



Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

«Построение множества достижимости нелинейной системы»

Студент 315 группы

Н. Ю. Заварзин

Руководитель практикума

к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2023

Содержание

1	Постановка задачи	2
2	Аналитическое решение задачи	2
2.1	Принцип максимума Понтрягина для задачи достижимости	2
2.2	Теорема о чередовании нулей переменных	3
2.3	Решение исходной задачи	6
2.4	Особые точки	6
3	Приближенное решение задачи	7
3.1	Алгоритм построения решений	7
3.2	Результаты работы программы	7
3.2.1	Пример 1	7
3.2.2	Пример 2	11
3.2.3	Пример 3	12

1 Постановка задачи

Задано обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\ddot{x}(t) + x(t) \cos(x^2(t)) + 2x(t)\dot{x}(t) = u(t), \quad (1)$$

где $x(t) \in \mathbb{R}$, а на возможные значения управляющего параметра $u(t)$ наложено ограничение: $u(t) \in [-\alpha, \alpha]$, $\alpha > 0$. Задан начальный момент времени $t_0 = 0$ и начальная позиция $x(t_0) = 0$, $\dot{x}(t_0) = 0$. Необходимо построить множество достижимости $X(t_1, t_0, x(t_0), \dot{x}(t_0))$ (множество пар $(x(t_1), \dot{x}(t_1))$) в классе программных управлений в заданный момент времени $t_1 \geq t_0$, а также исследовать его свойства.

2 Аналитическое решение задачи

Перейдём от дифференциального уравнения второго порядка (1) к системе дифференциальных уравнений первого порядка, для этого сделаем замену $x_1(t) = x(t)$, $x_2(t) = \dot{x}(t)$, тогда

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) \cos(x_1^2(t)) - 2x_1(t)x_2(t) + u(t), \\ x_1(t_0) = 0, \\ x_2(t_0) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

2.1 Принцип максимума Понтрягина для задачи достижимости

Рассмотрим систему в \mathbb{R}^n :

$$\dot{x} = f(x, u),$$

где $f(x, u)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, u)$ — непрерывные в \mathbb{R}^{n+m} функции. Пусть \mathcal{P} — множество допустимых управлений на $t \in [0, T]$ и задано $x(t_0) = x_0$. Пусть некоторому допустимому управлению $u^*(t) \in \mathcal{P}$ соответствует траектория $x^*(t)$ с концом $x^*(T)$, принадлежащем границе множества достижимости, а $\mathcal{H}(\psi, x, u)$ — функция Гамильтона-Понтрягина рассматриваемых дифференциальных уравнений. Тогда на $[0, T]$ существует ненулевое решение $\psi(t)$ сопряжённой системы

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}(\psi, x^*, u^*)}{\partial x}, \quad (3)$$

такое, что выполняется условие максимума

$$\mathcal{H}(\psi, x^*, u^*) = \sup_{u(\cdot) \in \mathcal{P}} \mathcal{H}(\psi, x^*, u). \quad (4)$$

Если $u^*(t)$ — ограничено, то для $t \in [0, T]$ выполнено:

$$\sup_{u(\cdot) \in \mathcal{P}} \mathcal{H}(\psi, x^*, u) = \text{const} \geq 0. \quad (5)$$

Для построения множества достижимости достаточно найти концы всех траекторий, удовлетворяющих принципу максимума, а потом удалить из них точки, не принадлежащие границе. Функция Гамильтона-Понтрягина для (2) имеет вид:

$$\mathcal{H}(\psi, x, u) = \psi_1 x_2 + \psi_2 (-x_1 \cos(x_1^2) - 2x_1 x_2 + u).$$

Сопряжённая система к (2) запишется как

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1(t) = 2x_2(t)\psi_2(t) + \cos(x_1^2(t))\psi_2(t) - 2\psi_2(t)x_1^2(t)\sin(x_1^2(t)), \\ \dot{\psi}_2(t) = -\psi_1(t) + 2x_1(t)\psi_2(t). \end{cases} \quad (6)$$

2.2 Теорема о чередовании нулей переменных

Теорема 1. Если $\tau_1 < \tau_2$, $\tau_1, \tau_2 \in [t_0, t_1]$, то для систем вида

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -f(x_1(t), x_2(t)) + \text{sgn } \psi_2, \\ \dot{\psi}_1(t) = \psi_2(t) \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1}, \\ \dot{\psi}_2(t) = -\psi_1(t) + \psi_2(t) \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} \end{cases} \quad (7)$$

с непрерывно дифференцируемой функцией $f(x_1, x_2)$ справедливы следующие утверждения:

1.

$$\begin{cases} \psi_2(\tau_1) = \psi_2(\tau_2) = 0, \\ x_2(\tau_1) = 0 \end{cases} \Rightarrow x_2(\tau_2) = 0. \quad (8)$$

