Programación y Métodos Numéricos
Resolución de ecuaciones no lineales:
Método de bipartición

agosto, 2007

El método de bipartición (1)

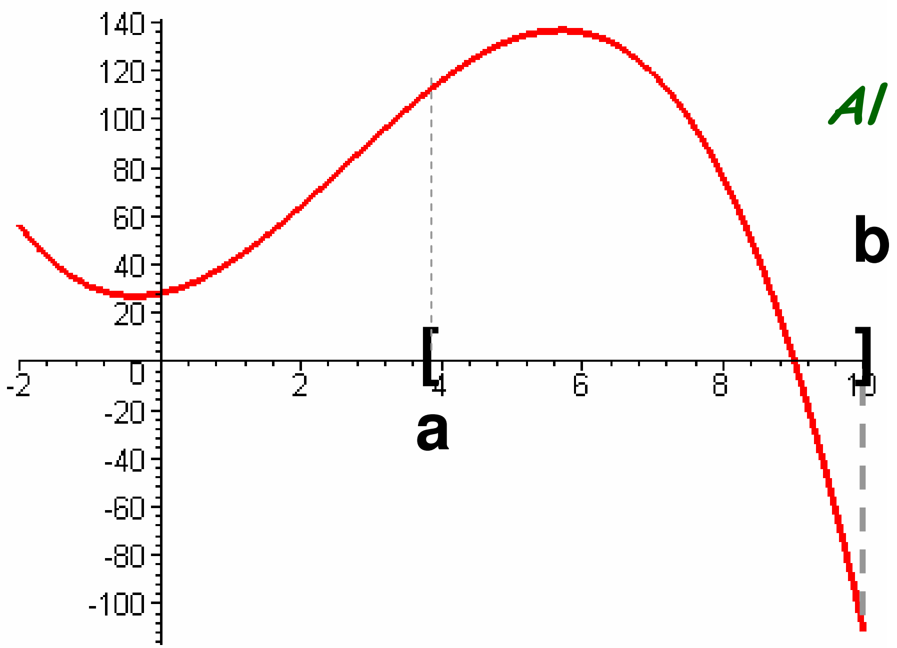
f(x) CONTINUA en [a, b]
f(a).f(b) < 0

(Teorema de Bolzano)

En [a, b] hay un número impar de raíces.

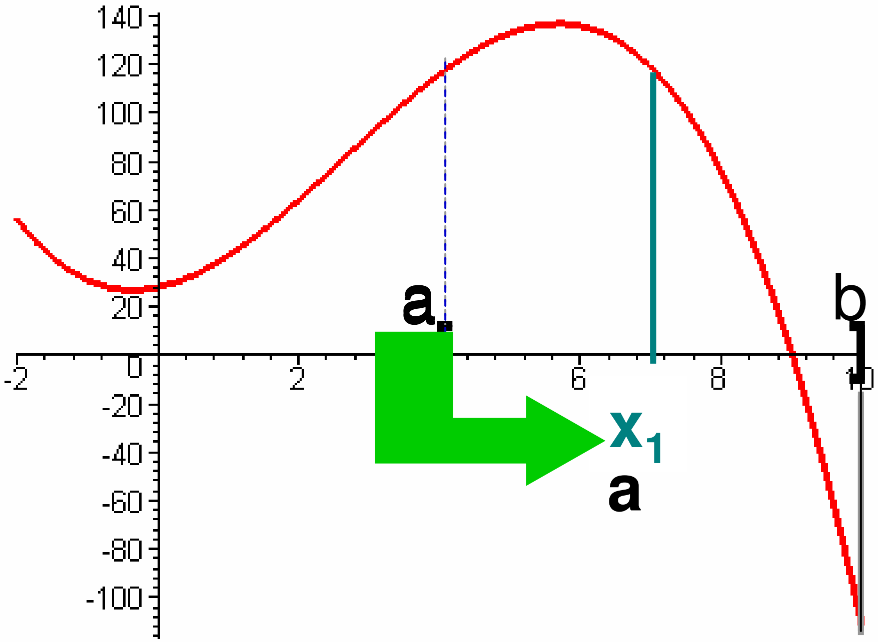
Al menos hay una raíz

Condiciones suficientes para que el método funcione con éxito



El método de bipartición (2)

*** Cálculo de las raíces de:**



Primera iteración:

Punto medio:

$$x_1 = \frac{a+b}{2}$$

Evaluación de la función en el punto medio $f(x_1)$

Determinación del nuevo intervalo de búsqueda

Si $(f(x_1).f(a) < 0)$ entonces: $b \leftarrow x_1$.

