



Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Кафедра системного анализа

Курсовая работа

# «Динамические системы и биоматематика»

*Студент 315 группы*

Н. Ю. Заварзин

*Преподаватель*

аспирант В. В. Абрамова

Москва, 2023

# Содержание

<b>1</b>	<b>Исследование динамической системы с непрерывным временем</b>	<b>2</b>
1.1	Постановка задачи . . . . .	2
1.2	Биологическая интерпретация . . . . .	3
1.3	Введение безразмерных переменных . . . . .	3
1.4	Неподвижные точки . . . . .	4
1.5	Устойчивость неподвижных точек . . . . .	5
1.5.1	$\alpha > 1$ . . . . .	6
1.5.2	$\alpha < 1$ . . . . .	6
1.5.3	$\alpha = 1$ . . . . .	9
1.5.4	Замечание к случаю $\alpha > 1$ . . . . .	9
1.6	Параметрический и фазовый портреты . . . . .	10
1.7	Предельные циклы . . . . .	12
1.8	Интерпретация результатов . . . . .	13

# 1 Исследование динамической системы с непрерывным временем

## 1.1 Постановка задачи

Задана динамическая система

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = a - bu(t) - c \frac{u(t)v(t)}{A + u(t)}, \\ \dot{v}(t) = d \frac{u(t)v(t)}{1 + u(t)} q(t) - ev(t), \\ \dot{q}(t) = R - fq(t). \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $a, b, c, d, e, f, A, R > 0$ . Система рассматривается в  $\mathbb{R}_+^3$ . Необходимо:

1. Дать биологическую интерпретацию характеристик системы.
2. Ввести новые безразмерные переменные, максимально уменьшив число входящих параметров. Выбрать два свободных параметра.
3. Найти неподвижные точки системы и исследовать их характер в зависимости от значений параметров. Результаты исследования представить в виде параметрического портрета системы.
4. Для каждой характерной области параметрического портрета построить фазовый портрет. Дать характеристику поведения системы в каждом из этих случаев.
5. Исследовать возможность возникновения предельного цикла. В положительном случае найти соответствующее первое ляпуновское число. Исследовать характер предельного цикла (устойчивый, неустойчивый, полуустойчивый).
6. Дать биологическую интерпретацию полученным результатам.

## 1.2 Биологическая интерпретация

Рассматриваемая система (1) представляет собой математическую модель процесса очистки сточных вод. Биохимический процесс окисления загрязнения трактуется как "поедание" его микроорганизмами активного ила, при этом загрязнитель рассматривается как "жертва", а биологически активный ил как "хищник". Определим смысловую характеристику заданных параметров:

- $u(t)$  — концентрация загрязнения воды.
- $v(t)$  — плотность биомассы активного ила.
- $q(t)$  — концентрация кислорода.
- $a$  — интенсивность выбросов.
- $-bu(t)$  — естественный распад загрязнения.
- $c, d$  — некоторые положительные константы.
- $-ev(t)$  — убывание массы активного ила в воде.
- $f$  — коэффициент диссипации.
- $A$  — постоянная трофической функции.
- $R$  — величина притока кислорода в систему в единицу времени.
- $h(u, v) = \frac{cuv}{A + u}$  и  $f(u, v) = \frac{d uv}{1 + u}$  — трофические функции, характеризующие процесс очистки загрязнителя илом.

## 1.3 Введение безразмерных переменных

В системе используется 8 параметров. Для упрощения анализа введём новые, безразмерные переменные, которые позволят сократить число параметров. Обозначим

$$\tau = Tt,$$

$$u = BP(\tau) \Rightarrow \dot{u} = BT\dot{P},$$

$$v = CE(\tau) \Rightarrow \dot{v} = CT\dot{E},$$

$$q = DQ(\tau) \Rightarrow \dot{q} = DT\dot{Q}$$

и подставим эти выражения в (1):

$$\begin{cases} BT\dot{P}(\tau) = a - bBP(\tau) - c\frac{BP(\tau) \cdot CE(\tau)}{A + BP(\tau)}, \\ CT\dot{E}(\tau) = d\frac{BP(\tau) \cdot CE(\tau) \cdot DQ(\tau)}{1 + BP(\tau)} - eCE(\tau), \\ DT\dot{Q}(\tau) = R - fDQ(\tau). \end{cases} \quad (2)$$