2.

$$\begin{cases} \psi_2(\tau_1) = \psi_2(\tau_2) = 0, \\ x_2(\tau_1) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2(\tau_2) \neq 0, \\ \exists \tau \in (\tau_1, \tau_2) : x_2(\tau) = 0. \end{cases} \quad (9)$$

3.

$$\begin{cases} x_2(\tau_1) = x_2(\tau_2) = 0, \\ \psi_2(\tau_1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \psi_2(\tau_2) = 0. \quad (10)$$

4.

$$\begin{cases} x_2(\tau_1) = x_2(\tau_2) = 0, \\ \psi_2(\tau_1) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \psi_2(\tau_2) \neq 0, \\ \exists \tau \in (\tau_1, \tau_2) : \psi_2(\tau) = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Доказательство:

1)

$$\psi_2(\tau_1) = 0, \quad x_2(\tau_1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{H}(\tau_1) = \psi_1(\tau_1)x_2(\tau_1) - \psi_2(\tau_1)f(x_1(\tau_1), x_2(\tau_1)) + |\psi_2(\tau_1)| = 0,$$

поскольку $\mathcal{H} \equiv \text{const}$, то

$$\mathcal{H}(\tau_2) = \psi_1(\tau_2)x_2(\tau_2) - \psi_2(\tau_2)f(x_1(\tau_2), x_2(\tau_2)) + |\psi_2(\tau_2)| = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \psi_1(\tau_2)x_2(\tau_2) = 0.$$

Если $\psi_1(\tau_2) = 0$, получаем $\psi(\tau_2) = 0$ — противоречие с принципом максимума Понтрягина. Тогда $x_2(\tau_2) = 0$.

2)

$$\psi_2(\tau_1) = 0, \quad x_2(\tau_1) \neq 0, \quad \psi_1(\tau_1) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{H}(\tau_1) = \psi_1(\tau_1)x_2(\tau_1) - \psi_2(\tau_1)f(x_1(\tau_1), x_2(\tau_1)) + |\psi_2(\tau_1)| \neq 0,$$

поскольку $\mathcal{H} \equiv \text{const}$, то

$$\mathcal{H}(\tau_2) = \psi_1(\tau_2)x_2(\tau_2) - \psi_2(\tau_2)f(x_1(\tau_2), x_2(\tau_2)) + |\psi_2(\tau_2)| \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2(\tau_2) \neq 0.$$

Без ограничения общности, положим $\psi_2(t) \neq 0, \quad \forall t \in (\tau_1, \tau_2)$. Тогда возможны две ситуации, в каждой из которых $\dot{\psi}_2(\tau_1)\dot{\psi}_2(\tau_2) < 0$

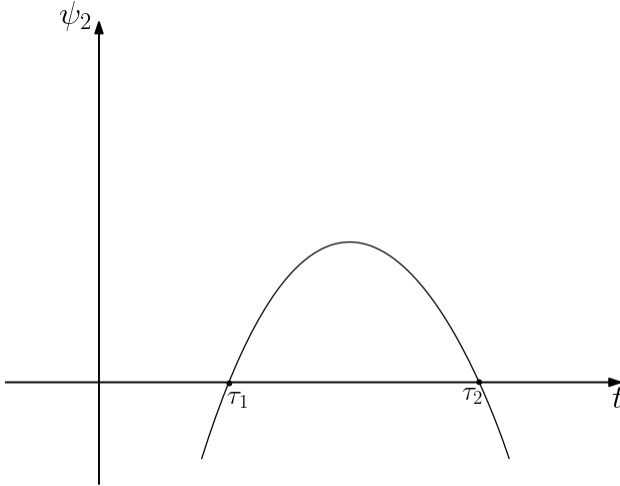


Рис. 1: Первая ситуация

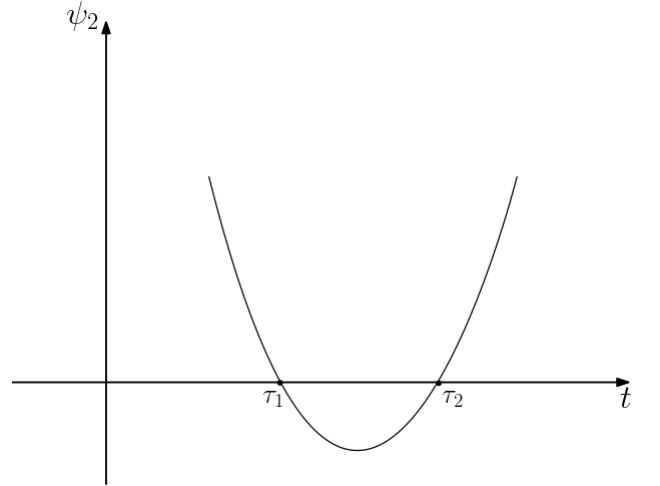


Рис. 2: Вторая ситуация

$$\dot{\psi}_2(\tau_1) = -\psi_1(\tau_1) + \psi_2(\tau_1)\frac{\partial f}{\partial x_2} < 0 \quad (> 0),$$

