QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

Lê Hoàng Vũ - 22120461

Ngày 5 tháng 5 năm 2025

I

ĐỀ BÀI

1 Đề bài

Bài 1. Mỗi ngày, quán chè của chú Sơn dự kiến nấu 2 loại nguyên liệu để nấu chè đậu là: đậu đen và đậu đỏ. Theo kinh nghiệm sản xuất của chú, lượng đậu đen nấu ra dao động từ $6kg$ đến $12kg$, lượng đậu đen sẽ không ít hơn 1/2 lượng đậu đỏ nhưng không nhiều hơn 3 lần lượng đậu đỏ. Chú Sơn có liên hệ được ba đơn vị cung cấp nguyên liệu:

- Ông ba: bán 80 nghìn đồng/kg đậu đen và 52 nghìn đồng/kg đậu đỏ.
- Bà ba: bán 60 nghìn đồng/kg đậu đen và 62 nghìn đồng/kg đậu đỏ.
- Cô tư: bán 70 nghìn đồng/kg đậu đen và 56 nghìn đồng/kg đậu đỏ.

(a) Hỏi chú Sơn nên mua của ai để có thể tiết kiệm nhất và chi phí khi đó là bao nhiêu?

(b) Anh/chị hãy đánh giá nhận xét sau: Khi giải bài toán quy hoạch tuyến tính bằng phương pháp hình học với biến không âm, nếu miền ràng buộc là một đa giác lồi thì không tồn tại 3 hàm mục tiêu có dạng $f(x, y) = ax + by$ (với $a, b > 0$) mà các hàm đạt giá trị tối ưu tại 3 đỉnh khác nhau.

Bài 2. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 - 2x_2 + 3x_3 + mx_4 \to \max$ với $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$ và thỏa mãn điều kiện sau đây:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 & = 6 \\ x_2 + 2x_3 - 3x_4 & = 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 & = 5 \end{cases}$$

(a) Hãy phát biểu bài toán đối ngẫu $(\mathcal{D})$ của bài toán $(\mathcal{P})$ ở trên (không cần giải chi tiết). Hỏi nếu cần sử dụng phương pháp đơn hình để giải $(\mathcal{D})$ thì cần thêm ít nhất bao nhiêu biến mới?

(b) Bằng các lập luận thích hợp cũng như kết hợp với việc sử dụng thư viện `Python` để minh họa cho vài giá trị m cụ thể (anh/chị có thể code trên `notebook/colab` rồi chụp ảnh đưa vào bài làm), hãy chứng minh rằng:
  - Nếu $m > -1$ thì bài toán $(\mathcal{P})$ không có phương án tối ưu;
  - Nếu $m = -1$ thì bài toán $(\mathcal{P})$ đạt cực trị tại vô số phương án tối ưu;
  - Nếu $m < -1$ thì bài toán $(\mathcal{P})$ đạt cực trị tại đúng một phương án tối ưu.

Bài 3. Trong HAI chọn MỘT.

(1) Hãy giải bài toán sau bằng lý thuyết đối ngẫu kết hợp với đơn hình: Một sinh viên tham gia một khóa học có n bài kiểm tra và điểm là một số thực không âm nào đó (không có chặn trên). Biết rằng sinh viên sẽ đậu khóa học nếu với mọi $i = \overline{1, n}$, tổng điểm của k bài kiểm tra đầu tiên sẽ không nhỏ hơn k. Sinh viên được tính điểm trung bình theo quy tắc là điểm của bài thứ k có trọng số k. Hỏi một sinh viên đậu khóa học thì có điểm trung bình tối thiểu là bao nhiêu?

(2) Hãy phát biểu bài toán sau dưới dạng quy hoạch tuyến tính nguyên rồi giải bằng cách thư viện `Python` thích hợp: Một cơ sở sản xuất có hai loại thanh cốt thép độ dài 9 mét và 7 mét (số lượng không giới hạn). Cần gia công ra 100 đoạn 2.4 mét và 130 đoạn 2.8 mét. Hỏi nên cắt cốt thép theo phương án thế nào để lượng thép thừa khi gia công là ít nhất?

II

LỜI GIẢI

2 Cơ sở lý thuyết

Phần này trình bày các định lý, tính chất nền tảng sẽ được sử dụng trong phần bài làm ở chương sau.

Định lý 1 (Đặc trưng của điểm cực biên)
Cho tập đa diện $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ và $\bar{x} \in P$. Khi đó, các điều kiện sau là tương đương:

(i) $\bar{x}$ là một điểm cực biên của P.

(ii) Tồn tại $c \in \mathbb{R}^n$ sao cho $\bar{x}$ là nghiệm tối ưu duy nhất của bài toán quy hoạch tuyến tính, chẳng hạn như $\max\{c^T x : x \in P\}$.

CHỨNG MINH. **Chiều thuận** $(i) \Rightarrow (ii)$: Giả sử $\bar{x}$ là điểm cực biên của P. Khi đó, theo định nghĩa, không tồn tại hai điểm phân biệt $x, y \in P$ và hệ số $0 < \lambda < 1$ sao cho $\bar{x} = \lambda x + (1 - \lambda)y$.

Do đó, nếu chọn c là một véc-tơ sao cho $c^T x$ đạt cực đại tại $\bar{x}$, thì $\bar{x}$ phải là nghiệm tối ưu duy nhất của bài toán $\max\{c^T x : x \in P\}$.

Chiều đảo $(ii) \Rightarrow (i)$: Giả sử $\bar{x}$ là nghiệm tối ưu duy nhất của bài toán quy hoạch tuyến tính $\max\{c^T x : x \in P\}$. Giả sử ngược lại rằng $\bar{x}$ có thể được biểu diễn dưới dạng tổ hợp lồi chặt của hai điểm phân biệt $x, y \in P$, tức là

$$\bar{x} = \lambda x + (1 - \lambda)y, \quad 0 < \lambda < 1.$$

Do tính chất tuyến tính của hàm mục tiêu, ta có:

$$c^T \bar{x} = \lambda c^T x + (1 - \lambda)c^T y \leq \lambda c^T \bar{x} + (1 - \lambda)c^T \bar{x} = c^T \bar{x}.$$

Suy ra $c^T x = c^T \bar{x}$ và $c^T y = c^T \bar{x}$, nghĩa là x và y cũng là nghiệm tối ưu của bài toán, mâu thuẫn với giả thiết rằng $\bar{x}$ là nghiệm tối ưu duy nhất. Do đó, $\bar{x}$ phải là điểm cực biên của P. □

Hệ quả 2.0.1 — Gọi D là tập các phương án của bài toán `QHTT` và là tập lồi đa diện. Khi đó, hàm mục tiêu của bài toán quy hoạch tuyến tính sẽ đạt `min/max` tại một điểm cực biên của tập D. Nếu hàm mục tiêu không chỉ nhận `min/max` tại một điểm cực biên của tập lồi D mà tại nhiều điểm thì nó sẽ đạt giá trị `min/max` tại những điểm là tổ hợp tuyến tính lồi của các điểm đó.