Определим  $T = e$ ,  $B = \frac{a}{e}$ ,  $C = \frac{e}{c}$ ,  $D = \frac{e^2}{da}$ , тогда получим

$$\begin{cases} \dot{P}(\tau) = 1 - \alpha P(\tau) - \frac{P(\tau)E(\tau)}{A + BP(\tau)}, \\ \dot{E}(\tau) = \frac{P(\tau)E(\tau)Q(\tau)}{1 + BP(\tau)} - E(\tau), \\ \dot{Q}(\tau) = \beta - \gamma Q(\tau), \end{cases} \quad (3)$$

где  $\alpha = \frac{b}{e} > 0$ ,  $\beta = \frac{dRa}{e^3} > 0$ ,  $\gamma = \frac{f}{e} > 0$ .

Таким образом мы уменьшили количество наших параметров с 8 до 5.

## 1.4 Неподвижные точки

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n), i = \overline{1, n}, (x_1, \dots, x_n) \in D \subseteq \mathbb{R}^n, f = (f_1, \dots, f_n). \quad (4)$$

**Определение 1.** Точка  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  называется неподвижной точкой динамической системы (4), если  $f(x_0) = 0$ .

Найдём неподвижные точки итоговой системы (3). Для этого потребуется решить следующую систему:

$$\begin{cases} 0 = 1 - \alpha P(\tau) - \frac{P(\tau)E(\tau)}{A + BP(\tau)}, \\ 0 = \frac{P(\tau)E(\tau)Q(\tau)}{1 + BP(\tau)} - E(\tau), \\ 0 = \beta - \gamma Q(\tau), \end{cases}$$

Из третьего уравнения можно сразу получить, что  $Q(\tau) = \frac{\beta}{\gamma}$ . Это выражение можно подставить во второе уравнение и вынести  $E(\tau)$  за скобки:

$$\begin{cases} 0 = 1 - \alpha P(\tau) - \frac{P(\tau)E(\tau)}{A + BP(\tau)}, \\ 0 = E(\tau) \left( \frac{P(\tau) \cdot \frac{\beta}{\gamma}}{1 + BP(\tau)} - 1 \right), \\ Q(\tau) = \frac{\beta}{\gamma}. \end{cases}$$

- Если  $E(\tau) = 0$ , то из первого уравнения получим  $P(\tau) = \frac{1}{\alpha}$ .
- Если  $E(\tau) \neq 0$ , то для  $P(\tau)$  имеем

$$\frac{P(\tau) \cdot \frac{\beta}{\gamma}}{1 + BP(\tau)} = 1 \Rightarrow P(\tau) = \frac{1}{\frac{\beta}{\gamma} - B},$$

при  $\frac{\beta}{\gamma} = B$  решений нет. Подставим последнее выражение в первое уравнение системы, в результате

$$E(\tau) = \frac{(1 - \alpha P(\tau))(A + BP(\tau))}{P(\tau)} = \frac{(\beta - B\gamma - \alpha\gamma)(A\beta - AB\gamma + B\gamma)}{\gamma(\beta - B\gamma)}.$$

Таким образом, у системы (3) две особые точки:

$$M = \left( \frac{1}{\alpha}, 0, \frac{\beta}{\gamma} \right), \quad N = \left( \frac{\gamma}{\beta - B\gamma}, \frac{(\beta - B\gamma - \alpha\gamma)(A\beta - AB\gamma + B\gamma)}{\gamma(\beta - B\gamma)}, \frac{\beta}{\gamma} \right).$$

Зафиксируем  $\beta = 2$ ,  $\gamma = 1$ ,  $B = 1$ . Тогда неподвижные точки примут вид

$$M = \left( \frac{1}{\alpha}, 0, 2 \right), \quad N = (1, (1 - \alpha)(A + 1), 2).$$

Однако из-за того, что мы рассматриваем систему в  $\mathbb{R}_+^3$ , то окончательно получим:

- $\alpha < 1 \Rightarrow$  две неподвижные точки  $M$ ,  $N$ .
- $\alpha = 1 \Rightarrow$  точки  $M$  и  $N$  совпадают и равны  $(1, 0, 2)$ .
- $\alpha > 1 \Rightarrow$  система имеет единственное положение равновесия  $M$ .

