



Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

«Стохастический анализ и моделирование»

Студент 415 группы

Н. Ю. Заварзин

Руководитель практикума

аспирант В. А. Сливинский

Москва, 2023

Содержание

1	Задание 7	2
1.1	Формулировка задания	2
1.2	Метод случайного поиска	2
1.3	Метод имитации отжига	6
1.4	Сравнение случайного поиска с методом проекции градиента	6
1.5	Сравнение имитации отжига и метода скорейшего спуска	7
2	Задание 8	9
2.1	Формулировка задания	9
2.2	Алгоритм численного решения	9
2.3	Примеры работы программы	12
3	Задание 9	13
3.1	Формулировка задания	13
3.2	Ковариационные функции и переходные вероятности	13
3.3	Моделирование траекторий методом деления отрезка	16
3.4	Примеры работы программы	20
4	Задание 10	21
4.1	Формулировка задания	21
4.2	Фильтр Калмана	21
4.3	Примеры работы программы	24
5	Задание 11	25
5.1	Формулировка задания	25
5.2	Первая интерпретация: система массового обслуживания	25
5.3	Вторая интерпретация: система массового обслуживания с циклической интен- сивностью	26
5.4	Третья интерпретация: работа страховой компании	28
5.5	Примеры работы программы	30

1 Задание 7

1.1 Формулировка задания

1. Методом случайного поиска найти минимальное значение функции f на множестве $A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$, т. е. $y = \min f(x)$, где

$$f(x) = x_1^3 \sin\left(\frac{1}{x_1}\right) + 10x_1x_2^4 \cos\left(\frac{1}{x_2}\right).$$

при $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0$, функция доопределяется по непрерывности при $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$.

2. Методом имитации отжига найти минимальное значение функции Розенброка g в пространстве \mathbb{R}^2 , где

$$g(x) = (x_1 - 1)^2 + 100(x_2 - x_1^2)^2$$

3. Оценить точность. Сравнить результаты со стандартными методами оптимизации.

1.2 Метод случайного поиска

Применительно к нашей задаче: будем сэмплировать равномерно распределенную случайную величину в единичном круге, обозначаемом A , N -ое число раз. Параметр N выберем исходя из требования найти точку, принадлежащую ε окрестности точки минимума с вероятностью 0.95. Оцениваемая функция имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} x_1^3 \sin\left(\frac{1}{x_1}\right) + 10x_1x_2^4 \cos\left(\frac{1}{x_2}\right), & x_1 \neq 0, x_2 \neq 0, \\ x_1^3 \sin\left(\frac{1}{x_1}\right), & x_1 \neq 0, x_2 = 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}.$$

Очевидно, что вне координатных осей частные производные:

$$f'_{x_1}(x_1, x_2) = 3x_1^2 \sin\left(\frac{1}{x_1}\right) - x_1 \cos\left(\frac{1}{x_1}\right) + 10x_2^4 \cos\left(\frac{1}{x_2}\right),$$

$$f'_{x_2}(x_1, x_2) = 40x_1x_2^3 \cos\left(\frac{1}{x_2}\right) + 10x_1x_2^2 \sin\left(\frac{1}{x_2}\right).$$

Покажем по определению, что и в оставшихся точках у $f(x)$ всё в порядке. Пусть $x_1 \neq 0$, $x_2 = 0$:

$$\begin{aligned}
f'_{x_1}(x_1, 0) &= \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x_1, 0) - f(x_1, 0)}{\Delta x_1} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{(x_1 + \Delta x_1)^3 \sin\left(\frac{1}{x_1 + \Delta x_1}\right) - x_1^3 \sin\left(\frac{1}{x_1}\right)}{\Delta x_1} \\
&= \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{(x_1^3 + 3x_1^2 \Delta x_1 + 3x_1(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_1)^3) \sin\left(\frac{1}{x_1 + \Delta x_1}\right) - x_1^3 \sin\left(\frac{1}{x_1}\right)}{\Delta x_1} = \\
&= \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{x_1^3 \left(\sin\left(\frac{1}{x_1 + \Delta x_1}\right) - \sin\left(\frac{1}{x_1}\right) \right)}{\Delta x_1} + 3x_1^2 \sin\left(\frac{1}{x_1}\right) = \\
&= \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{x_1^3 \cdot 2 \sin\left(\frac{-\Delta x_1}{2x_1(x_1 + \Delta x_1)}\right) \cos\left(\frac{2x_1 + \Delta x_1}{2x_1(x_1 + \Delta x_1)}\right)}{\Delta x_1} + 3x_1^2 \sin\left(\frac{1}{x_1}\right) = \\
&= \left\{ \sin(\Delta x) \underset{\Delta x \rightarrow 0}{\sim} \Delta x \right\} = -x_1 \cos\left(\frac{1}{x_1}\right) + 3x_1^2 \sin\left(\frac{1}{x_1}\right).
\end{aligned}$$

Теперь точки вида $x_1 = 0$, $x_2 \neq 0$:

$$\begin{aligned}
f'_{x_1}(0, x_2) &= \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x_1, x_2) - f(0, x_2)}{\Delta x_1} = \frac{(\Delta x_1)^3 \sin\left(\frac{1}{x_1 + \Delta x_1}\right) + 10\Delta x_1 x_2^4 \cos\left(\frac{1}{x_2}\right)}{\Delta x_1} = \\
&= 10x_2^4 \cos\left(\frac{1}{x_2}\right).
\end{aligned}$$

Если же $x_1 = 0$, $x_2 = 0$:

$$f'_{x_1}(0, 0) = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x_1, 0) - f(0, 0)}{\Delta x_1} = 0.$$

Откуда несложно заметить, что $f'_{x_1}(x_1, x_2)$ непрерывна $\forall x_1, x_2$. Аналогично показывается непрерывность $f'_{x_2}(x_1, x_2)$. Таким образом, из теоремы Лагранжа вытекает липшицевость по каждой переменной (рассматриваемое множество A — компакт в \mathbb{R}^2), то есть справедливы следующие неравенства:

$$|f(y_1, x_2) - f(y_2, x_2)| \leq L_{x_1} |y_1 - y_2|, \quad (1)$$

$$|f(x_1, y_1) - f(x_1, y_2)| \leq L_{x_2} |y_1 - y_2|. \quad (2)$$

Покажем, что в силу данных неравенств мы можем перейти от ε окрестности значения функции к δ окрестности точки минимума (x_1^*, x_2^*) .

$$\begin{aligned} |f(x_1, x_2) - f(x_1^*, x_2^*)| &= |f(x_1, x_2) - f(x_1, x_2^*) + f(x_1, x_2^*) - f(x_1^*, x_2^*)| \leq \\ &\leq |f(x_1, x_2) - f(x_1, x_2^*)| + |f(x_1, x_2^*) - f(x_1^*, x_2^*)| \leq L_{x_2}|x_2 - x_2^*| + L_{x_1}|x_1 - x_1^*| \leq (L_{x_1} + L_{x_2}) \cdot \delta, \end{aligned}$$

где взяв $\delta = \frac{\varepsilon}{L_{x_1} + L_{x_2}}$ мы обеспечим себе попадание в искомую ε окрестность. Ограничим константы L_{x_1} , L_{x_2} :

$$\begin{aligned} L_{x_1} = \max_{x_1, x_2 \in A} |f'_{x_1}(x_1, x_2)| &\leq \max_{x_1, x_2 \in A} \left\{ \left| 3x_1^2 \sin\left(\frac{1}{x_1}\right) \right| + \left| x_1 \cos\left(\frac{1}{x_1}\right) \right| + \left| 10x_2^4 \cos\left(\frac{1}{x_2}\right) \right| \right\} \leq \\ &\leq \max_{x_1, x_2 \in A} \{ |3x_1^2| + |x_1| + |10x_2^4| \} \leq 14. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} L_{x_2} = \max_{x_1, x_2 \in A} |f'_{x_2}(x_1, x_2)| &\leq \max_{x_1, x_2 \in A} \left\{ \left| 40x_1x_2^3 \cos\left(\frac{1}{x_2}\right) \right| + \left| 10x_1x_2^2 \sin\left(\frac{1}{x_2}\right) \right| \right\} \leq \\ &\leq \max_{x_1, x_2 \in A} \{ |40x_1x_2^3| + |10x_1x_2^2| \} \leq \max_{x_1, x_2 \in A} \{ |x_1x_2^2| \cdot (|40x_2| + 10) \} \leq \frac{50}{4} = 12.5. \end{aligned}$$

Поэтому возьмём $\delta = \frac{\varepsilon}{26.5}$.

Теперь оценим необходимое число генераций случайной величины для того, чтобы попасть в объявленную δ окрестность с заявленной вероятностью. Для начала заметим, что $f(x_1, x_2)$ является чётной по переменной x_2 , $f(x_1, 0) = x_1^3 \sin\left(\frac{1}{x_1}\right) \geq -1$, а $f\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right), \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = -1.02313$. Таким образом, $(x_1, 0)$ — не точка минимума, а значит их минимум две. Более того при $|x_1| \leq 0.1$:

$$f(x_1, x_2) \geq -0.001 - x_2^4 \cos\left(\frac{1}{x_2}\right) \geq -1.001 \geq -1.02313 = f\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right), \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right).$$

Вместе с тем при $|x_2| \leq 0.1$:

$$f(x_1, x_2) \geq x_1^3 \sin\left(\frac{1}{x_1}\right) - 0.001 \cdot x_1 \cos\left(\frac{1}{x_2}\right) \geq -1.001 \geq -1.02313 = f\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right), \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right).$$

Получается минимум во множестве A достигается при $|x_1| > 0.1$, $|x_2| > 0.1$. Учитывая это, нам удобно брать $\delta \leq 0.1$, чтобы не было пересечения окрестностей двух точек минимума.

Для оценки скорости сходимости, рассмотрим наихудший случай, когда площадь двух кругов с центрами в точках минимума и радиусом δ имеет минимальное пересечение с множеством A . Это случай с попаданием экстремальных точек на границу. На представленном рисунке изображена наихудшая ситуация для одной окрестности. Серым и чёрным закрашена четверть интересующей нас области, ведь закрашена половина одной окрестности в A , а выше показано, что таких окрестностей не меньше двух.

