Вычисление скорости вылетания пули из ствола стрелкового оружия на основе уравнений Эйлера

Пережогин

1 Введение

Оружейный патрон состоит из гильзы, капсуля и пули. В гильзе содержится порох, который способен гореть без участия кислорода. Воспламенение пороха осуществляется за счет активирования капсуля. В состав пороха входит горючая смесь (до 19 века, селитра) и окислители (до 19 века, сера и углерод). В результате сгорания пороха выделяются пороховые газы (CO2), которые обладают высоким давлением и выталкивают пулю из ствола.

Предлагается рассмотреть две модели, и сравнить скорость вылетания пули из ствола для них.

1. Предположим, что пороховые газы находятся в полном термодинамическом равновесии, а теплообмен между газом и окружающей средой отсутствует, т.е. расширение газа происходит адиабатически. Параметры модели следующие:

   L_0 и S – длина и поперечное сечение гильзы, задают начальный объем пороховых газов; ε – тепловая энергия, выделившаяся вследствие сгорания всего пороха; κ – масса порохового заряда; γ – показатель адиабаты; m – масса пули; L_1 – длина ствола; площадь поперечного сечения ствола и гильзы совпадают.

   Скорость пули находится исходя из закона сохранения энергии для адиабатического процесса: внутренняя энергия газа передается пуле.

2. Скорость пули может превышать скорость звука, поэтому можно предположить, что пороховые газы не находятся в полном термодинамическом равновесии в процессе вылетания пули из ствола, а наблюдается лишь локальное термодинамическое равновесие. В этом случае состояние пороховых газов задается в расширяющейся со временем расчетной области длины L, причем $L_0 \le L \le L_1$, и используются одномерные уравнения Эйлера, см. *[Годунов, Численное решение многомерных задач газовой динамики, Глава 2]*:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\underbrace{(\rho u)}_{\text{поток массы}} = 0 \text{ – закон сохранения массы,} \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\underbrace{(\rho u^2)}_{\text{поток импульса}} = -\underbrace{\frac{\partial p}{\partial x}}_{\text{внешняя сила}} \text{ – закон сохранения импульса} \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial (\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\underbrace{(u\rho E)}_{\text{поток энергии}} = -\underbrace{\frac{\partial (pu)}{\partial x}}_{\text{работа сил давления}} \text{ – закон сохранения энергии,} \tag{1.3}$$

$$p = (\gamma - 1)\rho e \text{ – уравнение состояния идеального газа,} \tag{1.4}$$

где $E = e + u^2/2$ – полная энергия единицы массы газа, u – скорость, e – внутренняя (тепловая) энергия единицы массы, ρ – плотность газа, p – давление, γ – показатель адиабаты. Уравнение (1.4) эквивалентно уравнению Менделеева-Клапейрона в наших переменных, см. *[Уравнение состояния идеального газа, Википедия]*.

Также выписывается второй закон Ньютона для пули:

$$m\frac{dv}{dt} = p(L)S, \tag{1.5}$$

где m – масса пули, v – скорость пули, $p(L)$ – давление пороховых газов на границе с пулей, S – площадь сечения ствола.

2 Параметры для некоторых видов стрелкового оружия

Здесь предполагается, что теплота сгорания пороха составляет $900kcal/kg \approx 3.8kJ/g$, что соответствует "Баллистическому пороху", см. *[Порох, Википедия]*. Значение показателя адиабаты для всех видов оружия выбирается следующим:

$$\gamma = 1.3. \tag{2.1}$$

Таким показателем обладает углекислый газ (CO2) при температуре $20C^o$, см. *[Показатель адиабаты, Википедия]*.

1. **Пистолет Макарова (ПМ) с патроном 9x18мм**.
   - Длина гильзы, $L_0 = 18mm$.
   - Поперечное сечение гильзы, $S = \pi(9mm)^2/4 \approx 64mm^2$.
   - Масса пули, $m = 6g$.
   - Масса порохового заряда $\kappa = 0.25g$, следовательно, теплота сгорания пороха, $\varepsilon = 0.25g \times 3.8kJ/g = 0.95kJ$.
   - Длина ствола, $L_1 = 93mm$.
   - Фактическая скорость пули для ПМ (измеренная), $315m/s$.
2. **Автомат Калашникова (АК-47) с патроном 7.62x39мм**.
   - Длина гильзы, $L_0 = 39mm$.
   - Поперечное сечение гильзы, $S = \pi(8mm)^2/4 \approx 50mm^2$.
   - Масса пули, $m = 8g$.
   - Масса порохового заряда $\kappa = 1.75g$, следовательно, теплота сгорания пороха, $\varepsilon = 1.75g \times 3.8kJ/g = 6.65kJ$.
   - Длина ствола, $L_1 = 415mm$.
   - Фактическая скорость пули для АК-47 (измеренная), $715m/s$.