## 1.5 Устойчивость неподвижных точек

Рассмотрим динамическую систему с непрерывным временем

$$\dot{u} = f(u), \quad u \in U \subseteq \mathbb{R}^n, \quad f : U \rightarrow \mathbb{R}^n. \quad (5)$$

Пусть  $u^*$  — её положение равновесия. Обозначим  $\mathcal{J}(u^*)$  матрицу Якоби вектор-функции  $f(u)$  в точке  $u^*$ . Пусть  $n_+$ ,  $n_0$ ,  $n_-$  — число собственных значений  $\mathcal{J}(u^*)$  (с учётом их кратности) с положительной, равной нулю и отрицательной вещественной частью соответственно.

**Определение 2.** Положение равновесия динамической системы (5) называется гиперболическим, если  $n_0 = 0$ , то есть не существует собственных значений, расположенных на мнимой оси. Гиперболическое положение равновесия называется гиперболическим седлом, если  $n_+ n_- \neq 0$ .

**Теорема 1.** (А.М.Ляпунов, А.Пуанкаре). Пусть  $u^*$  — гиперболическое положение равновесия (5). Тогда, если  $n_+ = 0$ , то положение равновесия  $u^*$  асимптотически устойчиво, если  $n_+ > 0$ , то неустойчиво.

Для рассматриваемой системы

$$\begin{cases} \dot{P}(\tau) = 1 - \alpha P(\tau) - \frac{P(\tau)E(\tau)}{A + BP(\tau)}, \\ \dot{E}(\tau) = \frac{P(\tau)E(\tau)Q(\tau)}{1 + BP(\tau)} - E(\tau), \\ \dot{Q}(\tau) = \beta - \gamma Q(\tau), \end{cases} \quad \alpha, \beta, \gamma, A, B > 0$$

матрица Якоби имеет вид

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} -\alpha - \frac{AE}{(A+P)^2} & -\frac{P}{A+P} & 0 \\ \frac{EQ}{(1+P)^2} & \frac{PQ}{1+P} - 1 & \frac{PE}{1+P} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Теперь можно перейти к исследованию найденных точек.

### 1.5.1 $\alpha > 1$

В этом случае система (3) имеет единственную неподвижную точку  $M = \left(\frac{1}{\alpha}, 0, 2\right)$ . Вычислим значение матрицы Якоби в ней:

$$\mathcal{J}(M) = \begin{pmatrix} -\alpha & -\frac{1}{A\alpha + 1} & 0 \\ 0 & \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Откуда несложно найти её собственные значения:  $\lambda_1 = -\alpha$ ,  $\lambda_2 = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$ ,  $\lambda_3 = -1$ . Из ограничения  $\alpha > 1$  получаем, что все собственные значения отрицательные, следовательно, точка  $M$  — устойчивый узел.

### 1.5.2 $\alpha < 1$

В этом случае в системе имеются две неподвижные точки:  $M = \left(\frac{1}{\alpha}, 0, 2\right)$ ,  $N = (1, (1 - \alpha)(A + 1), 2)$ . Устойчивость точки  $M$  уже была рассмотрена в предыдущем пункте. Стоит отметить лишь то, что при текущих ограничениях собственное значение

$\lambda_2 = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} > 0$ , а значит, точка  $M$  будет неустойчивой. Перейдём к анализу точки  $N$ .