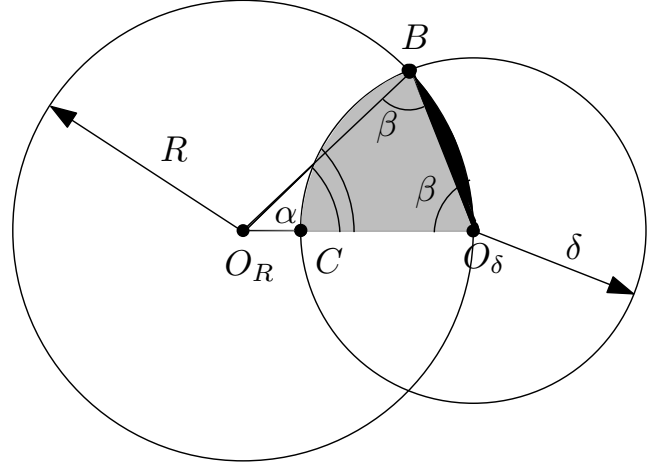


Рис. 1: Окрестность попала на границу

Обозначим за S площадь, \sphericalangle — сектор, а для обозначения треугольника используем \triangle .

$$S = S_{\sphericalangle O_\delta CB} + S_{O_\delta B} = S_{\sphericalangle O_\delta CB} + S_{\sphericalangle O_R O_\delta B} - S_{\triangle O_R O_\delta B}.$$

$$S_{\sphericalangle O_R O_\delta B} - S_{\triangle O_R O_\delta B} = \frac{R^2 \alpha}{2} - \frac{R^2 \sin \alpha}{2} = \frac{\alpha - \sin \alpha}{2}.$$

$$S_{\sphericalangle O_\delta CB} = \frac{\delta^2 \beta}{2} = \frac{\delta^2}{2} \cdot \frac{\pi - \alpha}{2}.$$

По итогу получим, что

$$S = \frac{\alpha(2 - \delta^2) - 2 \sin \alpha + \pi \delta^2}{4}.$$

Введём p_δ — вероятность попасть в δ окрестность точки минимума.

$$p_\delta \geq 4 \frac{S}{S(A)} = \frac{\alpha(2 - \delta^2) - 2 \sin \alpha + \pi \delta^2}{\pi} \approx \{\alpha \text{ мал}\} \approx \delta^2.$$

Теперь определим количество точек, которое необходимо сэмплировать равномерно в единичном круге, чтобы точность ε достигалась с вероятностью не меньшей 0.95. Для этого прибегнем к схеме Бернулли, мы можем это сделать, так как точки генерируются независимо с вероятностью успеха не меньшей p_δ . За \mathcal{A} примем событие соответствующее попаданию хотя бы одной точки в допустимые окрестности.

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}) = 1 - (1 - p_\delta)^N \geq 1 - (1 - \delta^2)^N = 1 - \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{26.5}\right)^2\right)^N.$$

Найдём такое N , что $\mathbb{P}(\mathcal{A}) \geq 0.95$.

$$1 - \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{26.5}\right)^2\right)^N \geq 0.95 \Leftrightarrow N \geq \frac{\ln 0.05}{\ln \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{26.5}\right)^2\right)}.$$

Равномерное сэмплирование в единичном круге реализуем исходя из следующих теоретических соображений. Запишем формулу совместного распределения на некотором B , подмножестве A , случайных величин $\sqrt{w} \cos \phi$, $\sqrt{w} \sin \phi$, где w и ϕ равномерно распределены на $[0, 1]$ и $[0, 2\pi]$ соответственно.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((\sqrt{w} \cos \phi, \sqrt{w} \sin \phi) \in B) &= \mathbb{P}((w, \phi) \in C) = \iint_{(w, \phi) \in C} \frac{1}{2\pi} dw d\phi = \\ &= \iint_{(r^2, \phi) \in C} \frac{r}{\pi} dr d\phi = \iint_{(r \cos \phi, r \sin \phi) \in B} \frac{r}{\pi} dr d\phi = \iint_{(x, y) \in B} \frac{1}{\pi} dx dy. \end{aligned}$$

Следовательно, достаточно генерировать пару $(\sqrt{w} \cos \phi, \sqrt{w} \sin \phi)$.

1.3 Метод имитации отжига

Итеративно, пока не будет найдена точка с приемлемой точностью, производятся следующие действия:

1. Генерируется точка на плоскости как нормальная случайная величина со средним (x_i, y_i) — текущее положение и дисперсией $\sigma^2 T_i$.
2. С вероятностью $P_i = \exp\left(-\frac{\Delta f_i}{T_i}\right)$ осуществляется переход в неё.
3. Происходит понижение температуры $T_{i+1} = k \cdot T_i$.

За начальную возьмём точку $(0, 0)$. Оценка сходимости метода приведена в [1], стр. 34-40.

1.4 Сравнение случайного поиска с методом проекции градиента

Метод проекции градиента представляет собой итеративный алгоритм вида

$$u_{k+1} = pr_A(u_k - \alpha_k \nabla f(u_k)),$$

где α_k — эмпирически настраиваемый параметр, характеризующий величину изменения аргумента, обычно он задаётся как $\frac{\alpha}{\|\nabla f(u_k)\|}$ с α , подбираемым исходя из масштаба u . В нашем

случае A — единичный круг, поэтому формулу можно переписать в виде

$$u_{k+1} = \frac{u_k - \alpha_k \nabla f(u_k)}{\|u_k - \alpha_k \nabla f(u_k)\|}.$$

Для удобства сравнения результатов алгоритма за критерий выхода возьмём фиксированное число итераций, как в экспериментах ниже. Также за условие остановки, если позволяет функция, можно взять следующее выражение

$$\|\nabla f(u_k)\|_2^2 \leq \varepsilon \|\nabla f(u_0)\|_2^2.$$

Так как обычно порядок невязки $(f(u_k) - f^*)$ совпадает с порядком $\|\nabla f(u_k)\|_2^2$, а кроме того нам бы хотелось убрать зависимость критерия от единиц измерения функции \Rightarrow появление $\|\nabla f(u_0)\|_2^2$ в правой части.

Результат работы алгоритма в зависимости от различных параметров:

α	0.1	0.01	0.01
x_0	(1e-3, 1e-3)	(1e-3, 1e-3)	(0.2, 0.6)
N	10	100000	500
f_{min}	-1.288489	0.354586	-1.288489
x_{min}	(-0.357, 0.934)	(0.841, 0.541)	(-0.357, 0.934)
T	2.21 ms	2.94 s	21.8 ms

Преимущество алгоритма случайного поиска состоит в том, что он способен обеспечить заранее заданную точность вычисления за фиксированное число итераций. В методе же проекции градиента результат, как мы убедились выше, сильно зависит от подобранного параметра α (столбцы 1 и 2) и начального условия (столбцы 2 и 3), что можно попробовать нивелировать, выбирая α из некоторой сетки, например $[1, 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001]$, а x_0 из аналитических соображений. Тогда, при правильно подобранных значениях (столбец 1) метод проекции градиента даёт сильный выигрыш по времени (2.21ms против условных 4.33s для $\varepsilon = \alpha = 0.05$), хотя и требует некоторой предварительной настройки.

1.5 Сравнение имитации отжига и метода скорейшего спуска

Метод скорейшего спуска — это метод проекции градиента с видоизмененной формулой перехода:

$$u_{k+1} = u_k - \alpha_k \nabla f(u_k).$$

Для функции Розенброка легко найти глобальный минимум, он равен 0 и достигается в единственной точке (1, 1). Поэтому в качестве критерия останова удобно взять

$$f(u_k) \leq \varepsilon.$$

Подбор параметра α будет осуществляться таким же образом, как и в предыдущем разделе.

Результат работы метода скорейшего спуска в зависимости от различных параметров:

α	0.1	0.01	0.01
x_0	(1e-3, 1e-3)	(1e-3, 1e-3)	(1.5, 0.8)
N	1000	1000	54
$\ f_{min} - f^*\ $	0.61285	0.02086	0.00068
$\ x_{min} - x^*\ $	0.90293	0.21686	0.00188
T	124 ms	130 ms	13.6 ms

Результат работы алгоритма имитации отжига в зависимости от различных параметров:

x_0	(1e-3, 1e-3)	(1.5, 0.8)
N	1000	1000
$\ f_{min} - f^*\ $	0.04568	0.08255
$\ x_{min} - x^*\ $	0.46765	0.53204
T	51.3 ms	43.9 ms

В данном случае оба алгоритма требуют предварительной настройки гиперпараметров. Но алгоритм имитации отжига слабее зависит от выбора начального условия и не застревает в локальных минимумах, что характерно для градиентного спуска.

2 Задание 8

2.1 Формулировка задания

Применить метод Монте–Карло к решению первой краевой задачи для двумерного уравнения Лапласа в единичном круге:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (x, y) \in D, \\ u|_{\partial D} = f(x, y), \\ u \in C^2(D), f \in C(\partial D), \\ D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}. \end{cases}$$

Для функции $f(x, y) = x^2 - y^2$ найти аналитическое решение и сравнить с полученным по методу Монте–Карло.

2.2 Алгоритм численного решения

Численное решение будем искать на квадратной двумерной сетке с шагом h , наложенной на $[-1, 1] \times [-1, 1]$. Координаты узлов определим как $x_i = ih$, $y_j = jh$, а значения $u(x_i, y_j)$, $f(x_i, y_j)$ для краткости обозначим $u_{i,j}$, $f_{i,j}$.

Определение 1. Узел (x_i, y_j) назовём внутренним, если он и все четыре соседних с ним узла (x_{i-1}, y_j) , (x_{i+1}, y_j) , (x_i, y_{j-1}) , (x_i, y_{j+1}) принадлежат \bar{D} , иначе — граничным.

Во внутреннем узле уравнение Лапласа $u_{xx} + u_{yy} = 0$ заменим разностным уравнением:

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} = 0,$$

откуда

$$u_{i,j} = \frac{1}{4}(u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}).$$

В граничных узлах $u_{i,j} = f_{i,j}$. Тогда при $h \rightarrow 0$ имеет место сходимость к аналитическому решению исходной задачи, которое из [8] существует и единственно.

