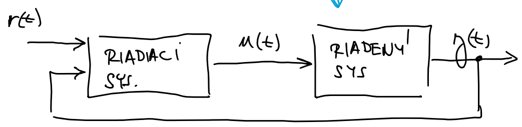
streda 29. októbra 2025 9:05

MODELOVANIE A RIADENIE



DYN. SYSTÉM ← DIF. ROVNICA
výstup.
vstup.
rád systému

- neznáma ?
- riešenie ?
- homogénnosť
- rád rovnice
- začiatočné podmienky

SIMULÁCIA

- SCHÉMA
- ROZKLAD

STAV SYSTÉMU
- stavový priestor
- „maticový tvar"

- numerické riešenie
  - Simulink
  - ODE Solver (MATLAB, Python ...)

- analytické riešenie
  char. rovnica ...

fundamentálne riešenia

hlavne pre homogénne rovnice

- všeobecné riešenie ?

1.) konvolúcia ... („ťažké")
2.) prenosová funkcia — mierne vystupujúci v súvislosti
3.) Laplaceova transformácia („uľahčuje")

OBRAZY A ORIGINÁLY (TABUĽKA ...)
- derivácia
- integrál

- Dirac
- jednotkový skok
- exponenciála

PRENOSOVÁ FUNKCIA
- definícia !
- algebra prenos. fcií.

MATLAB Control Toolbox

- analytické riešenie aj nehomogénnych dif. rovníc

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = b_0 u$$

rozklad ?
- voľba y

vedomosť

$$\dot{x} = Ax + bu$$
$$y = c^T x$$

stav vektor

fakt → 2. rádu

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -a_1 x_2 - a_0 x_1 + b_0 u$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

SYSTÉM — vlastnosti

(„statický"/dynamický systém)
- zotrvačnosť („bezzotrvačnosť")

- ustálený stav
- zosilnenie systému

- stabilita systému

TODO ... ?

„statické" vlastnosti ← dáta ?
↓
PREVODOVÁ CHARAKTERISTIKA

„dynamické vlastnosti" ← dáta ?
↓
PRECHODOVÁ CHARAKTERISTIKA

CIEĽ ?
⇓
MODEL
⋮
prenosová funkcia ...

PRACOVNÝ BOD

PRACOVNÝ BOD
:
OKOLIE

prenosová funkcia ....

Linearita ?

„nereálne"

PRENOSOVÉ FUNKCIE A MODELOVANIE ...
(TRANSFER FUNCTION)

- t.f.
- konverzie (prepis) → dif. rovnica, stavový priestor

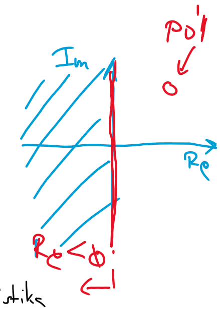
$\frac{Y(s)}{U(s)}$

- stabilita ← korene CHP

$B(s)$ -nuly m
$A(s)$ ← CHP -póly n
-rád ...
-relatívny stupeň
$n^* = n - m$

ustál. stav
$s \to 0$

- zosilnenie
- astatizmus
- prevodová
- impulzná charakteristika
- prechodová ch.



póly → dynamika (a stabilita)
(aj nuly..)
PCH
ICH

- malý prehľad ...

S1R   SS1R   PCH ICH   (FCH ?)
AS1R

S0R ← len zosilňovač

→ S2R   SS2R   PCH ICH   (FCH)
kmitanie......   AS2R

vyšší rád ? ...

Modelovanie a riadenie systémov   MRS10 - ZS2025

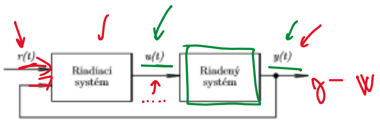
Uzavretý regulačný obvod a PID regulátor

Obsah

Cieľom textu je sprostredkovanie úvodných informácií ku konceptu *uzavretého regulačného obvodu* (URO). Skladá sa z riadeného systému a riadiaceho systému. Ak sme sa v predchádzajúcich textoch venovali primárne matematickému modelovaniu systémov, týkalo sa to predovšetkým riadeného systému v URO. Príkladom riadiaceho systému v URO je v tomto texte *PID regulátor*.