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(N) &= \begin{pmatrix} -\frac{A+\alpha}{A+1} & -\frac{1}{A+1} & 0 \\ \frac{(1-\alpha)(A+1)}{2} & 0 & \frac{(1-\alpha)(A+1)}{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ |\mathcal{J}(N) - \lambda I| &= \begin{vmatrix} -\frac{A+\alpha}{A+1} - \lambda & -\frac{1}{A+1} & 0 \\ \frac{(1-\alpha)(A+1)}{2} & -\lambda & \frac{(1-\alpha)(A+1)}{2} \\ 0 & 0 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= -(1+\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -\frac{A+\alpha}{A+1} - \lambda & -\frac{1}{A+1} \\ \frac{(1-\alpha)(A+1)}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda) \cdot \left( \lambda^2 + \lambda \left( \frac{A+\alpha}{A+1} \right) + \frac{1-\alpha}{2} \right)\end{aligned}$$

Откуда  $\lambda_1 = -1$ , а  $\lambda_{2,3}$  — решения уравнения

$$\lambda^2 + \lambda \left( \frac{A+\alpha}{A+1} \right) + \frac{1-\alpha}{2} = 0.$$

Дискриминант которого

$$D = \left( \frac{A+\alpha}{A+1} \right)^2 - 2(1-\alpha) = \frac{(A+\alpha)^2 - (2-2\alpha)(A+1)^2}{(A+1)^2}.$$

А корни:

$$\lambda_{2,3} = \frac{1}{2} \cdot \left( - \left( \frac{A+\alpha}{A+1} \right) \pm \sqrt{D} \right). \quad (6)$$

Знак дискриминанта совпадает со знаком числителя. Будем рассматривать  $D$  как функцию  $\alpha(A)$ . Найдём нули числителя:

$$\begin{aligned}(A+\alpha)^2 - (2-2\alpha)(A+1)^2 &= (A^2 + 2A\alpha + \alpha^2) - (2A^2 + 4A + 2) + (2\alpha A^2 + 4\alpha A + 2\alpha) = \\ &= \alpha^2 + \alpha(2A^2 + 6A + 2) - (A^2 + 4A + 2) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \alpha_{1,2} = -(A^2 + 3A + 1) \pm (A+1)\sqrt{(A+1)(A+3)}.\end{aligned}$$

Исходя из того, что значения  $\alpha$  должны быть положительными, нам подходит лишь один корень  $\alpha = -(A^2 + 3A + 1) + (A+1)\sqrt{(A+1)(A+3)}$ , докажем это.

$$A^2 + 3A + 1 = 0 \Leftrightarrow A_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} < 0,$$



поэтому корень с минусом нам не интересен. Обозначим

$$\begin{aligned}
g(A) &= -(A^2 + 3A + 1) + (A + 1)\sqrt{(A + 1)(A + 3)} \Rightarrow \\
&\Rightarrow g'(A) = -(2A + 3) + \sqrt{(A + 1)(A + 3)} + \frac{(A + 1)(A + 2)}{\sqrt{(A + 1)(A + 3)}} = \\
&= \frac{(A + 1)(A + 3) + (A + 1)(A + 2) - (A + 1)\sqrt{(A + 1)(A + 3)} - (A + 2)\sqrt{(A + 1)(A + 3)}}{\sqrt{(A + 1)(A + 3)}} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow g'(A) = \frac{\left(\sqrt{(A + 1)(A + 3)} - (A + 2)\right) \left(\sqrt{(A + 1)(A + 3)} - (A + 1)\right)}{\sqrt{(A + 1)(A + 3)}},
\end{aligned}$$

что как легко заметить всегда меньше 0. При этом

$$\begin{aligned}
\lim_{A \rightarrow +\infty} g(A) &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left\{ (A + 1)^2 \cdot \sqrt{1 + \frac{2}{A + 1}} - (A^2 + 3A + 1) \right\} = \\
&= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left\{ (A + 1)^2 \cdot \left( 1 + \frac{1}{A + 1} - \frac{1}{(A + 1)^2} \cdot \frac{1}{2} + \tilde{o}\left(\frac{1}{A^2}\right) \right) - (A^2 + 3A + 1) \right\} = \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

а значит такой  $\alpha > \frac{1}{2} > 0$  для всех допустимых  $A$ .