Теперь представим себе частицу M , которая совершает равномерное случайное блуждание по узлам сетки (вероятность перехода в соседние одинакова и равна $\frac{1}{4}$), пока не выйдет на границу, где окажется с вероятностью 1 за конечное число шагов. Пусть $Q(i, j, n, m)$ — вероятность траектории из (x_i, y_j) закончится в граничной (x_n, y_m) . Так как блуждание неиз-

бежно заканчивается на границе, то

$$\sum_{(x_n, y_m) \in \partial D} Q(i, j, n, m) = 1,$$

причём для $(x_n, y_m), (x'_n, y'_m) \in \partial D$ справедливо

$$Q(n', m', n, m) = \begin{cases} 1, & (n' - n)^2 + (m' - m)^2 = 0, \\ 0, & (n' - n)^2 + (m' - m)^2 \neq 0. \end{cases}$$

Поэтому сумму

$$v_{i,j} = \sum_{(x_n, y_m) \in \partial D} Q(i, j, n, m) f_{n,m}$$

можно рассматривать как математическое ожидание случайной величины, задаваемой функцией $f(x, y)$ на ∂D , для траекторий, стартующих из (x_i, y_j) . Тогда в силу закона больших чисел

$$v_{i,j} \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(x_n^{(k)}, y_m^{(k)}),$$

где $(x_n^{(k)}, y_m^{(k)})$ — точка на, которую вышло блуждание из (x_i, y_j) на k -ом запуске. По формуле полной вероятности

$$\begin{aligned} v_{i,j} &= \sum_{(x_n, y_m) \in \partial D} \frac{1}{4} (Q(i-1, j, n, m) + Q(i+1, j, n, m) + Q(i, j-1, n, m) + Q(i, j+1, n, m)) f_{n,m} = \\ &= \frac{1}{4} (v_{i-1,j} + v_{i+1,j} + v_{i,j-1} + v_{i,j+1}). \end{aligned}$$

Из построения $v_{i,j}$, на границе

$$v_{i,j} = f_{i,j}.$$

Таким образом, мы получили, что $v_{i,j}$ имеют те же (с точностью до переобозначений) определяющие уравнения, что и $u_{i,j}$. А значит, значение функции u во внутренней точке можно найти, проведя серию из N случайных блужданий.

Найдём аналитическое решение поставленной задачи. Будем искать его в виде $u(x, y) =$

$= Ax^2 + By^2 + C$. Подставив это в исходную систему:

$$\begin{cases} A + B = 0, \text{ из уравнения Лапласа,} \\ A + C = 1, \text{ подставили } x = 1, y = 0, \\ B + C = -1, \text{ подставили } x = 0, y = 1. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = 1, \\ B = -1, \\ C = 0. \end{cases}$$

То есть мы получили, что функция $u(x, y) = x^2 - y^2$ является единственным решением нашей задачи.

Обсудим возможные реализации численного решения. Для эффективности работы алгоритма, вместо того, чтобы считать значение функции в каждой внутренней точке через фиксированное число случайных блужданий из неё, запустим случайное блуждание с границы и будем запоминать для каждой посещённой точки значение последней встретившейся граничной. В конце просто усредним полученные значения при каждой вершине.

2.3 Примеры работы программы

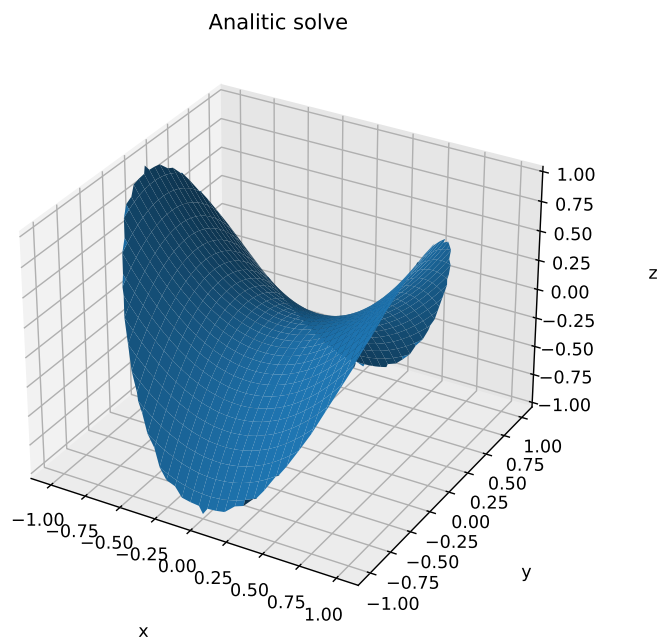


Рис. 2: Аналитическое решение первой краевой задачи для двумерного уравнения Лапласа в единичном круге для $f(x, y) = x^2 - y^2$

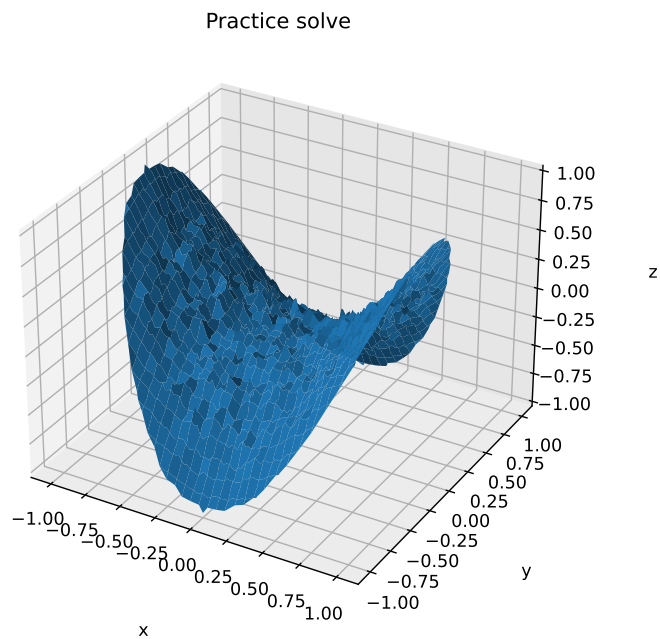


Рис. 3: Численное решение первой краевой задачи для двумерного уравнения Лапласа в единичном круге для $f(x, y) = x^2 - y^2$

3 Задание 9

3.1 Формулировка задания

Рассмотреть два вида процессов:

- Винеровский процесс $W(t)$, $t \in [0, 1]$, $W(0) = 0$.
- Процесс Орнштейна-Уленбека $X(t)$, $t \in [0, 1]$, $X(0) = X_0$, то есть стационарный марковский гауссовский процесс. Начальные значения X_0 генерируются случайным образом так, чтобы полученный процесс был стационарным.

Для данных гауссовских процессов

1. Найти ковариационную функцию и переходные вероятности.
2. Моделировать независимые траектории процесса с данными переходными вероятностями методом добавления разбиения отрезка.
3. Построить график траектории, не соединяя точки ломаной, с целью получения визуально непрерывной линии.

3.2 Ковариационные функции и переходные вероятности

Определение 2. Пусть дано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ параметризованное семейство $\{W_t\}_{t \in T}$ случайных величин

$$W_t(\cdot) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \in T,$$

где $T \subset [0, +\infty)$ интерпретируется как временной интервал, называется случайным процессом.

Определение 3. Случайный процесс $\{W_t\}_{t \in T}$, где $T \subset [0, +\infty)$, называется процессом с независимыми приращениями, если $\forall t_0 < t_1 < \dots < t_n \in T$ случайные величины $W_{t_0}, W_{t_1} - W_{t_0}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ независимы.

Определение 4. Случайный процесс $\{W_t\}_{t \in T}$ будем называть винеровским с параметром $\sigma^2 > 0$, если

1. $W_0 \stackrel{n.n.}{=} 0$.

2. W_t имеет независимые приращения.

3. $\forall t \geq 0, h > 0$ случайная величина $(W_{t+h} - W_t)$ имеет нормальное распределение со средним 0 и дисперсией $\sigma^2 h$.

Определение 5. Пусть x — n -мерный вектор и $x \sim \mathcal{N}(m_x, R_x)$. Тогда его плотность имеет вид

$$p(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \cdot \sqrt{|R_x|}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x-m_x)^T R_x^{-1}(x-m_x)},$$

где R_x — ковариационная матрица.

Определим вид ковариационной функции для винеровского процесса:

$$\begin{aligned} \mathbb{D}(W_t - W_s) &= \mathbb{E}(W_t - W_s)^2 = \mathbb{D}W_t + \mathbb{D}W_s - 2K(t, s) \Rightarrow \\ \Rightarrow K(t, s) &= \frac{1}{2} \cdot (\mathbb{D}W_t + \mathbb{D}W_s - \mathbb{D}(W_t - W_s)) = \frac{1}{2} \cdot (t + s - |t - s|) = \min\{t, s\}. \end{aligned}$$

Определение 6. Случайный процесс $\{W_t\}_{t \in T}$ называется стационарным, если конечномерные распределения инвариантны относительно сдвига времени.

Определение 7. Случайный процесс $\{W_t\}_{t \in T}$ называется марковским, если

$$\forall n \geq 2 \forall t_1, \dots, t_n \in T : t_1 < \dots < t_n, \forall x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R} \text{ и } \forall \mathcal{B} \subset \mathbb{R}$$

$$\mathbb{P}(W_{t_n} \in \mathcal{B} \mid W_{t_1} = x_1, \dots, W_{t_{n-1}} = x_{n-1}) = \mathbb{P}(W_{t_n} \in \mathcal{B} \mid W_{t_{n-1}} = x_{n-1}).$$

Определение 8. Пусть дан случайный процесс $\{W_t\}_{t \in T}$, он называется гауссовским, если $\forall t_0, t_1, \dots, t_n \in T$ случайный вектор $(W_{t_0}, W_{t_1}, \dots, W_{t_n})$ имеет многомерное нормальное распределение.

Определение 9. Случайный процесс $\{X_t\}_{t \in T}$ называется процессом Орнштейна-Уленбека, если он является стационарным, марковским и гауссовым.

