คู่มือเฉลยแคลคูลัส 1 สำหรับวิศวกร

เฉลยแบบฝึกหัด 1.1
ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

รองศาสตราจารย์ ดร.ธีระศักดิ์ อุรัจนานนท์

www.teerasak.rmutl.ac.th

(Creative Math)

แบบฝึกหัด 1.1

จงใช้ทฤษฎีของลิมิตของฟังก์ชันหาค่าลิมิตของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $\lim_{x\to 1}\left(3x^3-2x^2+x-1\right)$

วิธีทำ $\lim_{x\to 1}\left(3x^3-2x^2+x-1\right)=3(1)^3-2(1)^2+1-1=3-2+1-1=1$ ■

2. $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2-3}{x+2}$

วิธีทำ $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2-3}{x+2}=\dfrac{3^2-3}{3+2}=\dfrac{9-3}{5}=\dfrac{6}{5}$ ■

3. $\lim_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x-4}$

วิธีทำ พิจารณา $\dfrac{x^2-16}{x-4}=\dfrac{4^2-16}{4-4}=\dfrac{16-16}{0}=\dfrac{0}{0}$ ดังนั้นลิมิตอยู่ในรูป $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+4)}{x-4}=\lim_{x\to 4}(x+4)=4+4=8 \quad ■$$

4. $\lim_{x\to -1}\dfrac{x+1}{x^2-x-2}$

วิธีทำ พิจารณา $\dfrac{x+1}{x^2-x-2}=\dfrac{(-1)+1}{(-1)^2-(-1)-2}=\dfrac{0}{1+1-2}=\dfrac{0}{0}$ ดังนั้นลิมิตอยู่ในรูป $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{x^2-x-2}=\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{(x-2)(x+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{1}{x-2}=\frac{1}{-1-2}=-\frac{1}{3} \quad ■$$

5. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{x^3-1}$

วิธีทำ พิจารณา $\dfrac{x^4-1}{x^3-1}=\dfrac{(1)^4-1}{(1)^3-1}=\dfrac{1-1}{1-1}=\dfrac{0}{0}$ ดังนั้นลิมิตอยู่ในรูป $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x^3-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1)(x^2+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x^2+1)}{(x^2+x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(1+1)(1^2+1)}{(1^2+1+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(2)(2)}{3}=\frac{4}{3} \quad ■$$

6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-4x+3}$

วิธีทำ พิจารณา $\dfrac{x^2+x-2}{x^2-4x+3}=\dfrac{1^2+1-2}{1^2-4(1)+3}=\dfrac{0}{1-4+3}=\dfrac{0}{0}$ ดังนั้นลิมิตอยู่ในรูป $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+2)(x-1)}{(x-1)(x-3)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x-3}=\frac{1+2}{1-3}=-\frac{3}{2} \quad \blacksquare$$

7. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^3-8}$

วิธีทำ พิจารณา $\dfrac{x^2-4}{x^3-8}=\dfrac{(2)^2-4}{(2)^3-8}=\dfrac{4-4}{8-8}=\dfrac{0}{0}$ ดังนั้นลิมิตอยู่ในรูป $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^3-8}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x^2+2x+4}$$

$$=\frac{2+2}{2^2+2(2)+4}=\frac{4}{4+4+4}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3} \quad \blacksquare$$

8. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{4-x^2}$

วิธีทำ พิจารณา $\dfrac{x^4-16}{4-x^2}=\dfrac{2^4-16}{4-2^2}=\dfrac{16-16}{4-4}=\dfrac{0}{0}$ ดังนั้นลิมิตอยู่ในรูป $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{4-x^2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-4)(x^2+4)}{4-x^2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-4)(x^2+4)}{-(x^2-4)}$$

$$=\lim_{x\to 2}-(x^2+4)=-(2^2+4)=-(4+4)=-8 \quad \blacksquare$$

9. $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}$

วิธีทำ $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}=\sqrt{0}=0 \quad \blacksquare$

