Regla de Simpson 1/3

Características:

- Fácil deducción.
- Dominio algebraico relativamente fácil.
- Un alto grado de precisión.
- Simplicidad de utilización en múltiples propósitos. (Modelación de resultados, Integral de muchas funciones)

Regla de Simpson 1/3

Fundamento base:

Aproximación de la gráfica de una función continua dentro de un intervalo cerrado, por medio del uso de arcos parabólicos.

Regla de Simpson 1/3

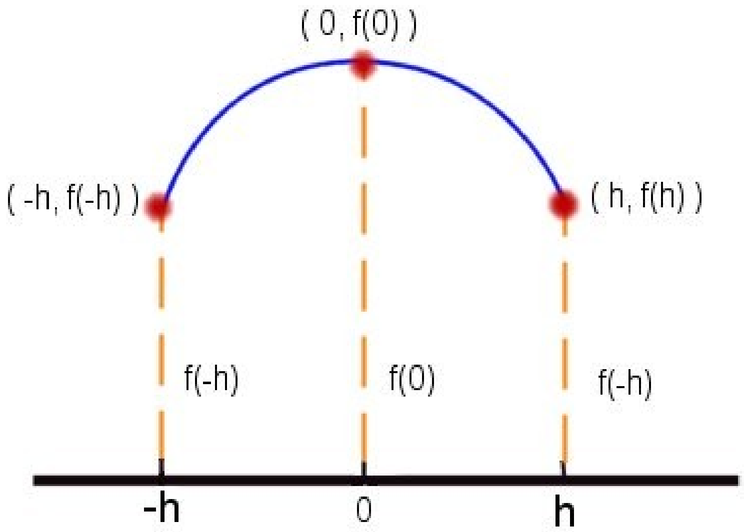
¿ Cómo se obtiene ? ..... **Deducción :**

Para obtener arcos parabólicos, debemos hacer uso de la función cuadrática.

De forma general, la función cuadrática presenta la siguiente estructura :

$$ax^2+bx+c$$

Regla de Simpson 1/3



Segmento de parábola, delimitado en el intervalo
x = [-h,h]

Nota: Por tres puntos no cólineales siempre se puede trazar una segmento de parábola, y estos tres puntos siempre generan en la curva de la grafica un numero par de intervalos.

Regla de Simpson 1/3

La integral indefinida es:

$$\int \left(ax^2+bx+c\right)dx=\frac{ax^3}{3}+\frac{bx^2}{2}+cx+C$$

La integral definida es:

$$\int_{-h}^{h}\left(ax^2+bx+c\right)dx=\left(\frac{ax^3}{3}+\frac{bx^2}{2}+cx\right)_{-h}^{h}$$

De aquí obtenemos:

$$\frac{ah^3}{3}+\frac{bh^2}{2}+hc-\left(-\frac{ah^3}{3}+\frac{bh^2}{2}-hc\right)=\frac{2\,ah^3}{3}+2\,hc$$

Regla de Simpson 1/3

Obteniendo factor común y factorizando, obtenemos :

$$\frac{2ah^3+6hc}{3}=\frac{h}{3}\left(2ah^2+6c\right)$$

Sabemos, por la información dada por el gráfico que :

$$f(0)=c \qquad f(-h)=ah^2-bh+c$$

$$f(h)=ah^2+bh+c$$

Regla de Simpson 1/3

Manejando el sistema de ecuaciones:

$$f(-h)-f(0)=ah^2-bh \qquad f(-h)+f(h)-2f(0)=2ah^2$$

$$f(h)-f(0)=ah^2+bh$$

Reemplazando:

$$\frac{h}{3}\left(2ah^2+6c\right)=\frac{h}{3}\left(f(-h)-2f(0)+f(h)+6f(0)\right)$$

