta?

3. Resuelva la ecuaciones (1) y (2) para el péndulo no lineal forzado y amortiguado. Aqui, el resultado no depende de los valores iniciales de y_1 y y_2. Así que guarde los valores en el tiempo de y_1 y y_2 apartir de 200 pasos en adelante. Realice un gráfico en el espacio de fase (θ, ω) para dos casos particulares:

   (a) $q = 0.5$, $b = 0.9$ y $\omega' = 2/3$.

   (b) $q = 0.5$, $b = 1.15$ y $\omega' = 2/3$.