Si $(f(x_1).f(a) > 0)$ entonces: $a \leftarrow x_1$. ← (En el dibujo)

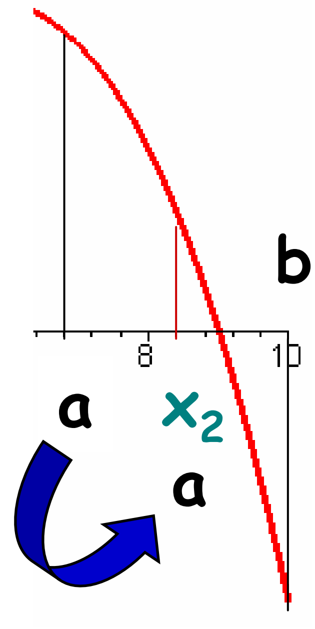
El método de bipartición (3)

Segunda Iteración:

Punto medio:

$$x_2 = \frac{a+b}{2}$$

Evaluación de la función en el punto medio $f(x_2)$



Determinación del nuevo intervalo de búsqueda

Si $(f(x_2).f(a) < 0)$ entonces: $b \leftarrow x_2$.

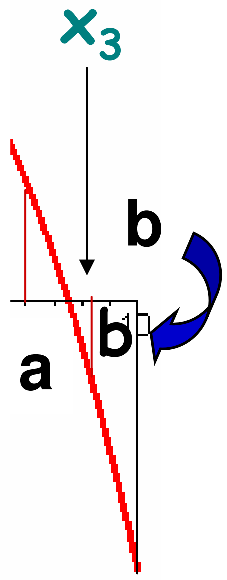
Si $(f(x_2).f(a) > 0)$ entonces: $a \leftarrow x_2$. ← — *(En el dibujo)*

El método de bipartición (4)

Tercera Iteración:

Punto medio:

$$x_3 = \frac{a+b}{2}$$



Evaluación de la función en el punto medio $f(x_3)$

Determinación del nuevo intervalo de búsqueda

Si ($f(x_3).f(a) < 0$) entonces: $b \leftarrow x_3$. ← (En el dibujo)

Si ($f(x_3).f(a) > 0$) entonces: $a \leftarrow x_3$.

El método de bipartición (5)

Dados dos puntos a y b (a < b) y la función f(x) continua en el intervalo [a, b] y tal que f(a).f(b) < 0

Para i = 1, 2, ...

$$x \leftarrow \frac{a+b}{2}$$

Si (f(a).f(x) > 0) *entonces:*

a ← x

Si no: *Si* (f(a).f(x) < 0) *entonces:*

b ← x

Si no:

x es raíz

Fin condición.

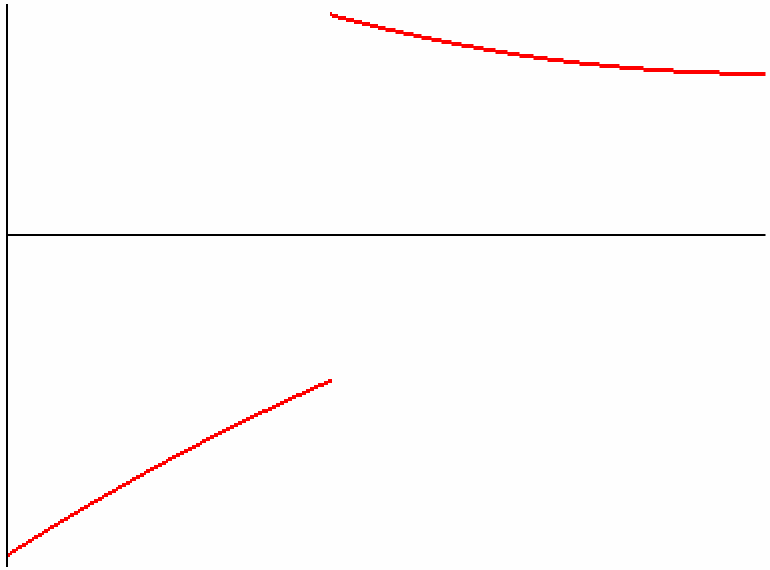
Fin condición.