$$\dot{\psi}_2(\tau_2) = -\psi_1(\tau_2) + \psi_2(\tau_2) \frac{\partial f}{\partial x_2} > 0 \quad (< 0),$$

$$\psi_2(\tau_1) = \psi_2(\tau_2) = 0 \Rightarrow$$

$$\dot{\psi}_2(\tau_1)\dot{\psi}_2(\tau_2) = \psi_1(\tau_1)\psi_1(\tau_2) < 0.$$

Из проведённых ранее рассуждений

$$\psi_1(\tau_1)x_2(\tau_1) = \psi_1(\tau_2)x_2(\tau_2) \Rightarrow x_2(\tau_1)x_2(\tau_2) < 0.$$

Поскольку $x_2(t)$ — непрерывная функция, то $\exists \tau \in (\tau_1, \tau_2) : x_2(\tau) = 0$.

3) Рассмотрим функцию:

$$z(t) = \psi_1(t)x_2(t) + \psi_2(t) \frac{dx_2(t)}{dt}.$$

$z(t)$ — кусочно-непрерывна. Так как $\dot{x}_2(t) = -f(x_1(t), x_2(t)) + u(t)$, то разрывы могут быть лишь в моменты переключений. Пусть t_0 — точка непрерывности. Тогда при $t \in U_\delta(t_0)$:

$$\begin{aligned} \frac{dz(t)}{dt} &= \psi_2(t) \frac{\partial f}{\partial x_1} x_2(t) + \psi_1(t) (-f(x_1(t), x_2(t)) + u(t)) + \left(-\psi_1(t) + \psi_2(t) \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) \times \\ &\times (-f(x_1(t), x_2(t)) + u(t)) + \psi_2(t) \left(-\frac{\partial f}{\partial x_1} x_2(t) - \frac{\partial f}{\partial x_2} (-f(x_1(t), x_2(t)) + u(t)) \right) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно $z(t)$ — кусочно-постоянная. Если же t_0 — момент переключения, то $\psi_2(t_0) = 0$.

Но тогда и

$$z(t_0 - 0) = z(t_0 + 0) \Rightarrow z(t) \equiv \text{const}.$$

$$z(\tau_1) = \psi_1(\tau_1)x_2(\tau_1) + \psi_2(\tau_1)\dot{x}_2(\tau_1) = 0,$$

$$z(\tau_2) = z(\tau_1) = \psi_1(\tau_2)x_2(\tau_2) + \psi_2(\tau_2)\dot{x}_2(\tau_2) = 0.$$

Следовательно $\psi_2(\tau_2) = 0$.

4) Аналогично п. 3):

$$z(\tau_1) = \psi_1(\tau_1)x_2(\tau_1) + \psi_2(\tau_1)\dot{x}_2(\tau_1) \neq 0,$$

$$z(\tau_2) = z(\tau_1) = \psi_1(\tau_2)x_2(\tau_2) + \psi_2(\tau_2)\dot{x}_2(\tau_2) \Rightarrow \psi_2(\tau_2) \neq 0.$$

$$\dot{x}_2(\tau_1)\dot{x}_2(\tau_2) < 0 \Rightarrow \psi_2(\tau_1)\psi_2(\tau_2) < 0 \Rightarrow \exists \tau \in (\tau_1, \tau_2) : \psi_2(\tau) = 0.$$

□

2.3 Решение исходной задачи

Оптимальное управление из условия максимума (4) для нашей задачи определяется как

$$u^*(t) = \begin{cases} \alpha \cdot \operatorname{sgn} \psi_2, & \psi_2(t) \neq 0 \\ [-\alpha, \alpha], & \psi_2(t) = 0. \end{cases} \quad (12)$$

При этом в ней невозможен особый режим, так как иначе из формулы для производной $\psi_2(t)$ (7) следует равенство нулю внутри особого режима и $\psi_1(t)$, что противоречит принципу максимума Понтрягина. Значит управление почти всюду равно $\alpha \cdot \operatorname{sgn} \psi_2$, что позволяет нам пользоваться доказанной ранее теоремой. Отметим также, что число обнулений $\psi_2(t)$ на отрезке $[0, T]$ конечно, ведь в противном случае существует сходящаяся к некоторому \tilde{t} последовательность времён, в точках которой $\psi_2(t) = 0$, откуда из непрерывности $\psi_2(\tilde{t}) = 0$, отсюда в свою очередь из дифференцируемости $\dot{\psi}_2(\tilde{t}) = 0$, что по (6) приводит к $\psi_1(\tilde{t}) = 0$ — несоответствие с принципом максимума Понтрягина.

Воспользуемся этим для построения множества достижимости системы. Введём обозначения

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) \cos(x_1^2(t)) - 2x_1(t)x_2(t) + \alpha, \\ \dot{\psi}_1(t) = 2x_2(t)\psi_2(t) + \cos(x_1^2(t))\psi_2(t) - 2\psi_2(t)x_1^2(t) \sin(x_1^2(t)), \\ \dot{\psi}_2(t) = -\psi_1(t) + 2x_1(t)\psi_2(t). \end{cases} \quad (S_+)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) \cos(x_1^2(t)) - 2x_1(t)x_2(t) - \alpha, \\ \dot{\psi}_1(t) = 2x_2(t)\psi_2(t) + \cos(x_1^2(t))\psi_2(t) - 2\psi_2(t)x_1^2(t) \sin(x_1^2(t)), \\ \dot{\psi}_2(t) = -\psi_1(t) + 2x_1(t)\psi_2(t). \end{cases} \quad (S_-)$$

Заметим, что в окрестности $\psi_2(t) = 0$, значение $\dot{\psi}_2(t) \approx -\psi_1(t)$ для обеих систем. То есть при переключении с (S_+) на (S_-) необходимо, чтобы $\psi_1(\tau^{\text{пер}}) > 0$, а при переключении с (S_-) на (S_+) должно выполняться $\psi_1(\tau^{\text{пер}}) < 0$. При этом нормировка вектора $\psi(t)$ в эти самые моменты переключений не повлияет на переменные координат решения, а также на момент следующего обнуления $\psi_2(t)$. В связи с чем удобно принять $\psi_1(\tau^{\text{пер}}) = \pm 1$ в моменты соответствующих переключений.

2.4 Особые точки

Определение 1. Точка (x_1^*, x_2^*) называется особой точкой системы (2), если правая часть системы в этой точке равна 0.

Приравняем к 0 правые части системы (2). Получим

$$\begin{cases} x_2 = 0, \\ x_1 \cos(x_1^2) + 2x_1x_2 - u = 0. \end{cases}$$

Значит неподвижные точки лежат на прямой $x_2 = 0$, а их координаты x_1 численно определяются из уравнения $x_1 \cos(x_1^2) = u$.

3 Приближенное решение задачи

3.1 Алгоритм построения решений

Множество достижимости будем строить по следующему алгоритму:

1. Решаем систему (S_+) (первые её два уравнения) от $t = 0$ с начальными условиями $x_1(0) = x_2(0) = 0$ до первого момента $x_2(\tau) = 0$ или до $t = T$ (тогда принимаем $\tau = T$).
2. Разбиваем равномерно отрезок $[0, \tau]$ и для каждой точки сетки t^* интегрируем систему (S_-) с начальными условиями $[x_1(t^*), x_2(t^*), 1, 0]$ пока $t < T$, до $\psi_2(t^{**}) = 0$.
3. Решаем (S_+) с начальными $[x_1(t^{**}), x_2(t^{**}), -1, 0]$ до следующего обнуления ψ_2 .
4. Далее после каждого чётного переключения интегрируем (S_+) , а после нечётного (S_-) аналогично пунктам 2 и 3, пока не достигнем рассматриваемой временной границы T .
5. Тоже самое (пункты 1-4) проделать для старта с (S_-) .
6. Строим $\Gamma[T]$ — множество концов траекторий в момент времени T .
7. Преобразуем $\Gamma[T]$ в $\partial W[T]$ посредством удаления пересекающихся отрезков.

Для этого будем поочередно фиксировать отрезки из $\Gamma[T]$, строить уравнение прямой l_{curr} , содержащей текущий отрезок, и определять какие из оставшихся сегментов имеют точки, лежащие по разные стороны от l_{curr} . Каждый из таких отрезков аналогично задает прямую l . Затем необходимо определить точку пересечения l_{curr} и l , если окажется, что она принадлежит обоим сегментам, то придется удалить все точки границы, лежащие между рассматриваемыми и добавить точку пересечения, в противном случае нужно перейти к следующей паре отрезков.

3.2 Результаты работы программы

3.2.1 Пример 1

Возьмём $\alpha = 1$. При таком параметре численно найдем значения неподвижных точек. Построим для наглядности слева от прямой $x = 0$ график функции $f(x) = x \cos(x^2) - \alpha$, его

пересечения с осью абсцисс соответствуют неподвижным точкам системы (S_+) . А справа от прямой $x = 0$ изобразим функцию $g(x) = x \cos(x^2) + \alpha$, её обнуления совпадают с особыми точками (S_-) .