Процесс Орнштейна-Уленбека также задаётся как решение стохастического дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} dX_t &= -\theta X_t dt + \sigma dW_t \Rightarrow \\ \Rightarrow \dot{X} &= -\theta X_t + \sigma \eta(t). \end{aligned}$$

Исходя из линейности уравнения по X_t мы можем выписать решение сразу

$$X_t = X_0 e^{-\theta t} + \sigma \int_0^t e^{-\theta(t-s)} dW_s.$$

Откуда, воспользовавшись свойством интеграла Ито:

$$\mathbb{E}[X_t \mid X_0] = X_0 e^{-\theta t},$$

ведь $\mathbb{E}W_s = 0 \quad \forall s$, X_0 считаем константой. Тогда условная ковариация процесса есть

$$\bar{K}(s, t) = \mathbb{E} \left\{ \sigma \int_0^s e^{\theta(u-s)} dW_u \cdot \sigma \int_0^t e^{\theta(v-t)} dW_v \right\},$$

что в силу изометрии Ито равняется

$$\begin{aligned} \sigma^2 e^{-\theta(t+s)} \cdot \int_0^{\min\{s,t\}} e^{2\theta(v)} dv &= \frac{\sigma^2}{2\theta} e^{-\theta(t+s)} (e^{2\min\{s,t\}} - 1) = \\ &= \frac{\sigma^2}{2\theta} (e^{-\theta|t-s|} - e^{-\theta(t+s)}). \end{aligned}$$

Тогда дисперсия при заданном X_0 будет иметь вид $\bar{\sigma}^2 = \frac{\sigma^2}{2\theta} (1 - e^{-2\theta t})$. Для характеристик стационарного случая устремим $t, s \rightarrow +\infty$, получим

$$\mathbb{E}X_t = 0,$$

$$K(s, t) = \frac{\sigma^2}{2\theta} e^{-\theta|t-s|}.$$

Учитывая, что дисперсия $(\hat{\sigma}^2)$ случайной величины X_t равняется $\frac{\sigma^2}{2\theta}$, приходим к

$$K(s, t) = \hat{\sigma}^2 e^{-\theta|t-s|}.$$

Выделим вытекающий факт

$$X_t \sim \mathcal{N} \left(0, \frac{\sigma^2}{2\theta} \right).$$

3.3 Моделирование траекторий методом деления отрезка

Определим переходные вероятности для винеровского процесса. Для этого рассмотрим отрезок $[t_1, t_2]$ и его внутреннюю точку $t = t_1 + \alpha(t_2 - t_1)$, а также условную плотность

$$p_{W_t}(x|W_{t_1} = x_1, W_{t_2} = x_2) = \frac{p_{W_{t_1}W_tW_{t_2}}(x_1, x, x_2)}{p_{W_{t_1}W_{t_2}}(x_1, x_2)}.$$

Обозначим за $\bar{x} = (x_1, x, x_2)$ и $\hat{x} = (x_1, x_2)$. Тогда

$$p_{W_{t_1}W_tW_{t_2}}(x_1, x, x_2) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{|R_1|}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\bar{x}-m_1)^T R_1^{-1}(\bar{x}-m_1)},$$

где $m_1 = (0, 0, 0)$ (из определения винеровского процесса), а ковариационная матрица R_1 определяется как

$$R_1 = \begin{pmatrix} t_1 & t_1 & t_1 \\ t_1 & t & t \\ t_1 & t & t_2 \end{pmatrix}.$$

По той же логике запишем

$$p_{W_{t_1}W_{t_2}}(x_1, x_2) = \frac{1}{(2\pi) \cdot \sqrt{|R_2|}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\hat{x}-m_2)^T R_2^{-1}(\hat{x}-m_2)},$$

$$R_2 = \begin{pmatrix} t_1 & t_1 \\ t_1 & t_2 \end{pmatrix}.$$

Вычислим определители и обратные матрицы для R_1 и R_2 :

$$|R_1| = t_1(t - t_1)(t_2 - t),$$

$$|R_2| = t_1(t_2 - t_1),$$

$$R_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{t}{t_1(t - t_1)} & \frac{1}{t_1 - t} & 0 \\ \frac{1}{t_1 - t} & \frac{t_2 - t}{(t_2 - t)(t - t_1)} & \frac{1}{t - t_2} \\ 0 & \frac{1}{t - t_2} & \frac{1}{t_2 - t} \end{pmatrix},$$

$$R_2^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{t_2}{t_1(t_2 - t_1)} & \frac{1}{t_1 - t_2} \\ \frac{1}{t_1 - t_2} & \frac{1}{t_2 - t_1} \end{pmatrix}.$$

Подставляя найденные значения символьно в `matlab`, получим

$$p_{W_t}(x|W_{t_1} = x_1, W_{t_2} = x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha(1-\alpha)(t_2 - t_1)}} \cdot e^{-\frac{(x - ((1-\alpha)x_1 + \alpha x_2))^2}{2\alpha(1-\alpha)(t_2 - t_1)}}. \quad (3)$$

Вытекающий алгоритм построения траектории процесса:

1. $t_0 = 0, t_1 = 1, W_0 = 0$, подкидываем $W_1 \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
2. Рекурсивно делим отрезки $[t_0, t_1]$, $[t_0, t]$, $[t, t_1]$ и т. д. в отношении α к $(1 - \alpha)$ и разыгрываем $\xi \sim \mathcal{N}((1 - \alpha)x_1 + \alpha x_2, \alpha(1 - \alpha)(t_2 - t_1))$ до тех пор, пока не достигнем искомой точности $t_{k+1} - t_k < \varepsilon$.

Покажем корректность представленного алгоритма. Для этого из марковского свойства выведем, что условное распределение внутри некоторого отрезка с неизвестной реализацией случайного процесса зависит лишь от значения граничных точек этого отрезка, но не от остальных, "внешних". То есть рассмотрим моменты

$$t_1 < t_2 < \dots < t_k < t < t_{k+1} < \dots < t_s, \quad s \geq k + 2 \geq 2,$$

а также соответствующие им

$$x_1, \dots, x_k, x, x_{k+1}, \dots, x_s.$$

Сначала выведем равенство

$$\begin{aligned} p_{W_t}(x \mid x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_s) &= p_{W_t}(x \mid x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{s-1}) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{p(x_1, \dots, x_k, x, x_{k+1}, \dots, x_s)}{p(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_s)} = \frac{p(x_1, \dots, x_k, x, x_{k+1}, \dots, x_{s-1})}{p(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{s-1})} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow p(x_1, \dots, x_k, x, x_{k+1}, \dots, x_s) = p(x_1, \dots, x_k, x, x_{k+1}, \dots, x_{s-1}) p_{W_s}(x_s \mid x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{s-1}), \end{aligned} \quad (4)$$

но в силу марковского свойства

$$p_{W_s}(x_s \mid x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{s-1}) = p_{W_s}(x_s \mid x_{s-1}) = p_{W_s}(x_s \mid x_1, \dots, x_k, x, x_{k+1}, \dots, x_{s-1}).$$

Подставив равенство в цепочку равносильных преобразований выше, мы завершим вывод.

Таким образом, итеративно приходим к

$$p_{W_t}(x \mid x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_s) = p_{W_t}(x \mid x_1, \dots, x_k, x_{k+1}).$$

Теперь будем "двигать" левую границу при $k \geq 2$:

$$\begin{aligned}
p_{W_t}(x \mid x_1, \dots, x_k, x_{k+1}) &= p_{W_t}(x \mid x_2, \dots, x_k, x_{k+1}) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \frac{p(x_1, \dots, x_k, x, x_{k+1})}{p(x_1, \dots, x_k, x_{k+1})} = \frac{p(x_2, \dots, x_k, x, x_{k+1})}{p(x_2, \dots, x_k, x_{k+1})} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow p(x_1, \dots, x_k, x, x_{k+1}) = p(x_2, \dots, x_k, x, x_{k+1}) p_{W_1}(x_1 \mid x_2, \dots, x_k, x_{k+1}), \quad (5)
\end{aligned}$$

по доказанному выше

$$p_{W_1}(x_1 \mid x_2, \dots, x_k, x_{k+1}) = p_{W_1}(x_1 \mid x_2) = p_{W_1}(x_1 \mid x_2, \dots, x_k, x, x_{k+1}),$$

а значит

$$p_{W_t}(x \mid x_1, \dots, x_k, x_{k+1}) = p_{W_t}(x \mid x_k, x_{k+1}).$$

Итого, получаем

$$p_{W_t}(x \mid x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_s) = p_{W_t}(x \mid x_k, x_{k+1}).$$

Остаётся только заметить, что так как винеровский процесс является процессом с независимыми приращениями, то он удовлетворяет марковскому свойству. Процесс Орнштейна-Уленбека же по определению марковский.

Произведём аналогичные выкладки для процесса Орнштейна-Уленбека, разве что для упрощения приняв $\alpha = \frac{1}{2}$.

$$p_{X_t}(x \mid X_{t_1} = x_1, X_{t_2} = x_2) = \frac{p_{X_{t_1} X_t X_{t_2}}(x_1, x, x_2)}{p_{X_{t_1} X_{t_2}}(x_1, x_2)}.$$

Так как процесс гауссовский, то

$$p_{X_{t_1} X_t X_{t_2}}(x_1, x, x_2) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{|R_1|}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\bar{x}-m_1)^T R_1^{-1}(\bar{x}-m_1)},$$

где $m_1 = (0, 0, 0)$ (из стационарности процесса), а ковариационная матрица R_1 определяется как

$$R_1 = \hat{\sigma}^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & e^{-\theta(t-t_1)} & e^{-\theta(t_2-t_1)} \\ e^{-\theta(t-t_1)} & 1 & e^{-\theta(t_2-t)} \\ e^{-\theta(t_2-t_1)} & e^{-\theta(t_2-t)} & 1 \end{pmatrix}.$$

По тому же принципу

$$p_{X_{t_1} X_{t_2}}(x_1, x_2) = \frac{1}{(2\pi) \cdot \sqrt{|R_2|}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\hat{x}-m_2)^T R_2^{-1}(\hat{x}-m_2)},$$

$$R_2 = \hat{\sigma}^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & e^{-\theta(t_2-t_1)} \\ e^{-\theta(t_2-t_1)} & 1 \end{pmatrix}.$$

Откуда символьно при помощи `matlab` получим, что ξ — случайная величина, по которой сэмплируем в момент времени t , задаётся как:

$$\xi \sim \mathcal{N}\left((x_1 + x_2) \frac{e^{-\theta \frac{t_2-t_1}{2}}}{1 + e^{-\theta(t_2-t_1)}}, \hat{\sigma}^2 \cdot \frac{1 - e^{-\theta(t_2-t_1)}}{1 + e^{-\theta(t_2-t_1)}}\right).$$

Из требования стационарности процесса возьмём

$$X_0 \sim \mathcal{N}(0, \hat{\sigma}^2), \quad X_1 \sim \mathcal{N}(X_0 e^{-\theta}, \hat{\sigma}^2(1 - e^{-2\theta})),$$

ведь как было показано в предыдущем разделе $\mathbb{E}[X_t|X_0] = X_0 e^{-\theta t}$, $\bar{\sigma}^2 = \hat{\sigma}^2(1 - e^{-2\theta t})$.