Định lý 2.0.2 (Số phương án tối ưu từ bảng đơn hình cuối cùng)
Giả sử ta giải một bài toán quy hoạch tuyến tính dạng tối đa hóa bằng phương pháp đơn hình. Sau một số hữu hạn bước, ta thu được bảng đơn hình cuối cùng.

Khi đó có những trường hợp sau cho số phương án tối ưu của bài toán:

(1) Một phương án tối ưu duy nhất: Nếu tất cả các hệ số giảm (`reduced cost`) thỏa

$$\Delta_j = C_j - Z_j > 0$$

với mọi biến ngoài cơ sở x_j, thì bài toán có duy nhất một phương án tối ưu.

(2) Vô số phương án tối ưu: Nếu tồn tại ít nhất một biến ngoài cơ sở x_j có $\Delta_i = 0$ thì có nghĩa là ta có thể xoay biến x_j đó vào cơ sở mà giá trị của hàm mục tiêu vẫn giữ nguyên.

Lặp đi lặp lại quá trình như vậy, ta luôn thu được một nghiệm mới tối ưu mà giá trị hàm mục tiêu gvẫn giữ nguyên. Như vậy tồn tại một cạnh của tập lồi đa diện mà các ngiệm này nằm trên đoạn thẳng đó, tại đó giá trị hàm mục tiêu không đổi.

Khi đó, bài toán có vô số nghiệm tối ưu.

(3) Không có phương án tối ưu: Nếu tồn tại một biến ngoài cơ sở x_j thỏa $\Delta_j < 0$, và mọi phần tử trong cột j tương ứng trong các ràng buộc đều không dương (tức $a_{ij} \le 0$), thì miền ràng buộc của bài toán không bị chặn.

Và do đó, không có giá trị tối ưu hữu hạn hay phương án tối ưu cho bài toán.

Định lý 2.0.3 (Định lý độ lệch bù – Complementary Slackness)
Giả sử $x^* \in \mathbb{R}^n$ là nghiệm tối ưu của bài toán gốc (`min` hay `max` đều như nhau):

$$\begin{aligned} \min \quad & c^\top x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \ge b, \quad x \ge 0 \end{aligned}$$

và $y^* \in \mathbb{R}^m$ là nghiệm tối ưu của bài toán đối ngẫu:

$$\begin{aligned} \max \quad & b^\top y \\ \text{s.t.} \quad & A^\top y \le c, \quad y \ge 0 \end{aligned}$$

Khi đó, ta có những tính chất sau:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & y_i^* \ne 0 \Rightarrow a_i^\top x^* = b_i \\ \text{(ii)} \quad & a_i^\top x^* > b_i \Rightarrow y_i^* = 0 \\ \text{(iii)} \quad & x_j^* \ne 0 \Rightarrow (A^\top y^*)_j = c_j \\ \text{(iv)} \quad & (A^\top y^*)_j < c_j \Rightarrow x_j^* = 0 \end{aligned}$$

3 Lời giải

Bài 1. Mỗi ngày, quán chè của chú Sơn dự kiến nấu 2 loại nguyên liệu để nấu chè đậu là: đậu đen và đậu đỏ. Theo kinh nghiệm sản xuất của chú, lượng đậu đen nấu ra dao động từ $6kg$ đến $12kg$, lượng đậu đen sẽ không ít hơn $1/2$ lượng đậu đỏ nhưng không nhiều hơn 3 lần lượng đậu đỏ. Chú Sơn có liên hệ được ba đơn vị cung cấp nguyên liệu:

- Ông ba: bán 80 nghìn đồng/kg đậu đen và 52 nghìn đồng/kg đậu đỏ.
- Bà ba: bán 60 nghìn đồng/kg đậu đen và 62 nghìn đồng/kg đậu đỏ.
- Cô tư: bán 70 nghìn đồng/kg đậu đen và 56 nghìn đồng/kg đậu đỏ.

(a) Hỏi chú Sơn nên mua của ai để có thể tiết kiệm nhất và chi phí khi đó là bao nhiêu?

(b) Anh/chị hãy đánh giá nhận xét sau: Khi giải bài toán quy hoạch tuyến tính bằng phương pháp hình học với biến không âm, nếu miền ràng buộc là một đa giác lồi thì không tồn tại 3 hàm mục tiêu có dạng $f(x, y) = ax + by$ (với $a, b > 0$) mà các hàm đạt giá trị tối ưu tại 3 đỉnh khác nhau.

Lời giải. `(a)` Gọi x, y lần lượt là số `kg` đậu đen và đậu đỏ mà quán chè dự kiến nhập về.

Theo giả thiết, chú Sơn chủ quán chè đã liên hệ được 3 đơn vị cung cấp nguyên liệu, tương ứng với 3 hàm mục tiêu cần xét. Cụ thể như sau:

Người bán	**Hàm mục tiêu**
Ông Hai	$f_1(x, y) = 80x + 52y \to \min$
Bà Ba	$f_2(x, y) = 60x + 62y \to \min$
Cô Tư	$f_3(x, y) = 70x + 56y \to \min$

Bảng 3.1: Các hàm mục tiêu tương ứng với từng người bán

Từ đó, yêu cầu bài toán trở thành tìm $f(x, y)$ với:

$$f(x, y) = \min\{\min f_1(x, y), \min f_2(x, y), \min f_3(x, y)\}$$

> **Nhận xét.** Sau bước này, có thể tiếp cận theo phương pháp đơn hình (`Simplex Method`), tuy nhiên khi đó cần xét 3 bài toán đơn hình, do có 3 hàm mục tiêu khác nhau từ giả thiết.
>
> Do đó ở câu này em sẽ dùng phương pháp hình học (`Geometry Method`) để giải. Điều này dựa vào hai định lý và hệ quả về điểm cực biên, tập lồi đa diện ở (1) và (2.0.1).

Đầu tiên, theo các giả thiết đề cho, ta có hệ các ràng buộc là:

$$\begin{cases} 6 \leq x + y \leq 12 \\ \dfrac{1}{2}y \leq x \leq 3y \\ x, y \geq 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

Tương ứng, ta có các đường biên của miền ràng buộc như sau:

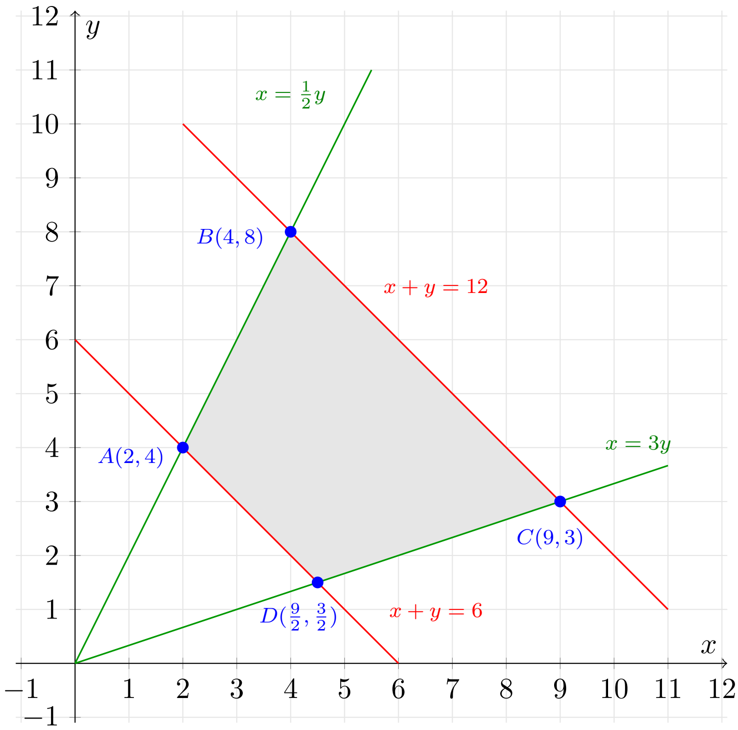
$$(1)\ x + y = 6 \qquad (2)\ x + y = 12$$
$$(3)\ x = \frac{1}{2}y \qquad (4)\ x = 3y$$