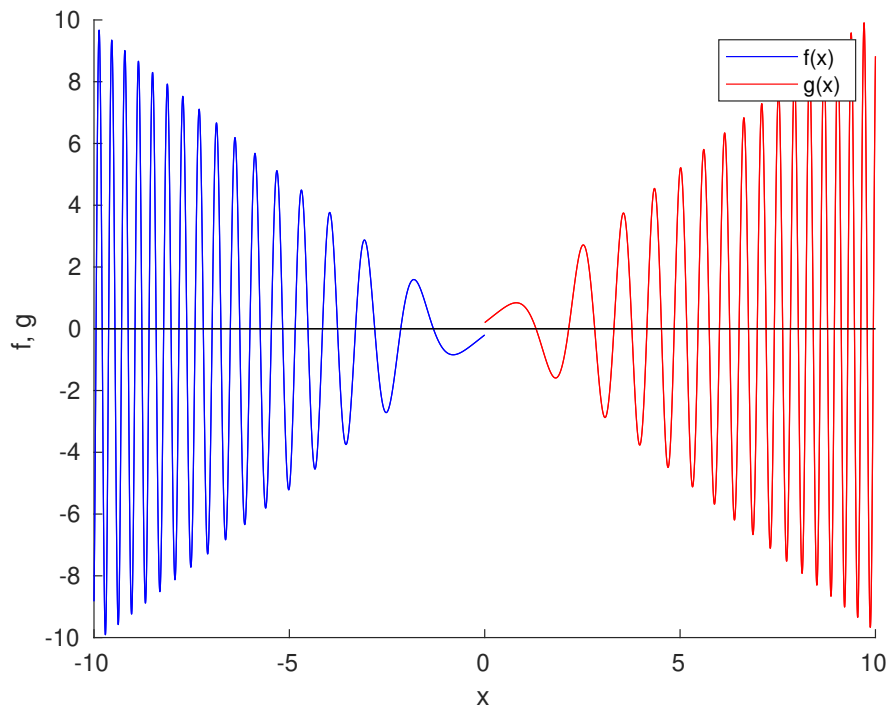


Рис. 3: Поиск стационарных точек

Чтобы определить характер устойчивости точек, нам понадобится матрица Якоби системы (2). Примем $f_1(x_1, x_2) = x_2$, а $f_2(x_1, x_2) = -x_1 \cos(x_1^2) - 2x_1x_2 + \alpha$. Тогда

$$\mathcal{J}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2x_1^2 \sin(x_1^2) - \cos(x_1^2) - 2x_2 & -2x_1 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен $\chi_J(\lambda)$ равен

$$\chi_J(\lambda) = \lambda^2 + 2x_1\lambda + (2x_2 + \cos(x_1^2) - 2x_1^2 \sin(x_1^2)).$$

Воспользуемся тем, что наши стационарные точки располагаются на прямой $x_2 = 0$, в результате получим

$$\chi_J(\lambda) = \lambda^2 + 2x_1\lambda + (\cos(x_1^2) - 2x_1^2 \sin(x_1^2)).$$

Исследуем корни характеристического многочлена в особых точках. Возьмём $x_+^{(1)} = -1.514$, в таком случае

$$\chi_J(\lambda) = \lambda^2 - 3.028\lambda - 4.103 \Rightarrow \{D = (-3.028)^2 + 4 \cdot 4.103 = 25.581\} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{3.028 \pm \sqrt{25.581}}{2},$$

откуда $\lambda_1 = 4.043$, $\lambda_2 = -1.015$.

Значит рассматриваемая точка имеет седловой тип, который является неустойчивым. Отметим также, что сумма корней многочлена равна $-2x_1 > 0$ при $x_1 < 0$, следовательно $x_+^{(k)}$ может быть лишь неустойчивой.

Проанализируем первую относительно нуля стационарную точку системы (S_-) , $x_-^{(1)} = 1.514$:

$$\chi_J(\lambda) = \lambda^2 + 3.028\lambda - 4.103 \Rightarrow \{D = (3.028)^2 + 4 \cdot 4.103 = 25.581\} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-3.028 \pm \sqrt{25.581}}{2},$$

откуда $\lambda_1 = 1.015$, $\lambda_2 = -4.043$, то есть $x_-^{(1)}$ — седло (всегда неустойчива).

На всех графиках, приведённых ниже, синим цветом выделена граница множества достижимости, красным изображается кривая переключений, зелёным отмечаются особые точки для (S_+) , чёрным — для (S_-) .

