Định nghĩa 8 Cho S là một tập lồi đóng, khác rỗng trong $\mathbb{R}^n$. Một vectơ khác không $\vec{d} \in \mathbb{R}^n$ được gọi là một **hướng** (hay hướng suy biến) của S nếu với mọi $\vec{x} \in S$, ta có

$$\vec{x} + \lambda\vec{d} \in S, \quad \forall\lambda > 0.$$

Nói cách khác, nếu ta di chuyển từ một điểm bất kỳ trong S theo hướng $\vec{d}$ với một khoảng cách dương, ta vẫn ở trong S.

Hai hướng $\vec{d}_1$ và $\vec{d}_2$ được gọi là **phân biệt** nếu chúng không tỉ lệ dương với nhau, tức là

$$\vec{d}_1 \neq \alpha\vec{d}_2, \quad \forall\alpha > 0.$$

Một hướng $\vec{d}$ của S được gọi là **hướng cực biên** nếu nó không thể được biểu diễn như một tổ hợp tuyến tính dương của hai hướng phân biệt. Cụ thể, nếu tồn tại $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ sao cho

$$\vec{d} = \lambda_1\vec{d}_1 + \lambda_2\vec{d}_2$$

thì khi đó phải có $\vec{d}_1 = \alpha\vec{d}_2$ với một số $\alpha > 0$, tức là hai hướng đó thực chất chỉ là một hướng được nhân với một hệ số dương.

Bổ đề 1 Một hướng $d \in D$ là một hướng cực biên của S khi và chỉ khi d là một điểm cực biên của D khi D được xem như một tập đa diện.

Proof **(⇒)** Giả sử rằng d là một điểm cực biên của D (xem như một tập đa diện) nhưng không phải là một hướng cực biên của S. Khi đó, tồn tại hai hướng d_1 và d_2 của S và hai hằng số λ_1 và λ_2 với $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ sao cho:

$$d = \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2.$$

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử rằng d_1 và d_2 là các vector thỏa mãn:

$$e^T d_i = 1, \quad i = 1, 2.$$

Nếu không, ta có thể chuẩn hóa chúng sao cho tổng các thành phần bằng 1 và điều chỉnh λ_1, λ_2 tương ứng. Khi đó, ta có:

$$1 = e^T d = \lambda_1 e^T d_1 + \lambda_2 e^T d_2 = \lambda_1 + \lambda_2.$$

Hơn nữa, vì d_1 và d_2 là các hướng của S, chúng cũng thuộc D. Do đó, ta đã tìm thấy một tổ hợp lồi của các phần tử trong D bằng d, điều này mâu thuẫn với giả thiết rằng d là một điểm cực biên.

(⇐) Ngược lại, giả sử rằng d là một hướng cực biên của S có tổng các thành phần bằng 1 nhưng không phải là một điểm cực biên của D. Khi đó, d có thể được biểu diễn như một tổ hợp lồi của hai hướng khác $d_1, d_2 \in D$:

$$d = \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2, \quad \text{với } \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \text{ và } \lambda_1, \lambda_2 \in (0, 1).$$

Điều này rõ ràng là mâu thuẫn, vì mọi tổ hợp lồi nghiêm ngặt đều là một tổ hợp dương, và do đó giả định rằng d là một hướng cực biên là sai. Như vậy ta có điều phải chứng minh! □

Tính chất 1 Xét tập đa diện:

$$S = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{x} = \vec{b}, \vec{x} \geq 0\},$$

trong đó A là ma trận $m \times n$ và $\vec{b}$ là một vectơ có kích thước m.

Giả sử ma trận A có hạng m, nếu không, ta giả sử hệ phương trình $A\vec{x} = \vec{b}$ có nghiệm. Khi đó ta có những tính chất sau:

(i) Số lượng điểm cực biên của S là hữu hạn, và S luôn có ít nhất một điểm cực biên.

(ii) Số lượng hướng cực biên của S cũng là hữu hạn.

(iii) Mỗi điểm trong S có thể được biểu diễn dưới dạng một tổ hợp lồi của các điểm cực biên cộng với một tổ hợp tuyến tính không âm của các hướng cực biên. Cụ thể, $\vec{x} \in S$ khi và chỉ khi có thể viết dưới dạng:

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \vec{x}_j + \sum_{j=1}^{\ell} \mu_j \vec{d}_j, \tag{2.2}$$

trong đó:

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1, \quad \lambda_j \geq 0 \quad \forall j = 1, \ldots, k,$$

$$\mu_j \geq 0 \quad \forall j = 1, \ldots, \ell.$$

PROOF **(i)**. Giả sử $x \in S$. Nếu x là một điểm cực biên, thì ta có ngay điều phải chứng minh.