3 Скорости пули по 1 методу

Термодинамическое состояние системы задается двумя параметрами. В нашем случае – это начальная внутренняя энергия газа $U_0 = \varepsilon$ и объем гильзы $V_0 = S \cdot L_0$. Уравнение для адиабатического процесса следующее, см. *Адиабатический процесс, Википедия*:

$$p \cdot V^{\gamma} = const. \tag{3.1}$$

Модифицируем уравнение состояния (1.4) к следующему виду:

$$p = (\gamma - 1)\frac{U}{V}, \tag{3.2}$$

где U – полная внутренняя энергия газа. Комбинируя два последних уравнения получаем:

$$UV^{\gamma-1} = const. \tag{3.3}$$

Откуда:

$$\frac{U_1}{U_0} = \left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{L_0}{L_1}\right)^{\gamma-1}. \tag{3.4}$$

Тогда изменение внутренней энергии газа равно кинетической энергии пули:

$$K = U_0 - U_1 = \varepsilon\left(1 - \left(\frac{L_0}{L_1}\right)^{\gamma-1}\right). \tag{3.5}$$

КПД оружия не зависит от мощности заряда:

$$\eta = \frac{K}{\varepsilon} \cdot 100\%. \tag{3.6}$$

Наконец, скорость пули при выходе из ствола:

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}}. \tag{3.7}$$

Вычислим давление в начале и в конце:

- $p_0 = (\gamma - 1)\dfrac{\varepsilon}{SL_0}$,
- $p_1 = p_0\left(\dfrac{L_0}{L_1}\right)^{\gamma}$.

Оценим плотность газа в начальный момент времени. Эта характеристика понадобится позже при постановке начальных данных. Предположим, что порох представлен *только* селитрой (KNO_3) и при горении подчиняется химическому уравнению:

$$2KNO_3 + 3C + S \to K_2S + N_2 + 3CO_2, \tag{3.8}$$

а пороховые газы представлены *только* углекислым газом. Молярная масса для селитры равна $M_{KNO_3} = 101g/mol$. Тогда находим количество моль силитры:

$$\nu_{KNO_3} = \kappa / M_{KNO_3}. \tag{3.9}$$

Согласно химической формуле, количество моль углекислого газа $\nu_{CO_2} = \frac{3}{2}\nu_{KNO_3} = \frac{3}{2}\kappa/M_{KNO_3}$. Тогда плотность пороховых газов:

$$\rho_0 = \nu_{CO_2} M_{CO_2}/V_0 = \frac{3}{2}\kappa\frac{M_{CO_2}}{M_{KNO_3}}/V_0, \tag{3.10}$$

где молярная масса углекислого газа $M_{CO_2} = 44g/mol$.

3.1 Вычисление на примерах

1. **Пистолет Макарова (ПМ)**.

   - Кинетическая энергия пули, $K = 369.5J$.
   - КПД, $\eta = 38.9\%$.
   - Давление в начальный момент, $p_0 = 2474$ атмосферы.
   - Давление при вылете, $p_1 = 293$ атмосферы.
   - Плотность пороховых газов в начале, $\rho_0 = 142kg/m^3$.
   - Скорость пули, $v = 351m/s$.
   - Измеренная скорость пули, $315m/s$.

2. **Автомат Калашникова (АК-47)**.

   - Кинетическая энергия пули, $K = 3379J$.
   - КПД, $\eta = 50.8\%$.
   - Давление в начальный момент, $p_0 = 10230$ атмосферы.
   - Давление при вылете, $p_1 = 473$ атмосферы.
   - Плотность пороховых газов в начале, $\rho_0 = 586kg/m^3$.
   - Скорость пули, $v = 919m/s$.
   - Измеренная скорость пули, $715m/s$.