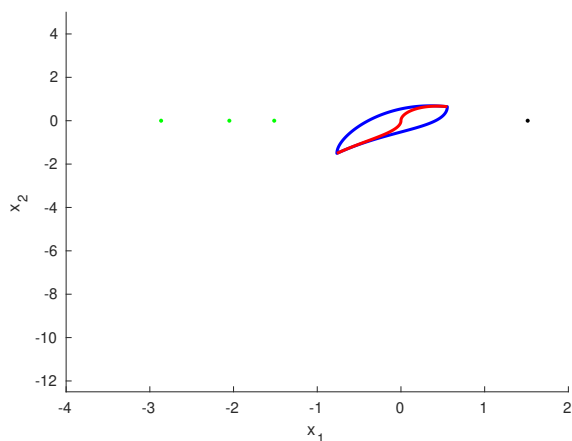


Рис. 4: $t = 1.2$

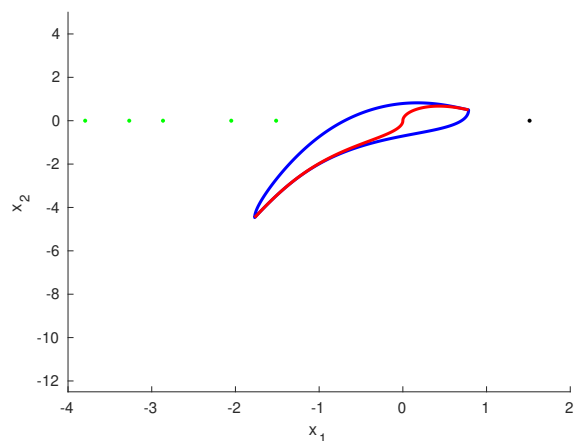


Рис. 5: $t = 1.6$

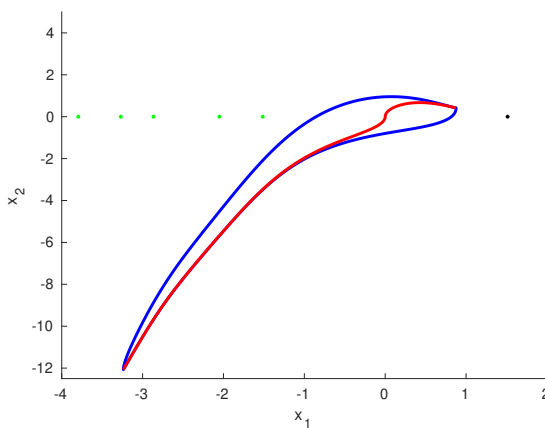


Рис. 6: $t = 1.8$

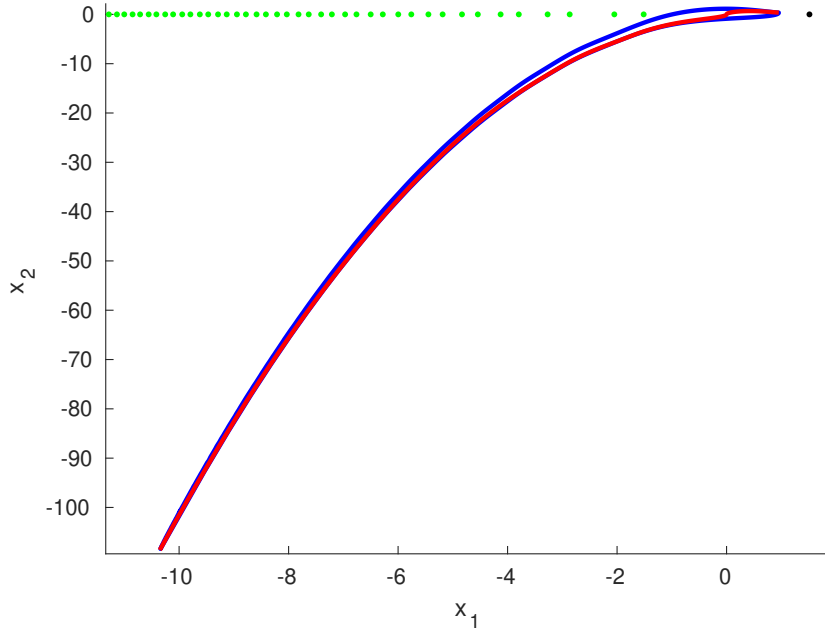


Рис. 7: $t = 2$

С увеличением времени t множество достижимости отдаляется от положений равновесия и стремится к бесконечности, причём довольно-таки быстро (за 0.2 секунды убывает более чем на 100, см. рис. 6-7). Тем самым графики подтверждают неустойчивость рассмотренных выше точек.

Для полноты понимания происходящего покажем, что $x_+^{(1)}$ действительно является седлом: выведем на график и сами траектории при $t = 2$ (зелёным цветом изображены траектории, соответствующие $u = -\alpha$, чёрным соответствующие $u = \alpha$).