Giả sử x không phải là điểm cực biên của S. Mà ta lại có một điểm $x_0 \in S$ là một điểm cực biên của S khi và chỉ khi x_0 là giao điểm của đúng n siêu phẳng độc lập tuyến tính trong tập các siêu phẳng tạo nên S. Từ đó ta suy ra x nằm tại giao của $r < n$ mặt phẳng ràng buộc (trong đó r có thể bằng 0).

Việc x không phải là một điểm cực biên của P cũng đồng nghĩa rằng tồn tại $y_1, y_2 \in S$ và $\lambda > 0$ sao cho $x = \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2$. Để điều này xảy ra, chúng ta cần các ràng buộc tại x cũng phải ràng buộc cả y_1 và y_2. Nói cách khác nếu một siêu phẳng ràng buộc điểm x, thì siêu phẳng đó cũng phải ràng buộc cả y_1 và y_2.

Đặt $d = y_2 - y_1$ là hướng từ y_1 đến y_2. Khi đó, ta có:

$$\begin{cases} y_1 = x - (1-\lambda)d \\ y_2 = x + \lambda d \end{cases} \tag{2.3}$$

Các giá trị $x + \gamma d$ và $x - \gamma d$ với $\gamma > 0$ tương ứng với sự di chuyển từ x theo hướng d. Từ phương trình (2.3), ta có thể di chuyển và mở rộng theo cả hai hướng dương và âm của d mà vẫn thuộc S. Gọi γ là giá trị lớn nhất sao cho cả $x + \gamma d$ và $x - \gamma d$ đều thuộc S. Rõ ràng, chúng ta không thể di chuyển vô hạn theo cả hai hướng vì $x \geq 0$, do đó γ là hữu hạn.

Không mất tính tổng quát, giả sử rằng γ được xác định bởi $x - \gamma d$. Khi đó, đặt $x_1 = x - \gamma d$. Vì có r siêu phẳng ràng buộc tại x (cũng như tại y_1 và y_2), nên rõ ràng các mặt phẳng này cũng ràng buộc tại x_1 và ít nhất một mặt phẳng khác cũng ràng buộc tại x_1. Như vậy, có ít nhất $r+1$ mặt phẳng ràng buộc tại x_1. Nếu $r+1=n$, ta đã xác định được một điểm cực biên. Không thì, ta có thể lặp lại quá trình này cho đến khi tìm được một điểm cực biên.

Để chứng minh số lượng điểm cực biên là hữu hạn, ta lưu ý rằng mọi điểm cực biên là giao điểm của n siêu phẳng ràng buộc độc lập tuyến tính tạo nên S. Có tổng cộng $n+m$ siêu phẳng ràng buộc tạo nên S, do đó số lượng điểm cực biên có thể có bị giới hạn bởi $\binom{n+m}{n}$. Điều này hoàn tất chứng minh của **(i)**. ☐

(ii). Từ tính chất **(i)** và bổ đề (1) ta có được kết quả này.

(iii). Giả sử $x \in P$, ta sẽ chứng minh rằng tồn tại $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ và $\mu_1, \ldots, \mu_l$ sao cho phương trình (2.2) đúng. Đầu tiên gọi:

$$\overline{P} = P \cap \{x \in \mathbb{R}^n : e^T x \le M\} \tag{2.4}$$

trong đó M là một hằng số đủ lớn sao cho $e^T x_i < M$ với mọi $i = 1, \ldots, k$ và $e^T x < M$. Nghĩa là, M đủ lớn để tổng các thành phần của bất kỳ điểm cực biên nào nhỏ hơn M và tổng các thành phần của x cũng nhỏ hơn M.

Theo cách đặt ở (2.4), rõ ràng $\overline{P}$ bị chặn. Và thức tế là, nếu P bị chặn, thì $\overline{P} = P$. Hơn nữa, $\overline{P}$ là một tập đa diện lồi bị chặn trong P, do đó các điểm cực biên của $\overline{P}$ cũng là các điểm cực biên của P.