3.4 Примеры работы программы

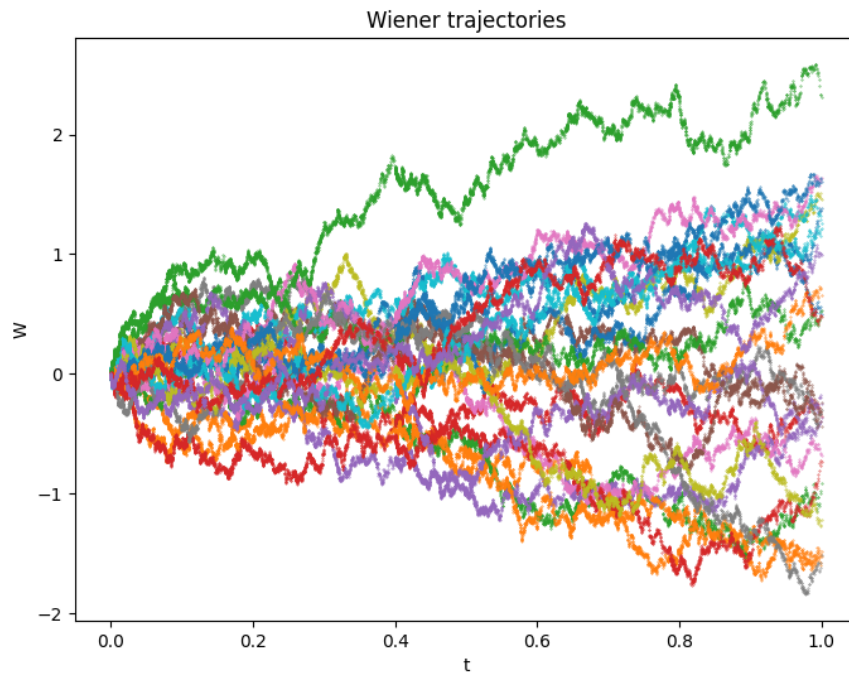


Рис. 4: 10 траекторий винеровского процесса с $\varepsilon = 0.001, \alpha = 0.4$

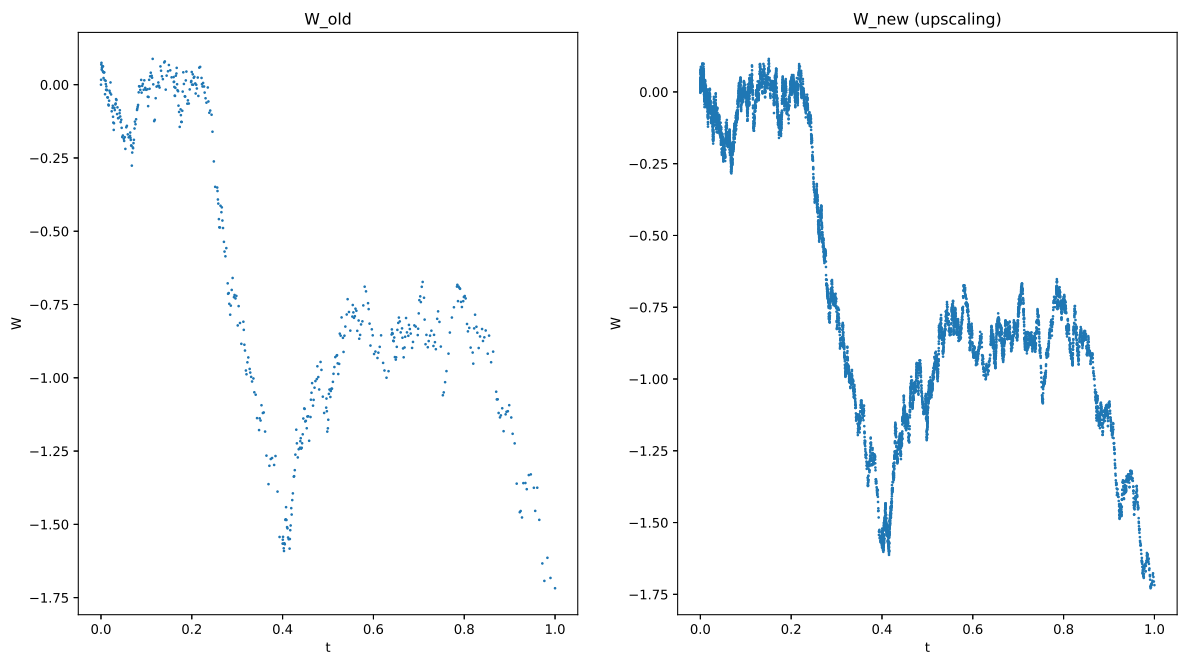


Рис. 5: Масштабирование винеровского процесса $\varepsilon_1 = 0.01, \varepsilon_2 = 0.001, \alpha = 0.4$

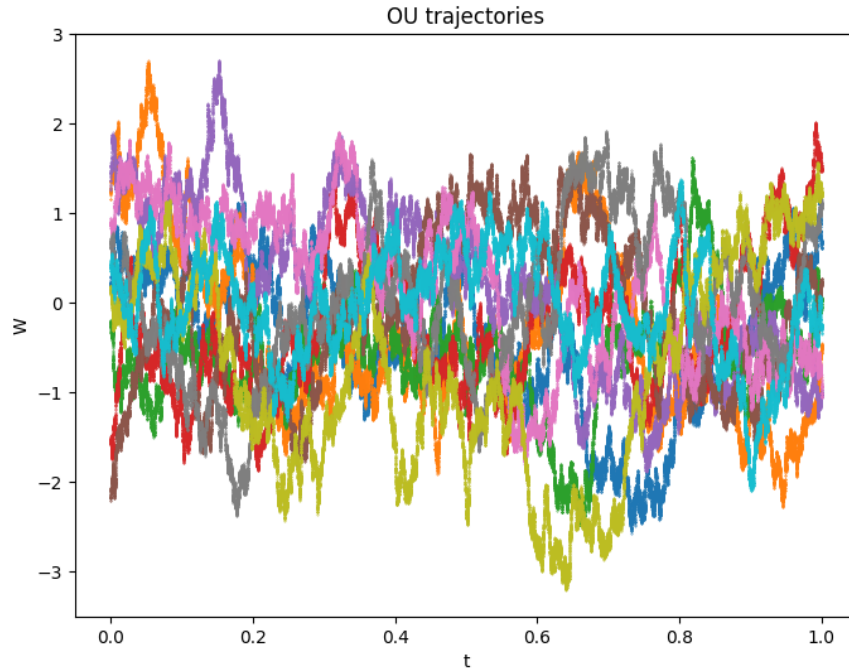


Рис. 6: 10 траекторий процесса Орнштейна-Уленбека с $\varepsilon = 0.00001$, $\alpha = 0.5$, $\sigma = 4$, $\theta = 8$

4 Задание 10

4.1 Формулировка задания

Произвести фильтрацию одномерного процесса Орнштейна-Уленбека:

1. Используя генератор белого шума, добавить случайную ошибку с известной дисперсией к реализации процесса Орнштейна-Уленбека.
2. При помощи одномерного фильтра Калмана оценить траекторию процесса по зашумленному сигналу. Параметры процесса и белого шума считать известными.
3. Рассмотреть случай, когда шум:
 - Является гауссовским.
 - Имеет распределение Коши.

4.2 Фильтр Калмана

Определение 10. *Дискретным белым шумом называется последовательность $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \dots$ независимых одинаково распределенных случайных величин.*

В случае шума, имеющего распределение Коши, фильтр будет расходиться, так как у распределения отсутствует математическое ожидание. Запишем общий вид фильтра Калмана. Он состоит из двух этапов: предсказания и корректировки. Предсказание представляет собой

$$\begin{cases} \hat{x}_k = F_k \hat{x}_{k-1} + B_k u_{k-1} + \xi_k, \\ \hat{\Sigma}_k = F_k \hat{\Sigma}_{k-1} F_k^T + Q_k, \end{cases} \quad (6)$$

где \hat{x}_k — предполагаемое значение состояния динамической системы в следующий момент времени, $\hat{\Sigma}_k$ — ковариационная матрица динамической системы в следующий момент времени, которые мы хотим предсказать при помощи \hat{x}_{k-1} — текущее ожидаемое положение и $\hat{\Sigma}_{k-1}$ — текущая ковариационная матрица возможных состояний. F , B , u нам известны исходя из физической модели нашей системы. ξ — шум, обычно имеющий гауссовское распределение, так как в таком случае доказана оптимальность работы фильтра. Q — добавочный член матрицы ковариации, обусловленный неточностью модели (наличием шума).

Второй этап — корректировка. Суть заключается в уточнении нашей модели предсказаний (6) на основе полученных в данный момент времени измерений с датчиков.

$$\begin{cases} K = \hat{\Sigma}_k H_k^T (H_k \hat{\Sigma}_k H_k^T + R_k)^{-1}, \\ \bar{x}_k = H_k \hat{x}_k + K(z_k - H_k \hat{x}_k), \\ \bar{\Sigma}_k = \hat{\Sigma}_k - K H_k \hat{\Sigma}_k. \end{cases} \quad (7)$$

За K будем обозначать коэффициент Калмана (усиление Калмана), H — матрица отображающая соотношение измерений и состояний, R — ковариационная матрица для измерений, \bar{x} , $\bar{\Sigma}$ — скорректированные показатели. z — известное измерение положения системы, вычисляемое с некоторой погрешностью.

