Errores de redondeo en la representación de números reales:
NOTACIÓN CIENTÍFICA EN BASE 10

, 2007

Error absoluto y error relativo

Sea:

z el valor exacto de un número

z^* el valor aproximado de x.

Error absoluto: $\Delta_z = z - z^*$

Error relativo: $E_z = \left| \frac{z - z^*}{z} \right| \qquad \forall z \neq 0$

Notación científica en base 10

Consiste en expresar los números no nulos en la forma:

$$\underbrace{\pm 0.d_1 d_2 \ldots . d_s \ldots .}_{\text{mantisa}} \bullet 10^{e}$$

exponente

con: $d_1 \neq 0$, $d_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ **y** $e \in \mathbb{Z}$

El número 0 se expresa con todos los dígitos de la mantisa nulos y con cualquier valor del exponente

Notación científica en base 10

Ejemplos:

$$-13457.258 \equiv -0.13457258 \bullet 10^{5}$$

Mantisa: - 0.13457258
Exponente: 5

$$0.002379 \equiv +0.2379 \bullet 10^{-2}$$

Mantisa: + 0.2379
Exponente: -2

$$\frac{-2}{3} \equiv -0.66666\ldots\ldots \bullet 10^{0}$$

Mantisa: - 0.6666....
Exponente: 0

$$\pi \equiv +0.3141592\ldots. \bullet 10^{1}$$

Mantisa: + 0.3141592...
Exponente: 1

Sistemas de números (en base 10) en coma flotante normalizada

Expresan los números en notación científica pero:

1º) Limitando el valor de los exponentes entre m y M.

2º) Utilizando mantisas con s dígitos decimales

La condición 1ª implica que sólo se puedan representar números no nulos cuyo valor absoluto esté comprendido entre ciertas cotas.

La condición 2ª , junto a la 1ª, implica que:

- ***Sólo existe un número finito de números.***
- ***Las mantisas de los números reales con más dígitos decimales deben ser aproximadas por otras con s dígitos.***

Números máquina (en base 10)

El conjunto de todos los números con mantisas formadas por s dígitos decimales y exponentes comprendidos entre m y M se representa por:

Inicial de "Float"

$$F(s+1,\ m,\ M,\ 10)$$

s dígitos decimales en la mantisa

Base de numeración utilizada

Menor exponente permitido

Mayor exponente permitido

A estos números se les llamará NÚMEROS MÁQUINA

Números máquina (en base 10)

Ejemplo:

$$F(2,\ -1,\ 1,\ 10)\ \equiv$$

$$\equiv \{0,\ \pm 0.1\bullet 10^{-1},\ \pm 0.2\bullet 10^{-1},\ \pm 0.3\bullet 10^{-1},\ \pm 0.4\bullet 10^{-1},\ \pm 0.5\bullet 10^{-1},$$
$$\pm 0.6\bullet 10^{-1},\ \pm 0.7\bullet 10^{-1},\ \pm 0.8\bullet 10^{-1},\ \pm 0.9\bullet 10^{-1},$$
$$\pm 0.1\bullet 10^{0},\ \pm 0.2\bullet 10^{0},\ \pm 0.3\bullet 10^{0},\ \pm 0.4\bullet 10^{0},\ \pm 0.5\bullet 10^{0},$$
$$\pm 0.6\bullet 10^{0},\ \pm 0.7\bullet 10^{0},\ \pm 0.8\bullet 10^{0},\ \pm 0.9\bullet 10^{0},$$
$$\pm 0.1\bullet 10^{1},\ \pm 0.2\bullet 10^{1},\ \pm 0.3\bullet 10^{1},\ \pm 0.4\bullet 10^{1},\ \pm 0.5\bullet 10^{1},$$
$$\pm 0.6\bullet 10^{1},\ \pm 0.7\bullet 10^{1},\ \pm 0.8\bullet 10^{1},\ \pm 0.9\bullet 10^{1}\}$$

Sólo hay N = 55 números.

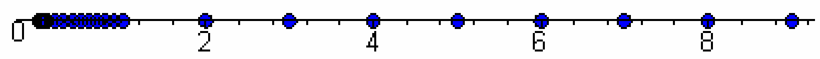
El mayor de ellos es C = 9.

El positivo menor no nulo es c =0.01.

No todos los números consecutivos distan lo mismo.