$$\frac{h}{3}\left(2ah^2+6c\right)=\frac{h}{3}\left(f(-h)+4f(0)+f(h)\right)$$

Regla de Simpson 1/3

Obteniendo así: $$\int_{-h}^{h}(ax^2+bx+c)\,dx=\frac{h}{3}(f(-h)+4f(0)+f(h))$$

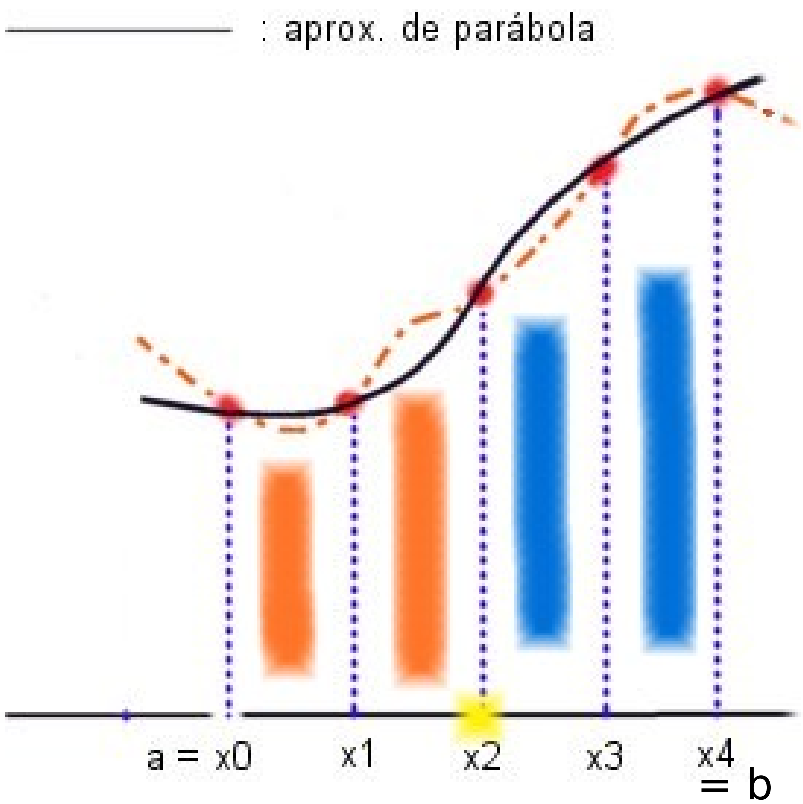
Si reemplazamos : $x_0=-h \qquad x_1=0 \qquad x_2=h$

Luego: $$\boxed{\int_{x_0}^{x_2}(ax^2+bx+c)\,dx=\frac{h}{3}(f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2))}$$

$$h=\frac{x_2-x_0}{n}$$ Longitud subintervalo

n = número de subintervalos

Regla de Simpson 1/3



Regla de Simpson 1/3

Reiterando el analisis:

$$\int_{x_2}^{x_4} (ax+bx+c)\,dx = \frac{h}{3}\left(f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\right)$$

En definitiva:

$$\int_{x_0}^{x_4} (ax^2+bx+c)\,dx = \int_{x_0}^{x_2} (ax^2+bx+c)\,dx + \int_{x_2}^{x_4} (ax^2+bx+c)\,dx$$

$$\int_{x_0}^{x_4} (ax^2+bx+c)\,dx = \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2) + f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\right)$$

$$\boxed{\int_{x_0}^{x_4} (ax^2+bx+c)\,dx = \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\right)}$$

Regla de Simpson 1/3

Podemos enunciar la Regla de Simpson 1/3, como sigue :

Para una función continua en un intervalo [a,b] , en donde

$x_{0,} x_1, \ldots\ldots, x_n$ Forman una partición regular de [a,b], en *n* (numero par) de intervalos, luego:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + 2(f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \ldots + 2f(x_{(n-2)}) + 4f(x_{(n-1)}) + f(x_n)\right.$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{(b-a)}{3n}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + 2(f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \ldots + 2f(x_{(n-2)}) + 4f(x_{(n-1)}) + f(x_n)\right.$$

donde $$x_i = a + \frac{(b-a)i}{n}$$

Regla de Simpson 1/3

REGLA DE SIMPSON 1/3: COTA DE ERROR

-Impresicion:

E_n^s = Valor de integral definida – Valor de Regla de Simpson 1/3

$$E_n^s \leq \frac{K_s (b-a)^5}{180 n^4}$$

$$K_s = \max |f^4(x)|$$