Теперь можно указать значения  $\lambda_{2,3}$  в явном виде:

- при  $\alpha = -(A^2 + 3A + 1) + (A + 1)\sqrt{(A + 1)(A + 3)}$  собственные значения равны

$$\begin{aligned}
\lambda_2 = \lambda_3 &= -\left(\frac{A + \alpha}{2(A + 1)}\right) = -\left(\frac{-(A + 1)^2 + (A + 1)\sqrt{(A + 1)(A + 3)}}{2(A + 1)}\right) = \\
&= -\frac{1}{2} \cdot (A + 1) \left( \sqrt{\left(\frac{A + 3}{A + 1}\right)} - 1 \right) < 0.
\end{aligned}$$

По теореме Ляпунова-Пуанкаре неподвижная точка асимптотически устойчива.

- при  $0 < \alpha < -(A^2 + 3A + 1) + (A + 1)\sqrt{(A + 1)(A + 3)}$  наш  $D = -S$ , где  $S > 0$ . В таком случае  $\lambda_{2,3}$  — комплексносопряженные числа

$$\lambda_{2,3} = \frac{1}{2} \cdot \left( -\left(\frac{A + \alpha}{A + 1}\right) \pm i\sqrt{S} \right),$$

с отрицательной вещественной частью, что означает асимптотическую устойчивость точки.

- для  $\alpha > -(A^2 + 3A + 1) + (A + 1)\sqrt{(A + 1)(A + 3)}$  собственное значение  $\lambda_3 < 0$  (исходя из (6)). Выясним знак  $\lambda_2$ . Для этого проведём сравнение  $\left(\frac{A + \alpha}{A + 1}\right) \vee \sqrt{D}$ . Левая часть и подкоренное выражение положительны, поэтому их можно возвести в квадрат,

получим:

$$\left(\frac{A+\alpha}{A+1}\right)^2 \vee \left(\frac{A+\alpha}{A+1}\right)^2 - 2(1-\alpha) \Leftrightarrow 1 > \alpha,$$

в результате можно сделать вывод о том, что  $\lambda_2 < 0$  и точка  $N$  асимптотически устойчива.

### 1.5.3 $\alpha = 1$

В такой конфигурации параметров точки  $M$  и  $N$  совпадают и равны  $(1, 0, 2)$ . Обозначим эту точку за  $N$  и вычислим матрицу Якоби в ней

$$\mathcal{J}(N) = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{A+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

откуда  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = 0$ ,  $\lambda_3 = -1$ . Отсюда видно, что данная неподвижная точка негиперболическая. Система структурно неустойчива, и при малом изменении параметра может происходить перестройка фазового портрета. То есть в окрестности точки  $N$  есть траектории, которые она притягивает, а есть траектории, которые она отталкивает. Более подробное исследование нельзя провести линейными методами.

### 1.5.4 Замечание к случаю $\alpha > 1$

В реальности система (3) имеет вторую неподвижную точку  $N = (1, (1-\alpha)(A+1), 2)$ , которая хоть и не лежит в  $\mathbb{R}_+^3$ , но тем не менее влияет на вид траекторий. Поэтому определим характер её устойчивости. Якобиан, как и раньше

$$|\mathcal{J}(N) - \lambda I| = -(1+\lambda) \cdot \left( \lambda^2 + \lambda \left( \frac{A+\alpha}{A+1} \right) + \frac{1-\alpha}{2} \right).$$

Формула для собственных значений также остаётся неизменной:

$$\lambda_1 = -1,$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{1}{2} \cdot \left( - \left( \frac{A+\alpha}{A+1} \right) \pm \sqrt{D} \right),$$

$$\text{где } D = \frac{\alpha^2 + \alpha(2A^2 + 6A + 2) - (A^2 + 4A + 2)}{(A+1)^2}.$$

В то же время мы показали, что  $g(A)$  убывает,  $g(0) = \sqrt{3} - 1$ , а значит, возможен только случай  $\alpha > -(A^2 + 3A + 1) + (A+1)\sqrt{(A+1)(A+3)}$  (ведь у нас  $\alpha > 1$ ). Здесь собственное значение  $\lambda_3 < 0$ , исходя из (6). Из проведённого ранее сравнения  $\left(\frac{A+\alpha}{A+1}\right) \vee \sqrt{D} \Leftrightarrow 1 \vee \alpha$ , поэтому  $\lambda_2 > 0$  и особая точка неустойчива.