Números máquina (en base 10)

Distribución de los números positivos de F(2, -1, 1, 10)



Los de mayor valor absoluto son más distantes entre sí

Propiedades de los números de F(s+1, m, M, 10)

*) Número de números máquina de F(s+1, m, M, 10):

$$N = \left[18 \bullet (M - m + 1) \bullet 10^{(s-1)}\right] + 1$$

*) Mayor número máquina de F(s+1, m, M, 10):

$$C = 0.999...9 \bullet 10^{M}$$

*) Menor número máquina positivo de F(s+1, m, M, 10):

$$c = 0.100...0 \bullet 10^{m}$$

*) Siendo e el exponente de un número máquina de F(s+1,m,M,10) la distancia entre él y el siguiente en valor absoluto es:

$$d = 10^{e-s}$$

Aproximación de números reales expresados en base 10 en coma flotante normalizada

Técnicas de aproximación de mantisas de la forma:

$$\pm 0.d_1 d_2 \ldots d_s d_{s+1} \ldots .$$

por mantisas de s dígitos

Truncado: $\pm 0.d_1 d_2 \ldots d_s d_{s+1} \ldots . \approx \pm 0.d_1 d_2 \ldots d_s$

Redondeo:

$$\pm 0.d_1 d_2 \ldots d_s d_{s+1} \ldots . \approx \begin{cases} \pm 0.d_1 d_2 \ldots d_s & \text{si } d_{s+1} < 5 \\ \pm\left\{ \begin{array}{l} (0.d_1 d_2 \ldots d_s + \\ +0.0\ 0\ \ldots 1\ ) \end{array} \right\} & \text{si } d_{s+1} \geq 5 \end{cases}$$

Aproximación de números reales expresados en base 10 en coma flotante normalizada

Ejemplos:

$$x = \frac{20}{3} = 0.666....66... \bullet 10^{1}$$

Truncando a mantisas de 5 decimales: $x^* = 0.66666 \bullet 10^{1}$

Redondeando a mantisas de 5 decimales: $x^* = 0.66667 \bullet 10^{1}$

$$x = \frac{-1}{2^{8}} = -0.390625 \bullet 10^{-2}$$

Truncando a mantisas de 5 decimales: $x^* = -0.39062 \bullet 10^{-2}$

Redondeando a mantisas de 5 decimales: $x^* = -0.39063 \bullet 10^{-2}$

Propiedades de la aproximación por truncado

Sean:

$$z = \pm 0.d_1 d_2 \ldots d_s d_{s+1} \ldots \bullet 10^{e} \quad \text{(número que se aproxima)}$$

$$z^* = \pm 0.d_1 d_2 \ldots d_s \bullet 10^{e} \quad \text{(número máquina de } F(s+1, m, M, 10)$$

obtenido aproximando z por truncado)

Se verifica:

$$|\Delta_z| = |z - z^*| \le 10^{e-s}$$

$$E_z = \left|\frac{z - z^*}{z}\right| \le 10^{1-s} \qquad \forall z \ne 0$$

Propiedades de la aproximación por redondeo

Sean:

$$z = 0.d_1 d_2 \ldots d_s d_{s+1} \ldots \bullet 10^{e}$$ (número que se aproxima)

$$z^* = 0.d'_1\, d'_2 \ldots d'_s \bullet 10^{e}$$ (número máquina de F(s+1, m, M, 10) obtenido aproximando z por redondeo)

Se verifica:

$$\left|\Delta_z\right| = \left|z - z^*\right| \le \frac{1}{2} \bullet 10^{e-s}$$

$$E_z = \left|\frac{z - z^*}{z}\right| \le \frac{1}{2} \bullet 10^{1-s} \qquad \forall z \ne 0$$

La unidad de redondeo de F(s+1, m, M, 10)

De las propiedades anteriores se tiene que:

$\forall z \neq 0$:

$$E_z = \left| \frac{z - z^*}{z} \right| \leq u = \begin{cases} 10^{1-s} & \text{aproximando por truncado} \\ \frac{1}{2} \bullet 10^{1-s} & \text{aproximando por redondeo} \end{cases}$$

UNIDAD DE REDONDEO DE **F(s+1, m, M, 10)**

<u>Propiedad.</u>

$\forall z \neq 0$ **sea** $\delta_z = \dfrac{z^* - z}{z} \Leftrightarrow z^* = (1 + \delta_z) \bullet z$

Se verifica que: $|\delta_z| \leq u$

Overflow y underflow de F(s+1, m, M, 10)

NO pueden aproximarse por un número máquina no nulo del sistema F(s+1, m, M, 10) :

*** Los números reales con valor absoluto superior o igual a:**

$$N_{OVERFLOW} = \begin{cases} 0.10\ldots0 \bullet 10^{M+1} & \text{(truncando)} \\ 0.99\ldots95 \bullet 10^{M} & \text{(redondeando)} \end{cases}$$

Dígito decimal (s+1)

*** Los números reales no nulos con valor absoluto inferior a:**

$$n_{UNDERFLOW} = \begin{cases} 0.10\ldots0 \bullet 10^{m} & \text{(truncando)} \\ 0.99\ldots95 \bullet 10^{m-1} & \text{(redondeando)} \end{cases}$$

Dígito decimal (s+1)

Overflow y underflow de F(s+1, m, M, 10)

Sólo pueden aproximarse por números máquina no nulos del sistema F(s+1, m, M, 10) aquellos números reales z para los que se verifique:

$$n_{UNDERFLOW} \leq |z| < N_{OVERFLOW}$$

Si $|z| \geq N_{OVERFLOW}$ ⟶ ***ERROR DE OVERFLOW***

Si $|z| < n_{UNDERFLOW}$ ⟶ ***ERROR DE UNDERFLOW***

⇢ ***ASIMILACIÓN A 0.***