Fin bucle.

El método de bipartición (6)

<u>**COMENTARIOS:**</u>

1° Si f(x) no fuese continua en [a, b] no se garantiza el buen funcionamiento del método pues puede que no haya raíz.

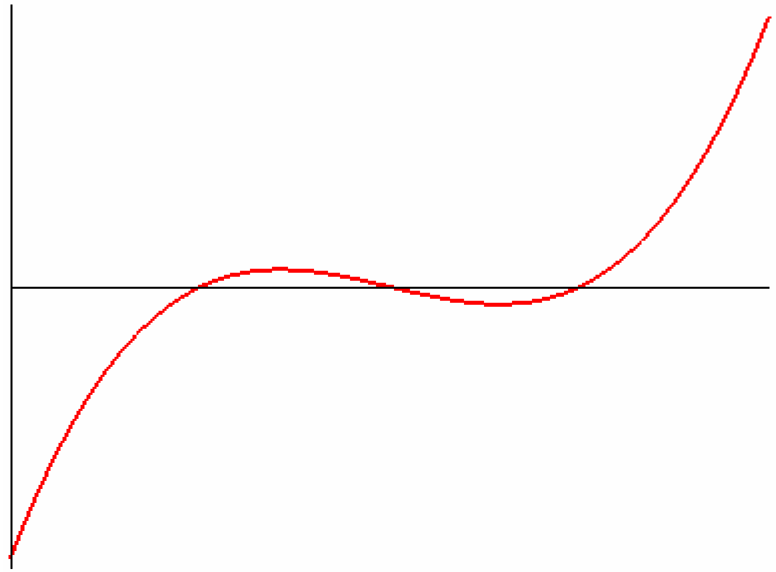


El método de bipartición (7)

COMENTARIOS:

2º Si f(a).f(b) < 0 puede haber más de una raíz (pero al menos habrá una).

Contándolas tantas veces como sea su multiplicidad habrá un número impar de raíces



El método sólo encuentra una de ellas

Para asegurar que el método converge hacia la ÚNICA raíz en [a,b] es necesario realizar más hipótesis sobre la función f(x). P.ej.:

f(a).f(b) <0   f(x) continua en [a, b] y …

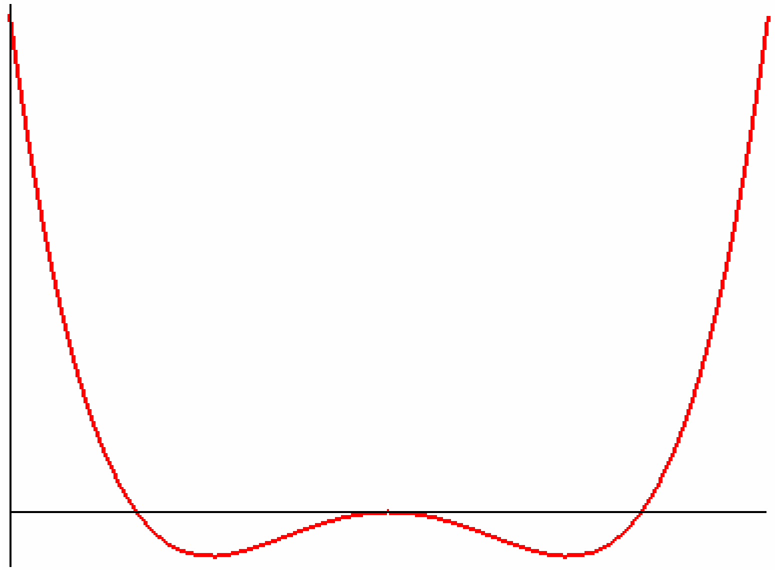
f(x) estrictamente monótona en [a, b]

