

Obr. 4: Spřítlačovací napojení bloků

Bez zvláštních podrobností a předpokladů můžeme psát o obkřídlovém signálu:

$$z = u - G_2(s)y$$

a potom

$$y = G_1(s)z$$

$$y = G_1(s)(u - G_2(s)y)$$

$$(1 + G_1(s)G_2(s))y = G_1(s)u$$

$$y = \frac{G_1(s)}{(1 + G_1(s)G_2(s))}u$$

Pro přenosovou funkci celkového systému $G(s)$ platí:

$$G(s) = \frac{G_1(s)}{(1 + G_1(s)G_2(s))}$$

7. Přenosové funkce a modelování systémů

7.1. Systém prvního řádu

7.1.1. Přenosová funkce

Ak atepní polynom $A(s)$ v přenosové funkci je $n-1$, potom hovoríme, že systém, který přenosovou funkci opisuje, je prvního řádu. Vzhledem na kanonizaci může být stupeň polynomu $B(s)$ rovný libovolnému, tedy $m \leq n$. Vo vícečetnosti tedy systém 1. řádu je

$$G(s) = \frac{b_1s + b_0}{a_1s + a_0}$$

Typický (a často velmi užitečný) je však vzhled $A(s)$ jako monický polynomu, taký, který má při nejvyšší mocnině s koeficientem rovný 1. Tedy v tomto případě

$$G(s) = \frac{b_1s + b_0}{s + a_0}$$

Například, v praxi, v modelování (a v přírodě) má ve většině případů význam hovorit o systémech, které samy o sobe neobsahují „zdroj energie“, sílu ke „energetickým spotřebičům“, sílu energeticky disipativní. V takovém případě pro přenosovou funkci platí, že její relativní stupeň $n^* = n - m$ je $n^* \geq 1$. V tomto případě tedy

$$G(s) = -\frac{b_0}{s + a_0}$$

Je typickým příkladem přenosové funkce 1. řádu. Takto přenosová funkce se nazývá 1. ř. trv. postojné rádu přenosová funkce (ak kje o stabilní systém).

Pro úplnost $B(s) = b_0$ je stupeň $m = 0$ a $A(s) = s + a_0$ je stupeň $n = 1$. Koeficienty těchto polynomů si parametrujeme systémem

7.1.2. Diferenční rovnice

Aby sme snadnivišli na predchádzajúci časť a zároveň skrátili prepis systému z přenosové funkce na diferenciální rovnice, tak konstatujeme, že

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

kde $Y(s)$ je Laplaceov obraz výstupního signálu a $U(s)$ je Laplaceov obraz vstupního signálu. V tomto případě tedy

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{b_0}{s + a_0}U(s)$$

$$(s + a_0)Y(s) = b_0U(s)$$

$$sY(s) + a_0Y(s) = b_0U(s)$$

$$sY(s) + a_0Y(s) = b_0U(s)$$

a teda diferenciální rovnice je

$$\dot{y}(t) = -a_0y(t) + b_0u(t)$$

Prepíšeme opačným smerom, a dif. rovnice na přenosové funkce, je samoregované štandardné splňovanie Laplaceovej transformácie na rovnice (78) pri malých začiatočných podmienkach.

7.1.3. Opis systému v stavovom priestore

V stavovom priestore je potrebné zaviesť stavový vektor $x(t) \in \mathbb{R}^n$. Vo všeobecnosti je opis lineárneho systému v stavovom priestore v tvare

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$$

$$y(t) = c^T x(t)$$

kde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^n$ sú matice a vektory a ide o parametre systému.

Pri stanovení vektora $x(t)$ ide vo všeobecnosti o prepis diferenciálnej rovnice vyššieho rádu na sústavu rovníc prvého rádu. Vzniká tak nové signály, ktoré sú závislé na sústavu rovníc prvého rádu a sú prvkami stavového vektora $x(t)$. V tomto prípade máme dif. rovnice (78) čo sú dif. rovnice prvého rádu. Formálne teda zovieme

$$x_1(t) = y(t)$$

a teda

$$\dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) = -a_0x_1(t) + b_0u(t)$$

je vlastne „sústava“ jednej diferenciálnej rovnice. Formálne:

$$\dot{x}_1(t) = -a_0x_1(t) + b_0u(t)$$

$$y(t) = x_1(t)$$

Je opis systému v stavovom priestore kde $x_1(t)$ je stavová veličina. Pre úplnosť, stavový vektor v tomto prípade je $x(t) = x_1(t)$ a matice $A = -a_0$, vektor $b = b_0$ a vektor $c = 1$.

7.1.4. Stabilita

Pod pomerovaním stability systému sa typicky rozumie niekoľko rôznych prípadov (vzhľadom na všeobecnú riedinu diferenciálnej rovnice opisujúcej dynamiku systému. Jednoduchým je termín **globálna stabilita** (homogénny prípad, homogénny systém), kde sa skúša prípad, keď vstupný signál $u(t)$ je identicky nulový, jeho hodnota sa nemení v čase. Usúdiť hodnotu výstupného signálu $y(t)$ tiež obmedzený, hovoríme, že systém je BIBO stabilný. V podstate sa tak skúša vstúpnou zložku riediny zahusťovanej diferenciálnej rovnice. Vstúpnou zložku riediny, závislú od začiatočných podmienok, je možné skúšať rovnako a súvisí to s pojmom asymptotickej stability.

Pri lineárnem systéme systém platí, že vlastnosti systému z abstraktných hľadísk stability sú kompletne určené pôdní systémom, teda koreňmi charakteristického polynómu. Sústava a postačujúce podmienky stability lineárneho systému je, aby všetky póly systému ležali v ľavej polovici komplexnej roviny, t.j. aby ich reálne časti boli záporné. Ak sú póly systému ležajúce v ľavej polovici, hovoríme, že systém je na hranici stability. Ak sú póly systému ležajúce v ľavej polovici, jeho reálna časť je kladná, hovoríme, že systém je nestabilný.

Stabilita systému je daná koreňmi charakteristického polynómu $A(s)$, v tomto prípade je přenosová funkcia prvého rádu v tvare (75) a teda charakteristický polynom je

$$A(s) = s + a_0$$

Koreň je $s_1 = -a_0$. Systém je stabilný ak $a_0 > 0$, nestabilný ak $a_0 < 0$, ak $a_0 = 0$, tak systém je na hranici stability.

7.1.5. Statistické rozloženie a autokorelácie

Pri skúšaní vlastností systému je často ako prvý potrebný pomôcť tzv. statistické vlastnosti systému. Vo všeobecnosti sa to týka stacionárnych stavov systému. Typickým príkladom je situácia, keď vstupný signál $u(t)$ je konštantný, jeho hodnota sa nemení v čase. Usúdiť hodnotu výstupného signálu označme $u(\infty)$, čím sa odhadujeme, že ide o hodnotu skutočnej v čase nekonečno, čo v praxi je čas taký, keď všetky prechodné deje postupne sa zhasnú. Odhadom je, či sa aj hodnota výstupného signálu $y(t)$ ustáli na nejakej hodnote $y(\infty)$.

Na prvý pohľad je najmä, že namerané statistické vlastnosti systému nemá zmysel skúšať pre systém, ktorý je nestabilný.

Statistické rozloženie

Usudíme systém, ktorý nie je nestabilný. Ak sleduj s pôlv systému nie je nulový, potom systém dísané prechodovk statistik. Stále však máme na mysli dynamický systém, ktorý je daný v tomto prípade přenosovou funkciou systému prvého rádu v tvare (75). Sleduje sa to možno pomerovať ako statistické systémy prvého rádu, skúšať SSRL.

$A = -\frac{1}{a_0}$

$s = -\alpha \quad 1 = B a_0$

$B = \frac{1}{a_0}$

$Y_2(s) = -\frac{1}{a_0} \frac{1}{s + a_0} + \frac{1}{a_0} \frac{1}{s - 0}$

$-\frac{1}{a_0} e^{-a_0 t} + \frac{1}{a_0} e^{0 t}$

$y(t) = y_0 e^{-a_0 t} - \frac{1}{a_0} e^{-a_0 t} + \frac{1}{a_0}$



je najmä odlišný od $u(t)$. Ak $y(t)$ a $u(t)$ dosadíme do (50), vidíme, že

$$\frac{d^n b_0 e^{st}}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} b_0 e^{st}}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 b_0 e^{st} = b_0 \frac{d^n a_0 e^{st}}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} a_0 e^{st}}{dt^{n-1}} + \dots + b_0 a_0 e^{st}$$

$$(s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0) b_0 e^{st} = (b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_0) a_0 e^{st}$$

$$(s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0) b_0 e^{st} = (b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_0) a_0 e^{st}$$

a teda môžeme povedať, že riedinu systému závislú od špeciálneho signálu e^{st} je

$$y(t) = \frac{(b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_0) a_0}{(s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0)} e^{st}$$

Označme

$$B(s) = (b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_0) a_0$$

$$A(s) = (s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0)$$

a výraz

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$$

výjadruje přenosovú funkciu systému.

5. O přenosovej funkcii

Přenosová funkcia je nástroj pre matematické modelovanie lineárnych časovo-invariantných dynamických systémov.

Príkladom sú dynamické systémy opisované diferenciálnymi rovnicami. Ak sú tieto rovnice lineárne, hovoríme, že systém, ktorý opisuje, je lineárny. Ak koeficienty v dif. rovnici nie sú funkciami času, hovoríme, že systém je časovo invariantný.

Vo všeobecnosti hovoríme o riedine dif. rovnice. V kontexte dynamických systémov je riedinou dif. rovnice funkcia času. Z hľadiska systému hovoríme, že táto funkcia je výstupným signálom systému. Na hľadisk riediny má vplyv niekoľko faktorov. Vo všeobecnosti je riedina daná samoregovaním daných rovníc, jej riedina a hodnotami jej koeficientov. Konkrétne riedina si potom dáva matematický podmienkami a výstupným signálom systému.

Z hľadiska systému hovoríme o riedine dif. rovnice a o jej koeficientoch ako o parametroch systému. Hovorí o začiatočných podmienkach systému má samoregovanú túž význam. Napokon nie majme vplyv vstupného signálu na výstupný signál systému a s matematickým modelovaním tohto vplyvu súvisí pojem přenosová funkcia. Omezuje hovoríme o pomeru vo vstup na výstup systému.

5.1. Definícia přenosovej funkcie z využitím Laplaceovej transformácie

Přenosová funkcia je definovaná ako pomer Laplaceova obrazu výstupného signálu systému k Laplaceovému obrazu vstupného signálu pri nulových začiatočných podmienkach systému.

Laplaceova transformácia sa týka lineárnych časovo-invariantných systémov. Majme teda takto systém, ktorého vstupným signálom je signál $u(t)$ a výstupným signálom je signál $y(t)$. V zmysle Laplaceovej transformácie existuje obraz vstupného signálu $U(s)$ a obraz výstupného signálu $Y(s)$ pričom tieto obrazy si stanovíme pri nulových začiatočných podmienkach systému.

Ilustrujme na príklade lineárny časovo-invariantný systém nech je daný dif. rovnica v tvare

$$\dot{y}(t) = -a_0 y(t) + b_0 u(t)$$

kde $y(t)$ a $u(t)$ sú samoregované výstupný a vstupný signál. Koeficienty $a_1, a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ sú konštanty. Aplikujeme Laplaceovu transformáciu na prvky danej dif. rovnice.

$$sY(s) - y(0) + a_0 Y(s) = b_0 U(s)$$

Pri nulových začiatočných podmienkach potom platí

$$sY(s) + a_0 Y(s) = b_0 U(s)$$

Přenosová funkcia je definovaná ako pomer $Y(s)/U(s)$, teda

$$Y(s) = \frac{b_0}{s + a_0} U(s)$$

Ako samostatný objekt sa přenosová funkcia označuje symbolem, napríklad ako $G(s)$, teda v tomto prípade

$$G(s) = \frac{b_0}{s + a_0}$$

a vo všeobecnosti

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$$

Z hľadiska má tiež zmysel označovať polynóm v čitateli a menovateli přenosovej funkcie. Polynóm v čitateli sa typicky označuje ako $B(s)$ a polynóm v menovateli sa označuje ako $A(s)$. V tomto prípade

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$$

a vo všeobecnosti teda

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$$

5.2. Súvisiace pojmy

Přenosová funkcia je opisuje lineárny časovo-invariantný dynamický systém pričom je daný, že začiatočné podmienky systému sú nulové. Daný dynamický systém je možno opísať diferenciálnymi rovnicami alebo přenosovou funkciou a tieto dva opisy sú ekvivalentné.

Usudíme přenosovú funkciu vo všeobecnosti

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$$

kde $A(s)$ a $B(s)$ sú polynómy, ktorých nemajú premenlivá je Laplaceov operátor s (prítom s je komplexné číslo).

