ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

TRẦN HÀ SƠN

Đại học Khoa học Tự nhiên TP.HCM

Ngày 8 tháng 3 năm 2024

Overview

1. Lưu ý một số ký hiệu

2. Không gian vector $\mathbb{R}^n$

Một số kí hiệu cần lưu ý

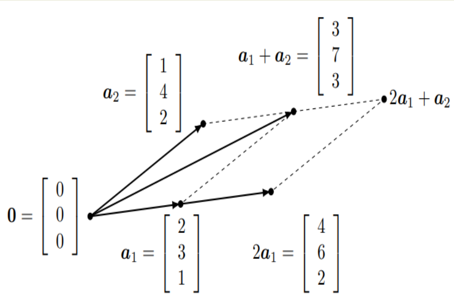
Cho không gian vector $\mathbb{R}^n$ và ma trận $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$.

- Khi nói vector $x \in \mathbb{R}^n$, thì ta hiểu đó là vector cột với biểu diễn là $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$. Khi đó $x^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$.
- Cho ma trận A, kí hiệu $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$ được hiểu là các vector cột a_i được đặt cạnh nhau theo thứ tự từ trái sang phải tạo ra ma trận A.
- $A = \begin{bmatrix} a_1^* & a_2^* & \cdots & a_m^* \end{bmatrix}$ được hiểu là các vector hàng của ma trận A xếp lên nhau theo thứ tự từ trên xuống dưới .

Định nghĩa

Cho hai vector $x, y \in \mathbb{R}^n, x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Khi đó

- $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$.
- $x - y = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \ldots, x_n - y_n)$.
- $kx = (kx_1, kx_2, \ldots, kx_n)$.



Không gian sinh bởi các vector

Định nghĩa

Cho $u_1, u_2, \ldots, u_k \in \mathbb{R}^n$, khi đó

- Vector $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_k u_k$, trong đó $\alpha_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq k$ được gọi là một tổ hợp tuyến tính của $u_1, u_2, \ldots u_k$.
- $u_1, u_2, \ldots, u_k$ được gọi là độc lập tuyến tính nếu

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_k u_k = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$$

- $u_1, u_2, \ldots, u_k$ được gọi là phụ thuộc tuyến tính nếu

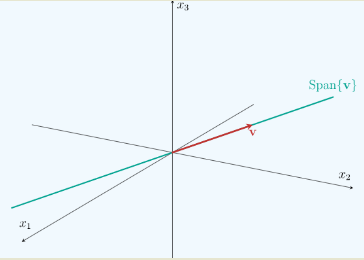
$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_k u_k = 0 \Leftrightarrow \text{ Tồn tại } \alpha_i \neq 0$$

Định nghĩa (Không gian con sinh bởi một tập)

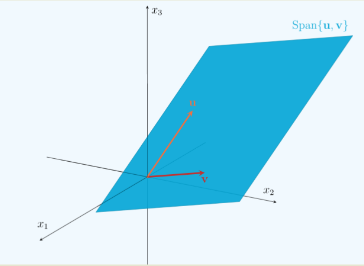
Cho $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\} \subset \mathbb{R}^n$, khi đó

$$span(S) = \{u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_k u_k | \alpha_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq k\}$$

được gọi là không gian vector sinh bởi S.



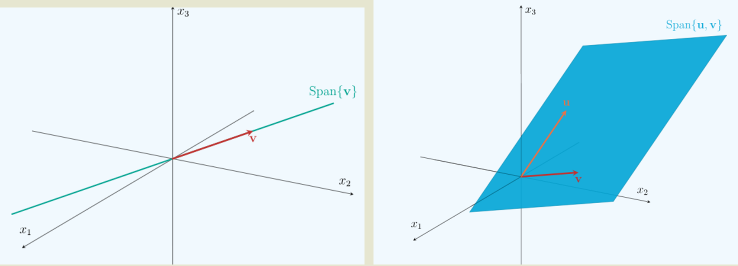
(a) $Span(v)$.



(b) $Span(u, v)$.

Định nghĩa (Số chiều của không gian con sinh bởi một tập)

Cho $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\} \subset \mathbb{R}^n$ và $u_1, u_2, \ldots, u_k$ độc lập tuyến tính, khi đó k được gọi là số chiều của không gian vector con $span(S)$, kí hiệu $rank(span(S)) = k$.



(a) $rank(span(v)) = 1$. (b) $rank(span(u, v)) = 2$.

