Error de pérdida de significado: Ejemplo.

Ejemplo:

Derivada exacta

$$f'(x^*) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x^*+h) - f(x^*)}{h}$$

Derivada numérica:

$$f'(x^*) \approx F^* = \frac{f(x^*+h) - f(x^*)}{h}$$

En general, cuanto menor sea el valor de h más parecidos serán los valores de f'(x*) y F* .....

.... si no fuese porque los errores de pérdida de significado pueden hacer que el número máquina H que aproxima a (x* + h - x*) sea distinto a h con lo que la fórmula numérica se convierte en:

$$f'(x^*) \approx F^* = \frac{f(x^*+H) - f(x^*)}{h}$$

que deja de ser una buena aproximación de la derivada.

Error de pérdida de significado: Ejemplo.

Ilustrémoslo con la función $f(x) = e^x$ evaluando su derivada en el punto $x^* = 1$ y trabajando con números máquina del sistema de números máquina F(5, -99, 99, 10).

Los resultados que se obtienen para distintos valores positivos del entero i se recogen en la tabla de la próxima diapositiva en la que se utiliza la siguiente NOTACIÓN,

h : 10^{-i} (incremento usado en el denominador)

Z : Número máquina que aproxima 1+h

H: Valor de Z - 1

(incremento que realmente se usa en el numerador)

Aprox: Número máquina obtenido por: $\text{Aprox} = \dfrac{f(Z) - f(1)}{h}$

Error de pérdida de significado: Ejemplo.

Mejora la aproximación al reducir h

La reducción del valor de h empeora la aproximación obtenida

i	$h=10^{-i}$	Z	H	f'(1)	Aprox.
0	1.0	2.000	1.0	2.718	4.671
1	0.1	1.100	0.1	2.718	2.859
2	0.01	1.010	0.01	2.718	2.732
3	0.001	1.001	0.001	2.718	2.719
4	0.0001	1.000	0.000	2.718	0.000
5	0.00001	1.000	0.000	2.718	0.000

Para valores de h suficientemente pequeños el error de pérdida de significado hace que el número máquina Z que aproxima a (x^*+h) coincida con el número máquina x^*

Error de pérdida de significado: Ejemplo.

Forma práctica de cálculor aproximaciones numéricas de derivadas primeras:

Dado un valor de h evaluar el número máquina $Z = (x^* + h)$ y el número máquina $H = Z - x^*$. Si $H \neq 0$ se utiliza la fórmula numérica:

$$f'(x^*) \approx F^* = \frac{f(Z) - f(x^*)}{H}$$

Operaciones con números reales.

A los errores anteriores debe añadírseles, en general, el error que previamente se comete al aproximar un número real por un número máquina. Por ejemplo, en el producto de números reales:

$$a^* = a\bullet(1+\delta_a) \qquad b^* = b\bullet(1+\delta_b) \qquad a^*\odot b^* = a^*\bullet b^*\bullet(1+\delta_{a^*.b^*})$$

$$a^*\odot b^* = a\bullet b\bullet(1+\delta_a)\bullet(1+\delta_b)\bullet(1+\delta_{a^*.b^*})$$

$$a^*\odot b^* \approx a\bullet b\bullet(1+\delta_a+\delta_b+\delta_{a^*.b^*})$$

$$|a^*\odot b^*| \le |a\bullet b|\bullet(1+3\bullet u)$$

Error de cancelación en la resta de números reales.

Al restar dos números reales representados por sendos números máquina"muy parecidos" pueden cancelarse decimales de la mantisa obteniéndose como resultado un número máquina con un error relativo respecto al resultado exacto mucho mayor que los errores relativos cometidos en la aproximación de los números con los que se opera. Este efecto se conoce con el nombre de

ERROR DE CANCELACIÓN.

Error de cancelación en la resta de números reales: ejemplo.

En el sistema F(6, -99, 99, 10) se tiene:

$$a = 2/3 \qquad a^* = 0.66667 \bullet 10^{0} \qquad \delta_a = \left|\frac{a - a^*}{a}\right| = 0.5 \bullet 10^{-5}$$

$$b = 141/212 \qquad b^* = 0.66509 \bullet 10^{0} \qquad \delta_b = \left|\frac{b - b^*}{b}\right| = 0.6 \bullet 10^{-5}$$

$$a - b = \frac{1}{636} = 0.1572327... \bullet 10^{-2} \longrightarrow (a-b)^* = 0.15723 \bullet 10^{-2}$$

$$a^* - b^* = 0.15800 \bullet 10^{-2} \qquad \delta_{a-b} = \left|\frac{(a-b)^* - (a^* - b^*)}{(a-b)^*}\right| = 0.488 \bullet 10^{-2}$$

Un error relativo MIL VECES MAYOR que los errores en losvalores de partida.

Error de cancelación en la resta de números reales.

Propiedad

Si a y b son dos números reales positivos tales que en la operación (a - b) se anulan m decimales de la mantisa, trabajando en el sistema F(s, m, M, 10) se verifica que:

$$\left|\frac{(a-b)-(a^*-b^*)}{(a-b)}\right| \leq 10^{\mu-s}$$

CONSECUENCIA:

Cuanto mayor sea el número de decimales que se anula en la mantisa del número obtenido al restar dos números reales más elevada es la COTA del error relativo del número máquina obtenido al realizar dicha operación.