Polynóm $A(s)$ má stupeň n a polynóm $B(s)$ má stupeň m .

Keďže/dynamický dynamický dej/systém/systém z prvého/2. stupeňa/3. stupeňa/4. stupeňa/5. stupeňa/6. stupeňa/7. stupeňa/8. stupeňa/9. stupeňa/10. stupeňa/11. stupeňa/12. stupeňa/13. stupeňa/14. stupeňa/15. stupeňa/16. stupeňa/17. stupeňa/18. stupeňa/19. stupeňa/20. stupeňa/21. stupeňa/22. stupeňa/23. stupeňa/24. stupeňa/25. stupeňa/26. stupeňa/27. stupeňa/28. stupeňa/29. stupeňa/30. stupeňa/31. stupeňa/32. stupeňa/33. stupeňa/34. stupeňa/35. stupeňa/36. stupeňa/37. stupeňa/38. stupeňa/39. stupeňa/40. stupeňa/41. stupeňa/42. stupeňa/43. stupeňa/44. stupeňa/45. stupeňa/46. stupeňa/47. stupeňa/48. stupeňa/49. stupeňa/50. stupeňa/51. stupeňa/52. stupeňa/53. stupeňa/54. stupeňa/55. stupeňa/56. stupeňa/57. stupeňa/58. stupeňa/59. stupeňa/60. stupeňa/61. stupeňa/62. stupeňa/63. stupeňa/64. stupeňa/65. stupeňa/66. stupeňa/67. stupeňa/68. stupeňa/69. stupeňa/70. stupeňa/71. stupeňa/72. stupeňa/73. stupeňa/74. stupeňa/75. stupeňa/76. stupeňa/77. stupeňa/78. stupeňa/79. stupeňa/80. stupeňa/81. stupeňa/82. stupeňa/83. stupeňa/84. stupeňa/85. stupeňa/86. stupeňa/87. stupeňa/88. stupeňa/89. stupeňa/90. stupeňa/91. stupeňa/92. stupeňa/93. stupeňa/94. stupeňa/95. stupeňa/96. stupeňa/97. stupeňa/98. stupeňa/99. stupeňa/100. stupeňa/101. stupeňa/102. stupeňa/103. stupeňa/104. stupeňa/105. stupeňa/106. stupeňa/107. stupeňa/108. stupeňa/109. stupeňa/110. stupeňa/111. stupeňa/112. stupeňa/113. stupeňa/114. stupeňa/115. stupeňa/116. stupeňa/117. stupeňa/118. stupeňa/119. stupeňa/120. stupeňa/121. stupeňa/122. stupeňa/123. stupeňa/124. stupeňa/125. stupeňa/126. stupeňa/127. stupeňa/128. stupeňa/129. stupeňa/130. stupeňa/131. stupeňa/132. stupeňa/133. stupeňa/134. stupeňa/135. stupeňa/136. stupeňa/137. stupeňa/138. stupeňa/139. stupeňa/140. stupeňa/141. stupeňa/142. stupeňa/143. stupeňa/144. stupeňa/145. stupeňa/146. stupeňa/147. stupeňa/148. stupeňa/149. stupeňa/150. stupeňa/151. stupeňa/152. stupeňa/153. stupeňa/154. stupeňa/155. stupeňa/156. stupeňa/157. stupeňa/158. stupeňa/159. stupeňa/160. stupeňa/161. stupeňa/162. stupeňa/163. stupeňa/164. stupeňa/165. stupeňa/166. stupeňa/167. stupeňa/168. stupeňa/169. stupeňa/170. stupeňa/171. stupeňa/172. stupeňa/173. stupeňa/174. stupeňa/175. stupeňa/176. stupeňa/177. stupeňa/178. stupeňa/179. stupeňa/180. stupeňa/181. stupeňa/182. stupeňa/183. stupeňa/184. stupeňa/185. stupeňa/186. stupeňa/187. stupeňa/188. stupeňa/189. stupeňa/190. stupeňa/191. stupeňa/192. stupeňa/193. stupeňa/194. stupeňa/195. stupeňa/196. stupeňa/197. stupeňa/198. stupeňa/199. stupeňa/200. stupeňa/201. stupeňa/202. stupeňa/203. stupeňa/204. stupeňa/205. stupeňa/206. stupeňa/207. stupeňa/208. stupeňa/209. stupeňa/210. stupeňa/211. stupeňa/212. stupeňa/213. stupeňa/214. stupeňa/215. stupeňa/216. stupeňa/217. stupeňa/218. stupeňa/219. stupeňa/220. stupeňa/221. stupeňa/222. stupeňa/223. stupeňa/224. stupeňa/225. stupeňa/226. stupeňa/227. stupeňa/228. stupeňa/229. stupeňa/230. stupeňa/231. stupeňa/232. stupeňa/233. stupeňa/234. stupeňa/235. stupeňa/236. stupeňa/237. stupeňa/238. stupeňa/239. stupeňa/240. stupeňa/241. stupeňa/242. stupeňa/243. stupeňa/244. stupeňa/245. stupeňa/246. stupeňa/247. stupeňa/248. stupeňa/249. stupeňa/250. stupeňa/251. stupeňa/252. stupeňa/253. stupeňa/254. stupeňa/255. stupeňa/256. stupeňa/257. stupeňa/258. stupeňa/259. stupeňa/260. stupeňa/261. stupeňa/262. stupeňa/263. stupeňa/264. stupeňa/265. stupeňa/266. stupeňa/267. stupeňa/268. stupeňa/269. stupeňa/270. stupeňa/271. stupeňa/272. stupeňa/273. stupeňa/274. stupeňa/275. stupeňa/276. stupeňa/277. stupeňa/278. stupeňa/279. stupeňa/280. stupeňa/281. stupeňa/282. stupeňa/283. stupeňa/284. stupeňa/285. stupeňa/286. stupeňa/287. stupeňa/288. stupeňa/289. stupeňa/290. stupeňa/291. stupeňa/292. stupeňa/293. stupeňa/294. stupeňa/295. stupeňa/296. stupeňa/297. stupeňa/298. stupeňa/299. stupeňa/300. stupeňa/301. stupeňa/302. stupeňa/303. stupeňa/304. stupeňa/305. stupeňa/306. stupeňa/307. stupeňa/308. stupeňa/309. stupeňa/310. stupeňa/311. stupeňa/312. stupeňa/313. stupeňa/314. stupeňa/315. stupeňa/316. stupeňa/317. stupeňa/318. stupeňa/319. stupeňa/320. stupeňa/321. stupeňa/322. stupeňa/323. stupeňa/324. stupeňa/325. stupeňa/326. stupeňa/327. stupeňa/328. stupeňa/329. stupeňa/330. stupeňa/331. stupeňa/332. stupeňa/333. stupeňa/334. stupeňa/335. stupeňa/336. stupeňa/337. stupeňa/338. stupeňa/339. stupeňa/340. stupeňa/341. stupeňa/342. stupeňa/343. stupeňa/344. stupeňa/345. stupeňa/346. stupeňa/347. stupeňa/348. stupeňa/349. stupeňa/350. stupeňa/351. stupeňa/352. stupeňa/353. stupeňa/354. stupeňa/355. stupeňa/356. stupeňa/357. stupeňa/358. stupeňa/359. stupeňa/360. stupeňa/361. stupeňa/362. stupeňa/363. stupeňa/364. stupeňa/365. stupeňa/366. stupeňa/367. stupeňa/368. stupeňa/369. stupeňa/370. stupeňa/371. stupeňa/372. stupeňa/373. stupeňa/374. stupeňa/375. stupeňa/376. stupeňa/377. stupeňa/378. stupeňa/379. stupeňa/380. stupeňa/381. stupeňa/382. stupeňa/383. stupeňa/384. stupeňa/385. stupeňa/386. stupeňa/387. stupeňa/388. stupeňa/389. stupeňa/390. stupeňa/391. stupeňa/392. stupeňa/393. stupeňa/394. stupeňa/395. stupeňa/396. stupeňa/397. stupeňa/398. stupeňa/399. stupeňa/400. stupeňa/401. stupeňa/402. stupeňa/403. stupeňa/404. stupeňa/405. stupeňa/406. stupeňa/407. stupeňa/408. stupeňa/409. stupeňa/410. stupeňa/411. stupeňa/412. stupeňa/413. stupeňa/414. stupeňa/415. stupeňa/416. stupeňa/417. stupeňa/418. stupeňa/419. stupeňa/420. stupeňa/421. stupeňa/422. stupeňa/423. stupeňa/424. stupeňa/425. stupeňa/426. stupeňa/427. stupeňa/428. stupeňa/429. stupeňa/430. stupeňa/431. stupeňa/432. stupeňa/433. stupeňa/434. stupeňa/435. stupeňa/436. stupeňa/437. stupeňa/438. stupeňa/439. stupeňa/440. stupeňa/441. stupeňa/442. stupeňa/443. stupeňa/444. stupeňa/445. stupeňa/446. stupeňa/447. stupeňa/448. stupeňa/449. stupeňa/450. stupeňa/451. stupeňa/452. stupeňa/453. stupeňa/454. stupeňa/455. stupeňa/456. stupeňa/457. stupeňa/458. stupeňa/459. stupeňa/460. stupeňa/461. stupeňa/462. stupeňa/463. stupeňa/464. stupeňa/465. stupeňa/466. stupeňa/467. stupeňa/468. stupeňa/469. stupeňa/470. stupeňa/471. stupeňa/472. stupeňa/473. stupeňa/474. stupeňa/475. stupeňa/476. stupeňa/477. stupeňa/478. stupeňa/479. stupeňa/480. stupeňa/481. stupeňa/482. stupeňa/483. stupeňa/484. stupeňa/485. stupeňa/486. stupeňa/487. stupeňa/488. stupeňa/489. stupeňa/490. stupeňa/491. stupeňa/492. stupeňa/493. stupeňa/494. stupeňa/495. stupeňa/496. stupeňa/497. stupeňa/498. stupeňa/499. stupeňa/500. stupeňa/501. stupeňa/502. stupeňa/503. stupeňa/504. stupeňa/505. stupeňa/506. stupeňa/507. stupeňa/508. stupeňa/509. stupeňa/510. stupeňa/511. stupeňa/512. stupeňa/513. stupeňa/514. stupeňa/515. stupeňa/516. stupeňa/517. stupeňa/518. stupeňa/519. stupeňa/520. stupeňa/521. stupeňa/522. stupeňa/523. stupeňa/524. stupeňa/525. stupeňa/526. stupeňa/527. stupeňa/528. stupeňa/529. stupeňa/530. stupeňa/531. stupeňa/532. stupeňa/533. stupeňa/534. stupeňa/535. stupeňa/536. stupeňa/537. stupeňa/538. stupeňa/539. stupeňa/540. stupeňa/541. stupeňa/542. stupeňa/543. stupeňa/544. stupeňa/545. stupeňa/546. stupeňa/547. stupeňa/548. stupeňa/549. stupeňa/550. stupeňa/551. stupeňa/552. stupeňa/553. stupeňa/554. stupeňa/555. stupeňa/556. stupeňa/557. stupeňa/558. stupeňa/559. stupeňa/560. stupeňa/561. stupeňa/562. stupeňa/563. stupeňa/564. stupeňa/565. stupeňa/566. stupeňa/567. stupeňa/568. stupeňa/569. stupeňa/570. stupeňa/571. stupeňa/572. stupeňa/573. stupeňa/574. stupeňa/575. stupeňa/576. stupeňa/577. stupeňa/578. stupeňa/579. stupeňa/580. stupeňa/581. stupeňa/582. stupeňa/583. stupeňa/584. stupeňa/585. stupeňa/586. stupeňa/587. stupeňa/588. stupeňa/589. stupeňa/590. stupeňa/591. stupeňa/592. stupeňa/593. stupeňa/594. stupeňa/595. stupeňa/596. stupeňa/597. stupeňa/598. stupeňa/599. stupeňa/600. stupeňa/601. stupeňa/602. stupeňa/603. stupeňa/604. stupeňa/605. stupeňa/606. stupeňa/607. stupeňa/608. stupeňa/609. stupeňa/610. stupeňa/611. stupeňa/612. stupeňa/613. stupeňa/614. stupeňa/615. stupeňa/616. stupeňa/617. stupeňa/618. stupeňa/619. stupeňa/620. stupeňa/621. stupeňa/622. stupeňa/623. stupeňa/624. stupeňa/625. stupeňa/626. stupeňa/627. stupeňa/628. stupeňa/629. stupeňa/630. stupeňa/631. stupeňa/632. stupeňa/633. stupeňa/634. stupeňa/635. stupeňa/636. stupeňa/637. stupeňa/638. stupeňa/639. stupeňa/640. stupeňa/641. stupeňa/642. stupeňa/643. stupeňa/644. stupeňa/645. stupeňa/646. stupeňa/647. stupeňa/648. stupeňa/649. stupeňa/650. stupeňa/651. stupeňa/652. stupeňa/653. stupeňa/654. stupeňa/655. stupeňa/656. stupeňa/657. stupeňa/658. stupeňa/659. stupeňa/660. stupeňa/661. stupeňa/662. stupeňa/663. stupeňa/664. stupeňa/665. stupeňa/666. stupeňa/667. stupeňa/668. stupeňa/669. stupeňa/670. stupeňa/671. stupeňa/672. stupeňa/673. stupeňa/674. stupeňa/675. stupeňa/676. stupeňa/677. stupeňa/678. stupeňa/679. stupeňa/680. stupeňa/681. stupeňa/682. stupeňa/683. stupeňa/684. stupeňa/685. stupeňa/686. stupeňa/687. stupeňa/688. stupeňa/689. stupeňa/690. stupeňa/691. stupeňa/692. stupeňa/693. stupeňa/694. stupeňa/695. stupeňa/696. stupeňa/697. stupeňa/698. stupeňa/699. stupeňa/700. stupeňa/701. stupeňa/702. stupeňa/703. stupeňa/704. stupeňa/705. stupeňa/706. stupeňa/707. stupeňa/708. stupeňa/709. stupeňa/710. stupeňa/711. stupeňa/712. stupeňa/713. stupeňa/714. stupeňa/715. stupeňa/716. stupeňa/717. stupeňa/718. stupeňa/719. stupeňa/720. stupeňa/721. stupeňa/722. stupeňa/723. stupeňa/724. stupeňa/725. stupeňa/726. stupeňa/727. stupeňa/728. stupeňa/729. stupeňa/730. stupeňa/731. stupeňa/732. stupeňa/733. stupeňa/734. stupeňa/735. stupeňa/736. stupeňa/737. stupeňa/738. stupeňa/739. stupeňa/740. stupeňa/741. stupeňa/742. stupeňa/743. stupeňa/744. stupeňa/745. stupeňa/746. stupeňa/747. stupeňa/748. stupeňa/749. stupeňa/750. stupeňa/751. stupeňa/752. stupeňa/753. stupeňa/754. stupeňa/755. stupeňa/756. stupeňa/757. stupeňa/758. stupeňa/759. stupeňa/760. stupeňa/761. stupeňa/762. stupeňa/763. stupeňa/764. stupeňa/765. stupeňa/766. stupeňa/767. stupeňa/768. stupeňa/769. stupeňa/770. stupeňa/771. stupeňa/772. stupeňa/773. stupeňa/774. stupeňa/775. stupeňa/776. stupeňa/777. stupeňa/778. stupeňa/779. stupeňa/780. stupeňa/781. stupeňa/782. stupeňa/783. stupeňa/784. stupeňa/785. stupeňa/786. stupeňa/787. stupeňa/788. stupeňa/789. stupeňa/790. stupeňa/791. stupeňa/792. stupeňa/793. stupeňa/794. stupeňa/795. stupeňa/796. stupeňa/797. stupeňa/798. stupeňa/799. stupeňa/800. stupeňa/801. stupeňa/802. stupeňa/803. stupeňa/804. stupeňa/805. stupeňa/806. stupeňa/807. stupeňa/808. stupeňa/809. stupeňa/810. stupeňa/811. stupeňa/812. stupeňa/813. stupeňa/814. stupeňa/815. stupeňa/816. stupeňa/817. stupeňa/818. stupeňa/819. stupeňa/820. stupeňa/821. stupeňa/822. stupeňa/823. stupeňa/824. stupeňa/825. stupeňa/826. stupeňa/827. stupeňa/828. stupeňa/829. stupeňa/830. stupeňa/831. stupeňa/832. stupeňa/833. stupeňa/834. stupeňa/835. stupeňa/836. stupeňa/837. stupeňa/838. stupeňa/839. stupeňa/840. stupeňa/841. stupeňa/842. stupeňa/843. stupeňa/844. stupeňa/845. stupeňa/846. stupeňa/847. stupeňa/848. stupeňa/849. stupeňa/850. stupeňa/851. stupeňa/852. stupeňa/853. stupeňa/854. stupeňa/855. stupeňa/856. stupeňa/857. stupeňa/858. stupeňa/859. stupeňa/860. stupeňa/861. stupeňa/862. stupeňa/863. stupeňa/864. stupeňa/865. stupeňa/866. stupeňa/867. stupeňa/868. stupeňa/869. stupeňa/870. stupeňa/871. stupeňa/872. stupeňa/873. stupeňa/874. stupeňa/875. stupeňa/876. stupeňa/877. stupeňa/878. stupeňa/879. stupeňa/880. stupeňa/881. stupeňa/882. stupeňa/883. stupeňa/884. stupeňa/885. stupeňa/886. stupeňa/887. stupeňa/888. stupeňa/889. stupeňa/890. stupeňa/891. stupeňa/892. stupeňa/893. stupeňa/894. stupeňa/895. stupeňa/896. stupeňa/897. stupeňa/898. stupeňa/899. stupeňa/900. stupeňa/901. stupeňa/902. stupeňa/903. stupeňa/904. stupeňa/905. stupeňa/906. stupeňa/907. stupeňa/908. stupeňa/909. stupeňa/910. stupeňa/911. stupeňa/912