10. $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-1}{|x-1|}$

วิธีทำ พิจารณา $|x-1|=\begin{cases} x-1 & ;\ x-1\ge 0\ ; x\ge 1 \\ -(x-1); & x-1<0\ ; x<1 \end{cases}$ จะได้

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{|x-1|}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}1=1 \quad \blacksquare$$

11. $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x-1}{|x-1|}$

วิธีทำ พิจารณา $|x-1| = \begin{cases} x-1 & ; x-1\ge 0\ ; x\ge 1 \\ -(x-1); & x-1<0\ ; x<1 \end{cases}$ จะได้

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x-1}{|x-1|} = \lim_{x\to 1^-}\frac{x-1}{-(x-1)} = \lim_{x\to 1^+}-1 = -1 \ \blacksquare$$

12. $\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{4x-4}$

วิธีทำ $\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{4x-4} = \sqrt{4(1)-4} = \sqrt{4-4} = 0 \ \blacksquare$

13. $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{4-x}$

วิธีทำ พิจารณา $\lim\limits_{x\to 4^-}\sqrt{4-x} = \sqrt{4-4} = 0$ และ $\lim\limits_{x\to 4^+}\sqrt{4-x}$ หาค่าไม่ได้

จะเห็นว่า $\lim\limits_{x\to 4^-}\sqrt{4-x} \ne \lim\limits_{x\to 4^+}\sqrt{4-x}$ ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{4-x}$ หาค่าไม่ได้ $\blacksquare$

14. $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{3-\sqrt{x}}{9-x}$

วิธีทำ พิจารณา $\dfrac{3-\sqrt{x}}{9-x} = \dfrac{3-\sqrt{9}}{9-9} = \dfrac{3-3}{0} = \dfrac{0}{0}$ ดังนั้นลิมิตอยู่ในรูป $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 9}\frac{3-\sqrt{x}}{9-x} = \lim_{x\to 9}\frac{3-\sqrt{x}}{(3-\sqrt{x})(3+\sqrt{x})} = \lim_{x\to 9}\frac{1}{3+\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{3+\sqrt{9}} = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6} \ \blacksquare$$

15. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{2-\sqrt{x}}$

วิธีทำ พิจารณา $\dfrac{x^2-16}{2-\sqrt{x}} = \dfrac{4^2-16}{2-\sqrt{4}} = \dfrac{16-16}{2-2} = \dfrac{0}{0}$ ดังนั้นลิมิตอยู่ในรูป $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{2-\sqrt{x}} = \lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+4)}{2-\sqrt{x}} = \lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(x+4)}{2-\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(x+4)}{-(\sqrt{x}-2)} = \lim_{x\to 4}-(\sqrt{x}+2)(x+4)$$

$$= -(\sqrt{4}+2)(4+4) = -(4)(8) = -32 \ \blacksquare$$

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

วิธีทำ พิจารณา $\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\dfrac{\sqrt{0+4}-2}{0}=\dfrac{2-2}{0}=\dfrac{0}{0}$ ดังนั้นลิมิตอยู่ในรูป $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}\left(\frac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+4}+2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(x+4)-4}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{0+4}+2}=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4} \quad \blacksquare$$

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

วิธีทำ พิจารณา $\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\dfrac{\sqrt{1+0}-\sqrt{1-0}}{0}=\dfrac{\sqrt{1}-\sqrt{1}}{0}=\dfrac{0}{0}$ ดังนั้นลิมิตอยู่ในรูป $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}\left(\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)-(1-x)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=\frac{2}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}=\frac{2}{2}=1 \quad \blacksquare$$

18. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{x-5}$

วิธีทำ พิจารณา $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{x-5}=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{5}}{5-5}=\dfrac{0}{0}$ ดังนั้นลิมิตอยู่ในรูป $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{5}\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{5}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{5}}=\frac{1}{2\sqrt{5}} \quad \blacksquare$$

19. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$

วิธีทำ พิจารณา $\dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}=\dfrac{8-8}{\sqrt[3]{8}-2}=\dfrac{0}{2-2}=\dfrac{0}{0}$ ดังนั้นลิมิตอยู่ในรูป $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 8}\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}=\lim_{x\to 8}\frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^3-2^3}{\sqrt[3]{x}-2}=\lim_{x\to 8}\frac{\left(\sqrt[3]{x}-2\right)\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+2\left(\sqrt[3]{x}\right)+2^2\right)}{\sqrt[3]{x}-2}$$

$$=\lim_{x\to 8}\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+2\left(\sqrt[3]{x}\right)+4=\left(\sqrt[3]{8}\right)^2+2\left(\sqrt[3]{8}\right)+4$$

$$=(2)^2+2(2)+4=4+4+4=12 \quad \blacksquare$$

20. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x^2-2x}$

วิธีทำ พิจารณา $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x^2-2x}=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2^2-2(2)}=\dfrac{0}{4-4}=\dfrac{0}{0}$ ดังนั้นลิมิตอยู่ในรูป $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x^2-2x}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{2\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)}=\frac{1}{2\left(2\sqrt{2}\right)}=\frac{1}{4\sqrt{2}}$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4(2)}=\frac{\sqrt{2}}{8} \quad \blacksquare$$

21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{\sqrt{9-x}}-\frac{1}{3}}{x}$

วิธีทำ พิจารณา $\dfrac{\frac{1}{\sqrt{9-x}}-\frac{1}{3}}{x}=\dfrac{\frac{1}{\sqrt{9-0}}-\frac{1}{3}}{0}=\dfrac{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}}{0}=\dfrac{0}{0}$ ดังนั้นลิมิตอยู่ในรูป $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{9-x}}-\frac{1}{3}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3-\sqrt{9-x}}{3\sqrt{9-x}}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3-\sqrt{9-x}}{3x\sqrt{9-x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3-\sqrt{9-x}}{3x\sqrt{9-x}}\cdot\left(\frac{3+\sqrt{9-x}}{3+\sqrt{9-x}}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{9-(9-x)}{\left(3x\sqrt{9-x}\right)\left(3+\sqrt{9-x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\left(3x\sqrt{9-x}\right)\left(3+\sqrt{9-x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(3\sqrt{9-x}\right)\left(3+\sqrt{9-x}\right)}$$

$$=\frac{1}{\left(3\sqrt{9-0}\right)\left(3+\sqrt{9-0}\right)}=\frac{1}{3(3)(3+3)}=\frac{1}{9(6)}=\frac{1}{54} \quad \blacksquare$$

22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{2+x}-\dfrac{1}{2}}{x}$

วิธีทำ พิจารณา $\dfrac{\dfrac{1}{2+x}-\dfrac{1}{2}}{x}=\dfrac{\dfrac{1}{2+0}-\dfrac{1}{2}}{0}=\dfrac{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}}{0}=\dfrac{0}{0}$ ดังนั้นลิมิตอยู่ในรูป $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{2+x}-\dfrac{1}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2-(2+x)}{2(2+x)}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2-2-x}{2(2+x)}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{-x}{2(2+x)}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{2x(2+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{2(2+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{2(2+0)}=-\frac{1}{4} \quad ■$$

23. $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\dfrac{4x^2-1}{4x^2+8x+3}$

วิธีทำ พิจารณา $\dfrac{4x^2-1}{4x^2+8x+3}=\dfrac{4\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2-1}{4\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+8\left(-\dfrac{1}{2}\right)+3}=\dfrac{1-1}{1-4+3}=\dfrac{0}{0}$ ดังนั้นลิมิตอยู่ในรูป $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{4x^2-1}{4x^2+8x+3}=\lim_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{(2x-1)(2x+1)}{(2x+1)(2x+3)}=\lim_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{2x-1}{2x+3}$$

$$=\frac{2\left(-\dfrac{1}{2}\right)-1}{2\left(-\dfrac{1}{2}\right)+3}=\frac{-1-1}{-1+3}=\frac{-2}{2}=-1 \quad ■$$

24. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{x+1}$

วิธีทำ พิจารณา $\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{x+1}=\dfrac{1+\dfrac{1}{(-1)}}{(-1)+1}=\dfrac{1-1}{0}=\dfrac{0}{0}$ ดังนั้นลิมิตอยู่ในรูป $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to -1}\frac{1+\dfrac{1}{x}}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{\dfrac{x+1}{x}}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{x(x+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{1}{x}=-\frac{1}{1}=-1 \quad ■$$

25. $\lim\limits_{h\to 1}\dfrac{(1+h^2)-1}{h}$

วิธีทำ $\lim\limits_{h\to 1}\dfrac{(1+h^2)-1}{h}=\dfrac{(1+1^2)-1}{1}=\dfrac{2-1}{1}=1 \quad ■$

26. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2}$

วิธีทำ พิจารณา $\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2}=\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{2-2}=\dfrac{0}{0}$ ดังนั้นลิมิตอยู่ในรูป $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{2-x}{2x}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{2x(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{-(x-2)}{2x(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{-1}{2x}=\frac{-1}{2(2)}=-\frac{1}{4} \quad \blacksquare$$

27. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2}$

วิธีทำ $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2}=\dfrac{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}{3-2}=\dfrac{\frac{2-3}{6}}{1}=-\dfrac{1}{6} \quad \blacksquare$

28. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$

วิธีทำ พิจารณา $\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}=\dfrac{1-1}{\sqrt{1^2+3}-2}=\dfrac{0}{\sqrt{4}-2}=\dfrac{0}{2-2}=\dfrac{0}{0}$ ดังนั้นลิมิตอยู่ในรูป $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}\left(\frac{\sqrt{x^2+3}+2}{\sqrt{x^2+3}+2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{\left(x^2+3\right)-4}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3}+2}{x+1}$$

$$=\frac{\sqrt{1^2+3}+2}{1+1}=\frac{\sqrt{4}+2}{2}=\frac{4}{2}=2 \quad \blacksquare$$

29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}$

วิธีทำ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}=\dfrac{3^0-3^{-0}}{3^0+3^{-0}}=\dfrac{1-\frac{1}{3^0}}{1+\frac{1}{3^0}}=\dfrac{1-1}{1+1}=\dfrac{0}{2}=0 \quad \blacksquare$

30. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)^2}{x^4-16}$

วิธีทำ พิจารณา $\dfrac{(x-2)^2}{x^4-16}=\dfrac{(2-2)^2}{2^4-16}=\dfrac{0}{16-16}=\dfrac{0}{0}$ ดังนั้นลิมิตอยู่ในรูป $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2}{x^4-16}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-2)}{(x^2-4)(x^2+4)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-2)}{(x-2)(x+2)(x^2+4)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x+2)(x^2+4)}=\frac{2-2}{(2+2)(2^2+4)}=\frac{0}{(4)(8)}=\frac{0}{32}=0 \quad \blacksquare$$

31. $\lim\limits_{x\to 64}\dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$

วิธีทำ พิจารณา $\dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}=\dfrac{\sqrt{64}-8}{\sqrt[3]{64}-4}=\dfrac{8-8}{4-4}=\dfrac{0}{0}$ ดังนั้นลิมิตอยู่ในรูป $\dfrac{0}{0}$

เปลี่ยนแปลงรูปแบบ $\lim\limits_{x\to 64}\dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$ เป็นตัวแปรใหม่เพื่อให้สามารถแยกตัวประกอบได้ดังนี้

ให้ $x=v^6$ จะได้ $\sqrt{x}=\sqrt{v^6}=(v^6)^{\frac{1}{2}}=v^3$ และ $\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{v^6}=(v^6)^{\frac{1}{3}}=v^2$

เมื่อ $x\to 64$ แล้ว $v^6\to 64$ นั่นคือ $v\to\sqrt[6]{64}\Rightarrow v\to 2$

(โดยที่ 6 เลขชี้กำลังของ v คือ ค.ร.น. ของ 2,3 ซึ่งเป็นตัวส่วนของเลขชี้กำลังของ $\sqrt{x}$ และ $\sqrt[3]{x}$)