1 O regulačnom obvode

Regulačný obvod sa vo všeobecnosti skladá z riadiaceho systému a z riadeného systému. Zahŕňa tri základné signály. Výstupnú veličinu $y(t)$, akčný zásah $u(t)$ a referenčný signál $r(t)$. Schematicky sa znázorňuje nasledovne:



$y - w$

Obr. 1: Všeobecný uzavretý regulačný obvod.

Výstupom riadeného systému je veličina, ktorá, okrem iného, hovorí o splnení cieľa riadenia. Cieľom riadenia napríklad je, aby táto veličina dosiahla istú hodnotu, prípadne aby priebeh tejto veličiny v čase vykazoval isté dynamické vlastnosti, a podobne. Pre skrátenie sa práve táto veličina nazýva ako výstupná veličina (celého obvodu). Označuje sa $y(t)$.

Úlohou riadiaceho systému je splniť cieľ riadenia. Výstupom riadiaceho systému je tzv. akčný zásah (označuje sa $u(t)$). Je to signál (veličina), pomocou ktorého riadiaci systém ovplyvňuje riadený systém. Akčný zásah je teda na vstupe riadeného systému.

Pre splnenie cieľa riadenia potrebuje riadiaci systém dostať príkaz typicky vo forme signálu, ktorý je referenčným signálom (označuje sa $r(t)$) alebo žiadanou hodnotou (označuje sa $w(t)$, v angličtine *setpoint*). Druhou informáciou, ktorú riadiaci systém potrebuje pre splnenie cieľa, je spätná väzba z výstupu riadeného systému.

S využitím uvedeného, teda spätnej väzby a referenčného signálu (alebo žiadanej hodnoty), riadiaci systém akčným zásahom ovplyvňuje riadiaci systém tak, aby bol splnený cieľ riadenia. Pre zvýraznenie princípu spätnej väzby sa výsledný principiálny regulačný obvod nazýva *Uzavretý regulačný obvod* (URO).

1.1 Regulačná odchýlka

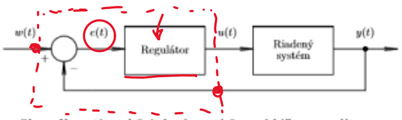
Značne typickým uzavretým regulačným obvodom je taký, v ktorom sa využíva regulačná odchýlka.

Regulačná odchýlka $e(t)$ je rozdiel žiadanej hodnoty $w(t)$ (setpoint) a výstupnej veličiny riadeného systému $y(t)$, teda

$$e(t) = w(t) - y(t) \tag{1}$$

Je zrejmé, že ak je regulačná odchýlka nulová, tak cieľ riadenia je splnený.

V tomto prípade je URO možné schematicky znázorniť nasledovne:

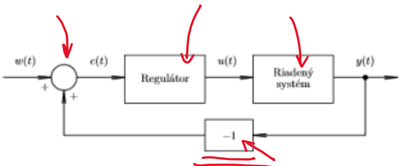


URO

Obr. 2: Uzavretý regulačný obvod s regulačnou odchýlkou a regulátorom.

Je možné konštatovať, že na obr. 2 je celkový riadiaci systém tvorený dvomi prvkami: výpočtom regulačnej odchýlky a regulátorom. Typicky, vstupom regulátora je regulačná odchýlka.

Pre zdôraznenie faktu, že v uvedenom prípade ide jednoznačne (už z princípu informácie o odchýlke (1)) o zápornú spätnú väzbu môžeme kresliť schému nasledovne:

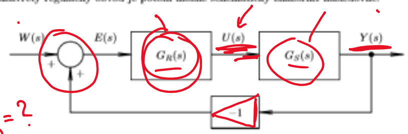


Obr. 3: Uzavretý regulačný obvod s blokom vyjadrujúcim zápornú spätnú väzbu.