## 1.6 Параметрический и фазовый портреты

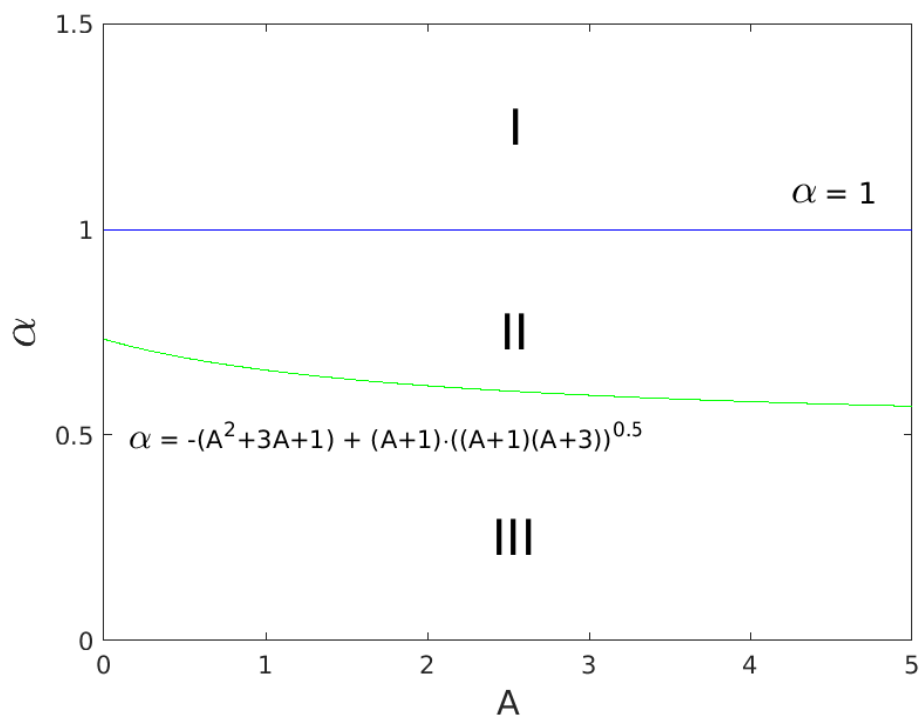


Рис. 1: Параметрический портрет системы

В области I система (3) имеет единственную устойчивую точку  $M$ . В областях II и III у нас асимптотически устойчивая точка  $N$  и неустойчивая  $M$ . На прямой  $\alpha = 1$  они сливаются в одну.

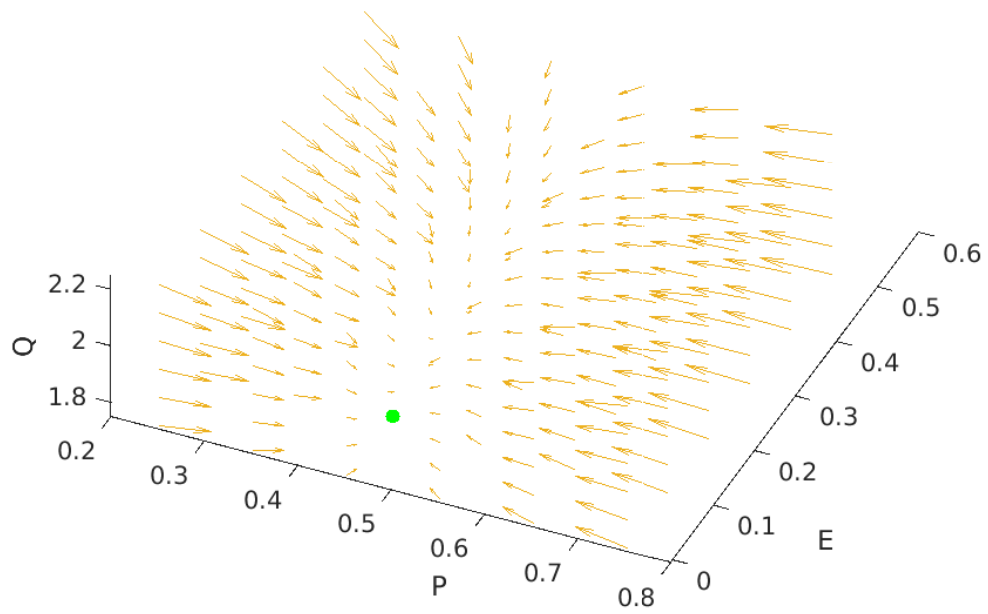


Рис. 2: Фазовый портрет системы, при  $\alpha = 2$ ,  $A = 2$ . Соответствует области I.