Последовательное применение шагов (6), (7), (6), ... и будет представлять из себя фильтр Калмана.

Перед нами стоит задача отфильтровать систему

$$\begin{cases} x_{n+1} = a \cdot x_n + \nu_n, \\ y_n = x_n + \varepsilon_n. \end{cases} \quad (8)$$

x — представляет из себя предполагаемую реализацию процесса Орнштейна-Уленбека, y — зашумлённая траектория, известна. $\nu \sim \mathcal{N}(0, q)$, $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, r)$ — шумы, элементы совокупности

которых в конечные моменты времени независимы и одинаково распределены. Известными считаются параметры r, σ, θ . Определим из алгебраических соображений параметры q, a . Для этого решим систему

$$\begin{cases} \hat{\sigma}^2 e^{-\theta(t_{n+1}-t_n)} = \text{cov}(x_n, x_{n+1}) = a\mathbb{D}(x_n) = a\hat{\sigma}^2, \\ \hat{\sigma}^2 = \mathbb{D}(x_{n+1}) = a^2 \cdot \mathbb{D}(x_n) + q = a^2 \cdot \hat{\sigma}^2 + q, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = e^{-\theta(t_{n+1}-t_n)}, \\ q = \hat{\sigma}^2(1 - e^{-2\theta(t_{n+1}-t_n)}). \end{cases}$$

Шаг $t_{s+1} - t_s = \Delta$ задаётся до построения и считается известным.

Таким образом, применительно к нашей задаче, получаем

$$F_k \equiv a, \quad B_k \equiv 0, \quad \xi_k = \nu_k, \quad Q_k = \mathbb{D}\nu_k \equiv q, \quad H_k \equiv 1, \quad R_k \equiv r, \quad z_k = y_k.$$

$$\begin{cases} \hat{x}_k = e^{-\theta\Delta} \cdot \hat{x}_{k-1} + \nu_k, \\ \hat{\Sigma}_k = e^{-2\theta\Delta} \cdot \hat{\Sigma}_{k-1} + \hat{\sigma}^2(1 - e^{-2\theta\Delta}), \\ K = \frac{\hat{\Sigma}_k}{(\hat{\Sigma}_k + r)}, \\ \bar{x}_k = \hat{x}_k + K(y_k - \hat{x}_k), \\ \bar{\Sigma}_k = \hat{\Sigma}_k - K\hat{\Sigma}_k. \end{cases} \quad (9)$$

Начальные условия из построения процесса Орнштейна-Уленбека: $\hat{x}_0 = 0, \hat{\Sigma}_0 = \hat{\sigma}^2$.

На графике также для наглядности укажем доверительные интервалы траекторий процесса Орнштейна-Уленбека. То есть $\hat{x}_k + k_{\frac{1-\gamma}{2}} \times \left[-\sqrt{\hat{\Sigma}_k}, \sqrt{\hat{\Sigma}_k} \right]$, тут $k_{\frac{1-\gamma}{2}}$ — квантиль стандартного нормального распределения, γ — коэффициент надёжности.

4.3 Примеры работы программы

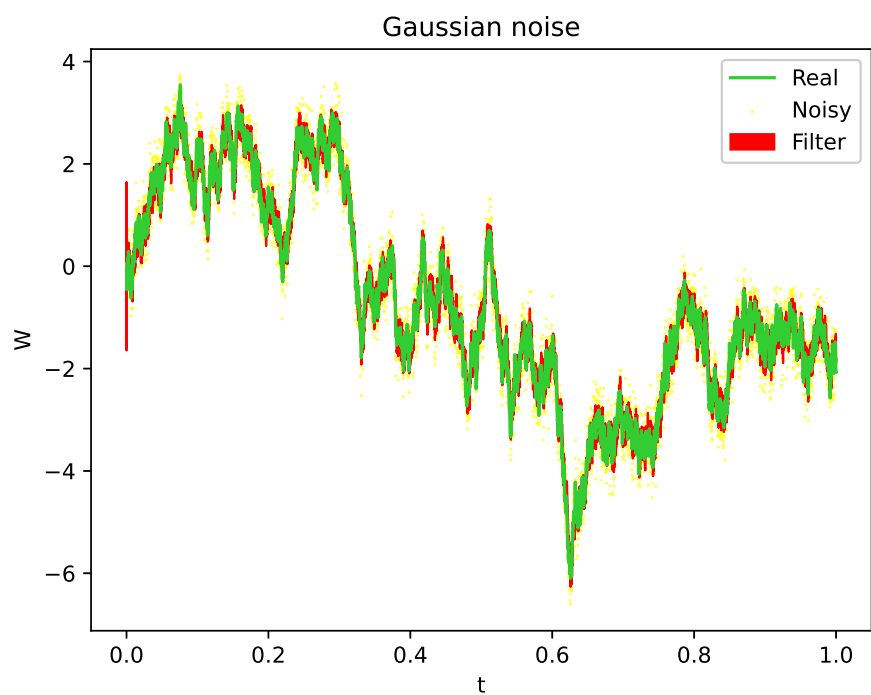


Рис. 7: Применение фильтра Калмана к процессу Орнштейна-Уленбека с гауссовским шумом

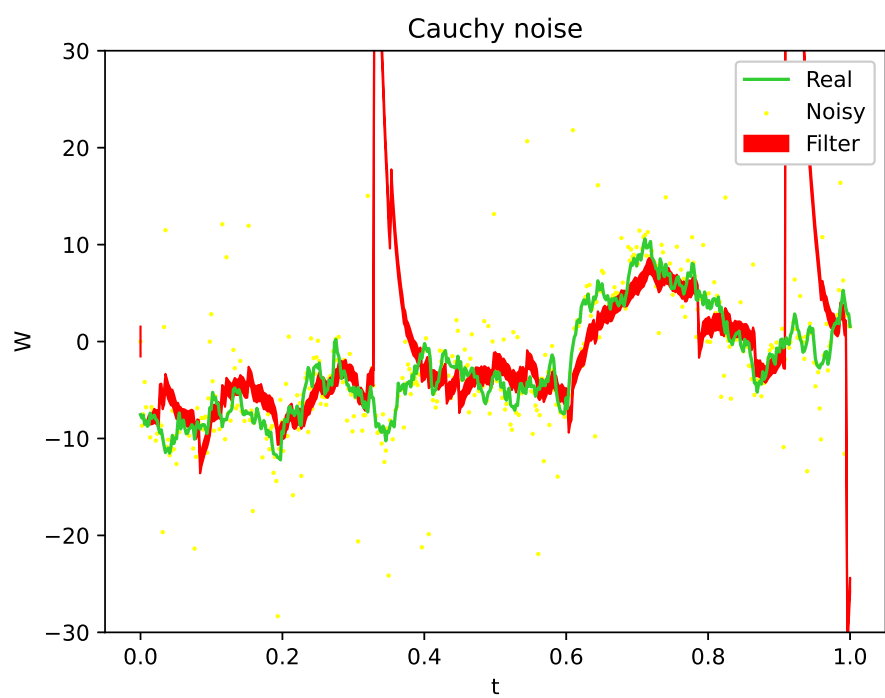


Рис. 8: Применение фильтра Калмана к процессу Орнштейна-Уленбека с шумом Коши

5 Задание 11

5.1 Формулировка задания

Построить двумерное пуассоновское поле, отвечающее сложному пуассоновскому процессу:

1. Первая интерпретация: система массового обслуживания. При этом первая координата поля — время поступления заявки в СМО (равномерное распределение), вторая — время её обслуживания (распределение χ^2 с 10-ю степенями свободы).
2. Вторая интерпретация: система массового обслуживания с циклической интенсивностью $\lambda(t) = \lambda_0(1 + \cos(t))$ и единичными скачками. Свести данную задачу моделирования неоднородного пуассоновского процесса при помощи метода Льюиса и Шедлера к моделированию двумерного пуассоновского поля, где первая координата имеет равномерное распределение, а вторая — распределение Бернулли.
3. Третья интерпретация: работа страховой компании. Первая координата — момент наступления страхового случая (равномерное распределение), вторая координата — величина ущерба (распределение Парето). Поступление капитала по времени линейно со скоростью $c > 0$, начальный капитал $W > 0$.
4. Для каждой системы рассмотреть всевозможные случаи поведения системы в зависимости от значения параметров.

5.2 Первая интерпретация: система массового обслуживания

В данном случае моделировать систему массового обслуживания будем однородным пуассоновским процессом с интенсивностью λ .

Определение 11. Случайный процесс $\{N_t\}_{t \in T}$ будем называть однородным пуассоновским с интенсивностью $\lambda \geq 0$, если

1. $N_0 \stackrel{n.s.}{=} 0$.
2. N_t имеет независимые приращения.
3. $\forall t \geq 0, h > 0$ случайная величина $(N_{t+h} - N_t)$ имеет распределение пуассона с параметром $\lambda \cdot h$.

Пусть в момент времени t_1 поступила заявка, найдём вероятность того, что следующая поступит в момент времени $t_2 > t > t_1$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(t_2 > t \mid t_1) &= \mathbb{P}(t_2 - t_1 > t - t_1 = \Delta \mid t_1) = \{\text{3-ий пункт в определении выше}\} = \\ &= \mathbb{P}(N_t - N_{t_1} = 0) = e^{-\lambda(t-t_1)} = e^{-\lambda\Delta}.\end{aligned}$$

Следовательно

$$\Delta_i = t_{i+1} - t_i \sim \text{Exp}(\lambda).$$

Определение 12. *Распределение χ^2 с k степенями свободы называется распределение суммы квадратов k независимых стандартных нормальных случайных величин.*

В нашем случае, время обработки заявки моделируется случайной величиной s_i с распределением χ_{10}^2 .

Найдём время окончания обработки i -ой заявки, поступившей в момент времени t_i :

1. Если очереди нет

$$T_{\text{end}_i} = t_i + s_i.$$

2. Есть очередь

$$T_{\text{end}_i} = T_{\text{end}_{i-1}} + s_i.$$

Умея моделировать время начала и конца обработки заявки, несложно определять текущую очередь.