Khi đó các điểm cực biên sẽ là giao điểm của $\binom{4}{2} = 6$ cặp đường trên. Tuy nhiên ta nhận thấy không có giao điểm của đường (1) với (2). Trong khi đó giao điểm của đường (3) và (4) là $(0, 0)$ lại không thỏa hệ ràng buộc. Do đó ta loại 2 giao điểm này trước.

Gọi A, B, C và D lần lượt là giao điểm của các cặp đường (1) với (3), (2) với (3), (2) với (4), và (1) với (4). Ta thu được tập các điểm cực biên của bài toán như sau:

$$A(2, 4), \quad B(4, 8), \quad C(9, 3), \quad D\left(\tfrac{9}{2}, \tfrac{3}{2}\right)$$

Sau đó ta sẽ kiểm tra lại các điểm trên, cũng như xác định miền ràng buộc của hệ bất phương trình (3.1)



Hình 3.1: Hình minh họa bằng LaTeX các điểm cực biên (màu xanh dương) và miền ràng buộc của bài toán (được tô màu xám nhẹ)

Bây giờ sau khi đã có các điểm cực biên của bài toán, ta sẽ tính giá trị từng hàm mục tiêu $f_i\left(x,y\right), i = \overline{1,3}$ tại các điểm trên. Kết quả được tổng hợp ở bảng dưới đây:

Điểm	$f_1(x,y)$	$f_2(x,y)$	$f_3(x,y)$
$A(2,4)$	**368**	368	**364**
$B(4,8)$	736	736	728
$C(9,3)$	876	726	798
$D(\frac{9}{2},\frac{3}{2})$	438	**363**	399

Bảng 3.2: Giá trị các hàm mục tiêu tại các điểm cực biên, trong đó giá trị tô đen là giá trị tối ưu (`min`) của mỗi hàm

Từ đó, chi phí tối ưu (thấp nhất) để quán chè mua nguyên liệu là

$$f(x,y) = \min\{368, 363, 364\} = 363, \text{ tại } (x,y) = (\frac{9}{2},\frac{3}{2}).$$

Vậy quán chè mua nguyên liệu từ bà Ba thì chi phí sẽ là thấp nhất, với chỉ 363 nghìn đồng khi mua 4.5`kg` đậu đen và 1.5`kg` đậu đỏ. □

....

`(b)` Ta sẽ chỉ ra một phản ví dụ, để chứng minh nhận xét ở đề bài là sai.

Gọi x, y lần lượt là hai biến không âm của bài toán quy hoạch tuyến tính với miền ràng buộc được xác định bởi hệ bất phương trình sau:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + y \leq 12 \\ x + 2y \leq 12 \end{cases}$$

Ta xét ba hàm mục tiêu dạng $f(x,y) = ax + by$ với $a, b > 0$ như sau:

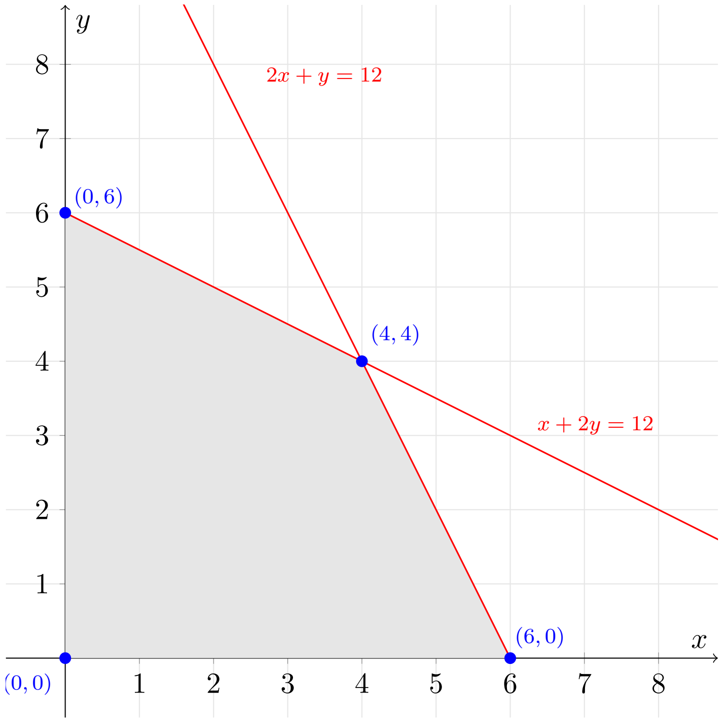
Trường hợp	**Hàm mục tiêu**
F_1	$f_1(x,y) = 4x + y \to \max$
F_2	$f_2(x,y) = x + y \to \max$
F_3	$f_3(x,y) = x + 4y \to \max$

Bảng 3.3: Ba hàm mục tiêu dạng $f(x,y) = ax + by$ với $a, b > 0$

Áp dụng phương pháp hình học như câu `(a)`, ta thấy miền nghiệm của bài toán là một đa giác lồi hữu hạn trong mặt phẳng Oxy, có các đỉnh là:

$$(0,0), \quad (6,0), \quad (4,4), \quad (0,6)$$

Hình vẽ được minh họa như bên dưới:



Hình 3.2: Hình minh họa bằng LaTeX các điểm cực biên (màu xanh dương) và miền ràng buộc của bài toán (được tô màu xám nhẹ)

Với các điểm cực biên đã nêu, ta lần lượt tính giá trị từng hàm mục tiêu tại các điểm này:

Điểm	$f_1(x, y)$	$f_2(x, y)$	$f_3(x, y)$
$(6, 0)$	**24**	6	6
$(4, 4)$	20	**8**	20
$(0, 6)$	6	6	**24**

Bảng 3.4: Giá trị các hàm tại các đỉnh; giá trị tô đậm là giá trị tối ưu của mỗi hàm

Dễ thấy ba hàm mục tiêu này đã đạt giá trị tối ưu tại ba điểm khác nhau:

$$f_1(x, y) \text{ đạt tối ưu tại } (6, 0)$$
$$f_2(x, y) \text{ đạt tối ưu tại } (4, 4)$$
$$f_3(x, y) \text{ đạt tối ưu tại } (0, 6)$$

Như vậy, ta đã xây dựng được phản ví dụ phủ định nhận xét ở đề bài. Vậy nhận xét đó là sai. □

BÀI 2. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 - 2x_2 + 3x_3 + mx_4 \to \max$ với $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$ và thỏa mãn điều kiện sau đây:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 = 6 \\ x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 5 \end{cases}$$

(a) Hãy phát biểu bài toán đối ngẫu $(\mathcal{D})$ của bài toán $(\mathcal{P})$ ở trên (không cần giải chi tiết). Hỏi nếu cần sử dụng phương pháp đơn hình để giải $(\mathcal{D})$ thì cần thêm ít nhất bao nhiêu biến mới?