Как видно из графика (см. рис. 2), векторное поле по всем направлениям указывает в сторону точки  $M = (0.5, 0, 2)$ , что подтверждает её асимптотическую устойчивость.

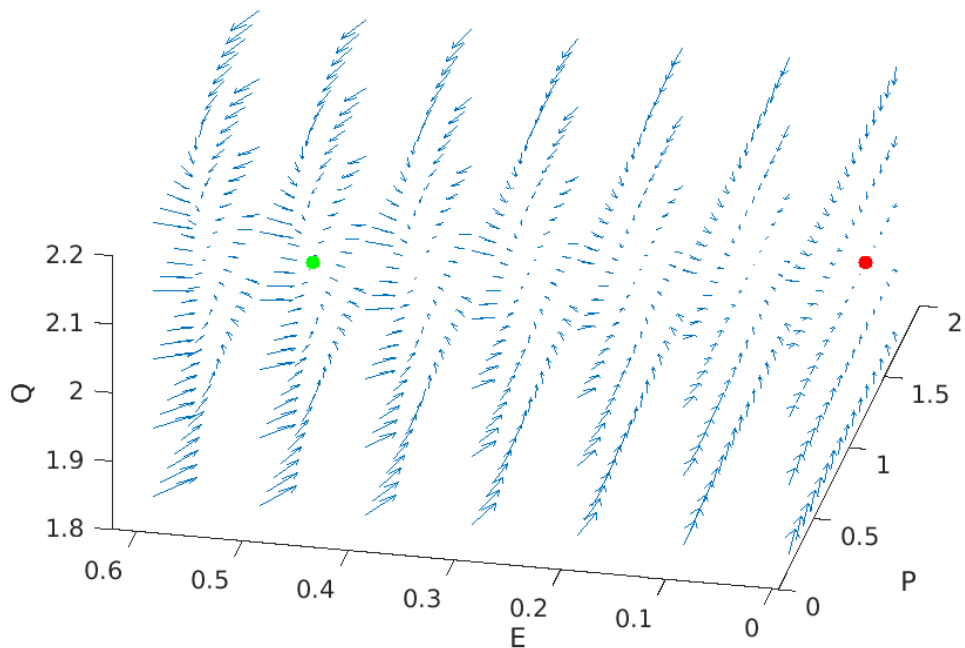


Рис. 3: Фазовый портрет системы, при  $\alpha = 0.75$ ,  $A = 1$ . Соответствует области II.

Векторное поле на представленной иллюстрации (рис. 3) как бы закручивается к

"зелёной" точке  $N = (1, 0.5, 2)$  в осях  $OP$  и  $OE$  (говорит о том, что мы имеем асимптотически устойчивый фокус в проекции на  $(P, E)$ ), а также "стрелочки" смотрят на  $N$  вдоль оси  $OQ$ , всё вместе это отражает асимптотическую устойчивость точки в целом. Для  $M = \left(\frac{4}{3}, 0, 2\right)$  вдоль оси  $OE$  векторное поле "убегает" от точки, что неудивительно, ведь мы имеем  $\lambda_2 = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} = \frac{1}{7} > 0$ .