ดังนั้น $$\lim_{x\to 64}\frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}=\lim_{v\to 2}\frac{v^3-8}{v^2-4}=\lim_{v\to 2}\frac{(v-2)(v^2+2v+4)}{(v-2)(v+2)}$$

$$=\lim_{v\to 2}\frac{v^2+2v+4}{v+2}=\frac{2^2+2(2)+4}{2+2}=\frac{12}{4}=3 \quad \blacksquare$$

32. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$

วิธีทำ พิจารณา $\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}=\dfrac{2-\sqrt{7-3}}{7^2-49}=\dfrac{2-2}{49-49}=\dfrac{0}{0}$ ดังนั้นลิมิตอยู่ในรูป $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}=\lim_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}\left(\frac{2+\sqrt{x-3}}{2+\sqrt{x-3}}\right)=\lim_{x\to 7}\frac{4-(x-3)}{(x^2-49)(2+\sqrt{x-3})}$$

$$=\lim_{x\to 7}\frac{7-x}{(x-7)(x+7)(2+\sqrt{x-3})}=\lim_{x\to 7}\frac{-(x-7)}{(x-7)(x+7)(2+\sqrt{x-3})}$$

$$=\lim_{x\to 7}\frac{-1}{(x+7)(2+\sqrt{x-3})}=\frac{-1}{(7+7)(2+\sqrt{7-3})}=\frac{-1}{14(4)}=-\frac{1}{56} \quad \blacksquare$$

33. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$

วิธีทำ พิจารณา $\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}=\dfrac{\sqrt[3]{1}-1}{\sqrt[4]{1}-1}=\dfrac{1-1}{1-1}=\dfrac{0}{0}$ ดังนั้นลิมิตอยู่ในรูป $\dfrac{0}{0}$

เปลี่ยนแปลงรูปแบบ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$ เป็นตัวแปรใหม่เพื่อให้สามารถแยกตัวประกอบได้ดังนี้

ให้ $x=v^{12}$ จะได้ $\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{v^{12}}=\left(v^{12}\right)^{\frac{1}{3}}=v^{4}$ และ $\sqrt[4]{x}=\sqrt[4]{v^{12}}=\left(v^{12}\right)^{\frac{1}{4}}=v^{3}$

เมื่อ $x\to 1$ แล้ว $v^{12}\to 1$ นั่นคือ $v\to\sqrt[12]{1}\Rightarrow v\to 1$ ดังนั้น

(โดยที่ 12 เลขชี้กำลังของ v คือ ค.ร.น. ของ 3,4 ซึ่งเป็นตัวส่วนของเลขชี้กำลังของ $\sqrt[3]{x}$ และ $\sqrt[4]{x}$)

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}=\lim_{v\to 1}\frac{v^{4}-1}{v^{3}-1}=\lim_{v\to 1}\frac{\left(v^{2}-1\right)\left(v^{2}+1\right)}{(v-1)\left(v^{2}+v-1\right)}=\lim_{v\to 1}\frac{(v-1)(v+1)\left(v^{2}+1\right)}{(v-1)\left(v^{2}+v+1\right)}$$

$$=\lim_{v\to 1}\frac{(v+1)\left(v^{2}+1\right)}{v^{2}+v+1}=\frac{(1+1)\left(1^{2}+1\right)}{1^{2}+1+1}=\frac{(2)(2)}{3}=\frac{4}{3}\quad\blacksquare$$

34. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}$

วิธีทำ พิจารณา $\dfrac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}=\dfrac{\sqrt[3]{x+0}-\sqrt[3]{x}}{0}=\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x}}{0}=\dfrac{0}{0}$ ดังนั้นลิมิตอยู่ในรูป $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}}{h}\cdot\left(\frac{(x+h)^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}(x+h)^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}}{(x+h)^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}(x+h)^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}}\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h\left((x+h)^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}(x+h)^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}\right)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{(x+h)^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}(x+h)^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}}$$

$$=\frac{1}{(x+0)^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}(x+0)^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}\quad\blacksquare$$