Gọi tập hợp các điểm cực biên của $\overline{P}$ là:

$$E_P = \{x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_{k+u}\} \tag{2.5}$$

Theo tính chất **(ii)** của (1), ta biết rằng $0 \le u < \infty$. Nếu $x \in E_P$, thì x có thể được biểu diễn như một tổ hợp lồi của các phần tử trong E_P. Do đó, ta giả sử $x \notin E_P$.

Bây giờ, giả sử hệ phương trình $Gx = g$ biểu diễn các siêu phẳng ràng buộc của $\overline{P}$ tại x. Rõ ràng, $\text{rank}(G) < n$ (nếu không thì x sẽ là một điểm cực biên của E_P).

Chọn $d \neq 0$ là nghiệm của bài toán $Gd = 0$ và đặt $\gamma = \max\{\gamma : x + \gamma d \in X\}$.

Vì X bị chặn và x không thuộc E_P, nên $0 < \gamma_1 < \infty$. Đặt $y_1 = x + \gamma_1 d$. Cũng từ tính chất **(ii)** của (1), tại y_1 ta có ít nhất một siêu phẳng ràng buộc độc lập mới của P. Nếu lúc này có n siêu phẳng ràng buộc, thì y là một điểm cực biên của P. Nếu không, ta lặp lại quá trình này để tìm được một điểm cực biên.

Rõ ràng, $Gy_1 = g$. Như ta mong đợi, $Gy_2 = g$ và có ít nhất một siêu phẳng ràng buộc mới tại y_2. Do đó, ta có thể viết:

$$x = \delta y_1 + (1-\delta) y_2$$

với $\delta \in (0, 1]$ và $\delta = \gamma_2/(1+\gamma_2)$. Tiếp tục quá trình trên, ta có thể biểu diễn x như một tổ hợp lồi của các điểm cực biên của E_P.

Từ đó, ta có thể viết:

$$x = \sum_{i=1}^{k+u} \delta_i x_i, \quad \sum_{i=1}^{k+u} \delta_i = 1.$$

Nếu $\delta_i = 0$ với mọi $i > k$, ta đã biểu diễn được x dưới dạng tổ hợp lồi của các điểm cực biên của P.

Giả sử tồn tại $v > k$ sao cho $\delta_v > 0$. Khi đó, điểm x_v là điểm cực biên của $\overline{P}$ nhưng không phải điểm cực biên của P. Do đó, có một hướng cực biên d_j sao cho:

$$x_v = x_{i(v)} + \theta_v d_{j(v)}$$

với $x_{i(v)}$ là một điểm cực biên của P và $\theta_v d_{j(v)}$ là một hướng cực biên của P.

Thay vào biểu thức của x:

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i + \sum_{j=1}^{l} \mu_j d_j.$$

Điều này hoàn tất chứng minh. □

Định lý 3 Giả sử S là một tập đa diện khác rỗng có dạng:

$$S = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{x} = \vec{b}, \vec{x} \geq 0\},$$

trong đó A là một ma trận $m \times n$ có hạng m. Khi đó, tập S có ít nhất một hướng cực biên khi và chỉ khi nó không bị chặn.

Proof **Chiều thuận:** Nếu S tồn tại một hướng cực biên, giả sử là $\vec{d}$. Theo định nghĩa 8, ta nhận thấy nếu di chuyển từ một điểm bất kỳ trong S theo hướng $\vec{d}$ với một khoảng cách dương, ta vẫn ở trong S. Điều này cũng có nghĩa là tập S không bị chặn.

Chiều đảo: Bây giờ, giả sử rằng S là không bị chặn nhưng lại không có hướng cực biên. Ta sẽ chứng minh phản chứng. Với mọi $\vec{x} \in S$, ta có:

$$\|\vec{x}\| = \left\| \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \vec{x}_j \right\| \leq \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \|\vec{x}_j\| \leq \sum_{j=1}^{k} \|\vec{x}_j\|$$

Điều này mâu thuẫn. Do đó chiều đảo được chứng minh! □

Kết luận 1 Như vậy ta đã chứng minh được một tập lồi đóng khác rỗng có ít nhất một hướng cực biên khi và chỉ khi nó không bị chặn. Và để ý thì tập hợp tất cả các phương án của bài toán quy hoạch tuyến tính lại là một tập lồi như vậy. Mà tập các phương án chấp nhận được này lại chính là miền khả thi của bài toán!

Nói tóm lại, mọi thứ đã liên kết lại với nhau để đưa chúng ta đến một kết luận như sau: Miền khả thi của bài toán quy hoạch tuyến tính bị chặn khi và chỉ khi nó có ít nhất một hướng cực biên.