El método de bipartición (8)

COMENTARIOS:

- Si f(a).f(b) > 0 el método no tiene garantizado su buen funcionamiento pues puede no existir raíz y, en todo caso, no contempla criterio de selección de intervalos de búsqueda

Contándolas tantas veces como sea su multiplicidad habrá un número par de raíces



El método de bipartición (9)

¿ Cuántas iteraciones deben realizarse para asegurar que la raíz buscada dista menos de ε de la solución exacta?

Al comenzar el intervalo de búsqueda mide: $L_0 = (b - a)$

Tras la primera iteración el nuevo intervalo de búsqueda mide: $L_1 = (\frac{1}{2}).L_0 = (\frac{1}{2}).(b - a)$

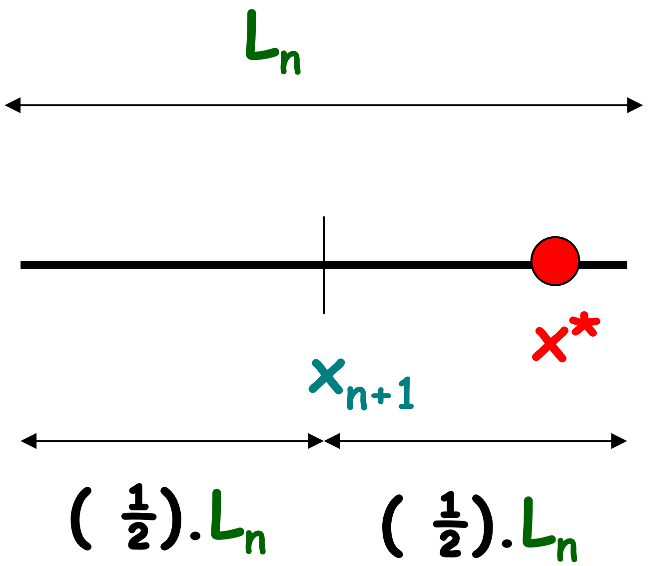
Tras la segunda iteración el nuevo intervalo de búsqueda mide: $L_2 = (\frac{1}{2}).L_1 = (b - a) / 2^2$

....

Tras la n-ésima iteración el nuevo intervalo de búsqueda mide: $L_n = (\frac{1}{2}).L_{n-1} = (b - a) / 2^n$

El método de bipartición (10)

Si se toma como raíz aproximada tras n iteraciones el punto medio del intervalo de búsqueda (punto x_{n+1}) la distancia a la raíz exacta x^* será menor que $(\frac{1}{2}).L_n$



Luego:

$$|x^* - x_{n+1}| \leq (\tfrac{1}{2}).L_n = \frac{b-a}{2^{(n+1)}}$$

El método de bipartición (11)

Una precisión mayor que ε se asegura realizando un número de iteraciones (n) tal que:

$$|x^* - x_{n+1}| \leq \frac{b-a}{2^{(n+1)}} < \varepsilon \longrightarrow 2^{(n+1)} > \frac{(b-a)}{\varepsilon} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow (n+1).\ln(2) > \ln\left(\frac{(b-a)}{\varepsilon}\right) \longrightarrow \boxed{n > \frac{\ln\left(\frac{(b-a)}{\varepsilon}\right)}{\ln(2)} - 1}$$

El método de bipartición: Algoritmo

Dados: $a, b, \varepsilon, f(x)$

Calcular: $\text{numit} > \dfrac{\ln\left(\dfrac{|a-b|}{\varepsilon}\right)}{\ln(2)} - 1$

INICIO

PARA j DESDE 0 HASTA *numit* CON PASO 1 HACER:

1° $x = \dfrac{a+b}{2}$ 2° $\text{vmed} = f(x)$

3° SI (vmed.f(a) > 0) ENTONCES:

$a \leftarrow x$

SI NO

$b \leftarrow x$

FIN CONDICIÓN

FIN BUCLE