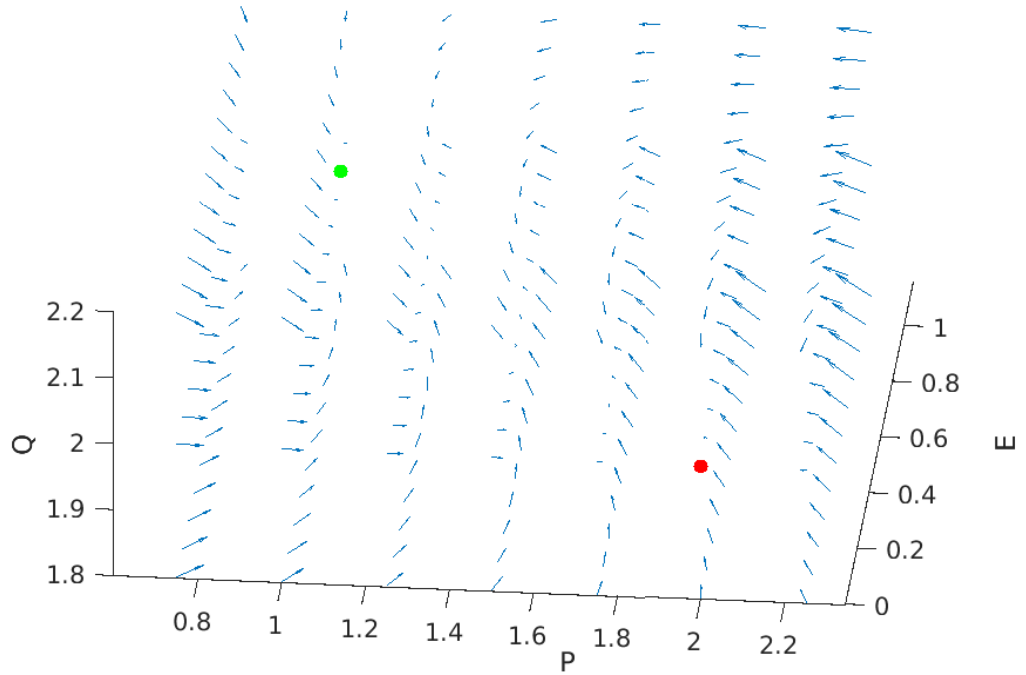


Рис. 4: Фазовый портрет системы, при  $\alpha = 0.5$ ,  $A = 1$ . Соответствует области III.

Из нашего анализа мы знаем, что точка  $M = (2, 0, 2)$  для данного примера, будет неустойчива по  $E$ , так как  $\lambda_2 > 0$ , что отчётливо подтверждается фазовым портретом системы (по  $OE$  поле смотрит от "красной" точки).  $N = (1, 1, 2)$  же оказывается в "центре внимания" и соответствует асимптотически устойчивому узлу (см. рис. 4).

## 1.7 Предельные циклы

Рассмотрим динамическую систему с непрерывным временем

$$\dot{u} = f(u), \quad u \in U \subseteq \mathbb{R}^n, \quad f : U \rightarrow \mathbb{R}^n. \quad (7)$$

**Определение 3.** Решение  $u(t)$  задачи (7) называется периодическим с периодом  $T > 0$ , если  $u(t + T) = u(t)$ , для любого  $t$ , период  $T$  — наименьшее из таких чисел, для которых выполняется последнее равенство.

**Определение 4.** Замкнутая траектория  $\gamma(u_0)$  системы (7) называется предельным циклом, если в окрестности этой траектории нет других периодических орбит.

**Определение 5.** Бифуркация положения равновесия, соответствующая появлению собственных значений  $\lambda_{1,2} = \pm iw_0, w_0 > 0$ , называется бифуркацией Пуанкаре-Андронова-Хопфа или бифуркацией рождения цикла.

При исследовании неподвижных точек системы (3) было показано, что ни при каких значениях параметров  $\alpha$  и  $A$  матрица Якоби не имела собственных значений, подходящих под определение предельного цикла. Поэтому система (3) предельных циклов не имеет.

## 1.8 Интерпретация результатов

На основании проведенного теоретического исследования можно сказать, что возможно два существенных случая. В обоих из них наступает стабилизация системы. Причём если воды загрязняются так быстро, что загрязнитель не успевает разлагаться, то с помощью активного ила концентрация загрязнений всегда устанавливается на одном уровне (области II, III на рисунке 1). Во втором случае концентрация ила стремится к нулевому значению, но концентрация загрязнений не увеличивается за счёт природного распада (соответствует области I, рисунок 1).

## Список литературы

- [1] Братусь А. С., Новожилов А. С., Платонов А. П. Динамические системы и модели биологии. 2011.
- [2] Абрамова В. В. Лекции по динамическим системам и биоматематике. 2023.