# Computación Científica II
# Errores de redondeo en la representación de números reales:

Concepción, Agosto, 2007

# FUENTES DE ERROR EN LOS MÉTODOS NUMÉRICOS

## Error del método:

Debido a la aproximación de las ecuaciones, funciones, .... para evaluarlas mediante operaciones aritméticas elementales (sumas, restas, multiplicaciones, divisiones).

**Ejemplo:** $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + ..... + \frac{x^n}{n!} + .... = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$ *(Método Exacto)*

*(Método Numérico)* $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + ..... + \frac{x^n}{n!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!}$$

**Error del método:** $$R_e(x) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = \frac{x^{(n+1)}}{(n+1)!} \bullet e^{\xi}$$

# FUENTES DE ERROR EN LOS MÉTODOS NUMÉRICOS (2)

## Error de representación de los números reales:

Debido a la imposibilidad de manejar infinitos decimales y a la necesidad de aproximar los números por otros con un número finito de cifras.

**Ejemplo:** $x = \frac{2}{3} = 0.666666.....\overset{\frown}{6}....$

$\hat{x} = 0.666666$

**(Truncando a 6 decimales)**

$\hat{x} = 0.666667$

**(Redondeando a 6 decimales)**

***NOTA: Se denominarán errores de redondeo***

## Otras fuentes de error:

Errores en la medición de los datos.

Errores en el modelo matemático de partida.

Errores en la programación de los algoritmos.

……

# OBJETIVOS DEL TEMA

**1º. Conocer cómo se originan los errores de redondeo.**

**2º. Analizar cómo se propagan los errores de redondeo.**

**3º. Conocer y aplicar estrategias que minimicen el efecto de los errores de redondeo en el diseño de algoritmos numéricos.**

# EJEMPLOS DE MOTIVACIÓN

1°. Calcular $e^{\pi/2}$ mediante los (n+1) primeros términos de su desarrollo en serie de Taylor en torno a 0. Elegir n de forma que se anule el error del método al trabajar con 4 decimales.

**Solución:**

$$R_e\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{i}}{i!}=\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{(n+1)}}{(n+1)!}\bullet e^{\xi}\qquad \xi\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$$

$$R_e\left(\frac{\pi}{2}\right)\leq\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{(n+1)}}{(n+1)!}\bullet e^{\pi/2}\leq\frac{(1.58)^{(n+1)}}{(n+1)!}\bullet e^{1.58}$$

# EJEMPLOS DE MOTIVACIÓN (2/17 )

**Para asegurar que, trabajando con 4 decimales, no influye el error del método basta con obligar a que:**

$$R_e\left(\frac{\pi}{2}\right) \leq \frac{(1.58)^{(n+1)}}{(n+1)!} \bullet e^{1.58} < 10^{-4} \quad \Rightarrow \quad \boxed{n = 10}$$

**<u>CONCLUSIÓN</u>: El algoritmo numérico dado por la fórmula**

$$e^{\pi/2} \approx \sum_{i=0}^{10} \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^i}{i!}$$

**proporcionaría el valor exacto de los cuatro primeros decimales de $e^{\pi/2}$ ..... ¡¡ SI NO FUESE POR LA EXISTENCIA DE ERRORES DE REDONDEO ! !**

# EJEMPLOS

$$\frac{\pi}{2} = 1.5707963267948966193.... \longrightarrow a = 1.5707$$

(Truncando) $\Delta_{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - a \sim O(10^{-4})$

$$\frac{\left(\pi/2\right)^2}{2} = 1.2337005... \qquad \frac{a^2}{2} = 1.23354... \longrightarrow \frac{a^2}{2} = 1.2335$$

(Truncando)

$$\frac{\left(\pi/2\right)^3}{3!} = 0.64596... \qquad \frac{a^3}{3!} = 1.2335 \bullet \frac{a}{3} = 0.645819.. \longrightarrow \frac{a^3}{3!} = 0.6458$$

(Truncando)

..... Hay errores del orden $O(10^{-4})$ en todos los sumandos .....