Na prvý pohľad je zjavné, že numerické statické vlastnosti systému nemajú zmysel skúmať pre systém, ktorý je nestabilný.

Statické zosilnenie

Uvažujme systém, ktorý nie je nestabilný. Ak študujúc pól systému nie je nulový, potom systém dĺžne prívlastok statický. Stále však máme na mysli dynamický systém, ktorý je daný v tomto prípade prenosovou funkciou systému prvého rádu v tvare (75). Sledujeme je tu možnosť pomeru statického systému prvého rádu, skúska SSIL.

Pre takýto systém je možné určiť jeho statické zosilnenie. Statické zosilnenie je pomer výstupu ku vstupu v ustálenom stave.

V ustálenom stave sa signály nemenia, to znamená, že ich časové derivácie sú nulové. Vitajme si diferenciálnu rovnicu (78). V ustálenom stave je $y(x) = 0$, kde 0 je symbolizuje čas, v ktorom sú všetky signály ustálené, a teda

$$0 = -a_0 y(x) + b_0 y(x) \quad (84)$$

Pomer výstupu ku vstupu je

$$\frac{y(x)}{u(x)} = \frac{b_0}{a_0} \quad (85)$$

Čo je statické zosilnenie systému. Táto hodnota je možná označiť ako samostatný parameter systému, napr. $K = \frac{b_0}{a_0}$.

Konvencia je tiež vo všeobecnosti vyhovovať, že vstup je „jednotkový“, jednoduchý, že $u(x) = 1$ a teda na pôle $y(x) = \frac{b_0}{a_0}$, ale stále sa tým myslí statické zosilnenie systému.

K rovnakej závere príde, ak by sme uvažovali konštantný, ustálený signál na vstupe, a to vo všeobecnosti, teda $u(t) = 1$. To je jednotkový zisk a teda $U(s) = \frac{1}{s}$. Potom

$$Y(s) = \frac{b_0}{s + a_0} \cdot \frac{1}{s} \quad (86)$$

Konečná hodnota tohto obrazu signálu $Y(s)$ je obrazom $y(t)$, je hodnota na, ktorú

$$\lim_{s \rightarrow 0} Y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{b_0}{s + a_0} \cdot \frac{1}{s} = \frac{b_0}{a_0} \cdot \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} = \frac{b_0}{a_0} \cdot \infty = \infty$$

na výstup systému potencionálne ustúpi. S využitím vety o konečnej hodnote:

$$y(x) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot Y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \left(\frac{b_0}{s + a_0} \cdot \frac{1}{s} \right) = \frac{b_0}{a_0} \quad (87a)$$

$$y(x) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{b_0}{s + a_0} \right) = \frac{b_0}{a_0} \quad (87b)$$

$$y(x) = \frac{b_0}{a_0} \quad (87c)$$

Astatiem

Ak je jeden z pólov systému nulový, hovoríme, že systém je astatický („obsahuje astatiem“). Ak príde jeden pól na nulu, hovoríme o astatiem prvého rádu (ak dva póly, potom astatiem druhého rádu, atď.). Prípadom, že obsahuje systém, ktorý nie je nestabilný. Nulový pól znamená, samozrejme, že jeho reálna časť je nulová. To znamená, že systém je na hranici stability. Takýto prípad môžeme pomenovať v tomto prípade ako astatický systém prvého rádu, skúska ASIL.

V tomto prípade máme len jeden pól a ten je nulový vtedy ak $a_0 = 0$. V takomto prípade nie je možné určiť hodnotu $y(x)$. Ak by sme uvažovali vstupný signál $u(t) = 1$, potom výstupná veličina $y(t)$ rastie dokonalou, neurčitá sa. Je to vidieť najmä z diferenciálnej rovnice (78) pri $a_0 = 0$:

$$\dot{y}(t) = b_0 u(t) \quad (88)$$

Je zjavné, že zmena signálu $y(t)$, čo je $\dot{y}(t)$, bude rovná len ak $u(t)$ bude nulový signál, inak sa bude $y(t)$ vo všeobecnosti líšiť svojím $b_0 = 1$, máme

$$A(s) = \frac{1}{s} \quad (89)$$

Čo je prenosová funkcia integrácie. Integrátor systém prvého rádu s astatiem prvého rádu.

6.1 Prevodová charakteristika

V kontexte statických vlastností systému má vo všeobecnosti význam hovoriť o prevodovej charakteristike systému. Prevodová charakteristika je náhodou ustálených hodnôt výstupného signálu systému od ustálených hodnôt vstupného signálu systému.

Je zjavné, že prevodová charakteristika má týka systémové s prívlastkom statické, teda takých, ktoré nie sú astatické.

V prípade lineárnych systémov je prevodová charakteristika priamka a bez straty na všeobecnosť môžeme uvažovať, že prevádzať začiatkom súradnicového systému.

Skoč praveky je daný statickým zosilnením systému, ak použijeme výšne uvedené, sklon prevodovej charakteristiky lineárneho systému je $K = \frac{b_0}{a_0}$.

6.1.7 Impulzná charakteristika

Impulzná charakteristika je odpoveď systému na Diracovo napätie.

Diracovo napätie je impulz, ktorý má jednotkovú plochu a jeho šírka je nekonečne malá. Inými slovami ide o impulz, ktorý je nulový pre $t \neq 0$ a má jednotkovú plochu pre $t = 0$. Laplaceov obraz Diracovho impulzu je $U(s) = 1$.

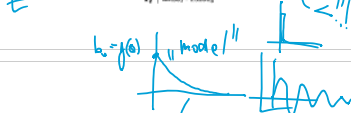
Koľko máme k dispozícii matematický opis systému, impulznú charakteristiku môžeme nájsť analyticky. Prenosová funkcia systému prvého rádu je (75). Laplaceov obraz vstupného signálu je $U(s) = 1$. Laplaceov obraz výstupného signálu potom bude

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{b_0}{s + a_0} \cdot 1 \quad (90a)$$

$$Y(s) = \frac{b_0}{s + a_0} \quad (90b)$$

$$Y(s) = b_0 \cdot \frac{1}{s + a_0} \quad (90c)$$

17 | MS&S - ZŠ&MS



Originál tohto obrazu potom je

$$y(t) = b_0 e^{-a_0 t} \quad (91)$$

Čo je časová funkcia, ktorá je analytickým vyjadrením impulznej charakteristiky systému.

Je zjavné, že pre impulznú charakteristiku (ICH) je možné rozlíšiť kvalitatívne rôzne prípady určiť v tomto prípade jediný pól systému. Pól systému je $s_1 = -a_0$.

V kontexte vyššie uvedeného možno rozlíšiť prípady: statický systém prvého rádu (SSIL), astatický systém prvého rádu (ASIL) a nestabilný systém.

ICH SSIL

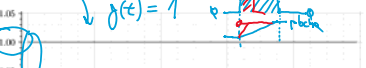
Časová funkcia (91) bude impulznou charakteristikou statického systému prvého rádu ak $a_0 > 0$. Zvoľme $a_0 = 1$ a napríklad $b_0 = 1$. Na nasledujúcom obrázku je graf výslednej časovej funkcie.



Obr. 5: Impulzná charakteristika statického systému prvého rádu pre $a_0 = 1$ a $b_0 = 1$

ICH ASIL

Časová funkcia (91) bude impulznou charakteristikou astatického systému prvého rádu ak $a_0 = 0$. Na nasledujúcom obrázku je graf výslednej časovej funkcie.