Скорость пули достаточно близка к измеренной. Как видим, атмосферным давлением можно пренебречь. Полученное нами давление пороховых газов при вылете лежит в разумных пределах. В разных источниках приводятся значения $200 - 900$ атмосфер. Давление в начальный момент, скорее всего, завышено, потому что в реальности пуля начинает двигаться еще до того, как прогорит весь порох.

4 Скорость пули по 2 методу

В качестве динамических переменных (те, которые будут обновляться при решении уравнения) выберем следующие: ρ, ρu, ρE. В компактной форме уравнения Эйлера:

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho E\end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}\rho u\\ \rho u^2 + p\\ \rho u E + p u\end{pmatrix} = 0, \tag{4.1}$$

$$p = (\gamma - 1)\rho e, \tag{4.2}$$

и помним, что

$$E = e + u^2/2. \tag{4.3}$$

Уравнение динамики пули:

$$m\frac{dv}{dt} = p(L)S, \tag{4.4}$$

$$\frac{dL}{dt} = v. \tag{4.5}$$

Уравнения решаются в расширяющейся области $0 < x < L(t)$, поэтому сделаем замену координат $y = x/L(t)$, $y \in [0, 1]$. Для некоторой переменной $\phi(x, t)$ частные производные преобразуются:

$$\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial \phi(L(t)y,t)}{\partial t} = \frac{vy}{L}\frac{\partial \phi(y,t)}{\partial y} + \frac{\partial \phi(y,t)}{\partial t}, \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{L}\frac{\partial \phi}{\partial y}. \tag{4.7}$$

В новой горизонтальной координате уравнения Эйлера имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho E\end{pmatrix} + \frac{vy}{L}\frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho E\end{pmatrix} + \frac{1}{L}\frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix}\rho u\\ \rho u^2 + p\\ \rho u E + p u\end{pmatrix} = 0, \tag{4.8}$$

$$p = (\gamma - 1)\rho e, \tag{4.9}$$

Начальные условия следующие:

- $\rho = \rho_0$. Проверить значения $\rho_0/2$, $2\rho_0$.
- $\rho u = 0$, т.к. скорость газа $u = 0$
- $\rho E = \rho e = \dfrac{\varepsilon}{V_0} = \dfrac{\varepsilon}{S L_0}$

В качестве критериев устойчивости использовать максимум из скорости звука

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}, \tag{4.10}$$

и скорости газа.

4.1 Постановка граничных условий

Во-первых,

$$u|_0 = 0, u|_1 = v \tag{4.11}$$

и

$$\frac{\partial p}{\partial y}|_0 = 0, \frac{\partial p}{\partial y}|_0 = 1. \tag{4.12}$$

Сохранение массы Масса газа должна сохраняться, значит

$$\int_0^{L(t)} \rho(x,t)dx = L(t)\int_0^1 \rho(y,t)dy = const. \tag{4.13}$$

Тогда:

$$\frac{dL}{dt}\int_0^1 \rho(y,t)dy + L(t)\int_0^1 \frac{\partial \rho}{\partial t}dy = 0. \tag{4.14}$$

Подставляя в это равенство закон сохранения массы (верхнее уравнение из (4.9)), применяя гран условия $u(0,t) = 0, u(1,t) = v$, получаем:

$$v\int_0^1 \rho dy - v\int_0^1 y\frac{\partial \rho}{\partial y}dy - \int_0^1 \frac{\partial \rho u}{\partial y}dy = 2v\int_0^1 \rho dy - 2(u\rho)|_1 = 0. \tag{4.15}$$

Следовательно,

$$(u\rho)|_0 = 0, (u\rho)|_1 = v\int_0^1 \rho dy. \tag{4.16}$$

Сохранение импульса Предполагаем, что полный импульс газа может изменяться только вследствие взаимодействия с левой и правой стенками посредством давления. Потребуем этого. Полный импульс газа:

$$L(t)\int_0^1 \rho u dy \to \frac{dL}{dt}\int_0^1 \rho u dy + L(t)\int_0^1 \frac{\partial \rho u}{\partial t}dy. \tag{4.17}$$