# EJEMPLOS DE MOTIVACIÓN (4/17 )

| n | $a^i$ / i! | $(\pi/2)^i$ / i! |
|---|---|---|
| 0 | 1.0000 | 1.00000.. |
| 1 | 1.5707 | 1.57079.. |
| 2 | 1.2335 | 1.23370.. |
| 3 | 0.6458 | 0.64596.. |
| 4 | 0.2535 | 0.25366.. |
| 5 | 0.0796 | 0.07969.. |
| 6 | 0.0208 | 0.02086.. |
| 7 | 0.0046 | 0.00468.. |
| 8 | 0.0009 | 0.00091.. |
| 9 | 0.0001 | 0.00016.. |
| 10 | 0.0000 | 0.00001.. |

# EJEMPLOS DE MOTIVACIÓN (5/17 )

Valor exacto: $e^{\pi/2} = 4.810477....$

Valor aproximado: $e^{\pi/2} \approx 4.8095$

**OBSERVACIÓN:**

*Tres de los cuatro decimales calculados son incorrectos.*

**Ejercicio propuesto:**

Repetir el ejercicio redondeando los números reales (en Lugar de truncarlos) a 4 decimales.

# *EJEMPLOS*

2°. Calcular $I_n = \int_0^1 x^n \bullet \sin(x) \bullet dx$ para distintos valores de n

con 10 decimales significativos.

**Solución:**

$$I_1 = \int_0^1 x \cdot \sin(x) \bullet dx =$$

$$= -x \cdot \cos(x)\Big]_0^1 + \int_0^1 \cos(x) \cdot dx = -\cos(1) + \sin(1)$$

$$I_1 = 0.30116867893...$$

$$\downarrow$$

$$A_1 = 0.3011686789$$

# EJEMPLOS DE MOTIVACIÓN (7/17 )

$$I_2 = \int_0^1 x^2 \cdot \sin(x) \bullet dx =$$

$$= -x \cdot \cos(x)\Big]_0^1 + 2 \cdot \int_0^1 x \cdot \cos(x) \cdot dx = -\cos(1) + 2 \cdot \sin(1) - 2$$

$$I_2 = 0.22324427548393...$$

$$\downarrow$$

$$A_2 = 2232442755$$

# EJEMPLOS DE MOTIVACIÓN (8/ 17)

**Cálculo exacto de las integrales posteriores:**

$$I_n = \int_0^1 x^n \cdot \sin(x) \cdot dx =$$

$$-x^n \cdot \cos(x)\Big]_0^1 + n \cdot (n-1) \int_{-1}^{0} x^{n-2} \cdot \sin(x) \cdot dx = -\cos(1) + n \cdot (n-1) \cdot I_{n-2}$$

**Ej:** $I_3 = -\cos(1) + 3 \cdot 2 \cdot I_1 = 0.1770985749\ldots..$

$I_4 = -\cos(1) + 4 \cdot 3 \cdot I_2 = 0.1466503275\ldots..$

**Cálculo aproximado de las integrales posteriores:**

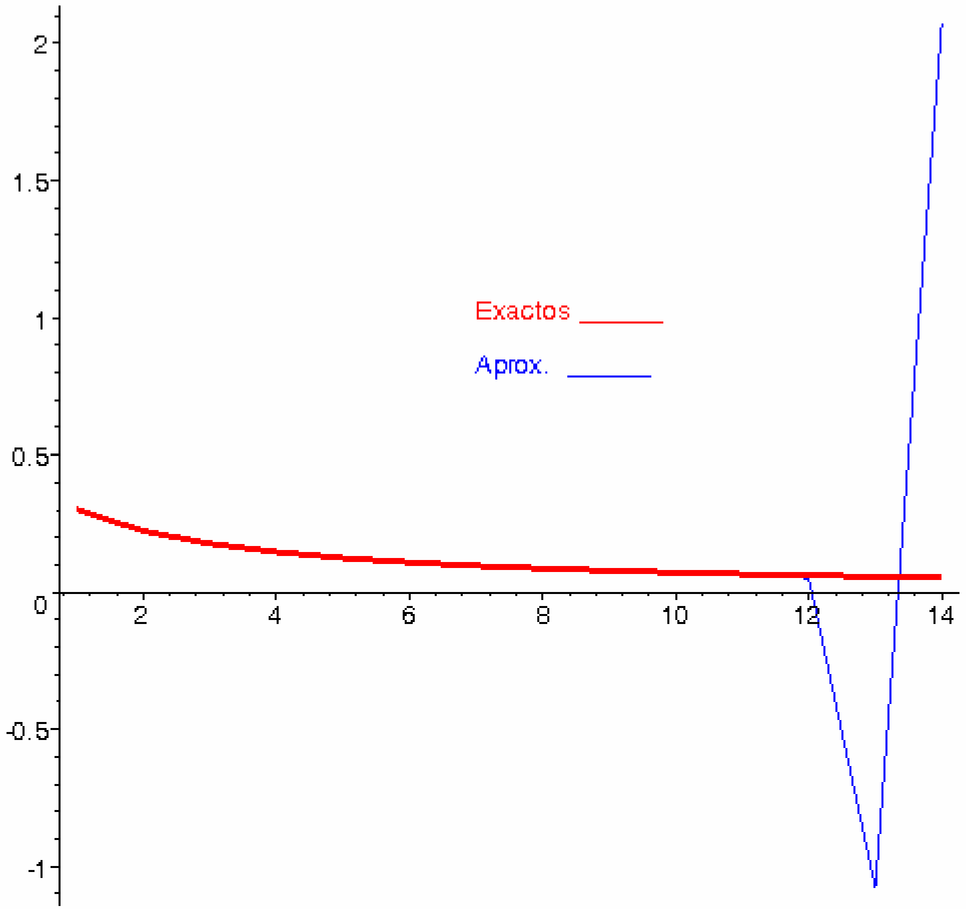
$$A_n = -\cos(1) + n \cdot \sin(1) - n \cdot (n-1) \cdot A_{n-2} =$$

$$= -\ 0.54030230586814 + n \cdot 0.841470984807897 - n \cdot (n-1) \cdot A_{n-2}$$

… redondeado a 10 decimales

| n | Valor exacto ($I_n$) | Valor aproximado ($A_n$) | $\vert I_n - A_n \vert$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.3011686789.... | 0.3011686789 | $0.3\ldots\cdot10^{-10}$ |
| 2 | 0.2232442754... | 0.2232442754 | $0.8\ldots\cdot10^{-10}$ |
| 3 | 0.1770985749... | 0.177098576 | $0.1..\cdot10^{-8}$ |
| 4 | 0.1466503275... | 0.146650327 | $0.6..\cdot10^{-9}$ |
| 5 | 0.1250811198... | 0. 125081098 | $0.2..\cdot10^{-7}$ |
| 6 | 0.1090137762... | 0.109013793 | $0.1..\cdot10^{-7}$ |
| 7 | 0.0965875548... | 0.096588472 | $0.9..\cdot10^{-6}$ |
| 8 | 0.0866941002... | 0.086693165 | $0.9..\cdot10^{-6}$ |
| 9 | 0.0786326061… | 0.078566573 | $0.6..\cdot10^{-4}$ |
| 10 | 0.0719385184… | 0.072022692 | $0.8..\cdot10^{-4}$ |
| 11 | 0.0662918492… | 0.073555497 | $0.7..\cdot10^{-2}$ |
| 12 | 0.0614650713… | 0.0503504168 | $0.1..\cdot10^{-1}$ |
| 13 | 0.0572920121… | -1.07583703 | $0.1..\cdot10^{1}$ |
| 14 | 0.0536485025… | 2.075832904 | $0.2\ldots\cdot10^{1}$ |
| 15 | 0.0504399076… | 238.0075388 | $0.2\ldots\cdot10^{3}$ |
| 16 | 0.0475928480… | -485.2766636 | $0.4\ldots\cdot10^{3}$ |
| …. | ………………… | …………….. | …………. |