(b) Bằng các lập luận thích hợp cũng như kết hợp với việc sử dụng thư viện `Python` để minh họa cho vài giá trị m cụ thể (anh/chị có thể code trên `notebook/colab` rồi chụp ảnh đưa vào bài làm), hãy chứng minh rằng:

- Nếu $m > -1$ thì bài toán $(\mathcal{P})$ không có phương án tối ưu;
- Nếu $m = -1$ thì bài toán $(\mathcal{P})$ đạt cực trị tại vô số phương án tối ưu;
- Nếu $m < -1$ thì bài toán $(\mathcal{P})$ đạt cực trị tại đúng một phương án tối ưu.

LỜI GIẢI. **(a)** Bài toán đối ngẫu $(\mathcal{D})$ của bài toán $(\mathcal{P})$ ở trên được phát biểu như sau:

Tối thiểu hóa (`Minimize`) hàm mục tiêu:

$$f(y_1, y_2, y_3) = 6y_1 + 3y_2 + 5y_3 \to \min$$

với các ràng buộc sau:

$$\begin{cases} 2y_1 + 2y_3 \geq 1 \\ y_2 - y_3 \geq -2 \\ y_1 + 2y_2 \geq 3 \\ -y_1 - 3y_2 + y_3 \geq m \\ y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3.2}$$

Ta nhận thấy các ràng buộc ở (3.2) còn đang ở dạng chuẩn. Do đó để giải bài toán đối ngẫu $(\mathcal{P})$ bằng phương pháp đơn hình thì trước tiên cần thêm 4 biến $y_4, y_5, y_6, y_7 \geq 0$ vào lần lượt các ràng buộc đó để đưa hệ ràng buộc về dạng chính tắc:

$$\begin{cases} 2y_1 + 2y_3 - y_4 = 1 \\ y_2 - y_3 - y_5 = -2 \\ y_1 + 2y_2 - y_6 = 3 \\ -y_1 - 3y_2 + y_3 - y_7 = m \\ y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R} \\ y_4, y_5, y_6, y_7 \geq 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

Hiện tại $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$, nói cách khác những biến này chưa có ràng buộc không âm để dùng phương pháp đơn hình. Tuy nhiên ta có thể biến đổi những biến đó dựa vào nhận xét sau:

> **Nhận xét.** Một số bất kỳ luôn có thể được biểu diễn thành hiệu của hai số không âm.

Dựa vào nhận xét trên, mỗi số thực y_i, $i = \overline{1,3}$, luôn tồn tại 2 số thực $y_i^+, y_i^- \geq 0$ thỏa mãn $y_i = y_i^+ - y_i^-$. Như vậy bài toán được viết lại thành:

$$\begin{cases} 2y_1^+ - 2y_1^- + 2y_3^+ - 2y_3^- - y_4 = 1 \\ y_2^+ - y_2^- - y_3^+ + y_3^- - y_5 = -2 \\ y_1^+ - y_1^- + 2y_2^+ - 2y_2^- - y_6 = 3 \\ -y_1^+ + y_1^- - 3y_2^+ + 3y_2^- + y_3^+ - y_3^- - y_7 = m \\ y_1^+, y_1^-, y_2^+, y_2^-, y_3^+, y_3^-, y_4, y_5, y_6, y_7 \geq 0 \end{cases} \tag{3.4}$$

Đến đây bài toán đã được đưa về **dạng chính tắc** với hệ ràng buộc dạng:

$$Ax = b \quad \text{và} \quad x \geq 0$$

Tuy nhiên áp dụng phương pháp đơn hình trực tiếp cho bài toán, tất cả các phần tử của vector b phải không âm, tức là:

$$b_i \geq 0 \quad \forall i = \overline{1,4}$$

Ở hệ ràng buộc (3.4), ta đã có $b_1 = 1 > 0$, $b_3 = 3 > 0$. Như vậy hai ràng buộc tương ứng sẽ không cần đổi dấu nữa. Thay vào đó, để chọn được biến cơ sở và giải bài toán theo phương pháp đơn hình, ta cần thêm lần lượt hai biến giả $y_8, y_9 \geq 0$ vào như sau:

$$\begin{cases} 2y_1^+ - 2y_1^- + 2y_3^+ - 2y_3^- - y_4 + y_8 = 1 \\ y_1^+ - y_1^- + 2y_2^+ - 2y_2^- - y_6 + y_9 = 3 \end{cases}$$

Vì $b_2 < 0$, nên ràng buộc tương ứng cần phải đổi dấu:

$$-y_2^+ + y_2^- + y_3^+ - y_3^- + y_5 = 2$$

Khi đó (3.4) trở thành:

$$\begin{cases} 2y_1^+ - 2y_1^- + 2y_3^+ - 2y_3^- - y_4 + y_8 = 1 \\ -y_2^+ + y_2^- + y_3^+ - y_3^- + y_5 = 2 \\ y_1^+ - y_1^- + 2y_2^+ - 2y_2^- - y_6 + y_9 = 3 \\ -y_1^+ + y_1^- - 3y_2^+ + 3y_2^- + y_3^+ - y_3^- - y_7 = m \\ y_1^+, y_1^-, y_2^+, y_2^-, y_3^+, y_3^-, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9 \geq 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

Vậy ta đã có y_5, y_8 và y_9 là các biến cơ sở. Hiện tại đã thêm 12 biến (tính cả biến phụ lẫn biến giả) vào bài toán đối ngẫu. Chỉ còn ràng buộc thứ tư của (3.5) chưa có biến cơ sở. Đến đây có hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $m \geq 0$, ta sẽ cần phải thêm một biến giả như y_8 và y_9 vào ràng buộc này.

Như vậy cần thêm 1 biến nữa, nâng tổng số biến cần thêm vào để giải bài toán đối ngẫu là 13.

Trường hợp 2: Nếu $m < 0$, ta đổi dấu như sau:

$$y_1^+ - y_1^- + 3y_2^+ - 3y_2^- - y_3^+ + y_3^- + y_7 = -m$$

Ở đây y_7 có thể được chọn làm biến cơ sở. Nên ta cũng không cần thêm biến phụ hay biến giả nào nữa.

Từ hai trường hợp trên, trường hợp 2 sẽ thỏa mãn số biến cần thêm là ít nhất. Khi đó, cần thêm 12 biến mới (bao gồm cả biến phụ và biến giả) để giải bài toán $(\mathcal{D})$ bằng phương pháp đơn hình. □

. . . .