35. จงหา $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ เมื่อ $f(x)=\begin{cases} 4-x^2 & , x<1 \\ 2+x^2 & , x>1 \end{cases}$

วิธีทำ เนื่องจาก $x=1$ เป็นจุดเปลี่ยนของฟังก์ชัน

จึงต้องหา $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ และ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ ดังนี้

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(4-x^2\right)=4-1^2=3$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(2+x^2\right)=2+1^2=3$$

จะเห็นว่า $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=3$ ■

36. จงหา $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ เมื่อ $f(x)=\begin{cases} 2x+4 & , x<0 \\ -(x+2)^2 & , x\ge 0 \end{cases}$

วิธีทำ เนื่องจาก $x=0$ เป็นจุดเปลี่ยนของฟังก์ชัน

จึงต้องหา $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ และ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ ดังนี้

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(2x+4)=2(0)+4=4$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}-(x+2)^2=-(0+2)^2=-4$$

จะเห็นว่า $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\ne\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ หาค่าไม่ได้ ■

37. จงหา $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ เมื่อ $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x+1}{3x-1} & , x<-1 \\ \dfrac{1}{(x-1)^2} & , x>-1 \end{cases}$

วิธีทำ เนื่องจาก $x=-1$ เป็นจุดเปลี่ยนของฟังก์ชัน

จึงต้องหา $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$ และ $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ ดังนี้

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}\frac{2x+1}{3x-1}=\frac{2(-1)+1}{3(-1)-1}=\frac{-2+1}{-3-1}=\frac{-1}{-4}=\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^-}\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{1}{(-1-1)^2}=\frac{1}{4}$$

จะเห็นว่า $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ ดังนั้น $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\dfrac{1}{4}$ ■

38. จงหา $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ เมื่อ $f(x)=\begin{cases} \dfrac{9}{x^2} & , \ x\le -3 \\ 4+x & , \ x>-3 \end{cases}$

วิธีทำ เนื่องจาก $x=-3$ เป็นจุดเปลี่ยนของฟังก์ชัน

จึงต้องหา $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x)$ และ $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x)$ ดังนี้

$$\lim_{x\to -3^-} f(x)=\lim_{x\to -3^-}\frac{9}{x^2}=\frac{9}{(-3)^2}=\frac{9}{9}=1$$

$$\lim_{x\to -3^+} f(x)=\lim_{x\to -3^-}(4+x)=4+(-3)=1$$

จะเห็นว่า $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -3^+} f(x)$ ดังนั้น $\lim\limits_{x\to -3} f(x)=1$ ■

39. จงหา $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ เมื่อ $f(x)=\begin{cases} x^3 & , \ x\le 2 \\ 4-2x & , \ x>2 \end{cases}$

วิธีทำ เนื่องจาก $x=2$ เป็นจุดเปลี่ยนของฟังก์ชัน

จึงต้องหา $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ และ $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ ดังนี้

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-} x^3=2^3=8$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(4-2x)=4-2(2)=4-4=0$$

จะเห็นว่า $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ หาค่าไม่ได้ ■

40. จงหา $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ เมื่อ $f(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{(x^2-1)^2} & , \ x\le 0 \\ \dfrac{x^2-25}{x+25} & , \ x>0 \end{cases}$

วิธีทำ เนื่องจาก $x=0$ เป็นจุดเปลี่ยนของฟังก์ชัน

จึงต้องหา $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ และ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ ดังนี้

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\sqrt[3]{(x^2-1)^2}=\sqrt[3]{(0^2-1)^2}=\sqrt[3]{1}=1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2-25}{x+25}=\frac{0^2-25}{0+25}=\frac{-25}{25}=-1$$

จะเห็นว่า $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ หาค่าไม่ได้ ■