1.2 Lineárny uzavretý regulačný obvod

V prípade, že riadiaci a riadený systém je možné opísať ako lineárne dynamické systémy, hovoríme o lineárnom uzavretom regulačnom obvode.

Typicky hovoríme, že regulátor, ktorého vstupom je regulačná odchýlka, a riadený systém je vtedy možné reprezentovať prenosovými funkciami. Klasický lineárny uzavretý regulačný obvod je potom možné schematicky znázorniť nasledovne:



$$\frac{Y(s)}{W(s)} = ?$$

Obr. 4: Lineárny uzavretý regulačný obvod.

V tomto prípade všetky bloky v schéme sú tvorené prenosovými funkciami (aj -1 je v princípe prenosová funkcia) pričom $G_R(s)$ je prenosová funkcia regulátora a $G_S(s)$ je prenosová funkcia riadeného systému (hovorí sa tiež prenosová funkcia riadenej sústavy).

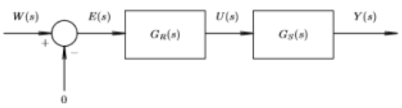
Avšak, ak sú blokmi URO prenosové funkcie, potom namiesto časových signálov je možné uvažovať ich Laplaceove obrazy (L-obrazy), teda $W(s)$, $E(s)$, $U(s)$ a $Y(s)$.

1.2.1 Otvorený regulačný obvod

S využitím algebry prenosových funkcií vidíme, že $G_R(s)$ a $G_S(s)$ sú v sérii a teda máme

$$G_{ORO}(s) = G_R(s)G_S(s) \tag{2}$$

pričom $G_{ORO}(s)$ je prenosová funkcia súvisiaca s pojmom *otvorený regulačný obvod* – je to situácia keď sa neuvažuje spätná väzba (obvod nie je uzavretý).



Obr. 5: Otvorený regulačný obvod.

2 O PID regulátore

PID regulátor patrí medzi najviac rozšírené súčasti riadiacich systémov vo všeobecnosti.

V princípe využíva regulačnú odchýlku a tiež je ho možné opísať pomocou lineárneho dynamického systému a teda pomocou prenosovej funkcie.

Názov *PID* regulátor vystihuje skutočnosť, že tento regulátor má tri principiálne zložky. Proporcionálnu, Integračnú a Derivačnú. Ide pri tom o tri spôsoby ako sa tu využíva informácia o regulačnej odchýlke.

Regulátor v skutočnosti pracuje s tromi signálmi. Prvým je samotná regulačná odchýlka $e(t) = w(t) - y(t)$. Z regulačnej odchýlky sa získavajú ďalšie dva signály. Časový integrál regulačnej odchýlky a časová derivácia regulačnej odchýlky. Formálne je

$\boxed{e(t)}$

$$e_i(t) = \int e(t)\mathrm{d}t \qquad (16)$$

$e \rightarrow \boxed{\frac{1}{s}} \rightarrow e_i$

je časový integrál regulačnej odchýlky a

$$e_d(t) = \frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t} \qquad (17)$$

$e \rightarrow \boxed{\frac{dt}{dt}} \rightarrow e_d$

je časová derivácia regulačnej odchýlky.

Každý z týchto signálov je násobený (zosilnený) nejakou nastaviteľnou konštantou (parametrom regulátora) a výsledný akčný zásah $u(t)$ je súčet týchto troch členov, teda

$$u(t) = Pe(t) + I\int e(t)\mathrm{d}t + D\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t} \qquad (18)$$

kde P, I a D sú parametre (konštanty, čísla, zosilnenia) regulátora.