Định nghĩa

- Tích vô hướng của hai vector x, y, kí hiệu là $x \cdot y$ hoặc $< x, y >$, được định nghĩa là

$$x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n.$$

- Chuẩn (norm) của vector $x \in \mathbb{R}^n$, được định nghĩa là

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

Tính chất

Cho hai vector $x, y \in \mathbb{R}^n$, khi đó:

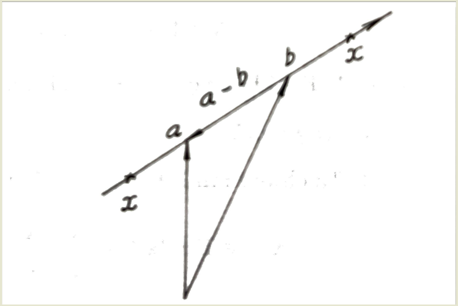
- $x \cdot y = y \cdot x$.
- $|x \cdot y| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Đường thẳng trong $\mathbb{R}^n$

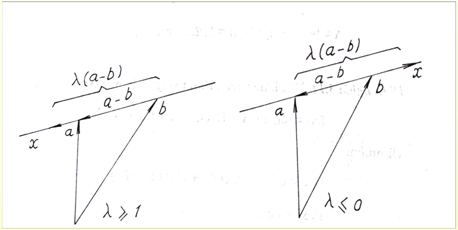
Định nghĩa

Cho hai điểm a, b trong $\mathbb{R}^n$. Ta gọi đường thẳng đi qua hai điểm a, b là tập hợp điểm có dạng

$$\{x | x = +(1 - \lambda)b, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$



Đường thẳng trong $\mathbb{R}^n$

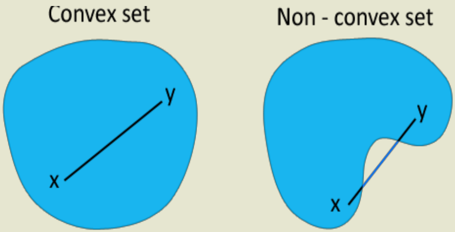


- Nếu $\lambda \geq 1$, ta có nửa đường thẳng xuất phát từ a (x ở bên trái a).
- Nếu $\lambda \leq 0$, ta có nửa đường thẳng xuất phát từ b (x ở bên phải b).
- Nếu $0 \leq \lambda \leq 1$, ta có đoạn thẳng $[a, b]$.

Khái niệm tập lồi trong $\mathbb{R}^n$

Định nghĩa

Tập $S \subset \mathbb{R}^n$ khác rỗng được gọi là tập lồi nếu với mọi cặp điểm $x, y \in S$ và với mọi số $\lambda \in [0, 1]$, ta có $\lambda x + (1 - \lambda)y \in S$.

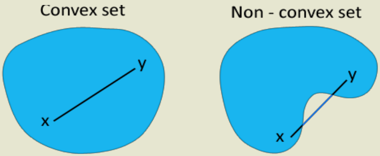


Nhận xét

Về mặt hình học, tập S là lồi nếu với mọi điểm $x, y \in S$, toàn bộ đoạn thẳng xy đều nằm trong S.

Định nghĩa

Tập $S \subset \mathbb{R}^n$ khác rỗng được gọi là tập lồi nếu với mọi cặp điểm $x, y \in S$ và với mọi số $\lambda \in [0, 1]$, ta có $\lambda x + (1 - \lambda)y \in S$.



Tính chất

Từ định nghĩa tập lồi, ta suy ra một số tính chất sau:

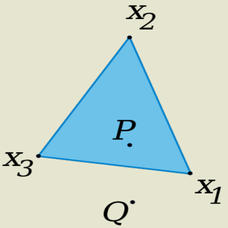
- *Giao của một họ bất kì các tập lồi là một tập lồi.*
- *Nếu $S \subset \mathbb{R}^n$ là một tập lồi thì $\alpha S = \{\alpha x | x \in S, \alpha \in \mathbb{R}\}$ là một tập lồi.*

Định nghĩa

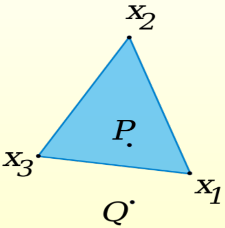
Cho các điểm $x^1, x^2, \cdots, x^k \in \mathbb{R}^n$, điểm $x \in \mathbb{R}^n$ có dạng

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i \text{ với } \lambda_i \geq 0 \text{ và } \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1,$$

là tổ hợp lồi của các điểm $x^1, x^2, \cdots, x^k$.



Khái niệm tổ hợp lồi trong $\mathbb{R}^n$



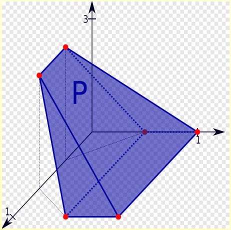
Nhận xét

Nếu $\lambda_i > 0$ với mọi $i = 1, \cdots, k$ thì ta nói x là tổ hợp lồi chặt của $x^1, x^2, \cdots, x^k$.