(b) Ta sẽ giải bài $(\mathcal{P})$ này bằng phương pháp đơn hình, kết hợp `Big-M`.

Đầu tiên cần thêm 3 biến giả $x_5, x_6, x_7 \geq 0$ vào lần lượt các ràng buộc của hệ ràng buộc. Bài toán khi đó trở thành:

Tối đa hóa hàm mục tiêu sau:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = x_1 - 2x_2 + 3x_3 + mx_4 - Mx_5 - Mx_6 - Mx_7$$

với M là một số rất lớn, và các ràng buộc sau:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 + x_5 = 6 \\ x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_6 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 + x_7 = 5 \\ x_i \geq 0, \ \forall i = \overline{1, 7} \end{cases}$$

Ta xây dựng được bảng đơn hình xuất phát như bên dưới:

CS	**Hệ số**	**PA**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
			1	-2	3	m	$-M$	$-M$	$-M$
x_5	$-M$	6	2	0	1	-1	1	0	0
x_6	$-M$	3	0	1	2	-3	0	1	0
x_7	$-M$	5	2	-1	0	1	0	0	1
$f_{\max}$		$-14M$	$\boldsymbol{-4M-1}$	2	$\boldsymbol{-3M-3}$	$3M-m$	0	0	0

Từ bảng trên, ta có Δ_1 và Δ_3 âm với M rất lớn. Do đó ta cần xét hai cột x_1 và x_3.

Ta xét tích $|\Delta_i|.\lambda_i$, với $i = 1$ và $i = 3$:

$$\begin{cases} |\Delta_1|.\lambda_1 = |-4M-1| \cdot \min\{\frac{6}{2}, \frac{5}{2}\} = |-4M-1| \cdot \frac{5}{2} = 10M + \frac{5}{2} \\ \\ |\Delta_3|.\lambda_3 = |-3M-3| \cdot \min\{\frac{6}{1}, \frac{3}{2}\} = |-3M-3| \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{2}M + \frac{9}{2} \end{cases}$$

Ta cần chọn cột x_i có λ_1 lớn nhất để tối ưu được hàm mục tiêu nhiều nhất có thể. Vì $10M + \frac{5}{2}$ lớn hơn hẳn $\frac{9}{2}M + \frac{9}{2}$ với M rất lớn, nên $|\Delta_1|.\lambda_1 > |\Delta_3|.\lambda_3$

Ta sẽ chọn biến vào cơ sở là x_1, phần tử xoay là $a_{31} = 2$, biến ra là x_7. Từ đó xây dựng bảng đơn hình tiếp theo như sau:

CS	**Hệ số**	**PA**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
			1	-2	3	m	$-M$	$-M$	$-M$
x_5	$-M$	1	0	1	1	-2	1	0	-1
x_6	$-M$	3	0	1	2	-3	0	1	0
x_1	1	$\frac{5}{2}$	1	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$
$f_{\max}$		$-4M+\frac{5}{2}$	0	$\boldsymbol{-2M+\frac{3}{2}}$	$\boldsymbol{-3M-3}$	$5M-m+\frac{1}{2}$	0	0	$2M+\frac{1}{2}$

Từ bảng trên, ta có Δ_2 và Δ_3 âm với M rất lớn. Do đó ta cần xét hai cột x_2 và x_3.

Ta xét tích $|\Delta_i|.\lambda_i$, với $i=2$ và $i=3$:

$$\begin{cases} |\Delta_2|\cdot\lambda_2 = |-2M+\dfrac{3}{2}|\cdot\min\left\{\dfrac{1}{1},\dfrac{3}{1}\right\} = |-2M+\dfrac{3}{2}|\cdot 1 = 2M-\dfrac{3}{2} \\ \\ |\Delta_3|\cdot\lambda_3 = |-3M-3|\cdot\min\left\{\dfrac{1}{1},\dfrac{3}{2}\right\} = |-3M-3|\cdot 1 = 3M+3 \end{cases}$$

Vì $3M+3$ lớn hơn hẳn $2M-\dfrac{3}{2}$ với M rất lớn, nên $|\Delta_3|.\lambda_3 > |\Delta_2|.\lambda_2$

Ta sẽ chọn biến vào cơ sở là x_3, phần tử xoay là $a_{13}=2$, biến ra là x_5. Từ đó xây dựng bảng đơn hình tiếp theo như sau:

CS	**Hệ số**	**PA**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
			1	-2	3	m	$-M$	$-M$	$-M$
x_3	3	1	0	1	1	-2	1	0	-1
x_6	$-M$	1	0	-1	0	1	-2	1	2
x_1	1	$\frac{5}{2}$	1	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$
$f_{\max}$		$-M+\frac{11}{2}$	0	$M+\frac{9}{2}$	0	$\boldsymbol{-M-m-\frac{11}{2}}$	$3M+3$	0	$\boldsymbol{-M-\frac{5}{2}}$

Từ bảng trên, ta có Δ_4 và Δ_7 âm với M rất lớn. Do đó ta cần xét hai cột x_4 và x_7.

Ta xét tích $|\Delta_i|.\lambda_i$, với $i=4$ và $i=7$:

$$\begin{cases} |\Delta_4|\cdot\lambda_4 = \left|-M-m-\dfrac{11}{2}\right|\cdot\min\left\{\dfrac{1}{1},\dfrac{\frac{5}{2}}{\frac{1}{2}}\right\} = \left|-M-m-\dfrac{11}{2}\right|\cdot 1 = M+m+\dfrac{11}{2} \\ \\ |\Delta_7|\cdot\lambda_7 = \left|-M-\dfrac{5}{2}\right|\cdot\min\left\{\dfrac{1}{\frac{1}{2}},\dfrac{\frac{5}{2}}{\frac{1}{2}}\right\} = \left|-M-\dfrac{5}{2}\right|\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}M+\dfrac{5}{4} \end{cases}$$

Vì $M+m+\dfrac{11}{2}$ lớn hơn hẳn $\dfrac{1}{2}M+\dfrac{5}{4}$ với M rất lớn, nên $|\Delta_4|.\lambda_4 > |\Delta_7|.\lambda_7$

Ta sẽ chọn biến vào cơ sở là x_4, phần tử xoay là $a_{24}=1$, biến ra là x_6. Từ đó xây dựng bảng đơn hình tiếp theo như sau:

CS	**Hệ số**	**PA**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
			1	-2	3	m	$-M$	$-M$	$-M$
x_3	3	3	0	-1	1	0	-3	2	3
x_4	m	1	0	-1	0	1	-2	1	2
x_1	1	2	1	0	0	0	1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{2}$
$f_{\max}$		$m+11$	0	$-m-1$	0	0	$M-2m-8$	$M+m+\frac{11}{2}$	$M+2m+\frac{17}{2}$

Từ bảng trên, ta có $\Delta_i > 0$, với mọi i, trừ duy nhất trường hợp $i = 2$ chưa xác định. Ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Với $m > -1$ thì $-m - 1 < 0$. Điều này có nghĩa là $\Delta_2 < 0$.

Lại có tất cả các hệ số ở cột 2 là các a_i2, $i = \overline{1,3}$ đều không dương. Theo định lý (2.0.2), bài toán $(\mathcal{P})$ không có phương án tối ưu.