Подставляем в это равенство уравнение движения:

$$v\int_0^1 \rho u dy - v\int_0^1 y\frac{\partial \rho u}{\partial y}dy - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}(\rho u^2 + p)dy = 2v\int_0^1 \rho u dy - 2(\rho u^2)|_1 - p|_0^1. \tag{4.18}$$

Откуда:

$$(\rho u^2)|_0 = 0, (\rho u^2)|_1 = v\int_0^1 \rho u dy. \tag{4.19}$$

Сохранение энергии Потребуем, чтобы полная энергия газа менялась только следствие работы, совершаемой над пулей. Энергия:

$$L(t)\int_0^1 \rho E dy \to \frac{dL}{dt}\int_0^1 \rho E dy + L(t)\int_0^1 \frac{\partial \rho E}{\partial t}dy. \tag{4.20}$$

Тогда:

$$v\int_0^1 \rho E dy - v\int_0^1 y\frac{\partial \rho E}{\partial y}dy - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}(\rho u E + pu)dy = 2v\int_0^1 \rho E dy - 2(\rho u E)|_1 - vp|_1 \tag{4.21}$$

Гран условия:

$$(\rho u E)|_0 = 0, (\rho u E)|_1 = v\int_0^1 \rho E dy. \tag{4.22}$$

Гран условия в связи со сменой координат Заметим, что для оператора $\frac{vy}{L}\frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho E\end{pmatrix}$ постановка гран условий не требуется. В самом деле, характеристики для этого оператора выходят из левого конца области. Но в левой граничной точке скорость переноса (vy/L) равна нулю.

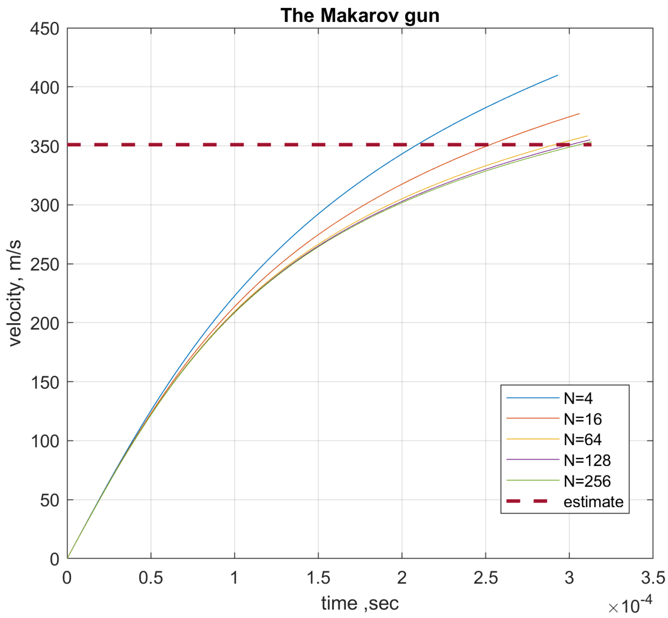

Рис. 1: Пример расчета для пистолета Макарова при числе узлов сетки N.

4.2 Переход к консервативным переменным

Перейдем к новым переменным

$$\widehat{\rho} = L(t)\rho, \tag{4.23}$$
$$\widehat{\rho u} = L(t)\rho u, \tag{4.24}$$
$$\widehat{\rho E} = L(t)\rho E. \tag{4.25}$$

Тогда закон сохранения массы газа:

$$\int \widehat{\rho} dy = const, \tag{4.26}$$

а также импульс и энергия могут меняться только за счет давления на границах области:

$$\frac{d}{dt}\int \widehat{\rho u} dy = F(p), \tag{4.27}$$
$$\frac{d}{dt}\int \widehat{\rho E} dy = G(p). \tag{4.28}$$
$$\tag{4.29}$$

Перепишем уравнения движения (4.9) в новых переменных:

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\widehat{\rho}\\ \widehat{\rho u}\\ \widehat{\rho E}\end{pmatrix}-\frac{2v}{L}\begin{pmatrix}\widehat{\rho}\\ \widehat{\rho u}\\ \widehat{\rho E}\end{pmatrix}+\frac{1}{L}\frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix}\widehat{\rho u}+\widehat{\rho}vy\\ \rho u^2+p\\ \rho uE+pu\end{pmatrix}=0, \tag{4.30}$$

$$p=(\gamma-1)\rho e, \tag{4.31}$$