Среднее время обработки одной заявки равно $\mathbb{E}\chi_{10}^2 = 10$, а средний интервал времени между поступлением заявок $\mathbb{E}\text{Exp}(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$, тогда при $\lambda < 0.1$ очередь будет рассасываться, а для $\lambda > 0.1$, наоборот, расти.

5.3 Вторая интерпретация: система массового обслуживания с циклической интенсивностью

Так как интенсивность в данном случае непостоянна (вероятность события изменчива), то моделировать будем через неоднородный пуассоновский процесс.

Определение 13. *Случайный процесс $\{N_t\}_{t \in T}$ будем называть неоднородным пуассоновским с интенсивностью $\lambda(t) \geq 0$, если*

$$1. N_0 \stackrel{n.}{=} 0.$$

2. N_t имеет независимые приращения.

3. $\forall t \geq 0, h > 0$ случайная величина $(N_{t+h} - N_t)$ имеет распределение пуассона с параметром $\int_t^{t+h} \lambda(u) du$.

Пусть T_1, \dots, T_n, \dots — времена наступления некоторых событий, а $N(t_1, t_2)$ — число событий на $[t_1, t_2]$, за $\Lambda(t)$ обозначим $\int_0^t \lambda(u) du = \lambda_0(t + \sin(t))$. Аналогично тому, как это было сделано в предыдущем пункте, можно показать, что

$$F_{T_{n+1}-T_n}(x) = 1 - \exp \left\{ - \int_{T_n}^{T_n+x} \lambda(u) du \right\} = 1 - e^{-(\Lambda(T_n+x) - \Lambda(T_n))}.$$

Тогда реализацию T_{n+1} получаем взяв $T_n + F^{-1}(U)$, где U — равномерно распределена на $[0, 1]$. Если записать U как $1 - e^{-E}$, где E — экспоненциальная случайная величина с параметром 1 (при $x \in [0, 1]$ верно $\mathbb{P}(1 - e^{-E} < x) = \mathbb{P}(E \leq -\ln(1 - x)) = x = \mathbb{P}(U < x)$, для других x — очевидно), то T_{n+1} будет распределена как $\Lambda^{-1}(E + \Lambda(T_n))$. Такой метод моделирования неоднородного пуассоновского процесса называется методом Льюиса-Шедлера.

Однако в нашей задаче нахождение обратной функции представленного вида является существенной проблемой. Поэтому воспользуемся модификацией этого алгоритма, представленной в [7], страница 406 (Algorithm 1).

Взяв в качестве доминирующей функции $2\lambda_0 \geq \lambda_0(1 + \cos(t)) \forall t$, получим следующий порядок действий:

- На каждой итерации генерируем случайную величину $\xi \sim \text{Exp}(2\lambda_0)$.
- Прибавляем к переменной t величину ξ и генерируем случайную величину

$$\eta \sim \text{Bern} \left(\frac{\lambda_0(1 + \cos(t))}{2\lambda_0} \right) = \text{Bern} \left(\frac{(1 + \cos(t))}{2} \right).$$

- Если $\eta = 1$, то полагаем $T_{k+1} = t$, $k = k + 1$.
- Если $\eta = 0$, то повторяем процесс заново.

Переменная t нужна только лишь для хранения текущего времени.

5.4 Третья интерпретация: работа страховой компании

Моделировать работу страховой компании будем однородным процессом Пуассона с интенсивностью $\lambda > 0$. А значит для нас из 5.1 верно:

$$t_i - t_{i-1} \sim \text{Exp}(\lambda).$$

Определение 14. *Случайная величина ξ имеет распределение Парето с параметрами x_m и k , если её функция распределения имеет вид*

$$F_\xi(x) = 1 - \left(\frac{x_m}{x}\right)^k.$$

Величину ущерба s_i будем генерировать через обращение функции распределения:

$$F_{s_i}^{-1}(y) = \frac{x_m}{(1-y)^{\frac{1}{k}}}.$$

Если $X \sim U[0, 1]$, то $1 - X \sim U[0, 1]$, поэтому сэмплировать s_i можно как

$$x_m X^{-\frac{1}{k}}, \quad X \sim U[0, 1].$$

Величина капитала компании в момент времени t выражается как

$$W_t = W_0 + ct - s(t),$$

где $s(t)$ — сумма ущерба от страховых случаев, произошедших в моменты времени $t_i \leq t$.

Время разорения — случайная величина, задаваемая следующим условием:

$$T = \min\{t > 0 \mid W_t < 0\}.$$

Выведем зависимость капитала от параметров. Будем считать, что $k > 1$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}W'(t) &= c - \mathbb{E}s'(t) = \{\text{Теорема Лебега}\} = c - \left(\mathbb{E}\left[\sum_{t_i \leq t} s_i\right]\right)' = \\ &= c - (\mathbb{E}N_t \cdot \mathbb{E}s_i)' = c - \frac{\lambda k x_m}{k-1}. \end{aligned}$$

Откуда:

- при $c(k-1) > \lambda k x_m$ капитал растёт
- при $c(k-1) = \lambda k x_m$ положение равновесия
- при $c(k-1) < \lambda k x_m$ капитал уменьшается