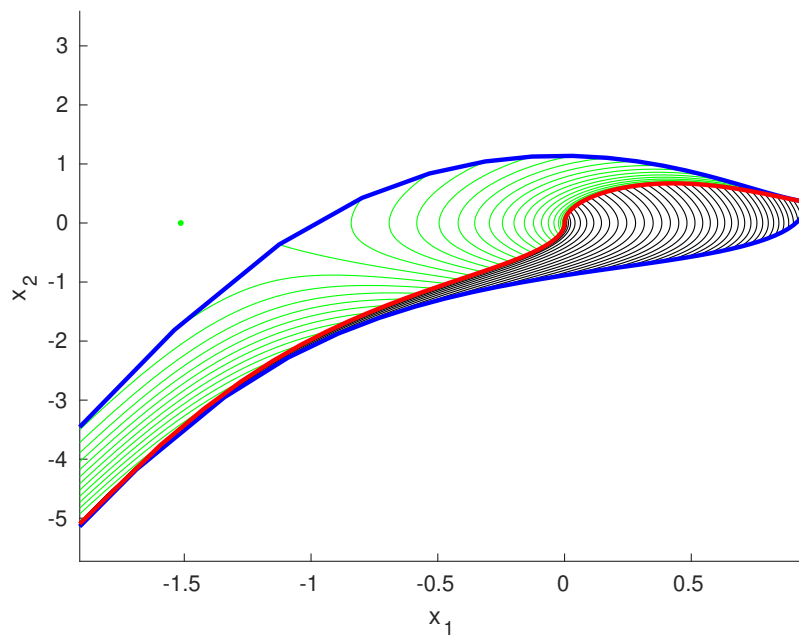


Рис. 8: Траектории системы при $t = 2$ возле $x_+^{(1)}$

3.2.2 Пример 2

Посмотрим как ведет себя множество достижимости при фиксированном $t = 1$, для различных параметров α .

Ниже проиллюстрируем (рис. 9-13) характер изменения множества достижимости при прохождении α через значения из $\{0.75, 1.5, 2.25, 3\}$.