Obr. 6: Impulzná charakteristika statického systému prvého rádu pre $a_0 = 0$ a $b_0 = 1$

ICH nestabilného systému prvého rádu

Pre úplnosť uvedieme aj prípad, keď $a_0 < 0$, teda systém je nestabilný. Zvoľme $a_0 = -1$. Na nasledujúcom obrázku je graf výslednej časovej funkcie.



Obr. 7: Impulzná charakteristika statického systému prvého rádu pre $a_0 = -1$ a $b_0 = 1$

18 | MS&S - ZŠ&MS

Handwritten notes and diagrams. A block diagram shows a system with input u and output y . The transfer function is $G(s) = \frac{b_0}{s + a_0}$. The input is $u = k \cdot s + t$ and $u = 1 \cdot s + 0$. The output is $y(s) = \frac{1}{s}$. The notes include "dej... G(s)", "ide + f. k. a. c. s", "model", "G(s)", "k. s. p. 2", "model", "hypotet", "j(s)".

Handwritten notes and diagrams. A block diagram shows a system with input u and output y . The transfer function is $G(s) = \frac{b_0}{s + a_0}$. The input is $u = k \cdot s + t$ and $u = 1 \cdot s + 0$. The output is $y(s) = \frac{1}{s}$. The notes include "dej... G(s)", "ide + f. k. a. c. s", "model", "G(s)", "k. s. p. 2", "model", "hypotet", "j(s)".

charakteristického polynómu, s pólmi systému priamo súvisia fundamentálne riešenia dĺf. rovnice. Fundamentálne riešenia sú dané pólmi systému. Iný termín pre fundamentálne riešenia je mód dynamického systému.

Z hľadiska stability dynamického systému hovoríme, že systém je stabilný ak sú všetky póly systému v ľavej polovici komplexnej roviny. Inými slovami, systém je stabilný ak všetky čísla vektových pólov sú záporné. Pre stabilizáciu systému samozrejme myslíme stabilizáciu rovnovážneho stavu daného lineárneho dynamického systému.

Korene polynómu $B(s)$ sa nazývajú nuly prenosovej funkcie (nuly lineárneho dynamického systému).

Nuly systému súvisia produkčným so vstupným signálom systému. Širšia interpretácia prenosovej funkcie, ako vieme, sa možnosť skúmania vplyvu exponenciálneho vstupného signálu $u(t) = e^{st}$ (s je komplexné číslo) na výstup systému. Zjednodušene povedané, nuly majú zodpovedajúce vstupné exponenciálne signály. Nepresnosť sa na výstup. Poloha nuly v komplexnej rovine určuje signál e^{st} , ktorý je ziskový a nepresnosť sa na výstup (napríklad výstupný vektor).

V súvislosti s prenosovými funkciami, ktoré majú tvar

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad (92)$$

je užitočné využiť veta o konečnej hodnote riešenia. Ak máme k dispozícii obraz riešenia diferenciálnej rovnice, teda obraz výstupného signálu systému $Y(s)$, potom veta o konečnej hodnote hovorí, že konečná hodnota výstupného signálu $y(t)$, označuje túto hodnotu symbolom $y(x)$, je daná ako

$$y(x) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot Y(s) \quad (93)$$

Napríklad, pokiaľ prenosová funkcia (92) a napríklad výstupný systém je jednotkový zisk, ktorého Laplaceov obraz je $U(s) = 1/s$. Potom obraz výstupného signálu je

$$Y(s) = G(s)U(s) = \left(\frac{b_0}{a_0 + s} \right) \cdot \frac{1}{s} \quad (94)$$

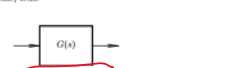
Konečná hodnota tohto signálu bude

$$y(x) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot Y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \left(\frac{b_0}{a_0 + s} \cdot \frac{1}{s} \right) = \frac{b_0}{a_0} \quad (95a)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{b_0}{a_0 + s} \right) = \frac{b_0}{a_0} \quad (95b)$$

6 Algebra prenosových funkcií

Prenosová funkcia je nástroj pre matematické modelovanie lineárnych časovo-invariantných dynamických systémov. Prenosová funkcia je možné vidieť aj ako blok v blokovej schéme, teda:



Obr. 1: Prenosová funkcia ako jeden blok v blokovej schéme

Manipulácia s takýmito blokmi je jedine s aplikácií algebry prenosových funkcií. V tomto nuzpe je potrebné uvedieť tri základné situácie. Sériové napájanie blokov, paralelné napájanie blokov a spätnoväzbové napájanie blokov.

12 | MS&S - ZŠ&MS

6.1 Sériové zapojenie blokov

Uvažujme systém, ktorý je tvorený kaskádou kombináciou dvoch podsystemov. Prenosové funkcie podsystemov sú $G_1(s)$ a $G_2(s)$. Vstup prvého podsystemu je zároveň vstupom celkového systému. Výstup prvého podsystemu je vstupom druhého podsystemu. Výstup druhého podsystemu je zároveň výstupom celkového systému. Ide o sériové zapojenie podsystemov.



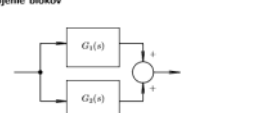
Obr. 2: Sériové napájanie blokov

Hľadíme prenosovú funkciu celkového systému, označme ju $G(s)$. Pre sériové napájanie podsystemov platí

$$G(s) = G_1(s) G_2(s) \quad (96)$$

Výsledná prenosová funkcia teda získame súčinom prenosových funkcií podsystemov.

6.2 Paralelné zapojenie blokov



Obr. 3: Paralelné napájanie blokov

Pri paralelnom napájaní podsystemov s prenosovými funkciami $G_1(s)$ a $G_2(s)$ je výstupom celkového systému jednoducho súčet výstupov podsystemov. Pre prenosovú funkciu celkového systému $G(s)$ platí

$$G(s) = G_1(s) + G_2(s) \quad (97)$$

6.3 Spätnoväzbové zapojenie blokov

Spätnoväzbové napájanie blokov je znázornené na obr. 4. Pre úplnosť orientácia je vstup celkového systému označovaný ako u a výstup celkového systému ako y . Signál y je vstupom spätnoväzbového podsystemu $G_2(s)$. Takisto spätný vektor je odčítaný (ide o zápornú spätnú väzbu) od vstupného signálu u . Vzniká odchýlkový signál e , ktorý je vstupom podsystemu $G_1(s)$.

$$G(s) = G_1(s) + G_2(s) \quad (98)$$

13 | MS&S - ZŠ&MS

Python skript pro vykreslení grafů inputních charakteristik

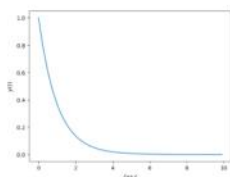
V této části je prezentovaný skript v programovacím jazyce Python, pomocí kterého je možné nakreslit výše uvedené grafy inputních charakteristik. Skript je prezentovaný formou Jupyter notebooku a v následujícím si rozebereme jednotlivé body body notebooku.

Výpis kódu 1: Soubor `MSD07_32018.ipynb` cell:02

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 # Parametry
5 b_0 = 1
6 a_0 = 1
7
8 # Vypočítáme hodnoty na x-ové osy
9 plotData_x = np.arange(0, 10, 0.1)
10
11 # Vypočítat hodnoty na y-ové osy v závislosti časové funkce
12 plotData_y = b_0 * np.exp(-a_0 * plotData_x)
```

Výpis kódu 2: Soubor `MSD07_32018.ipynb` cell:03

```
1 # Kreslení grafu
2 plt.plot(plotData_x, plotData_y)
3 plt.xlabel('čas [s]')
4 plt.ylabel('y(t)')
5 plt.show()
```



Výpis kódu 3: Soubor `MSD07_32018.ipynb` cell:04

```
1 # Ověření pro klíčový text
2 fileName = 'ICD_A018'
3 fileNameLen = 0
4 exec(open('../figjobs/MSD07_figJob_01.py', encoding='utf-8').read())
```

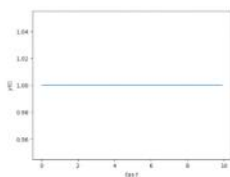
Výpis kódu 4: Soubor `MSD07_32018.ipynb` cell:05

```
1 # Změna hodnoty parametru a_0
2 a_0 = 0
3
4 # Vypočítat hodnoty na y-ové osy v závislosti časové funkce
5 plotData_y = b_0 * np.exp(-a_0 * plotData_x)
```

19 | MSD07 - ZS2023

Výpis kódu 5: Soubor `MSD07_32018.ipynb` cell:06

```
1 # Kreslení grafu
2 plt.plot(plotData_x, plotData_y)
3 plt.xlabel('čas [s]')
4 plt.ylabel('y(t)')
5 plt.show()
```



Výpis kódu 6: Soubor `MSD07_32018.ipynb` cell:07

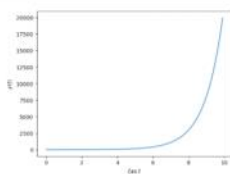
```
1 # Ověření pro klíčový text
2 fileName = 'ICD_A018'
3 fileNameLen = 0
4 exec(open('../figjobs/MSD07_figJob_01.py', encoding='utf-8').read())
```

Výpis kódu 7: Soubor `MSD07_32018.ipynb` cell:08

```
1 # Změna hodnoty parametru a_0
2 a_0 = -1
3
4 # Vypočítat hodnoty na y-ové osy v závislosti časové funkce
5 plotData_y = b_0 * np.exp(-a_0 * plotData_x)
```

Výpis kódu 8: Soubor `MSD07_32018.ipynb` cell:09

```
1 # Kreslení grafu
2 plt.plot(plotData_x, plotData_y)
3 plt.xlabel('čas [s]')
4 plt.ylabel('y(t)')
5 plt.show()
```



20 | MSD07 - ZS2023

```

% Typová úloha 8
% Soubor m207_02018.ipynb cell:10
% Ověření pro klasický test.
figName = 'ICH_sust02018'
figResName = '2'
save_fig('figJob', figJob_01.py', encoding='utf-8').read()

```

MATLAB: Control System Toolbox

S využitím Control System Toolbox v MATLABu je možná simulace ICH přikl. 10. Srovnáním, jak je popsána v předchozím textu, lze zjistit, že je možná v tomto toolboxu přímo v formě přenosové funkce přikl. 10. Tedy:

```

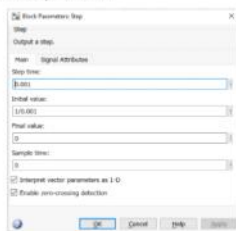
G = tf(1, [1, 1])
impz(G)

```

přímou příkazem `impz(G)` přímo vykreslí aj. obrázek.

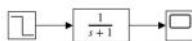
MATLAB: Simulink

V Simulinku je například možná simulace aproksimace Diracova impulsu pomocí bloku Step s následujícím nastavením:



Obr. 8: Nastavení bloku Step.

Block je schéma schéma:



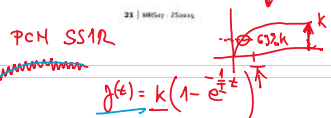
Obr. 9: Simulační schéma pro ICH SSIR

7.1.8 Přechodová charakteristika

Přechodová charakteristika je odezva systému na jednotkový skok.

Jednotkový skok je signál, který je nulový pro $t < 0$ a má jednotkovou výšku pro $t \geq 0$. Lze o skoku uvažovat i v čase $t = 0$. Laplaceova transformace jednotkového skoku je $U(s) = \frac{1}{s}$.

Kroffe máme k dispozici matematický opis systému, přechodová charakteristika může být analyticky. Přenosová funkce systému prvního řádu je (77). Laplaceova



obraz vstupního signálu je $U(s) = \frac{1}{s}$. Laplaceova transformace výstupního signálu potom bude

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{b_0}{s} \frac{1}{s + a_0} \quad (92a)$$

$$Y(s) = \frac{b_0}{s(s + a_0)} \quad (92b)$$

Pro hledání originálu tohoto obrazu je výhodné přepsat tento výraz na parciální zlomky

$$\frac{b_0}{s(s + a_0)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + a_0} \quad (93a)$$

$$b_0 = A(s + a_0) + Bs \quad (93b)$$

kde A a B sd. koeficienty. Uvedené platí pro každou hodnotu s . Pro $s = 0$ dostaneme

$$b_0 = Aa_0 \quad (94a)$$

$$A = \frac{b_0}{a_0} \quad (94b)$$

Pro $s = -a_0$ dostaneme

$$b_0 = B(-a_0) \quad (95a)$$

$$B = -\frac{b_0}{a_0} \quad (95b)$$

Obraz výstupního signálu je tedy

$$Y(s) = \frac{b_0}{a_0} \frac{1}{s} - \frac{b_0}{a_0} \frac{1}{s + a_0} \quad (96)$$

a jeho originál je

$$y(t) = \frac{b_0}{a_0} \left(1 - e^{-a_0 t} \right) \quad (97a)$$

$$y(t) = \frac{b_0}{a_0} \left(1 - e^{-a_0 t} \right) \quad (97b)$$

co je časová funkce, která je analytickým vyjádřením přechodové charakteristiky systému. V uvedeném smyslu předpokládáme, že $a_0 \neq 0$.

Pro $a_0 = 0$, potom obraz výstupního signálu je

$$Y(s) = \frac{b_0}{s^2} \quad (98a)$$

$$Y(s) = \frac{b_0}{s^2} \quad (98b)$$

a jeho originál je

$$y(t) = b_0 t \quad (99)$$

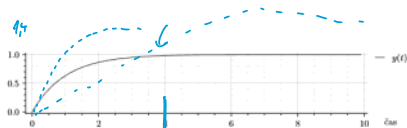
co je časová funkce, která je analytickým vyjádřením přechodové charakteristiky systému s $a_0 = 0$.

Je zřejmé, že pro přechodovou charakteristiku (PCH) je možné rozlišovat kvalitativně různé případy určení v soustavě podle počtu systémů. Při systému je $a_0 = -a_0$.

V kontextu vyššího uvedeného možno rozlišovat případy: statický systém prvního řádu (SSIR), astatický systém prvního řádu (ASIR) a nestabilní systém.

PCH SSIR

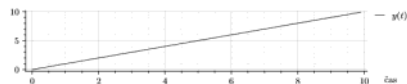
Časová funkce (97b) bude přechodovou charakteristikou statického systému prvního řádu s $a_0 > 0$. Zjednodušíme-li a například $b_0 = 1$. Na následujícím obrázku je graf výsledné časové funkce



Obr. 10: Prechodová charakteristika statického systému prvního řádu pro $a_0 = 1$ a $b_0 = 1$

PCH ASIR

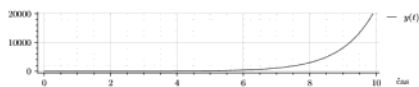
Časová funkce (39) bude prechodovou charakteristikou statického systému prvního řádu ak $a_0 = 0$. Na následujícím obrázku je graf výsledné časové funkce



Obr. 11: Prechodová charakteristika statického systému prvního řádu pro $a_0 = 0$ a $b_0 = 1$

PCH nestabilního systému prvního řádu

Pro úplnost uvedme si případ, keď $a_0 < 0$, tedy systém je nestabilní. Zvolíme $a_0 = -1$. Na následujícím obrázku je graf výsledné časové funkce



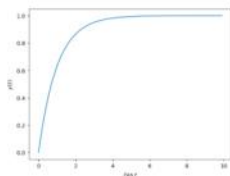
Obr. 12: Prechodová charakteristika statického systému prvního řádu pro $a_0 = -1$ a $b_0 = 1$

Python skript pro vykreslování grafů prechodových charakteristik

V této části je prezentován skript v programovacím jazyku Python, pomocí kterého je možné makrosním výšle uvedené grafy prechodových charakteristik. Skript je prezentovaný formou Jupyter notebooku a v následujícím si rozebereme jednotlivé řádky notebooku.

```
Výpis kódu 10: Soubor MS07_PCH1A.ipynb cell:03
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 # Parametry
5 b_0 = 1
6 a_0 = 1
7
8 # Vytvoření bodů na x-ové osi
9 plotData_x = np.arange(0, 10, 0.1)
10
11 # Výpočet hodnot na y-ové osi v závislosti na časové funkci
12 plotData_y = (b_0/a_0) * (1 - np.exp(-a_0 * plotData_x))
```

```
Výpis kódu 11: Soubor MS07_PCH1A.ipynb cell:03
1 # Vykreslení grafu
2 plt.plot(plotData_x, plotData_y)
3 plt.xlabel('čas [s]')
4 plt.ylabel('y(t)')
5 plt.show()
```

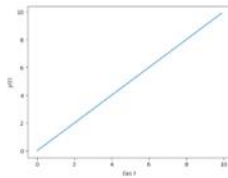


```
Výpis kódu 12: Soubor MS07_PCH1A.ipynb cell:04
1 # Otvorení pro kódy text
2 fileName = 'PCH_S01A'
3 figName = 0
4 exec(open('../figjob/MS07_figjob_01.py').read())
```

```
Výpis kódu 13: Soubor MS07_PCH1A.ipynb cell:06
1 # Změna hodnoty parametru a_0
2 a_0 = 0
3
4 # Výpočet hodnot na y-ové osi v závislosti na časové funkci
5 plotData_y = b_0 * plotData_x
```

Výpis kódu 16: Soubor MMS07_PCH18.ipynb cell:06

```
# Kreslenie grafu
plt.plot(plotData_x, plotData_y)
plt.xlabel('čas [s]')
plt.ylabel('y(t) [m]')
plt.show()
```



Výpis kódu 16: Soubor MMS07_PCH18.ipynb cell:07

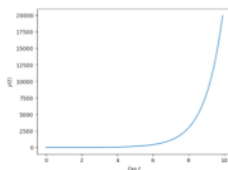
```
# Otvorenie pre hlavny text
figname = 'PCH_A018'
fignamehus = '0'
exec(open('../figjobs/MMS07_figjob_01.py', encoding='utf-8').read())
```

Výpis kódu 16: Soubor MMS07_PCH18.ipynb cell:08

```
# Nastavenie parametrov
a, b = -1
# Vypisat hodnoty na x-ovej osi + sprava danej funkcie
plotData_x = (b, 0/a, 0) * 10 - np.exp(-a, 0 + plotData_x)
```

Výpis kódu 17: Soubor MMS07_PCH18.ipynb cell:09

```
# Kreslenie grafu
plt.plot(plotData_x, plotData_y)
plt.xlabel('čas [s]')
plt.ylabel('y(t) [m]')
plt.show()
```



Výpis kódu 18: Soubor MMS07_PCH18.ipynb cell:10

```
# Otvorenie pre hlavny text
figname = 'PCH_nastavil8'
fignamehus = '0'
exec(open('../figjobs/MMS07_figjob_01.py', encoding='utf-8').read())
```

MATLAB: Control System Toolbox

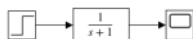
S využitím Control System Toolbox v MATLABe je možná riedka PCH priamo step(). Samozrejme, najprv je potrebné zadefinovať systém, ktorého PCH nás zaujíma, čo je možná v tomto bodisku priamo vo forme prenosovej funkcie priamo step(). Teda:

```
G = tf(1, [1, 1]);
step(G)
```

prítom príkaz step() na postará o časové nastavenie simulácie (napríklad vhodná nastavenie pre ODE solver step) a priamo vykreslí aj obehú.

MATLAB: Simulink

Simulink priamo ponúka prácu s prenosovými funkciami a teda na síťovisku vykoná prevod do opisu v stacionárnej priamo a vykoná numerickú simuláciu. Pre tento prípad by schéma v simulinku vyzerala nasledovne:



Obr. 13: Simulink schéma pre PCH SSI8

V bloku step je v tomto prípade nastavený skok v čase 0 a hodnoty 0 na hodnotu 1.

7.2 Systém nultého rádu

Stupeň polynómu $A(s)$ môže byť aj $n = 0$. Potom hovoríme o systéme nultého rádu. Prenosová funkcia v tomto prípade je (aj vzhľadom na kanonizáciu, aj vzhľadom na pozitívny reálnosť)

$$G(s) = \frac{a_0}{a_0} \quad (100)$$

$A(s) = a_0$
 $n=0$



Hovorí v tomto prípade o dynamike v podstate nie je možná, ide tu vo všeobecnosti o nultý rádu, ktorého statické zosilnenie je

$$\frac{p(\infty)}{u(\infty)} = \frac{a_0}{a_0} \quad (101)$$

Takýto systém má len statické vlastnosti (statické zosilnenie - sklon prevodovej charakteristiky). O dynamických vlastnostiach, v zmysle ustátenia, stability a prevodovej charakteristiky tu nemôžeme hovoriť.

7.3 Systém druhého rádu

7.3.1 Prenosová funkcia

Ak stupeň polynómu $A(s)$ je $n = 2$, potom hovoríme, že systém je druhého rádu. Pre kanonizáciu a aj pre pozitívnu reálnosť tu urobíme $m < n$ tak vo všeobecnosti

$$G(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \quad m=1, n=2 \quad (102)$$

kde je $A(s)$ bez straty na všeobecnosti uvedený ako monický polynóm. Obdobne, prenosovou funkciu druhého rádu sú

$$G(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \quad m=0 \quad (103a)$$

$$G(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \quad m=1 \quad (103b)$$

7.3.2 Diferenciálna rovnica

Nech je systém daný v tvare prenosovej funkcie

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad (104)$$

kde $Y(s)$ je Laplaceov obraz výstupného signálu a $U(s)$ je Laplaceov obraz vstupného signálu. Nech cieľom je prejsť do tvaru diferenciálnej rovnice, potom

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} U(s) \quad (105a)$$

$$(s^2 + a_1 s + a_0)Y(s) = (b_1 s + b_0)U(s) \quad (105b)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad (104)$$

kde $Y(s)$ je Laplaceov obraz výstupního signálu a $U(s)$ je Laplaceov obraz vstupního signálu. Nechť chceme je přepsat do tvaru diferenciálního rovnice

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{b_1s + b_0}{s^2 + a_1s + a_0}U(s) \quad (105a)$$

$$(s^2 + a_1s + a_0)Y(s) = (b_1s + b_0)U(s) \quad (105b)$$

$$s^2Y(s) + a_1sY(s) + a_0Y(s) = b_1sU(s) + b_0U(s) \quad (105c)$$

$$s^2Y(s) = -a_1sY(s) - a_0Y(s) + b_1sU(s) + b_0U(s) \quad (105d)$$

a tedy diferenciální rovnice je

$$\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = b_1\dot{u}(t) + b_0u(t) \quad (106)$$

Přepíšeme opačným směrem, a dle rovnice na přenosové funkce, je samozřejmě standardně aplikujeme Laplaceov transformaci na rovnici (106) při nulových počátečních podmínkách.

7-3-3 | Opis systému v stavovém prostoru

V stavovém prostoru je potřebná matici stavový vektor $x(t) \in \mathbb{R}^n$. Vo výšednosti je opis lineárního systému v stavovém prostoru v tvaru

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \quad (107a)$$

$$y(t) = c^T x(t) \quad (107b)$$

kde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ a $c \in \mathbb{R}^n$ sú matice a vektory a ide o parametre systému.

Při stanovení vektora $x(t)$ ide vo výšednosti o přepis diferenciální rovnice vyššího řádu na soustavu rovnic prvního řádu. Vznikají tak nové signály, které sú označovány v soustavě rovnic prvního řádu a sú prvky maticového vektora $x(t)$.

27 | 1855eq - Z50002

$$\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0x = b_1\dot{u} + b_0u \Rightarrow \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -a_1x_2 - a_0x_1 + b_1u + b_0u$$

$$\dot{x} = Ax + bu$$

$$y = c^T x$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Převod z přenosové funkce na stavový opis nie je jednoznačný. Záleží na voľbe stavových veličín (stavového priestoru). Tu si dovolíme uviesť voľbu stavových veličín tak, že výsledkom je opis systému v tzv. normálnej forme riaditeľnosti.

Přenosová funkcia spĺňať, ktorou sa tu nebudeme zaoberať, je v tvare:

$$Y(s) = \frac{b_1s + b_0}{s^2 + a_1s + a_0} \quad (108)$$

Otvárka je ako táto přenosová funkcia převzatá má opis v stavovom priestore - ako rozlíši stavové veličiny.

Pre prípad, keď je v čitateli len konštanta (systém nemá nulový), je voľba stavových veličín analýze intuitívna. Preto napíšme přenosovú funkciu (108) ako dve přenosové funkcie v sérii nasledovne:

$$G = G_1 G_2, \quad G_1 = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + a_1s + a_0} \rightarrow x_1 = b_1 + b_0 u, \quad G_2 = \frac{Y(s)}{X_1(s)} = b_1s + b_0 \rightarrow \dot{x}_2 = c^T x$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Y(s)}{X_1(s)} \frac{X_1(s)}{U(s)} \quad (11)$$

alebo explicitnejšie:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = (b_1s + b_0) \frac{1}{s^2 + a_1s + a_0} \quad (112)$$

Mimochodom, přenosová funkcia (112) je v matematického hľadiska korektná skôr než (112d) je polyčíslo stupňa 1 a v menovateľ polyčíslo stupňa 0, čo napríklad znamená, že ide o nekonečný systém a teda sama o sebe by přenosová funkcia (112) nebola vhodným modelom reálneho fyzikálneho systému.

Prvú přenosovú funkciu (109) možno prepísať na diferenciálnu rovnici druhého řádu v tvare:

$$\ddot{x}_1(t) + a_1\dot{x}_1(t) + a_0x_1(t) = u(t) \quad (113)$$

Táto je možná prepísať na soustavu diferenciálních rovnic prvního řádu - voľbou stavových veličín. Například nech

$$x_1(t) = x(t) \quad (114)$$

kde $x_1(t)$ je prvá stavová veličina. Potom platí

$$\dot{x}_2(t) = \dot{x}_1(t) \quad (115)$$

Druhá stavová veličina zvolíme

$$x_2(t) = \dot{x}_1(t) \quad (116)$$

a teda

$$\dot{x}_2(t) = \dot{x}_2(t) \quad (117)$$

V tomto bode môžeme ľahko písať

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (118)$$

Tu je prvá diferenciálna rovnica! Obsahuje len novo zavedené stavové veličiny ($x_1(t)$ a $x_2(t)$). Druhá diferenciálna rovnica je vlastne (117). Avšak, vieme signál $\dot{x}_2(t)$ vyjadriť len pomocou novo zavedených stavových veličín? Vieme. Z (113) je zrejme, že

$$\ddot{x}_1(t) = -a_1\dot{x}_1(t) - a_0x_1(t) + u(t) = -a_1x_2(t) - a_0x_1(t) + u(t) \quad (119)$$

28 | 1855eq - Z50002

takže (117) je

$$\dot{x}_2(t) = -a_1x_2(t) - a_0x_1(t) + u(t) \quad (120)$$

a to je druhá diferenciálna rovnica...

Obč rovnice spolu:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (121)$$

$$\dot{x}_2(t) = -a_1x_2(t) - a_0x_1(t) + u(t) \quad (122)$$

V maticovom zápise:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (123)$$

Vrátme sa k přenosové funkci (112). Táto možno napísať ako diferenciálnu rovnici v tvare

$$y(t) = b_0x_1(t) + b_1x_2(t) \quad (124)$$

Avšak, my sme už urobili voľbu takú, že $\dot{x}_1(t) = x_2(t)$ a $x_2(t) = \dot{x}_1(t)$. Takže diferenciálnu rovnici (124) môžeme písať ako

$$y(t) = b_0x_2(t) + b_1\dot{x}_2(t) \quad (125)$$

alebo v maticovom tvare

$$y(t) = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} \quad (126)$$

Celý systém s novo zavedenými stavovými veličinami teda je v tvare

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (127)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} \quad (128)$$

Ak označíme stavový vektor ako $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \end{bmatrix}^T$, potom je systém v maticovom tvare

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \quad (129a)$$

$$y(t) = c^T x(t) \quad (129b)$$

kde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \quad (130a)$$

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (130b)$$

$$c = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} \quad (130c)$$

Následné príklady priamocho stanovovania opisu systému v stavovom priestore

Víme, že ak máme přenosovú funkciu v tvare

$$Y(s) = \frac{b_1s + b_0}{s^2 + a_1s + a_0} \quad (131)$$

tak opis systému v stavovom priestore je v tvare

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (132a)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 \end{bmatrix} x(t) \quad (132b)$$

29 | 1855eq - Z50002

kde samozrejme $x(t) \in \mathbb{R}^2$ je stavový vektor. Obdobne, ak máme prenosovú funkciu v tvare

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{s^2 + a_1s + a_0} \quad (133)$$

tak opis systému v stavovom priestore je v tvare

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (134a)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} b_0 & 0 \end{bmatrix} x(t) \quad (134b)$$

čo je možná napísať aj v tvare

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u(t) \quad (135a)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \quad (135b)$$

prvého sme len zmenili miesto, kde koeficient b_0 násobí zodpovedajúci signál. Je jedno, či je to na vstupe, alebo na výstupe.

Pre úplnosť, ak máme prenosovú funkciu v tvare

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1s}{s^2 + a_1s + a_0} \quad (136)$$

tak opis systému v stavovom priestore je v tvare

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (137a)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & b_1 \end{bmatrix} x(t) \quad (137b)$$

Ďalším príkladom by mohla byť prenosová funkcia v tvare

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0} \quad (138)$$

a opis systému v stavovom priestore by bol

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -a_1 & 1 \\ 0 & -a_2 & -a_3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (139a)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} b_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) \quad (139b)$$

Z opisu v stavovom priestore na prenosovú funkciu

Majme systém daný v stavovom priestore v tvare

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \quad (140a)$$

$$y(t) = c^T x(t) \quad (140b)$$

kde stavový vektor $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ a $c \in \mathbb{R}^n$ a u, y sú vektory a ide o parametre systému.

Rovnica (140a) je takpovediac vektorovou diferenciálnou rovnicou, čím tá zvyčajne, že nezmienam je vektor $x(t)$ obsahujúci signály (stavové veličiny).

Na rovnice (140) je možná aplikovať Laplaceovú transformáciu. Potom pri určitých zaťažovacích podmienkach, pretože našim cieľom je prenosová funkcia, je možná písať

$$sIX(s) = AX(s) + bU(s) \quad (141a)$$

$$Y(s) = c^T X(s) \quad (141b)$$

kde I je jednotková matica rovnakého rozmery ako A a s je Laplaceov operátor. Výraz sI je potom matica, ktorá má na diagonále Laplaceove operátory. $X(s)$ je samostatne vektor, ktorý obsahuje Laplaceove obrazy stavových veličín.

Prenosová funkcia je pomerom obrazu výstupu a vstupu. Je vhodná naštť rovnicou (141a) a vyjadriť pomer obrazov $X(s)$ a $U(s)$. Môžeme písať

$$sIX(s) = AX(s) + bU(s) \quad (142)$$

$$sIX(s) - AX(s) = bU(s) \quad (143)$$

príčom rozmery jednotlivých matic a vektorov budú zachované. Potom

$$(sI - A)X(s) = bU(s) \quad (144)$$

kde $(sI - A)$ je matica. Je potrebné samostatne $X(s)$. Odtiaľ rovnicu je preto potrebné vynásobiť zľava inverznou maticou k matici $(sI - A)$, teda maticou $(sI - A)^{-1}$.

$$(sI - A)^{-1}(sI - A)X(s) = (sI - A)^{-1}bU(s) \quad (145)$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1}bU(s) \quad (146)$$

Teraz je možná dosadiť na $X(s)$ do rovnice (141b), teda

$$Y(s) = c^T X(s) \quad (147)$$

$$Y(s) = c^T (sI - A)^{-1}bU(s) \quad (148)$$

Pomer $Y(s)$ a $U(s)$ je

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = c^T (sI - A)^{-1}b \quad (149)$$

a teda prenosová funkcia je

$$G(s) = c^T (sI - A)^{-1}b \quad (150)$$

Majme konkrétny prípad, keď systém je daný v stavovom priestore v tvare

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (151a)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} b_0 & 0 \end{bmatrix} x(t) \quad (151b)$$

a teda $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ a $c = \begin{bmatrix} b_0 & 0 \end{bmatrix}$. Stanovme maticu $(sI - A)$:

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ a_0 & s + a_1 \end{bmatrix} \quad (152)$$

Jej inverzia je

$$\begin{aligned} (sI - A)^{-1} &= \begin{bmatrix} s & -1 \\ a_0 & s + a_1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s + a_1)s - (-a_0)} \begin{bmatrix} s + a_1 & 1 \\ -a_0 & s \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s^2 + a_1s + a_0} \begin{bmatrix} s + a_1 & 1 \\ -a_0 & s \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{s + a_1}{s^2 + a_1s + a_0} & \frac{1}{s^2 + a_1s + a_0} \\ \frac{-a_0}{s^2 + a_1s + a_0} & \frac{s}{s^2 + a_1s + a_0} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (153)$$

Vynásobíme operu vektorom b

$$(sI - A)^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{s + a_1}{s^2 + a_1s + a_0} & \frac{1}{s^2 + a_1s + a_0} \\ \frac{-a_0}{s^2 + a_1s + a_0} & \frac{s}{s^2 + a_1s + a_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2 + a_1s + a_0} \\ \frac{s}{s^2 + a_1s + a_0} \end{bmatrix} \quad (154)$$

a následne zľava vektorom c^T

$$c^T (sI - A)^{-1}b = \begin{bmatrix} b_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2 + a_1s + a_0} \\ \frac{s}{s^2 + a_1s + a_0} \end{bmatrix} = b_0 \frac{1}{s^2 + a_1s + a_0} + 0 \frac{s}{s^2 + a_1s + a_0} \quad (155)$$

a po úprave

$$c^T (sI - A)^{-1}b = \frac{b_0 + 0s}{s^2 + a_1s + a_0} \quad (156)$$

je prenosová funkcia v konkrétnom uvádzanom prípade.

Z opisu v stavovom priestore na diferenciálnu rovnicu

Majme systém daný v stavovom priestore v tvare

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (157)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (158)$$

Nech cieľ je prepísať túto sústavu diferenciálnych rovníc na jednu sústavu rovníc vyššieho rádu. V takom prípade je možné použiť na na výstupný signál $y(t)$ ako na znamena v dif. rovnici vyššieho rádu. Sústava rovníc vypočítaná nasledovne:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (159)$$

$$\dot{x}_2(t) = -a_1 x_2(t) - a_0 x_1(t) + u(t) \quad (160)$$

$$y(t) = b_0 x_1(t) + b_1 x_2(t) \quad (161)$$

Napríklad rovnica (160) zderivujeme a dosadíme na $x_1(t)$ z prvej rovnice (159)

$$\ddot{x}_2(t) = -a_1 \dot{x}_2(t) - a_0 x_2(t) + \dot{u}(t) \quad (162)$$

$$\ddot{x}_2(t) = -a_1 \ddot{x}_2(t) - a_0 x_2(t) + \dot{u}(t) \quad (163)$$

Z rovnice (163) plynie

$$x_2(t) = \frac{1}{b_1} \ddot{y}(t) + \frac{b_0}{b_1} x_1(t) \quad (164)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{b_1} \dot{\ddot{y}}(t) + \frac{b_0}{b_1} \dot{x}_1(t) = \frac{1}{b_1} \dot{\ddot{y}}(t) + \frac{b_0}{b_1} x_2(t) \quad (165)$$

a

$$\ddot{x}_2(t) = \frac{1}{b_1} \ddot{\ddot{y}}(t) + \frac{b_0}{b_1} \ddot{x}_2(t) \quad (166a)$$

$$= \frac{1}{b_1} \ddot{\ddot{y}}(t) + \frac{b_0}{b_1} (-a_1 x_2(t) - a_0 x_1(t) + u(t)) \quad (166b)$$

$$= \frac{1}{b_1} \ddot{\ddot{y}}(t) - \frac{b_0 a_1}{b_1} x_2(t) - \frac{b_0 a_0}{b_1} x_1(t) + \frac{b_0}{b_1} u(t) \quad (166c)$$

Výsledky (164) a (166) je možné dosadiť do (163), teda

$$\frac{1}{b_1} \ddot{\ddot{y}}(t) - \frac{b_0 a_1}{b_1} x_2(t) - \frac{b_0 a_0}{b_1} x_1(t) + \frac{b_0}{b_1} u(t) = -a_1 \left(\frac{1}{b_1} \ddot{\ddot{y}}(t) + \frac{b_0}{b_1} x_1(t) \right) - a_0 \left(\frac{1}{b_1} \ddot{\ddot{y}}(t) + \frac{b_0}{b_1} x_2(t) \right) + \ddot{u} \quad (167)$$

$$\frac{1}{b_1} \ddot{\ddot{y}}(t) - \frac{b_0 a_1}{b_1} x_2(t) - \frac{b_0 a_0}{b_1} x_1(t) + \frac{b_0}{b_1} u(t) = -\frac{a_1}{b_1} \ddot{\ddot{y}}(t) - \frac{a_1 b_0}{b_1} x_1(t) - \frac{a_0 b_0}{b_1} x_2(t) + \ddot{u} \quad (168)$$

a teda

$$\frac{1}{b_1} \ddot{\ddot{y}}(t) + \frac{b_0}{b_1} u(t) = -\frac{a_0}{b_1} u(t) - \frac{a_1}{b_1} \ddot{\ddot{y}}(t) + \ddot{u} \quad (169)$$

$$\ddot{\ddot{y}}(t) + b_0 u(t) = -a_0 \ddot{\ddot{y}}(t) - a_1 \ddot{\ddot{y}}(t) + b_1 \ddot{u} \quad (170)$$

$$\ddot{\ddot{y}}(t) = -a_1 \ddot{\ddot{y}}(t) - a_0 \ddot{\ddot{y}}(t) + b_1 \ddot{u}(t) + b_0 u(t) \quad (171)$$

7.3.4 Stabilita

Stabilita systému je daná koreňmi charakteristického polynómu $A(s)$, v tomto prípade

$$A(s) = s^2 + a_1 s + a_0 \quad (172)$$

Tento polynóm má dva korene. Môžu to byť:

- dve reálne reálne čísla (imaginárna časť čísla je nulová),
- jedno reálne číslo, ktoré je dvojnásobným koreňom,
- alebo dve komplexné čísla, ktoré sú viackrát konjugované komplexne sdružené.

V každom prípade však platí, že systém je stabilný vtedy, a len vtedy, ak reálne časti pólů sú záporné (v ľavej polovici komplexnej roviny).

Ak aspoň jeden koreň leží na imaginárnej osi (reálna časť koreňa je nulová), potom hovoríme, že systém je na hranici stability.

Ak aspoň jeden koreň má reálnu časť kladnú, potom je systém nestabilný.

7.3.5 Statické zosilnenie a astaticizmus

Statické zosilnenie

Uvažujme systém, ktorý nie je nestabilný a řadový n pólův systém nie je nulový. Takýto systém je možné nazvať statickým, pretože pri ustálenom vstupe sa ustálí aj výstup. V tomto prípade máme systém druhého rádu a teda hovoríme o statickom systéme druhého rádu, skratka SS2f.

Pre takýto systém je možné určiť jeho statické zosilnenie. Statické zosilnenie je pomer výstupu ku vstupu v ustálenom stave.

V ustálenom stave sa signály nemenia, to znamená, že ich časové derivácie sú nulové. Vieme si diferencálnu rovnicu (166). V ustálenom stave je $\ddot{y}(\infty) = 0$, keďže sa vyrovnávajú čísla, v ktorom sú sú signály ustálené. Rovnako aj $\ddot{y}(\infty) = 0$ a $\ddot{u}(\infty) = 0$ a teda

$$0 = -a_0 y(\infty) + b_0 u(\infty) \quad (173)$$

Pomer výstupu ku vstupu je

$$\frac{y(\infty)}{u(\infty)} = \frac{b_0}{a_0} \quad (174)$$

čo je statické zosilnenie systému. Túto hodnotu je možné zmeniť ako samostatný parameter systému, napr. $K = \frac{b_0}{a_0}$.

Konvenčiou je tiež vo všeobecnosti uviesť, že vstup je „jednotkový“, jednoduchý, že $u(\infty) = 1$ a teda sa píše $y(\infty) = \frac{b_0}{a_0}$. K rovnakému záveru prídeme, ak by sme uvažovali konštantný, ustálený signál na vstupe, a to vo všeobecnosti, teda $u(t) = 1$. To je jednotkový sled a teda $U(s) = \frac{1}{s}$. Potom

$$Y(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \cdot \frac{1}{s} \quad (175)$$

Konečná hodnota tohto obsahu signálu ($Y(s)$ je obrazom $y(t)$), je hodnota na, ktorej sa výstup systému potenciešne ustálí. S využitím vety o konečnej hodnote:

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) \quad (176a)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \cdot \frac{1}{s} \quad (176b)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \quad (176c)$$

$$= \frac{b_0}{a_0} \quad (176d)$$

Astaticizmus

Ak je jeden z pólův systém nulový, hovoríme, že systém je astatický („obchádza astaticizmus“). Ak práve jeden pól je nulový, hovoríme o astaticizme prvého rádu. Ak sú dva póly nulové, potom ide o astaticizmus druhého rádu, atď.

V tomto prípade je systém druhého rádu a teda hovoríme o astatickom systéme druhého rádu, skratka AS2f.

V tomto prípade máme dva póly (ľuho vo všeobecnosti ide o dve komplexné čísla). Póly označme p_1 a p_2 . Ak je jeden z nich nulový, $p_1 = 0$, potom

$$A(s) = (s - p_1)(s - p_2) = (s - 0)(s - p_2) = s(s - p_2) \quad (177)$$

Preenosová funkcia systému druhého rádu s nastatímom prvého rádu by teda mohla byť v tvare:

$$G(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s(s - p_2)} \quad (178a)$$

$$G(s) = \frac{b_0}{s(s - p_2)} \quad (178b)$$

Vimínime si, že ak by $G(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s(s - p_2)}$ potom je to vlastne $G(s) = \frac{b_0}{s(s - p_2)}$, a teda nejde o systém druhého rádu.

Ak by boli dva póly nulové, teda $A(s) = s^2$, potom prenosová funkcia systému druhého rádu s nastatímom druhého rádu by mohla byť v tvare

$$G(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s^2} \quad (179a)$$

$$G(s) = \frac{b_0}{s^2} \quad (179b)$$

Mimochodom, prenosová funkcia (179b) je vlastne dvojitý integrátor.

7.3.6 Prevodová charakteristika

V prípade lineárnych systémov je prevodová charakteristika priamka a bez straty na všeobecnosť môžeme uvažovať, že prechádzajú načiatkom strachovcového systému. S tým prírsky je daný statickým nastatím systému, ak posunujeme vyššie uvedené, sklon prevodovej charakteristiky lineárneho systému je $K = \frac{b_0}{a_0}$.

7.3.7 Impulzná charakteristika

Impulzná charakteristika je odpoveď systému na Diracov impulz.

Krofm máme k dispozícii matematický opis systému, impulznú charakteristiku môžeme nájsť analyticky. Laplaceov obraz Diracovho impulzu je $U(s) = 1$.

ICH 552R, prípad $B(s) = b_0$

V prvom rade uvažujme prípad, keď dynamiku systému určujú len póly systému, teda prenosová funkcia je v tvare

$$G(s) = \frac{b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \quad (18a)$$

Polynóm $B(s) = b_0$ je nulového stupňa, teda systém nemá žiadne nuly. Označme póly systému p_1 a p_2 .

Dva nezávislé reálne póly. Zvoľme prípad, keď sú dva nezávislé reálne póly, teda napr. $p_1 = -1$ a $p_2 = -2$. Parameter b_0 zvolme tak, že statické nastatím systému bude jednotkové, teda $b_0 = a_0$.

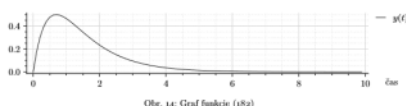
Polynóm $A(s)$ je teda $A(s) = (s + 1)(s + 2) = s^2 + 3s + 2$ a parameter $b_0 = 2$. Obráz výtlačnej veľčiny je Diracovom impulze na vstupe teda je

$$Y(s) = \frac{2}{s^2 + 3s + 2} = \frac{2}{(s + 1)(s + 2)} = \frac{2}{s + 1} - \frac{2}{s + 2} \quad (18b)$$

originál potom je:

$$y(t) = 2e^{-t} - 2e^{-2t} \quad (18c)$$

*Rozlíme tu so všeobecnosťou polynómy a je potrebné to odhaliť z matematického kľúčika („aké polynómy“ nie je vždy rovné)



Obr. 14: Graf funkcie (18c)

Otvorenie v MATLAB-e pomocou Symbolic Math Toolbox a pomocou Control System Toolbox:

Výpis kódu 19: Súbore M007_I0102R_ML_1.m cell:01

```
1 p_1 = -1;
2 p_2 = -2;
3 polyA = conv([1, -p_1], [1, -p_2]);
4 %sma a
5 B0 = polyA(1)*s^2 + polyA(2)*s + polyA(3);
6 Bn = polyA(mod);
7 Cn = Bn/a0;
8 y = ilaplace(Cn)
9 y = 2e^{-t} - 2e^{-2t}
```

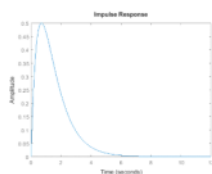
Výpis kódu 20: Súbore M007_I0102R_ML_1.m cell:02

```
1 G = tf(polyA(end), polyA)
2 ilaplace(G)
```

0 =

$$\frac{2}{s^2 + 3s + 2}$$

Continuous-time transfer function.



Dva rovnaké reálne póly (jeden dvojnásobný pól). Zvoľme prípad, keď sú dva nezávislé reálne póly, teda napr. $p_1 = -1$ a $p_2 = -1$. Parameter b_0 zvolme tak, že statické nastatím systému bude jednotkové, teda $b_0 = a_0$.

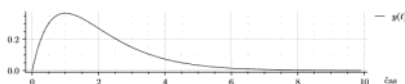
Polynóm $A(s)$ je teda $A(s) = (s + 1)(s + 1) = s^2 + 2s + 1$ a parameter $b_0 = 1$.

Obráz výtstupnej veľičiny pri Diracovom impulze na vstupe teda je

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1} = \frac{1}{(s+1)(s+1)} = \frac{1}{(s+1)^2} \quad (183)$$

Originál potom je

$$y(t) = te^{-t} \quad (184)$$



Obr. 15: Graf funkcie (184)

Dva komplexne združené póly. Ak by sme chceli pól systémom, ktoré sú navzájom komplexne združenými číslami, potom je v prípade systému druhého rádu výhodné využiť charakteristický polynóm v tvare

$$A(s) = s^2 + 2\beta\omega_0 s + \omega_0^2 \quad (185)$$

kde β a ω_0 sú parametre, pričom β má najvyšší koeficient tlmenia a ω_0 má najvyššiu vlastnú frekvenciu systému. Uvedení označovanie a forma polynómu $A(s)$ vyplývajú z konvencií pri opise oscilácií ako dynamického deja (diferenciálne rovnice tlmených oscilátorov). Ak je parameter $\beta < 1$, potom korene $A(s)$ sú komplexne združené čísla. Ak je parameter $\beta \geq 1$, potom korene $A(s)$ sú reálne.

Zvoľme $\beta = 0,5$ a $\omega_0 = 3$. Polynóm $A(s)$ je teda $A(s) = s^2 + 3s + 9 = (s + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3}j)(s + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{3}j)$. Parameter ω_0 zvolíme tak, že statické zesilovanie systému bude jednotkové, teda $\omega_0 = 3$. Obráz výtstupnej veľičiny pri Diracovom impulze na vstupe teda je

$$Y(s) = \frac{9}{s^2 + 3s + 9} = \frac{9}{\left(s + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3}j\right)\left(s + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{3}j\right)} = \frac{A}{s + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3}j} + \frac{B}{s + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{3}j} \quad (186)$$

kde A a B sú konštanty, ktoré je potrebné nájsť. Platí

$$9 = A\left(s + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{3}j\right) + B\left(s + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3}j\right) \quad (187)$$

Pre $s = -\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{3}j$ potom

$$9 = A\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{3}j + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{3}j\right) = A(-3\sqrt{3}j) \quad (188)$$

$$A = \frac{9}{-3\sqrt{3}j} = \frac{3}{-\sqrt{3}j} = \frac{\sqrt{3}j}{\sqrt{3}j} = \frac{3\sqrt{3}j}{3} = \sqrt{3}j \quad (189)$$

Pre $s = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3}j$ potom

$$9 = B\left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3}j + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3}j\right) = B(3\sqrt{3}j) \quad (190)$$

36 | MScov - ZŠovov

$$B = \frac{9}{3\sqrt{3}j} = \frac{3}{\sqrt{3}j} = \frac{-\sqrt{3}j}{-\sqrt{3}j} = \frac{-3\sqrt{3}j}{-3} = -\sqrt{3}j \quad (191)$$

Obráz výtstupnej veľičiny teda je

$$Y(s) = \frac{\sqrt{3}j}{s + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3}j} - \frac{\sqrt{3}j}{s + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{3}j} \quad (192)$$

Originál potom je

$$\begin{aligned} y(t) &= \sqrt{3}je^{-\frac{3}{2}(1+\sqrt{3}j)t} - \sqrt{3}je^{-\frac{3}{2}(1-\sqrt{3}j)t} \\ &= \sqrt{3}j\left(e^{-\frac{3}{2}t}e^{-\frac{3}{2}\sqrt{3}jt} - e^{-\frac{3}{2}t}e^{\frac{3}{2}\sqrt{3}jt}\right) \\ &= \sqrt{3}je^{-\frac{3}{2}t}\left(e^{-\frac{3}{2}\sqrt{3}jt} - e^{\frac{3}{2}\sqrt{3}jt}\right) \end{aligned} \quad (193)$$

Platí Eulerova identita $e^{jx} = \cos x + j \sin x$, teda

$$y(t) = \sqrt{3}je^{-\frac{3}{2}t}\left(\cos\left(-\frac{3}{2}\sqrt{3}t\right) + j \sin\left(-\frac{3}{2}\sqrt{3}t\right) - \cos\left(\frac{3}{2}\sqrt{3}t\right) - j \sin\left(\frac{3}{2}\sqrt{3}t\right)\right) \quad (194a)$$

$$y(t) = \sqrt{3}je^{-\frac{3}{2}t}\left(+j \sin\left(-\frac{3}{2}\sqrt{3}t\right) - j \sin\left(\frac{3}{2}\sqrt{3}t\right)\right) \quad (194b)$$

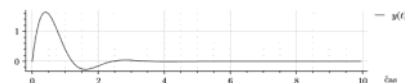
$$y(t) = \sqrt{3}je^{-\frac{3}{2}t}j\left(+\sin\left(-\frac{3}{2}\sqrt{3}t\right) - \sin\left(\frac{3}{2}\sqrt{3}t\right)\right) \quad (194c)$$

$$y(t) = -\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}t}\left(+\sin\left(-\frac{3}{2}\sqrt{3}t\right) - \sin\left(\frac{3}{2}\sqrt{3}t\right)\right) \quad (194d)$$

Teda platí $\sin(-x) = -\sin(x)$ a teda

$$y(t) = -\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}t}\left(-2\sin\left(\frac{3}{2}\sqrt{3}t\right)\right) \quad (195a)$$

$$y(t) = 2\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}t}\sin\left(\frac{3}{2}\sqrt{3}t\right) \quad (195b)$$



Obr. 16: Graf funkcie (195b)

ICH 55aR, prípad $B(s) = b_1 s + b_0$ alebo $B(s) = b_1 s$

Je známe, že v prípade ak polynóm $B(s)$ je v tvare $B(s) = b_1 s + b_0$ alebo $B(s) = b_1 s$ má to vplyv na dynamiku systému.

Napríklad, pre polynóm $A(s)$ uvažujme situáciu rovnakú ako na obr. 14, teda pól systémom sú $p_1 = -1$ a $p_2 = -2$, teda $A(s) = s^2 + 3s + 2$. Polynóm $B(s)$ zvolíme $B(s) = 3s + 2$. V tomto prípade je nula systému, označuje ju z_1 , v bode $z_1 = -\frac{2}{3}$ a teda táto nula sa ruší soľuje soľ nulovým pólom.

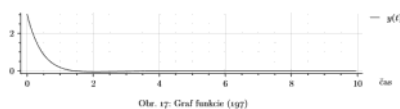
Obráz výtstupnej veľičiny pri Diracovom impulze na vstupe je

$$Y(s) = \frac{3s + 2}{s^2 + 3s + 2} = \frac{3s + 2}{(s+1)(s+2)} = \frac{-1}{s+1} + \frac{4}{s+2} \quad (196)$$

Originál potom je

$$y(t) = -e^{-t} + 4e^{-2t} \quad (197)$$

37 | MScov - ZŠovov



Obr. 17: Graf funkcie (197)

Ak by sa naša rozhodla s pôlom, teda napr. bola by to $z_1 = -1$, potom by sme mali $G(s) = \frac{1}{s^2(s+1)}$, čo je možné zapísať aj ako $G(s) = \frac{(s+1)}{(s+1)(s+1)} = \frac{1}{(s+1)^2}$, čo je systém prechodu rádu.

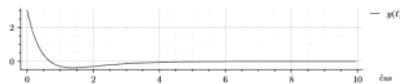
Pre úplnosť uvažujme tu aj prípad keď $B(s) = b_1 s$. Zvoľme napríklad $b_1 = 3$. Zvoľme $A(s) = s^2 + 3s + 2$. Všimneme si, že teraz máme $b_0 = 0$. To znamená, že našim systémom, teda koeficient b_0/s_0 bude v tomto prípade nulový.

Obráz výstupnej veľičiny pri Diracovom impulze na vstupe je:

$$Y(s) = \frac{3s}{s^2 + 3s + 2} = \frac{3s}{(s+1)(s+2)} = \frac{-3}{s+1} + \frac{6}{s+2} \quad (198)$$

Originál potom je

$$g(t) = -3e^{-t} + 6e^{-2t} \quad (199)$$



Obr. 18: Graf funkcie (199)

Pomôžeme pôly systému sme tu zvolili čisto reálne (bez imaginárnej časti) a nie komplexne združené. Je zrejme, že vplyv má na dynamiku systému má charakter kmitania a komplexne združené pôly by túto skutočnosť v tejto súvislosti zakryli, pretože nami vedú na kmitavý odporový systém.

ICH AS2R

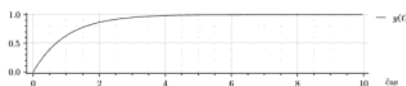
Ak je jeden z pôlov systému nulový, hovoríme, že systém je statický („obsahuje statickú časť“). Ak práve jeden pôl je nulový, hovoríme o statickém prvku rádu. Zvoľme tu $B(s) = 1$ a pôly $p_1 = -1$ a $p_2 = 0$. Teda $A(s) = s^2 + s$.

Obráz výstupnej veľičiny pri Diracovom impulze na vstupe je:

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + s} = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \quad (200)$$

Originál potom je

$$g(t) = 1 - e^{-t} \quad (201)$$



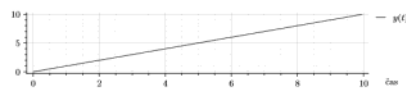
Obr. 19: Graf funkcie (201)

Prípade by sme mohli mať pôly $p_1 = 0$ a $p_2 = 0$. Teda $A(s) = s^2$. Obráz výstupnej veľičiny pri Diracovom impulze na vstupe je:

$$Y(s) = \frac{1}{s^2} \quad (202)$$

Originál potom je

$$g(t) = t \quad (203)$$



Obr. 20: Graf funkcie (203)

Akú len pre zaujímavosť tu zvoľme $B(s) = s + 1$, pričom ponecháme pôly $p_1 = 0$ a $p_2 = 0$, teda $A(s) = s^2$. Obráz výstupnej veľičiny pri Diracovom impulze na vstupe je:

$$Y(s) = \frac{s+1}{s^2} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} \quad (204)$$

Originál potom je

$$g(t) = 1 + t \quad (205)$$

7.3.8 Prechodová charakteristika

Prechodová charakteristika je odpoveď systému na jednotkový skok.

Koef. máme k dispozícii matematicky opísať systém, prechodová charakteristika môžeme nájsť analyticky. Laplaceov obraz jednotkového skoku je $U(s) = \frac{1}{s}$.

PCH SS2R, prípad $B(s) = b_0$

V prvom rade uvažujme prípad, keď dynamiku systém určujú len pôly systému, teda prenosová funkcia je v tvare:

$$G(s) = \frac{b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \quad (206)$$

Polyčíslo $B(s) = b_0$ je nulového stupňa, teda systém nemá žiadne nuly. Označme pôly systému p_1 a p_2 .

Polynóm $A(s)$ je teda $A(s) = (s+1)(s+2) = s^2 + 3s + 2$ a parameter $b_0 = 2$.
Obráz výstupnej veličiny pri jednotkovom skoku na vstupe je

Original potom je

Obr. 21: Graf funkcje (208)

statične zosiljenec sistema bude jednolične, teda $b_0 = a_0$. Polynom $A(s)$ je teda $A(s) = (s + 1)(s + 1) = s^2 + 2s + 1$ a parameter $b_0 = 1$. Obráz výstupnej veličiny pri jednolícnom skoku na vstupe je

Original je

Obr. 22: Graf funkcje (210)

$$A(s) = s^2 + 2\beta\omega_0 s + \omega_0^2 \quad (21)$$

kde β a ω_0 sú parametre, pričom β sa nazýva koeficient tlmenia a ω_0 sa nazýva vlastná frekvencia systému.

$(s + \frac{1}{2} + \frac{2}{3}\sqrt{3}j)(s + \frac{1}{2} - \frac{2}{3}\sqrt{3}j)$. Parameter k_0 zvolíme tak, že statické zesílenie systému bude jednotkové, teda $k_0 = 9$. Otvor výstupnej veličiny pri jednotkovom skoku na vstupe je

40 | *MRSA in Zsaong*

(213)

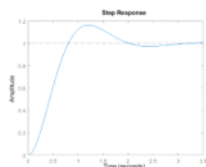
Obr. 23: Graf funkcje (210)

$$y = 1 - e^{-\frac{3t}{2}} \left(\cos\left(\frac{1\sqrt{3}t}{2}\right) + \frac{\sqrt{3} \sin\left(\frac{1\sqrt{3}t}{2}\right)}{3} \right)$$

6

9

Continuous-time transfer function.



41 | MFC07 - TS0025

PCH 55aR, prípad $H(s) = b_1 s + b_0$ alebo $H(s) = b_1 s$

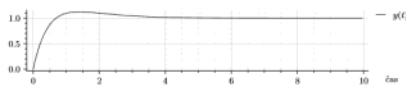
Je zrejmé, že v prípade ak polynóm $H(s)$ je v tvare $H(s) = b_1 s + b_0$ alebo $H(s) = b_1 s$ má to vplyv na dynamiku systému.

Napríklad, pre polynóm $A(s)$ uvažujme situáciu rovnakú ako na obr. 21, teda póly systému sú $p_1 = -1$ a $p_2 = -2$, teda $A(s) = s^2 + 3s + 2$. Polynóm $H(s)$ zvolíme $H(s) = 3s + 2$. V tomto prípade je mŕža systému, označíme ju z_1 , v bode $z_1 = -\frac{2}{3}$ a teda táto mŕža sa nachádza so ľadným pólom. Otvor výstupnej veličiny pri jednotkovom skoku na vstupe je:

$$Y(s) = \frac{3s+2}{s^2+3s+2} = \frac{3s+2}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} - \frac{2}{s+2} \quad (214)$$

Originál je:

$$y(t) = 1 + e^{-t} - 2e^{-2t} \quad (215)$$



Obr. 24: Graf funkcie (215)

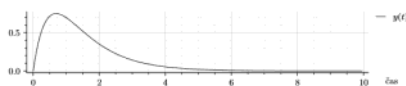
Ak by sa mŕža zhodovala s pólom, teda napr. bola by to $z_1 = -1$, potom by sme mali $G(s) = \frac{s+1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{(s+2)}$, čo je systém prvého rádu.

Pre úplnosť uvádzame tu aj prípad keď $H(s) = b_1 s$. Zvolíme napríklad $b_1 = 3$. Zastavíme $A(s) = s^2 + 3s + 2$. Vytvoríme si, že teraz máme $b_0 = 0$. To znamená, že nosičenie systému, teda hodnota b_0/a_0 bude v tomto prípade nulová. Otvor výstupnej veličiny pri jednotkovom skoku na vstupe je:

$$Y(s) = \frac{3s}{s^2+3s+2} = \frac{3s}{(s+1)(s+2)} = \frac{3}{s+1} - \frac{3}{s+2} \quad (216)$$

Originál je:

$$y(t) = 3e^{-t} - 3e^{-2t} \quad (217)$$



Obr. 25: Graf funkcie (217)

Podmienka: póly systému sme tu zvolili čisto reálne (bez imaginárnej časti) a nie komplexne združené. Je zrejmé, že vplyv má na dynamiku systému má charakter kmitania a komplexne združené póly by tieto skutočnosti v tejto skúške nikdy, pretože nami vedú na kmitavý obehový systém.

PCH ASaR

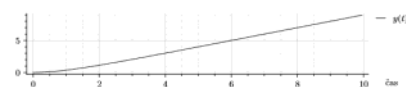
Ak je jeden z pólov systému nulový, hovoríme, že systém je astatický („obsahuje astatickosť“). Ak práve jeden pól je nulový, hovoríme o astatickej prvej rádu. Zvolíme

tu $H(s) = 1$ a póly $p_1 = -1$ a $p_2 = 0$. Teda $A(s) = s^2 + s$. Otvor výstupnej veličiny pri jednotkovom skoku na vstupe je:

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+s} = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \quad (218)$$

Originál je:

$$y(t) = t - 1 + e^{-t} \quad (219)$$



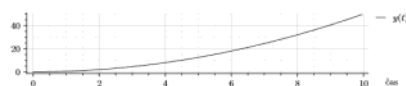
Obr. 26: Graf funkcie (219)

Prípadne by sme mohli mať póly $p_1 = 0$ a $p_2 = 0$. Teda $A(s) = s^2$. Otvor výstupnej veličiny pri jednotkovom skoku na vstupe je:

$$Y(s) = \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2} \quad (220)$$

Originál je:

$$y(t) = \frac{t^2}{2} \quad (221)$$



Obr. 27: Graf funkcie (221)

Avšak len pre zaujímavosť tu zvolíme $H(s) = s + 1$, pričom ponecháme póly $p_1 = 0$ a $p_2 = 0$, teda $A(s) = s^2$. Otvor výstupnej veličiny pri jednotkovom skoku na vstupe je:

$$Y(s) = \frac{s+1}{s^2} = \frac{s}{s^2} + \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} \quad (222)$$

Originál je:

$$y(t) = \frac{t^2}{2} + t \quad (223)$$

Literatúra

- [1] Karl Johan Åström a Richard M. Murray: *Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers*. Princeton University Press, jún 2020. ISBN: 978-0-691-15576-2. URL: https://thewiki.org/wiki/index.php/Main_Page.