# EJEMPLOS



# EJEMPLOS

## Análisis de la evolución del error de redondeo

$$I_1 = A_1 + \Delta_1 \qquad I_2 = A_2 + \Delta_2$$

$$I_3 = -\cos(1) + 3\cdot\sin(1) - 3!\bullet I_1 = \underbrace{-\cos(1) + 3\cdot\sin(1) - 3!\bullet(A_1}_{A_3} + \Delta_1) =$$

$$= A_3 - 3!\bullet\Delta_1$$

$$I_4 = -\cos(1) + 4\cdot\sin(1) - \frac{4!}{2}\cdot I_2 = \underbrace{-\cos(1) + 4\cdot\sin(1) - \frac{4!}{2}\cdot(A_2}_{A_4} + \Delta_2) =$$

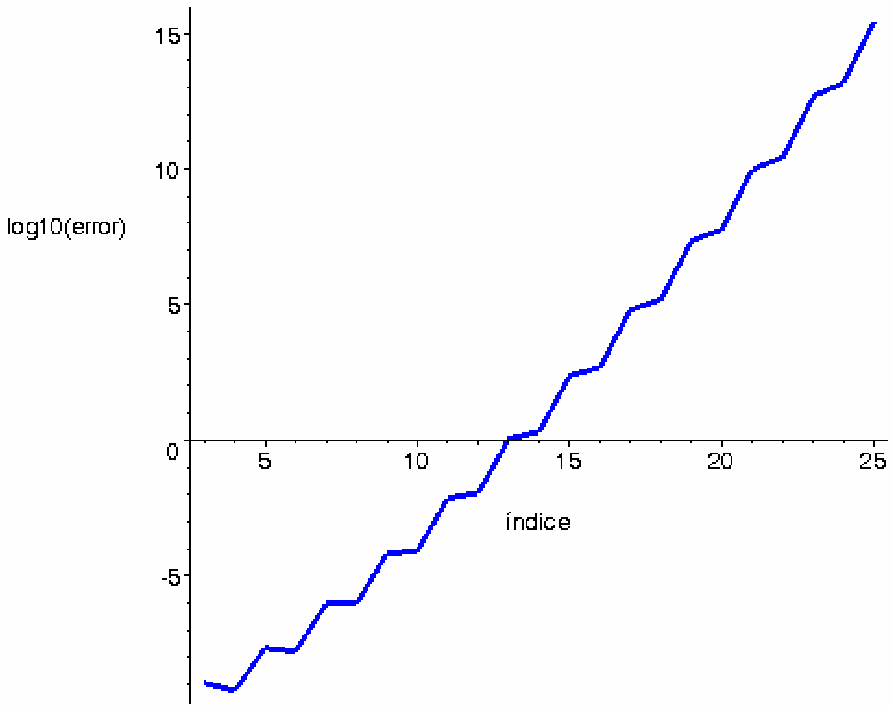
$$= A_4 - \frac{4!}{2}\cdot\Delta_2$$

......

$$I_n = A_n + \alpha_n\cdot\Delta \quad \text{con} \quad \alpha_{\wedge n} = \begin{cases} (-1)^{(n-1)/2}\cdot n! & \text{si n es impar} \\ (-1)^{(n+2)/2}\cdot\dfrac{n!}{2} & \text{si n es impar} \end{cases}$$

# EJEMPLOS DE MOTIVACIÓN (12/ 17)

## Análisis de la evolución del error de redondeo



## *EJEMPLOS*

**Ejercicio propuesto:**

Otra forma de calcular consiste en actuar "en retroceso". Para ello se tiene que:

$$I_n = -\cos(1) + n\cdot\sin(1) - n\cdot(n-1)\cdot I_{n-2} \Rightarrow I_{n-2} = \frac{-\cos(1) + n\cdot\sin(1) - I_n}{n\cdot(n-1)}$$

con lo que, partiendo de un valor aproximado $A_n$ y $A_{n-1}$ se calculará:

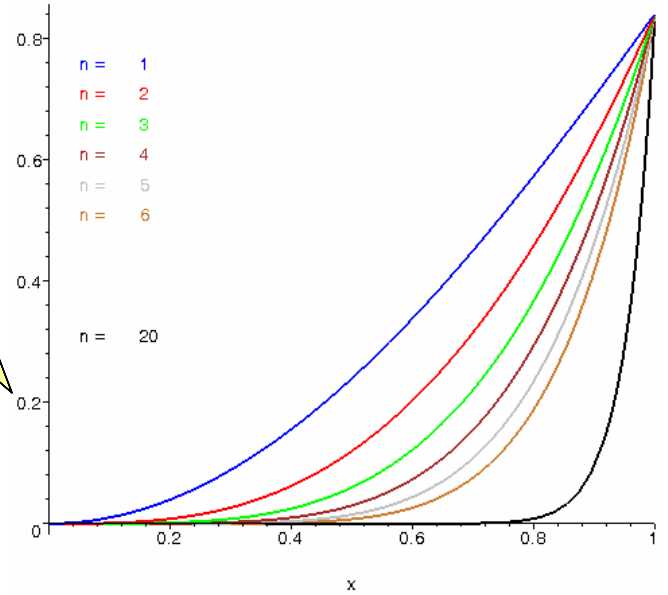
$$A_{i-2} = \frac{-\cos(1) + n\cdot\sin(1) - A_i}{i\cdot(i-1)} \qquad (i = n, n\text{-}1, n\text{-}2, ..., 3)$$

Sabiendo[1] que $0 < I_n < 1/(n+1)$, para n suficientemente Alto puede tomarse $A_n \approx 0$ y $A_{n-1} \approx 0$

*(1) ver gráficas de la proyección siguiente*

# EJEMPLOS DE MOTIVACIÓN (14/ 17)

Representación gráfica en [0, 1] de $x^n \cdot sen(x)$ para $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$, $n = 6$ y $n = 20$.




**SE PIDE:**

a) Toma $A_{25} = A_{24} = 0$ y calcula los valores de $A_{23}$ , $A_{22}$ , ......., $A_1$.

b) Analiza la evolución del error.

# EJEMPLOS DE MOTIVACIÓN (15/ 17)

3°. Resolver, trabajando con 3 decimales, el sistema:

$$\begin{cases} 98 \bullet x + 293.97 \bullet y = -195.97 \\ \frac{2}{3} \bullet x + 2.01 \bullet y = \frac{2}{3} - 2.01 \end{cases}$$

**Solución:**

Las soluciones exactas del sistema exacto son $x = 1$ e $y = -1$.

Sistema aproximado (redondeando a la 3ª cifra decimal):

$$\begin{cases} 98.000 \bullet x + 293.970 \bullet y = -195.970 \\ 0.667 \bullet x + 2.010 \bullet y = -1.343 \end{cases}$$

Las soluciones exactas del sistema aproximado son $x = 1$ e $y = -1$.

.... PERO RESOLVÁMOSLO REDONDEANDO A 3 DECIMALES

# EJEMPLOS

$$\begin{cases} 98.000 \bullet x + 293.970 \bullet y = -195.970 \\ 0.667 \bullet x + 2.010 \bullet y = -1.343 \end{cases}$$

Ecuación E1

Ecuación E2

(E2) ← (E2) - (0.667 / 98.000).(E1)

$$\begin{cases} 98.000 \bullet x + 293.970 \bullet y = -195.970 \\ \left(2.010 - \frac{0.667}{98.000} \bullet 293.970\right) \bullet y = -1.343 + \frac{0.667}{98.000} \bullet 195.970 \end{cases}$$

0.007

-2.058

+1.372

-0.048

0.029

# EJEMPLOS DE MOTIVACIÓN (17/ 17)

Luego:

$$\begin{cases} 98.000\bullet x + 293.970\bullet y = -195.970 \\ -0.048\bullet y = 0.029 \end{cases}$$

de donde:

$$y = \frac{0.029}{-0.048} = -0.604$$

$$x = \frac{-195.970 - 293.970\bullet y}{98.000} = \frac{-195.970 + 177.558}{98.000} = \frac{-18.412}{98.000} = -0.188$$

... ¡ que no tienen nada que ver con las soluciones exactas !