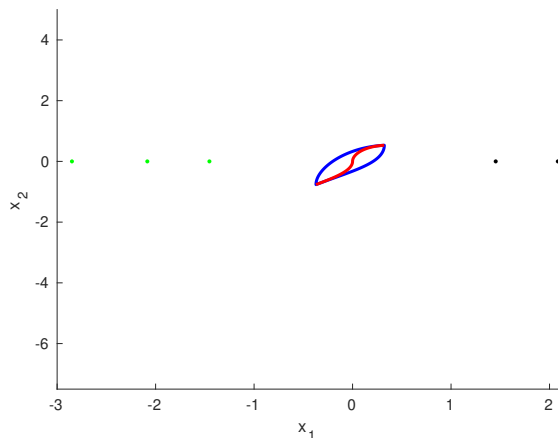


Рис. 9: $\alpha = 0.75$

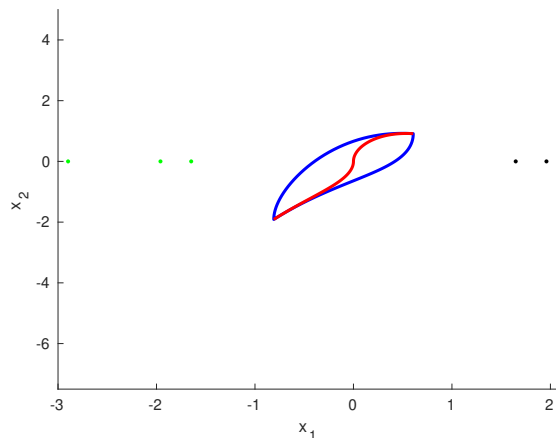


Рис. 10: $\alpha = 1.5$

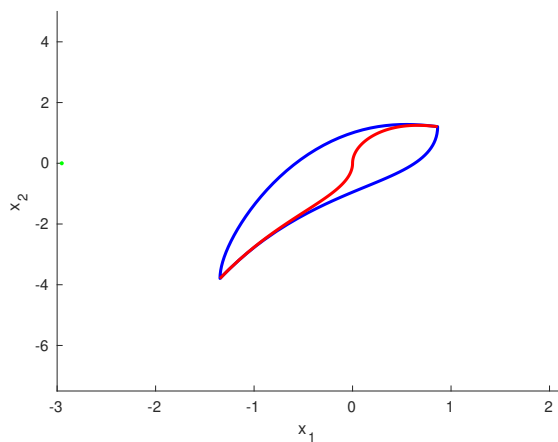


Рис. 11: $\alpha = 2.25$

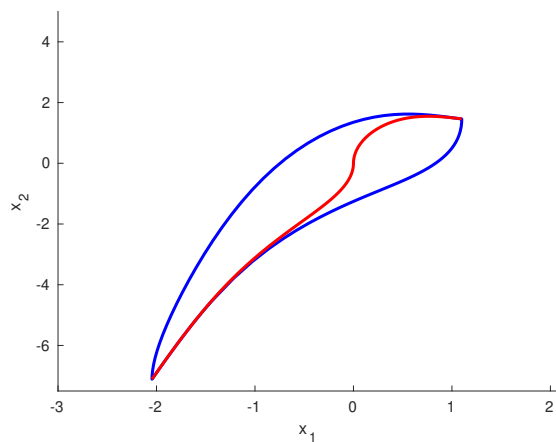


Рис. 12: $\alpha = 3$

Представленные рисунки 9-12 свидетельствуют нам о том, что при увеличении значения α множество достижимости также растёт, причём каждое следующее множество содержит предыдущее (см. рис. 13).

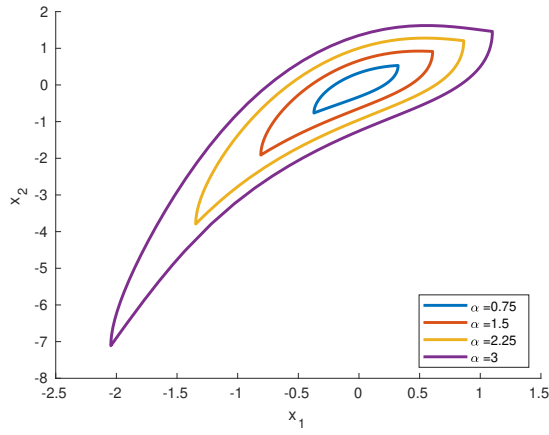


Рис. 13: Изменение множества достижимости при фиксированном времени

3.2.3 Пример 3

При фиксированном $\alpha = 0.2$ продемонстрируем как меняется кривая переключений.

Ниже (рис. 14-16) приведены графики границы множества достижимости и кривой переключения для $t = 3, t = 4, t = 5$.

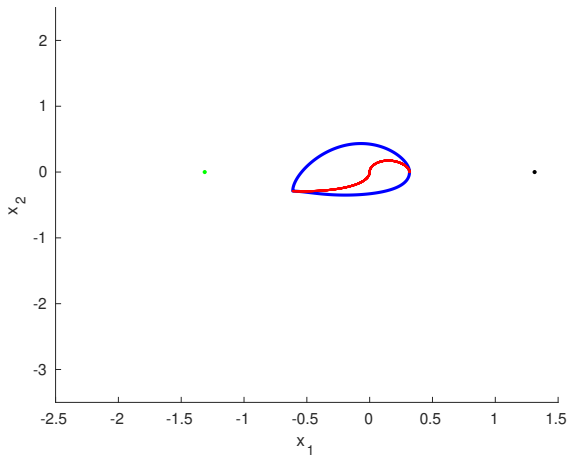


Рис. 14: $t = 3$

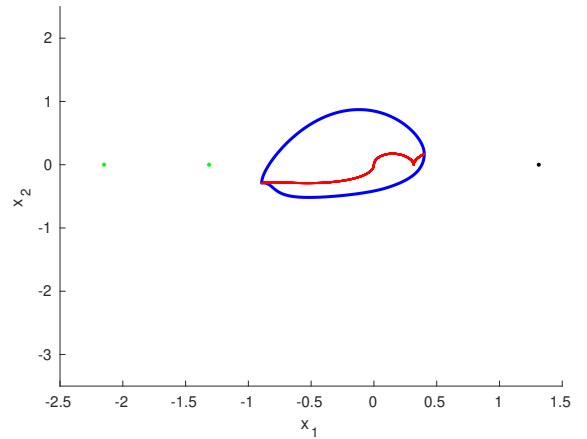


Рис. 15: $t = 4$

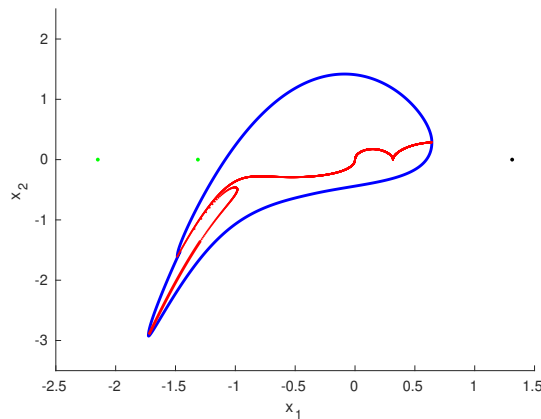


Рис. 16: $t = 5$

Список литературы

- [1] Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматлит, 1961.
- [2] Чистяков И. А. Лекции по оптимальному управлению. 2022-2023.