Trường hợp 2: Với $m = -1$ thì $-m - 1 = 0$, hay $\Delta_2 = 0$. Vậy x_2 là một biến ngoài cơ sở nhưng lại có $\Delta_2 = 0$. Theo định lý (2.0.2), bài toán $(\mathcal{P})$ có vô số phương án tối ưu.

Ta cũng có thể kiểm tra lại điều này từ bảng đơn hình cuối cùng. Theo đó, $\Delta_2 = 0$ kéo theo $\Delta_i \geq 0, \forall i = \overline{1,7}$. Như vậy thuật toán đơn hình dừng. Giá trị tối ưu khi đó là 10, và với $(x_1, x_3, x_4) = (2, 3, 1)$.

Thay các giá trị trên vào hệ ràng buộc ban đầu, tìm được $x_2 = 0$. Vậy $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 0, 3, 1)$ là một phương án tối ưu của bài toán.

Từ đây, đặt:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (at + 2, bt, ct + 3, dt + 1)$$

với $a, b, c, d, t \in \mathbb{R}$.

Thay lại các giá trị trên vào hệ ràng buộc ban đầu và rút gọn, ta được hệ sau:

$$\begin{cases} 2a + c - d = 0 \\ b + 2c - 3d = 0 \\ 2a - b + d = 0 \end{cases} \tag{3.6}$$

Không mất tính tổng quát, chọn $a = 0$, khi đó tồn tại họ nghiệm sau thỏa hệ (3.6):

$$(a, b, c, d) = (0, d, d, d)$$

Không mất tính tổng quát, chọn tiếp $d = 1$, khi đó họ nghiệm sau sẽ thỏa bài toán $(\mathcal{P})$:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, t, t + 3, t + 1)$$

với $t \in \mathbb{R}$.

Trường hợp 3: Với $m < -1$ thì $-m - 1 > 0$, hay $\Delta_2 > 0$. Vậy với mọi biến x_i ngoài cơ sở, $\Delta_i > 0$. Theo định lý (2.0.2), bài toán $(\mathcal{P})$ có duy nhất một phương án tối ưu.

Phương án đó ta cũng đã chỉ ra ở **Trường hợp 2**, chính là:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 0, 3, 1)$$

❒ Phần minh họa bằng `Python` với một vài giá trị m cụ thể:

```python
from pulp import LpMaximize, LpProblem, LpVariable, PULP_CBC_CMD

def solve_lp(m):
    model = LpProblem("LP", LpMaximize)
    x = [LpVariable(f"x{i+1}", lowBound=0) for i in range(4)]
    model += x[0] - 2*x[1] + 3*x[2] + m*x[3]
    model += 2*x[0] + x[2] - x[3] == 6
    model += x[1] + 2*x[2] - 3*x[3] == 3
    model += 2*x[0] - x[1] + x[3] == 5
    model.solve(PULP_CBC_CMD(msg=0))
    print(f"m = {m}")
    if model.status == 1:
        print(f"f = {model.objective.value()}")
        print([xi.varValue for xi in x])
    elif model.status == 2:
        print("Khong co nghiem.")
    else:
        print("Khong bi chan duoi.")

for m in [2, -1, -3]:
    solve_lp(m)
```

Sau đây là kết quả chạy `code` với ba giá trị khác nhau, tương ứng với ba trường hợp đã xét ở trên:

```
m = 2
Khong bi chan duoi.
m = -1
f = 10.0
[2.0, 0.0, 3.0, 1.0]
m = -3
f = 8.0
[2.0, 0.0, 3.0, 1.0]
```

BÀI 3. Trong HAI chọn MỘT.

(1) Hãy giải bài toán sau bằng lý thuyết đối ngẫu kết hợp với đơn hình: Một sinh viên tham gia một khóa học có n bài kiểm tra và điểm là một số thực không âm nào đó (không có chặn trên). Biết rằng sinh viên sẽ đậu khóa học nếu với mọi $i = 1, n$, tổng điểm của k bài kiểm tra đầu tiên sẽ không nhỏ hơn k. Sinh viên được tính điểm trung bình theo quy tắc là điểm của bài thứ k có trọng số k. Hỏi một sinh viên đậu khóa học thì có điểm trung bình tối thiểu là bao nhiêu?

(2) Hãy phát biểu bài toán sau dưới dạng quy hoạch tuyến tính nguyên rồi giải bằng cách thư viện `Python` thích hợp: Một cơ sở sản xuất có hai loại thanh cốt thép độ dài 9 mét và 7 mét (số lượng không giới hạn). Cần gia công ra 100 đoạn 2.4 mét và 130 đoạn 2.8 mét. Hỏi nên cắt cốt thép theo phương án thế nào để lượng thép thừa khi gia công là ít nhất?

LỜI GIẢI. Với câu này em chọn bài `(2)`. Tuy nhiên em đã làm cả hai bài, với mong muốn nhận được góp ý ạ.

Bài `(1)`: Xét một sinh viên đậu khóa học bất kỳ và gọi x_i là điểm bài kiểm tra thứ i của sinh viên này, $\forall i = \overline{1, n}$.

Theo giả thiết, $\forall i = \overline{1, n}$, tổng điểm của i bài kiểm tra đầu tiên sẽ không nhỏ hơn i. Vậy ta thiết lập được hệ các ràng buộc sau đây:

$$\begin{cases} x_1 \geq 1 \\ x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 3 \\ \ldots \\ x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n \geq n \\ x_k \geq 0, \forall k = \overline{1, n} \end{cases} \tag{3.7}$$

Cũng theo giả thiết, điểm trung bình được tính theo quy tắc điểm của bài thứ k có trọng số k. Như vậy điểm trung bình khóa học của sinh viên đang xét là:

$$\text{DTB}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + nx_n}{1 + 2 + 3 + \ldots + n}$$

Để đơn giản, ta quy về bài toán quy hoạch tuyến tính $(\mathcal{P})$:

Tối thiểu hóa hàm mục tiêu:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + nx_n$$

với hệ các ràng buộc:

$$\begin{cases} x_1 \geq 1 \\ x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 3 \\ \ldots \\ x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n \geq n \\ x_k \geq 0, \forall k = \overline{1, n} \end{cases}$$

Bài toán đối ngẫu $(\mathcal{D})$ của $(\mathcal{P})$ được phát biểu như sau:

Tối đa hóa hàm mục tiêu:

$$g(y_1, y_2, \ldots, y_n) = y_1 + 2y_2 + 3y_3 + \ldots + ny_n$$

với hệ các ràng buộc:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_n & \leq 1 \\ \quad y_2 + y_3 + \cdots + y_n & \leq 2 \\ \quad\quad y_3 + \cdots + y_n & \leq 3 \\ & \ldots \\ \quad\quad\quad y_n & \leq n \\ y_k \geq 0, \quad \forall k = \overline{1, n} \end{cases} \tag{3.8}$$

Hệ (3.8) đang ở dạng chuẩn, để áp dụng phương pháp đơn hình, ta cần đưa hệ về dạng chính tắc.