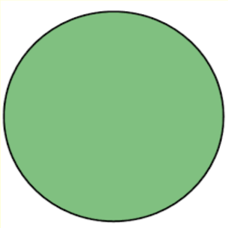
Định nghĩa

Cho tập lồi $S \subset \mathbb{R}^n$. Một điểm $x \in M$ được gọi là điểm cực biên (extreme point) của M nếu x không thể biểu diễn được dưới dạng tổ hợp lồi chặt của hai điểm phân biệt bất kì nào của M, nghĩa là

$$\nexists y, x \in M, y \neq z \text{ sao cho } x = \lambda y + (1-\lambda)z \text{ với } 0 < \lambda < 1.$$



(a) Khối có 6 điểm cực biên

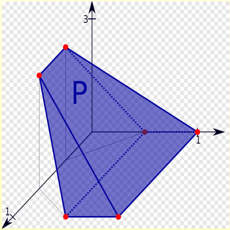


(b) Hình tròn có vô số điểm cực biên

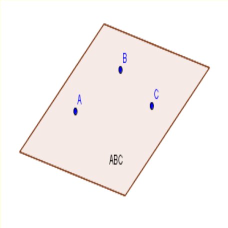
Khái niệm điểm cực biên

Định lý

Một tập lồi đóng khác rỗng $M \subset \mathbb{R}^n$ có điểm cực biên khi và chỉ khi nó không chứa trọn một đường thẳng nào.



(a) Khối có 6 điểm cực biên



(b) Mặt phẳng không có điểm cực biên

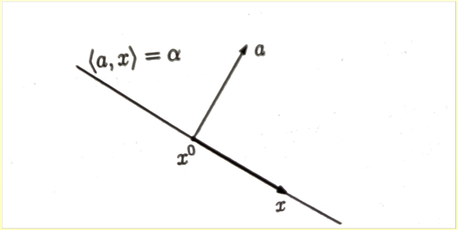
Siêu phẳng, nửa không gian

Định nghĩa

Cho $a \in \mathbb{R}^n$. Tập

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n | < a, x >= \alpha\}$$

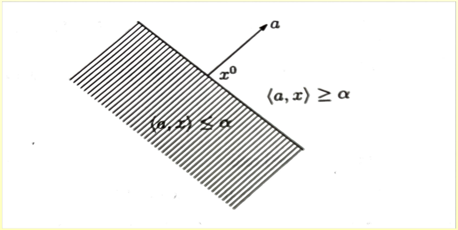
được gọi là một siêu phẳng (hyperplane). Vector a là vector pháp tuyến của siêu phẳng này.



Siêu phẳng, nửa không gian

Định nghĩa

- Tập $\{x \in \mathbb{R}^n | < a, x > \geq \alpha\}$ hoặc $\{x \in \mathbb{R}^n | < a, x > \leq \alpha\}$ được gọi là nửa không gian đóng.
- Tập $\{x \in \mathbb{R}^n | < a, x > > \alpha\}$ hoặc $\{x \in \mathbb{R}^n | < a, x > < \alpha\}$ được gọi là nửa không gian mở.

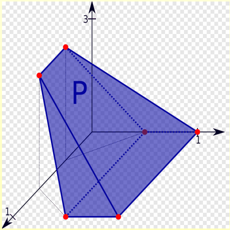


Định nghĩa

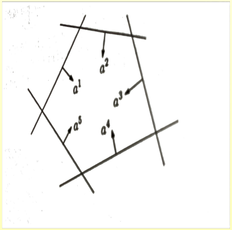
Tập lồi đa diện $P \subset \mathbb{R}^n$ là giao của một số hữu hạn các nửa không gian đóng. Nghĩa là nó là tập nghiệm của một hệ hữu hạn các bất đẳng thức tuyến tính

$$\langle a^i \, , \, x \rangle \geq b_i, i = 1, 2, \ldots, k.$$

Mỗi bất đẳng thức trong hệ trên được gọi là *một ràng buộc.*



(a) Lồi đa diện trong $\mathbb{R}^3$



(b) Tập lồi đa diện trong $\mathbb{R}^2$

Tập lồi đa diện

Định lý

Tập hợp tất cả các phương án của bài toán quy hoạch tuyến tính là một tập lồi.

Tập lồi đa diện

Định lý

Gọi D là tập các phương án của bài toán QHTT và là tập lồi đa diện. Khi đó, hàm mục tiêu của bài toán quy hoạch tuyến tính sẽ đạt max tại một điểm cực biên của tập D. Nếu hàm mục tiêu không chỉ nhận max tại một điểm cực biên của tập lồi D mà tại nhiều điểm thì nó sẽ đạt giá trị max tại những điểm là tổ hợp tuyến tính lồi của các điểm đó.

Định lý

Nếu biết rằng hệ thống các vector $A_1, A_2, \ldots, A_k$ *là độc lập tuyến tính sao cho:*

$$x_1A_1 + x_2A_2 + \ldots + x_kA_k = b,$$

trong đó $x_j > 0, j = 1..k$ *thì điểm* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, 0 \ldots, 0)$ *là điểm cực biên của tập lồi đa diện* D.