5.5 Примеры работы программы

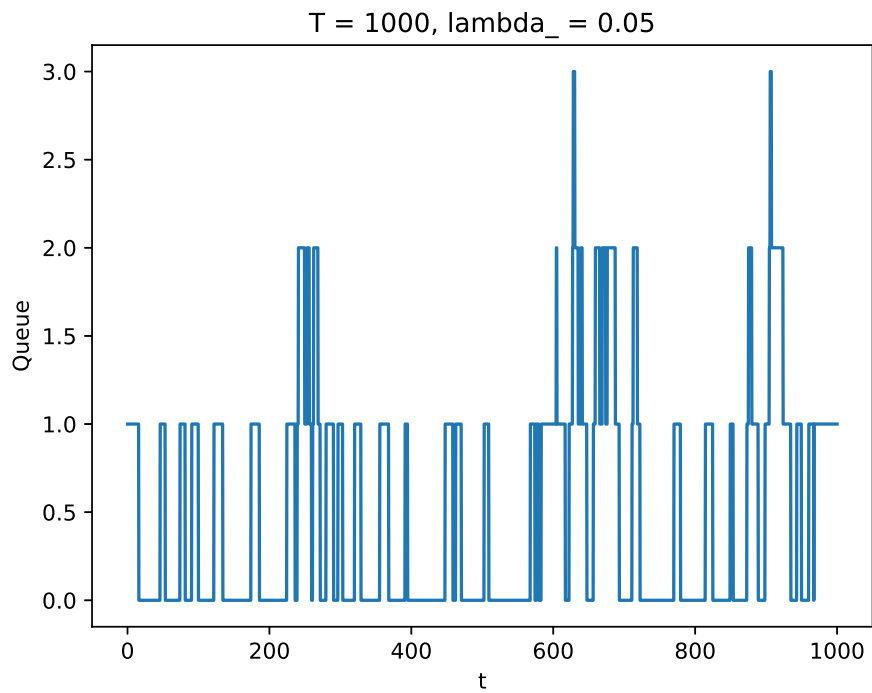


Рис. 9: Успеваем обслуживать очередь

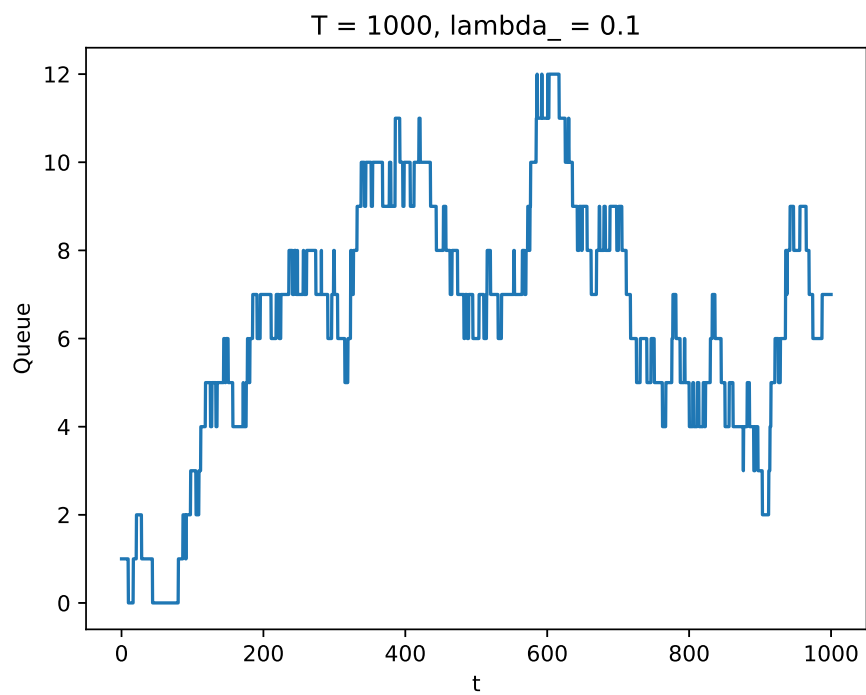


Рис. 10: Система в состоянии равновесия

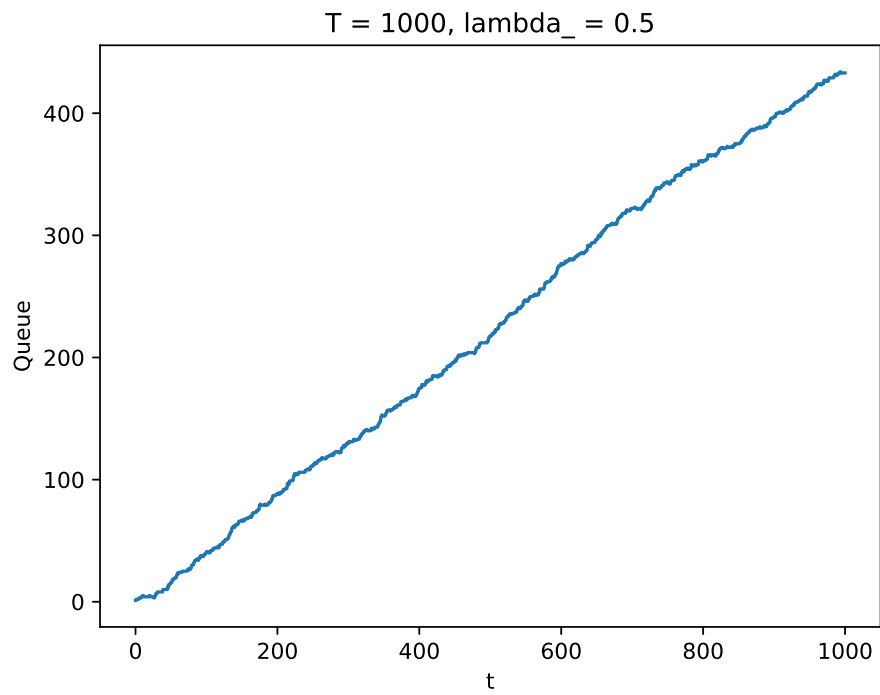


Рис. 11: Очередь растёт

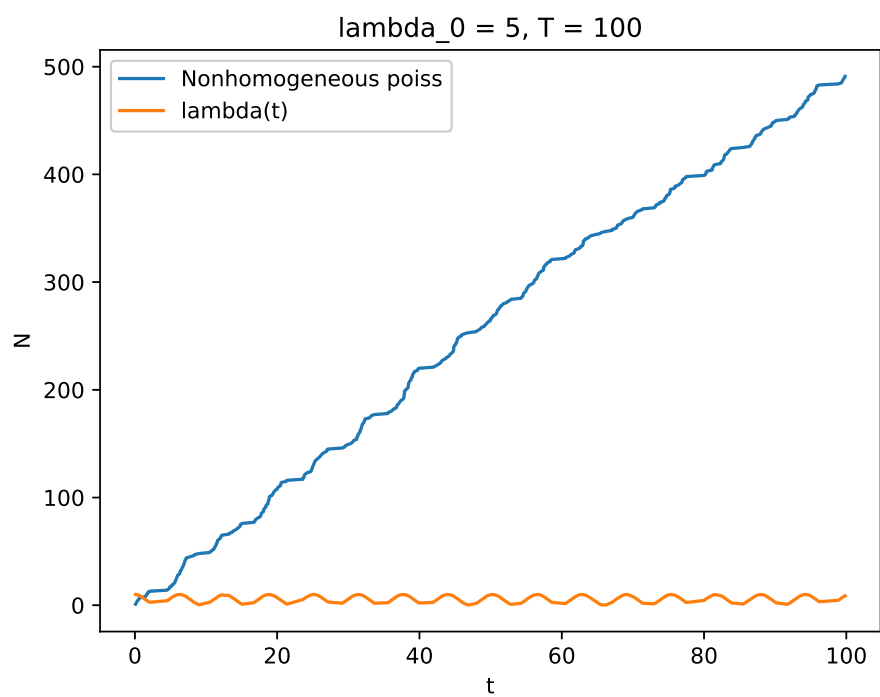


Рис. 12: СМО с циклической интенсивностью $\lambda(t) = \lambda_0(1 + \cos(t))$ и единичными скачками

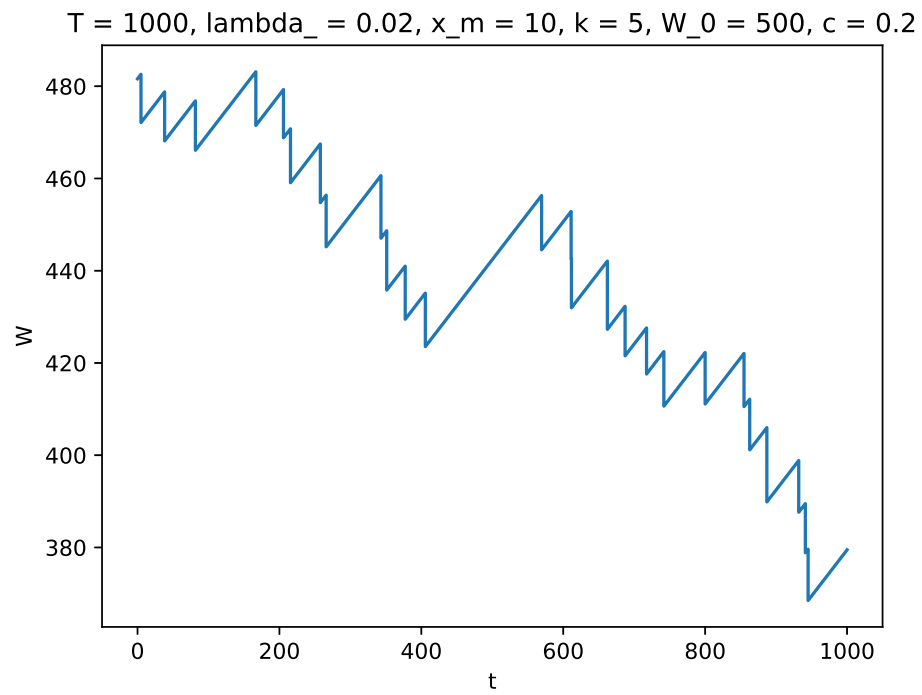


Рис. 13: Капитал уменьшается

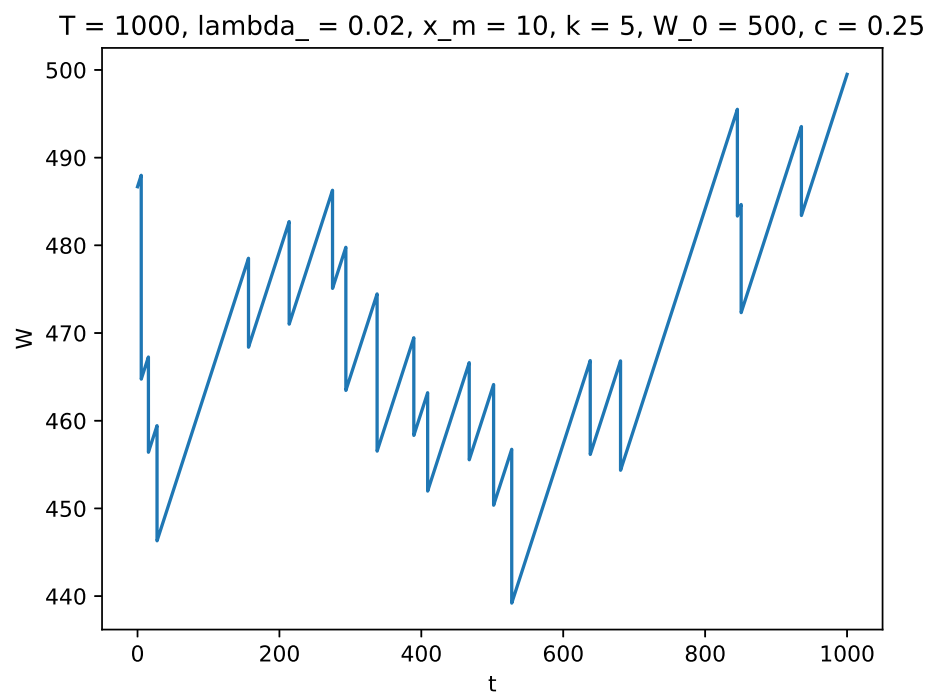


Рис. 14: Состояние равновесия

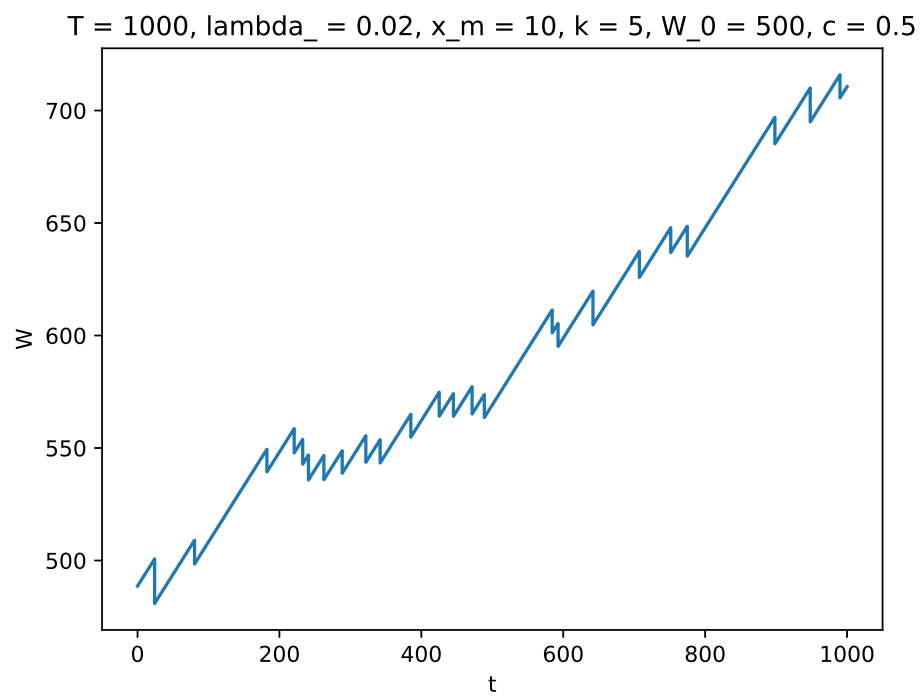


Рис. 15: Капитал растёт

Список литературы

- [1] Жиглявский А. А. Математическая теория глобального случайного поиска. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985.
- [2] Ширяев А. Н. Вероятность, Наука. М.: 1989.
- [3] Востриков И. В. Лекции по курсу «Теория идентификации», 2008.
- [4] Кропачёва Н. Ю., Тихомиров А. С. Моделирование случайных величин: метод указания, НовГУ им. Ярослава Мудрого, 2004.
- [5] Колмогоров А. Н. Избранные труды, в 6 томах. Том 2. Теория вероятностей и математическая статистика. М., Математический институт им. В. А. Стеклова РАН.
- [6] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения, в 2-х томах. Т.1, М., Мир, 1984.
- [7] Lewis P. A. W., Shedler G. S. Simulation of nonhomogeneous poisson processes by thinning, 1979
- [8] Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики, М., МГУ, 2004.