Ta sẽ thêm n biến $y_j, \forall j = \overline{n+1, 2n}$ lần lượt vào n ràng buộc đầu tiên ở (3.8). Khi đó hệ được đưa về dạng chính tắc như sau:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_n + y_{n+1} & = 1 \\ \quad y_2 + y_3 + \cdots + y_n + y_{n+2} & = 2 \\ \quad\quad y_3 + \cdots + y_n + y_{n+3} & = 3 \\ & \ldots \\ \quad\quad\quad y_n + y_{2n} & = n \\ y_k \geq 0, \quad \forall k = \overline{1, 2n} \end{cases} \tag{3.9}$$

Ta xây dựng bảng đơn hình xuất phát như bên dưới:

CS	**Hệ số**	**PA**	y_1	y_2	y_3	$\cdots$	y_n	y_{n+1}	y_{n+2}	y_{n+3}	$\cdots$	y_{2n}
			1	2	3	$\cdots$	n	0	0	0	$\cdots$	0
y_{n+1}	0	1	1	1	1	$\cdots$	1	1	0	0	$\cdots$	0
y_{n+2}	0	2	0	1	1	$\cdots$	1	0	1	0	$\cdots$	0
y_{n+3}	0	3	0	0	1	$\cdots$	1	0	0	1	$\cdots$	0
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
y_{2n}	0	n	0	0	0	$\cdots$	1	0	0	0	$\cdots$	1
$g_{\max}$		0	-1	-2	-3	$\cdots$	$-n$	0	0	0	$\cdots$	0

Từ bảng trên, ta có $\Delta_i < 0, \forall i = \overline{1, n}$. Do đó ta cần xét n cột từ y_1 đến y_n.

Dễ thấy $\lambda_i = 1, \forall i = \overline{1, n}$, nên ta chọn cột có $|\Delta_i|$ lớn nhất, để tối ưu hàm mục tiêu được nhiều nhất.

Do đó ta chọn biến y_n làm biến vào cơ sở, tương ứng với $|\Delta_n| = n$ lớn nhất trong số các $|\Delta_i|, \forall i = \overline{1, n}$. Bên cạnh đó phần tử xoay sẽ là $a_{1n} = 1$ còn biến ra là y_{n+1}. Từ đó ta xây dựng bảng đơn hình tiếp theo như sau:

CS	**Hệ số**	**PA**	y_1	y_2	y_3	$\cdots$	y_n	y_{n+1}	y_{n+2}	y_{n+3}	$\cdots$	y_{2n}
			1	2	3	$\cdots$	n	0	0	0	$\cdots$	0
y_n	n	1	1	1	1	$\cdots$	1	1	0	0	$\cdots$	0
y_{n+2}	0	1	-1	0	0	$\cdots$	0	-1	1	0	$\cdots$	0
y_{n+3}	0	2	-1	-1	0	$\cdots$	0	-1	0	1	$\cdots$	0
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
y_{2n}	0	$n-1$	-1	-1	-1	$\cdots$	0	-1	0	0	$\cdots$	1
$g_{\max}$		n	$n-1$	$n-2$	$n-3$	$\cdots$	0	n	0	0	$\cdots$	0

Từ bảng trên, ta có $\Delta_i \geq 0, \forall i = \overline{1,n}$. Do đó thuật toán đơn hình dừng ở đây.

Từ bảng đơn hình cuối cùng, giá trị các nghiệm khi đó là

$$(y_n, y_{n+2}, \ldots, y_{2n-1}, y_{2n}) = (1, 1, \ldots, n-2, n-1)$$

Để ý ràng buộc thứ hai của (3.9):

$$y_2 + y_3 + \cdots + y_n + y_{n+2} = 2$$

Mà $y_n = y_{n+2} = 1$ nên suy ra:

$$y_2 + y_3 + \cdots + y_{n-1} = 0$$

Do đó $y_2 = y_3 = \cdots = y_{n-1} = 0$ do $y_k \geq 0, \quad \forall k = \overline{1, n-1}$.

Để ý không tồn tại biến ngoài cơ sở y_i nào có $\Delta_i = 0$, nên theo định lý (2.0.2), bài toán đối ngẫu $(\mathcal{D})$ có duy nhất một phương án tối ưu là:

$$(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n) = (0, 0, \ldots, 0, 1)$$

Giá trị tối ưu của hàm mục tiêu khi đó là:

$$\max g(y_1, y_2, \ldots, y_n) = g(0, 0, \ldots, 1) = n$$

Đến đây ta sẽ dùng định lý về độ lệch bù ở (2.0.3) để từ nghiệm của bài toán đối ngẫu $(\mathcal{D})$, tìm ngược lại nghiệm của bài toán gốc $(\mathcal{P})$.

Đầu tiên thay nghiệm tối ưu $(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n) = (0, 0, \ldots, 0, 1)$ vào các ràng buộc ở hệ (3.8), ta có:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_n & = 1 \\ \quad\;\; y_2 + y_3 + \cdots + y_n & \neq 2 \\ \qquad\quad\; y_3 + \cdots + y_n & \neq 3 \\ & \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\quad y_n & \neq n \\ y_k \geq 0, \quad \forall k = \overline{1,n} \end{cases} \tag{3.10}$$

Dấu bằng không xảy ra từ ràng buộc thứ 2 đến ràng buộc thứ n ở hệ (3.10). Do đó, theo định lý (2.0.3), ta có:

$$x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0 \tag{3.11}$$

Lại có biến thứ n của bài toán đối ngẫu $y_n = 1 \neq 0$, do đó theo định lý (2.0.3), ràng buộc thứ n của bài toán gốc phải xảy ra dấu bằng. Tức là:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = n \tag{3.12}$$

Từ (3.11) và (3.12), ta suy ra $x_1 = n$. Khi đó:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (n, 0, \ldots, 0)$$

Vậy hàm mục tiêu của bài toán gốc đạt giá trị nhỏ nhất là:

$$\min f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(n, 0, \ldots, 0) = n$$

> **Nhận xét.** Bước tính giá trị nhỏ nhất của hàm mục tiêu ở bài toán gốc có thể được suy ra nhanh hơn, vì kết quả của bài toán đối ngẫu và bài toán gốc là như nhau.

Trở lại bài toán, ta đã có giá trị tối ưu cho bài toán quy hoạch tuyến tính, từ đây tính được điểm trung binh tối thiểu để sinh viên đậu khóa học là:

$$\min \text{DTB} = \frac{\min f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{1 + 2 + 3 + \ldots + n} = \frac{n}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2}{n+1}$$

Vậy một sinh viên bất kỳ đậu khóa học thì cần có điểm trung bình tối thiểu là $\dfrac{2}{n+1}$, với điểm của bài đầu tiên là n và điểm $n-1$ bài còn lại là 0. $\square$

....

Bài (2): Đầu tiên ta sẽ xét những phương án để cắt hai loại thanh thép $9m$ và $7m$.

Vì ta cần tối thiểu hóa lượng thép dư thừa khi cắt những thanh thép này, nên vớ những phương án sau đây, ta sẽ cắt sao cho lượng thép dư còn lại phải ngắn hơn $2.4m$.

❒ **Phương án cắt thanh thép 9m:** Gọi thanh thép dài $9m$ là thanh loại A. Nếu cắt được x đoạn $2.4m$ và y đoạn $2.8m$ từ mỗi thanh loại A, ta có bất phương trình $2.4x + 2.8y \leq 9$, với điều kiện phần dư bé hơn 2.4. Các phương án hợp lệ là:

$$\begin{aligned}
&\text{Phương án } A_1 : (x, y) = (0, 3), \quad \text{dư } 0.6m \\
&\text{Phương án } A_2 : (x, y) = (1, 2), \quad \text{dư } 1.0m \\
&\text{Phương án } A_3 : (x, y) = (2, 1), \quad \text{dư } 1.4m \\
&\text{Phương án } A_4 : (x, y) = (3, 0), \quad \text{dư } 1.8m
\end{aligned}$$

Gọi a_i là số thanh thép loại A được cắt theo phương án A_i, với $i = \overline{1, 4}$.

❒ **Phương án cắt thanh thép 7m:** Tương tự, gọi thanh thép dài $7m$ là thanh loại B. Xét các cặp (x, y) sao cho $2.4x + 2.8y \leq 7$ với điều kiện phần dư bé hơn 2.4. Các phương án hợp lệ là:

$$\begin{aligned}
&\text{Phương án } B_1 : (x, y) = (0, 2), \quad \text{dư } 1.4m \\
&\text{Phương án } B_2 : (x, y) = (1, 1), \quad \text{dư } 1.8m \\
&\text{Phương án } B_3 : (x, y) = (2, 0), \quad \text{dư } 2.2m
\end{aligned}$$

Gọi b_j là số thanh thép loại B được cắt theo phương án B_j, với $j = 1, 2, 3$.

Với các biến a_i, b_j là số nguyên không âm, mục tiêu bài toán là tìm các giá trị a_i, b_j sao cho tổng lượng thép dư là nhỏ nhất và đáp ứng đủ yêu cầu 100 đoạn $2.4m$ và 130 đoạn $2.8m$.

> **Nhận xét.** Để ý yêu cầu *cần gia công ra* 100 *đoạn* $2.4m$ *và* 130 *đoạn* $2.8m$, có thể hiểu rằng nếu ta gia công ra thừa số đoạn yêu cầu này, thì số đó cũng tính vào phần dư khi gia công.

Ta cần tối thiểu hóa hàm mục tiêu tính tổng lượng thép dư sau khi cắt sau đây:

$$f(a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3) = 0.6a_1 + a_2 + 1.4a_3 + 1.8a_4 + 1.4b_1 + 1.8b_2 + 2.2b_3$$

với hệ các ràng buộc:

$$\begin{cases} a_2 + 2a_3 + 3a_4 + b_2 + 2b_3 = 100 \\ 3a_1 + 2a_2 + a_3 + 2b_1 + b_2 = 130 \\ a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{cases} \tag{3.13}$$

❒ Giải bài toán quy hoạch tuyến tính trên bằng `Python`:

```python
import pulp

# 1. Khoi tao bai toan toi uu (Minimize)
model = pulp.LpProblem("CuttingStockProblem", pulp.LpMinimize)

# 2. Khai bao cac bien nguyen khong am
a1 = pulp.LpVariable('a1', lowBound=0, cat='Integer')
a2 = pulp.LpVariable('a2', lowBound=0, cat='Integer')
a3 = pulp.LpVariable('a3', lowBound=0, cat='Integer')
a4 = pulp.LpVariable('a4', lowBound=0, cat='Integer')
b1 = pulp.LpVariable('b1', lowBound=0, cat='Integer')
b2 = pulp.LpVariable('b2', lowBound=0, cat='Integer')
b3 = pulp.LpVariable('b3', lowBound=0, cat='Integer')

# 3. Dinh nghia ham muc tieu (tong chieu dai thep du thua)
model += 0.6*a1 + 1.0*a2 + 1.4*a3 + 1.8*a4 + 1.4*b1 + 1.8*b2 + 2.2*b3

# 4. Them cac rang buoc nhu cau
model += 1*a2 + 2*a3 + 3*a4 + 1*b2 + 2*b3 == 100
model += 3*a1 + 2*a2 + 1*a3 + 2*b1 + 1*b2 == 130

# 5. Giai bai toan
model.solve(pulp.PULP_CBC_CMD(msg=0))

# 6. In ket qua toi uu
print("Status:", pulp.LpStatus[model.status])
print("Optimal Total Leftover =", pulp.value(model.objective))
for var in [a1, a2, a3, a4, b1, b2, b3]:
    print(var.name, "=", var.value())
```

Sau khi chạy `code`, kết quả cho ra là:

```
Status: Optimal
Optimal Total Leftover = 87.0
a1 = 26.0
a2 = 0.0
a3 = 50.0
a4 = 0.0
b1 = 1.0
b2 = 0.0
b3 = 0.0
```

Vậy lượng thép dư thừa tối thiểu khi gia công là $87m$, khi gia công theo phương án cắt 26 thanh thép $9m$ theo phương án A_1, 50 thanh thép $9m$ theo phương án A_3 và 1 thanh thép $7m$ theo phương án B_1.

Số lượng thanh thép loại $2.4m$ và $2.8m$ khi đó sẽ chính xác lần lượt bằng 100 và 130 (không dư ra phần thép nào nữa). □

Nhận xét. Ở hệ các ràng buộc (3.13), ta chọn dấu của ràng buộc là $=$ thay vì $\geq$. Điều này là do:

`(i)` Đề yêu cầu *cần gia công ra* 100 *đoạn* $2.4m$ *và* 130 *đoạn* $2.8m$. Trong thực tế điều này có thể hiểu là không bắt buộc chính xác, mà yêu cầu cần ít nhất hoặc đáp ứng đủ số đoạn này.

`(ii)` Tuy nhiên nếu tính cả phần sản phẩm dư ra từ số thanh thép $2.4m$ và $2.8m$ vào phần thép dư thừa khi gia công, thì ta nên chọn ràng buộc là dấu $=$. Vì dư ra một thanh thép loại $2.4m$ là phần dư lại cộng thêm $2.4m$, tương tự cho loại $2.8m$.

❒ Như vậy ta nên chọn phương án gia công ra đúng số lượng yêu cầu từ đề bài, để giảm thiểu số thép dư thừa.

Ta sẽ kiểm chứng với đoạn code `Python` trên, cụ thể nếu ta thay các dấu $==$ thành $>=$, kết quả sẽ ra như sau:

```
Status: Optimal
Optimal Total Leftover = 86.2
a1 = 27.0
a2 = 0.0
a3 = 50.0
a4 = 0.0
b1 = 0.0
b2 = 0.0
b3 = 0.0
```

Số thép dư thừa bây giờ là $86.2m$, tuy nhiên ở đây ta đã gia công ra thừa 1 thanh thép loại $2.8m$, làm cho tổng phần dư được nâng lên thành $89m$. Con số này là lớn hơn so với $87m$ của phương án thi công vừa đủ số thanh yêu cầu.