2.1 Prenosová funkcia PID regulátora

Zo všeobecného hľadiska je vstupom regulátora regulačná odchýlka – signál $e(t)$. Jeho L-obrazom je $E(s)$. Výstupom regulátora je akčný zásah, ktorého L-obrazom je $U(s)$. Prenosová funkcia PID regulátora potom formálne je

$$G_R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} \qquad (19)$$

$E(s)$

alebo teda akčný zásah je

$$U(s) = G_R(s)E(s) \qquad (20)$$

$\frac{1}{s}E(s)$

L-obrazom integrálu regulačnej odchýlky je $\frac{1}{s}E(s)$ a L-obrazom derivácie regulačnej odchýlky je $sE(s)$. Potom akčný zásah je

$sE(s)$

$$U(s) = PE(s) + I\frac{1}{s}E(s) + DsE(s) \qquad (21)$$

konvenčne sa v tejto súvislosti pre označenie parametrov PID používajú r_0, r_{-1} a r_1, kde číselný index má vyjadrovať mocninu premennej s, pri ktorej sa parameter nachádza. Teda

$$U(s) = r_0E(s) + r_{-1}\frac{1}{s}E(s) + r_1sE(s) \qquad (22)$$

Prenosová funkcia PID regulátora je potom v tvare

$\frac{B(s)}{A(s)}$

$$G_R(s) = r_0 + r_{-1}\frac{1}{s} + r_1s \qquad (23)$$

Tento tvar sa nazýva zložkový tvar, totiž, túto prenosovú funkciu je možné vyjadriť aj v tvare

$$G_R(s) = P\left(1 + \frac{1}{T_Is} + T_Ds\right) \qquad (24)$$

kde zmyslom je zavedenie časových konštánt T_I a T_D (tieto parametre majú rozmer času) a pri tom platí $P = r_0$, $T_I = \frac{r_0}{r_{-1}}$ a $T_I = \frac{r_1}{r_0}$.

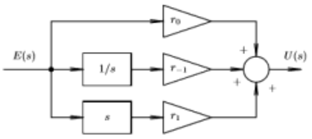
Len pre názornosť, ak by sme chceli vyjadriť prenosovú funkciu (23) ako jediný zlomok, potom

$$G_R(s) = \frac{r_1 s^2 + r_0 s + r_{-1}}{s} \tag{25}$$

kde je zrejmé, že stupeň čitateľa je vyšší ako stupeň menovateľa a teda ide o nekauzálny systém. To súvisí so skutočnosťou, že realizovať časovú deriváciu, takú, pri ktorej by bola veľkosť časového úseku dt nekonečne malá, je nereálne. V praxi je možné realizovať kvalitnú aproximáciu ideálnej časovej derivácie, čo sa v týchto súvislostiach prejaví tak, že obrazom signálu v derivačnej zložke nie je $sE(s)$, ale iný výraz, taký, že to má za následok splnenie podmienky kauzality v celkovej prenosovej funkcii PID regulátora.

2.2 Bloková schéma PID regulátora

Schematicky, pomocou základných funkčných prvkov, vzhľadom na jeho prenosovú funkciu, je možné PID regulátor znázorniť nasledovne:



Obr. 10: Bloková schéma PID regulátora

3 O výbere štruktúry PID regulátora

PID regulátor vo všeobecnosti pozostáva z troch zložiek. Často však nie je potrebné použiť všetky tri zložky. Niekedy to môže byť až výslovne nežiadúce.

V princípe je možné uvažovať tri samostatné regulátory (zložky PID regulátora). Hovoríme o P-regulátore (využíva sa len proporcionálna zložka PID), o I-regulátore (využíva sa len integračná zložka PID) a o D-regulátore (využíva sa len derivačná zložka PID).

Zároveň je možné uvažovať aj vzájomné kombinácie uvedených regulátorov. Veľmi častým prípadom je PI regulátor. Aj PD regulátor je v praxi používaný. Niečo ako „ID regulátor“ môže mať uplatnenie ale ide o ojedinelé prípady.

3.1 Príklady

3.1.1 P regulátor a SS1R

Majme URO, kde

$$G_R(s) = r_0 \qquad \text{a} \qquad G_S(s) = \frac{K}{Ts + 1} \tag{26}$$

teda: