Cvičenie druhé a tretie

Obsah

Cieľom cvičení sú témy týkajúce sa schematického znázornenia dynamického systému daného diferenciálnou rovnicou (alebo sústavou dif. rovníc), témy týkajúce sa rozkladu dif. rovnice vyššieho rádu na sústavu rovníc prvého rádu a získanie numerického riešenia s využitím softvéru Simulink a MATLAB (prípadne iného).

1 Cvičenie druhé

1.1 Úloha 1

Majme dynamický systém daný diferenciálnou rovnicou v tvare

$$\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t) \qquad y(0) = y_0 \qquad \dot{y}(0) = z_0 \tag{1}$$

kde a_0, a_1, b_0 sú konštanty a $u(t)$ je známy vstupný signál.

- Schematicky znázornite dynamický systém daný rovnicou (1).

1.2 Úloha 2

- Diferenciálnu rovnicu (1) prepíšte na sústavu diferenciálnych rovníc prvého rádu.

– Koľko rovníc prvého rádu týmto vznikne?

1.3 Úloha 3

Uvažujme matematický model jednosmerného elektrického motora s cudzím konštantným budením.

Základné informácie o motore: Nominálny výkon 39 [kW], nominálne napätie 520 [V] a nominálny prúd 89 [A]. Nominálne otáčky motora: 1113 [ot/min] a nominálny krútiaci moment: 337 [Nm]. Ide teda o relatívne výkonný, veľký motor.

Pre zostavenie matematického modelu motora, s cieľom opísať dynamické deje pri štarte a prevádzke, je potrebné zohľadniť, že ide o prípad s konštantným cudzím budením čo zjednodušuje predovšetkým opis elektromagnetickej časti systému.

Zároveň sú v tomto prípade dostupné informácie o tzv. stratách v železe a výsledkom je možnosť uvažovať tzv. napäťovú konštantu motora $C_{u\omega}$ [Vs] a momentovú konštantu motora C_{uM} [Nm/A]. V tomto prípade (bez uvádzania ďalších podrobností) máme

$$C_{u\omega} = 3,903 \text{ [Vs]} \tag{2a}$$

$$C_{uM} = 3,787 \text{ [Nm/A]} \tag{2b}$$

Elektromagnetický podsystém motora (čo v tomto prípade je v podstate len rotorové vinutie) je možné opísať diferenciálnou rovnicou v tvare

$$u(t) = Ri(t) + L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + u_i(t) \tag{3}$$

kde $u(t)$ [V] je napätie na rotorovom vinutí motora, $i(t)$ [A] je prú rotorovým vinutím, R [Ω] je elektrický odpor vinutia, L [H] je indukčnosť vinutia a u_i je spätné indukované napätie, ktoré je v podstate následkom meniaceho sa magnetického poľa vzhľadom na vinutie. Práve tu sa využije napäťová konštanta motora keď platí $u_i(t) = C_{u\omega}\omega(t)$, kde $\omega(t)$ [rad/s] je uhlová rýchlosť motora. A teda rovnicu (3) je možné zapísať v tvare

$$u(t) = Ri(t) + L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + C_{u\omega}\omega(t) \tag{4}$$

Číselné hodnoty parametrov v tomto prípade sú: $R = 0,737$ [Ω] a $L = 0,00905$ [H].

Mechanický podsystém motora je možné opísať známou rovnicou

$$M_m(t) = J_m\frac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{d}t} \tag{5}$$

kde $M_m(t)$ [Nm] je krútiaci moment, ktorý motor produkuje, J_m [kg m^2] je moment zotrvačnosti a $\omega(t)$ [rad/s] je uhlová rýchlosť motora. Moment produkovaný motorom je možné určiť pomocou momentovej konštanty motora vzťahom $M_m(t) = C_{uM}i(t)$. Pozorný čitateľ si tu všimne, že v rovnici (5) sa vôbec neuvažuje mechanická záťaž motora (záťažný moment motora), pričom však tento je jednoduché pridať.

Rovnicu (5) môžeme v tomto prípade písať aj v tvare

$$C_{uM}i(t) = J_m\frac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{d}t} \tag{6}$$

Číselné hodnoty parametrov v tomto prípade sú: $J_m = 0,5$ [kg m^2].

- Formálne upravte diferenciálne rovnice opisujúce predmetný dynamický systém do tvaru vhodného pre rozbor problému z hľadiska numerickej simulácie v Simulinku.
- Simulujte štart motora (mechanicky nezaťaženého) pri konštantnom napájacom napätí 520 [V].

1.4 Úloha 4

Majme dynamický systém daný diferenciálnou rovnicou v tvare

$$\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t) \qquad y(0) = y_0 \tag{7}$$

kde a_0, a_1, b_0 sú konštanty a $u(t) = 1$ je vstupný signál.

- Zvoľte hodnoty parametrov systému a_0, b_0 pričom nech $a_0 > 0$. Zvoľte hodnotu začiatočnej podmienky y_0.
- Pomocou funkcie `ode45()` v MATLABe zrealizuje numerickú simuláciu systému a vykreslite priebeh signálu $y(t)$ a signálu $\dot{y}(t)$.

1.5 Bonusové úlohy

- V časti 1.1 uvažujte vstupný signál $u(t)$ ako konštantný signál a zvoľte jeho konštantnú hodnotu. Taktiež zvoľte hodnoty začiatočných podmienok y_0 a z_0. V neposlednom rade zvoľte hodnoty konštánt a_0, a_1 a b_0. S využitím zostavenej schémy systému realizujte numerickú simuláciu systému v Simulinku.
- Výslednú sústavu dif. rovníc z časti 1.2 schematicky znázornite.
- V časti 1.4 experimentujte s hodnotami parametrov a_0, b_0 a začiatočnou podmienkou y_0 a pozorujte, ako tieto hodnoty ovplyvňujú priebeh signálu $y(t)$.

2 Cvičenie tretie

2.1 Úloha 1

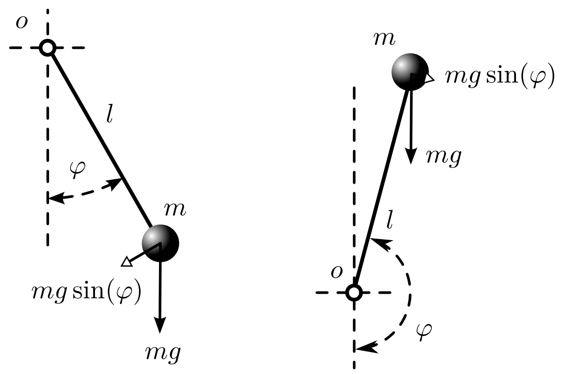
- Nájdite analytické riešenie diferenciálnej rovnice metódou charakteristickej rovnice.

$$\ddot{y}(t) + 6\dot{y}(t) + 5y(t) = 0 \qquad y(0) = 4 \qquad \dot{y}(0) = 3$$

2.2 Úloha 2

2.2.1 Kyvadlo – vytvorenie numerickej simulácie (simulačnej schémy)

Uvažujme kyvadlo, ktorého kmity sú tlmené viskóznym trením s koeficientom β [kg m^2 s^{-1}]. Kyvadlo je na Obr. 1, kde hmotný bod s hmotnosťou m [kg] pripevnený na ramene so zanedbateľnou hmotnosťou a dĺžkou l [m] kmitá, o označuje os otáčania kolmú na rovinu, v ktorej kyvadlo kmitá, uhol medzi zvislicou a ramenom kyvadla je označený φ [rad] a gravitačné zrýchlenie g [m s^{-2}].



Obr. 1: Kyvadlo

Pohybová rovnica opisujúca dynamiku rotačného pohybu kyvadla je v tvare

$$ml^2\ddot{\varphi}(t) + \beta\dot{\varphi}(t) + mgl\sin\varphi(t) = u(t) \tag{8a}$$

$$ml^2\ddot{\varphi}(t) = -\beta\dot{\varphi}(t) - mgl\sin\varphi(t) + u(t) \tag{8b}$$

kde $u(t)$ [kg m^2 s^{-2}] je externý moment sily pôsobiaci na rameno kyvadla, $\dot{\varphi}(t)$ [rad s^{-1}] je uhlová rýchlosť a $\ddot{\varphi}(t)$ [rad s^{-2}] je uhlové zrýchlenie ramena kyvadla. Číselné hodnoty parametrov kyvadla sú uvedené v tabuľke 1.

Tabuľka 1: Parametre kyvadla

Parameter	Hodnota	Jednotky
m	1	kg
l	1	m
g	$9,81$	m s^{-2}
β	$2 \cdot 0,5 \cdot \sqrt{g/l}$	kg m^2 s^{-1}

- Vytvorte numerickú („počítačovú“) simuláciu časového priebehu výchylky kyvadla (kyvadlo ako nelineárny dynamický systém).
  Alternatívy:
- – Schematické znázornenie pre implementáciu v prostredí MATLAB-Simulink.
- – Implementácia s využitím všeobecného ODE solvera (bez Simulinku).

2.2.2 Kyvadlo – simulácia rôznych scenárov

- Simulujte priebeh výchylky kyvadla.
  Scenáre:

a) Začiatočný stav: $\varphi = 0,25$ [rad], $\dot{\varphi} = 0$ [rad/s]. Vstupný signál $u(t) = 0$ [kg m^2 s^{-2}].
b) Začiatočný stav: $\varphi = 0,1$ [rad], $\dot{\varphi} = 1$ [rad/s].Vstupný signál $u(t) = 0$ [kg m^2 s^{-2}].
c) Začiatočný stav: $\varphi = 0$ [rad], $\dot{\varphi} = 0$ [rad/s]. Vstupný signál $u(t) = 3$ [kg m^2 s^{-2}].
d) Začiatočný stav: $\varphi = 0$ [rad], $\dot{\varphi} = 0$ [rad/s]. Vstupný signál $u(t) = 9,81$ [kg m^2 s^{-2}].
e) Začiatočný stav: $\varphi = 0$ [rad], $\dot{\varphi} = 0$ [rad/s]. Vstupný signál $u(t) = 9,82$ [kg m^2 s^{-2}].

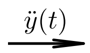
3 Poznámky k úlohám

Schematické znázornenie dif. rovnice

Pre schematické znázornenie dif. rovnice (1) je výhodné túto rovnicu prepísať tak, aby na ľavej strane bola len najvyššia derivácia neznámej, teda signál $\ddot{y}(t)$. Teda

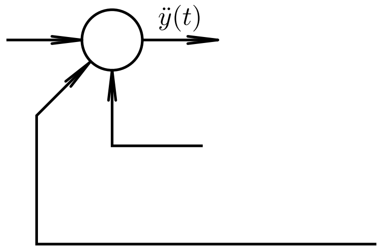
$$\ddot{y}(t) = -a_1\dot{y}(t) - a_0 y(t) + b_0 u(t) \tag{9}$$

Na začiatku máme k dispozícii signál $\ddot{y}(t)$, teda



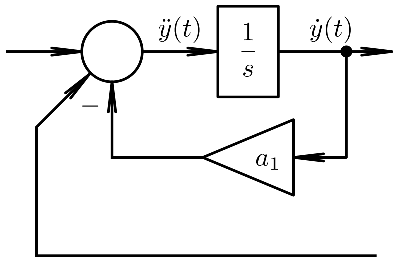
Obr. 2: Bloková schéma rovnice (1), krok prvý.

Signál $\ddot{y}(t)$ je v podstate súčtom troch iných signálov.



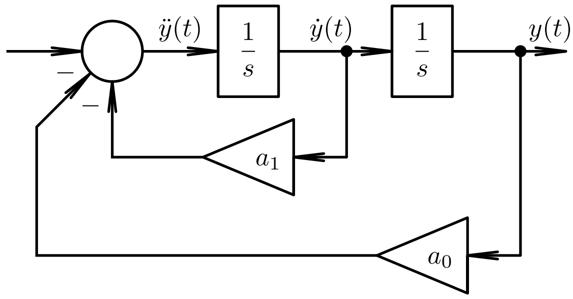
Obr. 3: Bloková schéma rovnice (1), krok druhý.

Prvý signál získame zosilnením signálu $\dot{y}(t)$ zosilňovačom so zosilnením a_1. Signál $\dot{y}(t)$ je možné získať integrovaním signálu $\ddot{y}(t)$.



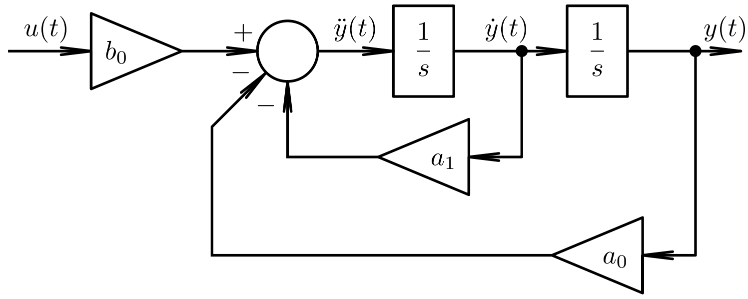
Obr. 4: Bloková schéma rovnice (1), krok tretí.

Druhý signál získame zosilnením signálu $y(t)$ zosilňovačom so zosilnením a_0. Signál $y(t)$ je možné získať integrovaním signálu $\dot{y}(t)$.



Obr. 5: Bloková schéma rovnice (1), krok štvrtý.

Tretí signál získame zosilnením známeho (dostupného) signálu $u(t)$ zosilňovačom so zosilnením b_0.



Obr. 6: Bloková schéma rovnice (1).

Príslušné integrátori vo výslednej schéme musia mať začiatočné podmienky $y(0) = y_0$ a $\dot{y}(0) = z_0$ (podľa (1)).

Rozklad na sústavu dif. rovníc prvého rádu

Vo všeobecnosti platí, že každú diferenciálnu rovnicu vyššieho rádu je možné rozložiť (prepísať, transformovať) na sústavu rovníc prvého rádu. Ich počet je minimálne n, kde n je rád pôvodnej dif. rovnice. Pre rovnicu (1) je rád rovnice 2, teda sústava bude mať minimálne 2 rovnice.

Pre tieto dve nové rovnice je potrebné uvažovať dve veličiny, ktoré budú na mieste neznámej v nových diferenciálnych rovniciach. Označme ich $x_1(t)$ a $x_2(t)$.

Ako prvé zvoľme

$$x_1(t) = y(t) \tag{10}$$

To znamená

$$\dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) \tag{11}$$

čo však nie je v tvare aký hľadáme. Na pravej strane vystupuje pôvodná veličina $y(t)$.

Druhou voľbou preto nech je

$$x_2(t) = \dot{y}(t) \tag{12}$$

pretože potom môžeme písať prvú diferenciálnu rovnicu v tvare

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \tag{13}$$

Ostáva zostaviť druhú diferenciálnu rovnicu.

Keďže sme zvolili (12), tak je zrejmé, že platí

$$\dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t) \tag{14}$$

Otázkou je $\ddot{y}(t) = ?$ Odpoveďou je pôvodná diferenciálna rovnica druhého rádu. Upravme (1) na tvar

$$\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t) \tag{15}$$

$$\ddot{y}(t) = -a_1\dot{y}(t) - a_0 y(t) + b_0 u(t) \tag{16}$$

To znamená, že

$$\dot{x}_2(t) = -a_1\dot{y}(t) - a_0 y(t) + b_0 u(t) \tag{17}$$

čo však stále nie je požadovaný tvar druhej hľadanej diferenciálnej rovnice. Na pravej strane rovnice (17) môžu figurovať len nové veličiny $x_1(t)$ a $x_2(t)$, nie pôvodná veličina $y(t)$. Stačí si však všimnúť skôr zvolené (10) a (12). Potom môžeme písať

$$\dot{x}_2(t) = -a_1 x_2(t) - a_0 x_1(t) + b_0 u(t) \tag{18}$$

čo je druhá hľadaná diferenciálna rovnica prvého rádu.

Diferenciálnu rovnicu druhého rádu (1) sme transformovali na sústavu diferenciálnych rovníc prvého rádu

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \tag{19}$$

$$\dot{x}_2(t) = -a_1 x_2(t) - a_0 x_1(t) + b_0 u(t) \tag{20}$$

Dif. rovnice jednosmerného motora

V zmysle fyzikálnej podstaty jednosmerného s cudzím konštantným budením sú dif. rovnice opisujúce elektromagnetický a mechanický podsystém motora v tvare (4) a (6). Z hľadiska zostavenia numerickej simulácie je výhodné tieto rovnice upraviť do tvaru, ktorý zvýrazňuje jednotlivé signály v zmysle či ide o vstup alebo výstup a tým celkovú štruktúru dynamického systému.

Navyše, je možné konštatovať (tu bez uvádzania podrobností), že ODE solver vo všeobecnosti (teda nástroj realizujúci numerickú simuláciu) pracuje s funkciou, ktorá realizuje funkčný vzťah medzi časovými deriváciami veličín a ich (nederivovanými) hodnotami. Preto je vhodné mať diferenciálne rovnice (prvého rádu) v tvare, keď na ľavej strane sú len samotné časové derivácie.

Rovnice (4) a (6) je možné písať v tvare

$$\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{R}{L}i(t) - \frac{C_{u\omega}}{L}\omega(t) + \frac{1}{L}u(t) \tag{21}$$

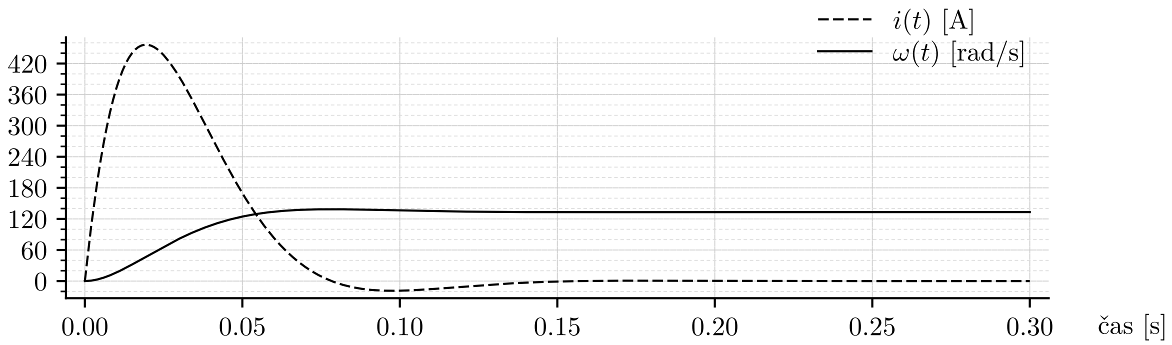
$$\frac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{C_{uM}}{J_m}i(t) \tag{22}$$

Ak by sme chceli ešte viac zvýrazniť vzťah medzi rýchlosťou zmeny signálov (časovou deriváciou), ich samotnými okamžitými hodnotami a inými signálmi, mohli by sme využiť maticový zápis, v tomto prípade:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}(t) \\ \dot{\omega}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{C_{u\omega}}{L} \\ \frac{C_{uM}}{J_m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \tag{23}$$

Vzorová simulácia jednosmerného motora

Vzorový výsledok simulácie štartu motora (mechanicky nezaťaženého) pri konštantnom napájacom napätí 520 [V] je na nasledujúcom obrázku:



Obr. 7: Grafické znázornenie výsledku numerickej simulácie.

Numerická simulácia kyvadla

Diferenciálnu rovnicu opisujúcu kyvadlo (8) je možné prepísať na sústavu rovníc prvého rádu v tvare

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -\frac{\beta}{ml^2}x_2(t) - \frac{g}{l}\sin\left(x_1(t)\right) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix} u(t) \tag{24}$$

kde stavom kyvadla sú dve veličiny: uhol natočenia ramena kyvadla φ a uhlová rýchlosť ramena kyvadla $\dot{\varphi}$. Stavový vektor má preto dva prvky $x^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}$, kde $x_1 = \varphi$ a $x_2 = \dot{\varphi}$.

Vytvorme funkciu, ktorá realizuje sústavu diferenciálnych rovníc (24), avšak, uvažujme, že vstupný signál $u(t)$ je nulový. Teda neuvažujme vstupný signál vôbec. Ešte inými slovami, externý moment sily je nulový, $u(t) = 0$ a preto potom možno písať

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{\beta}{ml^2}x_2 - \frac{g}{l}\sin(x_1) \end{bmatrix} \tag{25}$$

Toto je autonómny nelineárny časovo-invariantný systém druhého rádu. Jeho správanie závisí len od začiatočného stavu na začiatku uvažovaného času.

Funkcia, ktorá realizuje uvedenú sústavu, môže byť nasledovná:

Celý súbor PravaStr.m

```
function dotx = PravaStr(t,x)

global m l g beta

dotx1 =  x(2);
dotx2 = - (beta/m*l^2)*x(2)  -  (g/l)*sin(x(1));

dotx = [dotx1; dotx2];

end
```

Vytvorme „hlavný skript“, v ktorom všetko potrebné nastavíme, a v ktorom budeme volať ODE solver. Ako prvé nech sú globálne premenné (v tomto prípade parametre kyvadla):

Časť súbora hlSkript.m

```
global m l g beta

m = 1; %kg
l = 1; %m
g = 9.81; %m/s^2
beta = 2*0.5*sqrt(g/l); %kgm^2/s
```

Definujme časový vektor, ktorý určí pre aké časové okamihy ODE solver vráti numerické riešenie:

Časť súbora hlSkript.m

```
timeVect = 0:0.1:5;
```

Zavolajme ODE solver, pričom ostáva zvoliť začiatočné podmienky - začiatočný stav kyvadla. Nech začiatočný stav je $x_1(0) = 0.25$ [rad] a $x_2(0) = 0$ [rad/s].

Časť súbora hlSkript.m

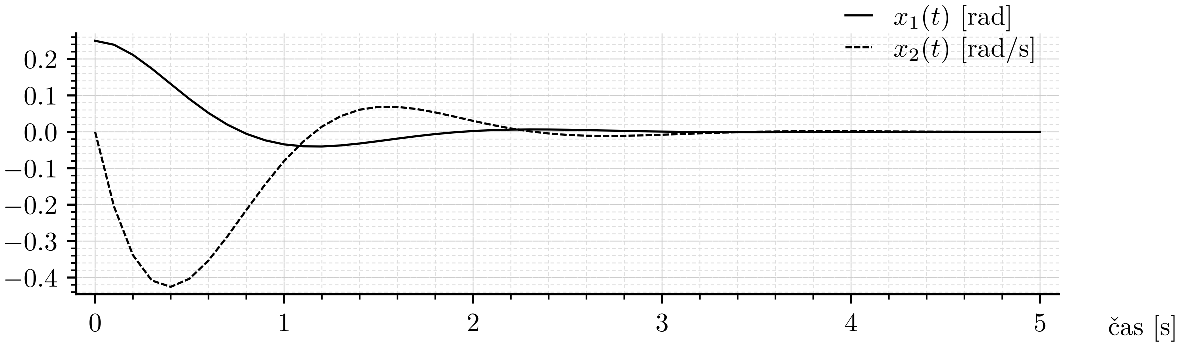
```
[t,x] = ode45(@(t,x) PravaStr(t,x), timeVect, [0.25; 0]);
```

Premenná `x` teraz obsahuje dva stĺpce - prvý stĺpec je prvá stavová veličina a druhý stĺpec je druhá stavová veličina. Pre nakreslenie vypočítaného riešenia:

Časť súbora hlSkript.m

```
figure(1)
plot(t,x)
```

Výsledné numerické riešenie je graficky znázornené na obr. 8.

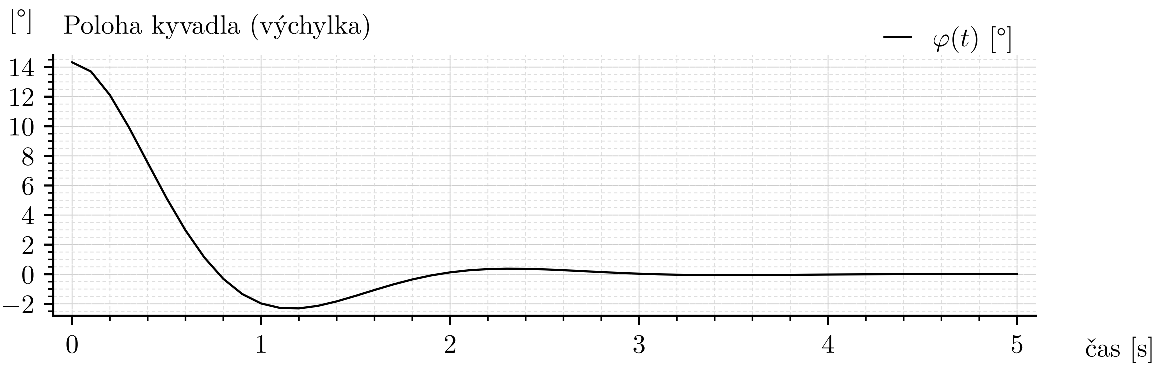


Obr. 8: Grafické zobrazenie numerického riešenia.

Na obr. 8 ide však len o akési základné zobrazenie. Zmysluplnejšie by napríklad mohlo byť, ak by sme do grafu nakreslili len priebeh polohy (výchylky) kyvadla samostatne a navyše nie v radiánoch ale v stupňoch – viď obr. 9. Pre takýto obrázok možno do hl. skriptu pridať:

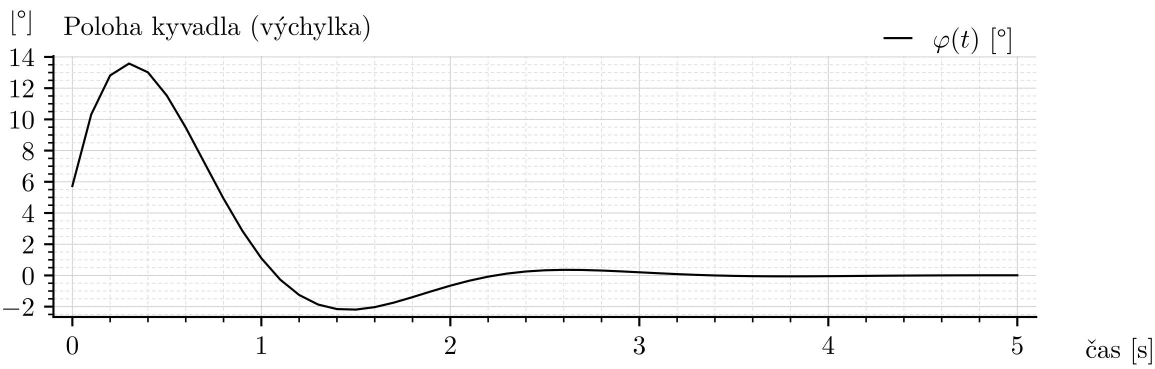
Časť súbora hlSkript.m

```
    figure(2)
    plot(t,x(:,1)*180/pi)
```



Obr. 9: Grafické zobrazenie priebehu polohy kyvadla.

Nech začiatočné podmienky (začiatočný stav) sú: $x_1(0) = 0.1$ [rad] a $x_2(0) = 1$ [rad/s]. Pritom nech vstup $u(t)$ je stále nulový. Výsledok simulácie je na obrázku 10.



Obr. 10: Grafické zobrazenie priebehu polohy kyvadla.

Modifikujme pôvodnú funkciu a skrip v MATLAB-e tak, aby bolo možné simulovať nenulový vstupný signál $u(t)$.

Funkciu, ktorá realizuje sústavu diferenciálnych rovníc (24) aj so vstupným signálom $u(t)$:

Celý súbor PravaStr_u.m

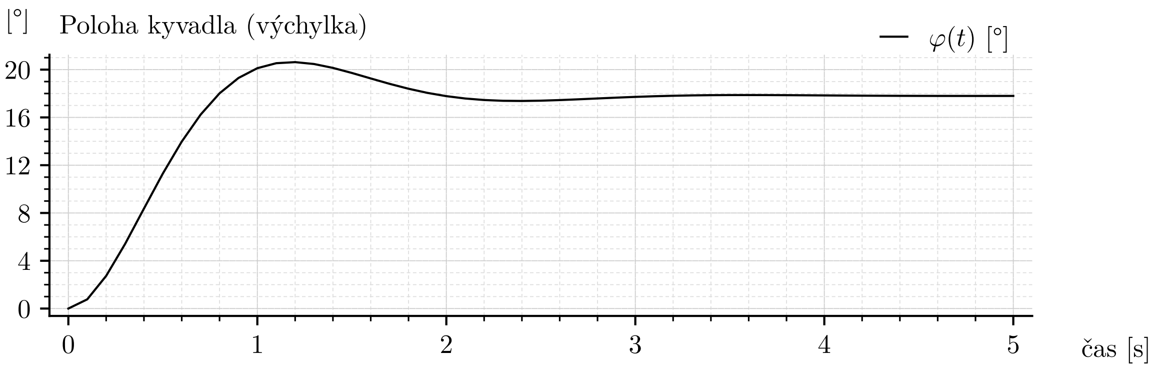
```
function dotx = PravaStr_u(t,x, u)

global m l g beta

dotx1 =  x(2);
dotx2 = - (beta/m*l^2)*x(2) - (g/l)*sin(x(1)) + (1/m*l^2) * u;

dotx = [dotx1; dotx2];

end
```

Vytvorme „hlavný skript“, v ktorom všetko potrebné nastavíme, a v ktorom budeme volať ODE solver:

Súbor hlSkript_u.m

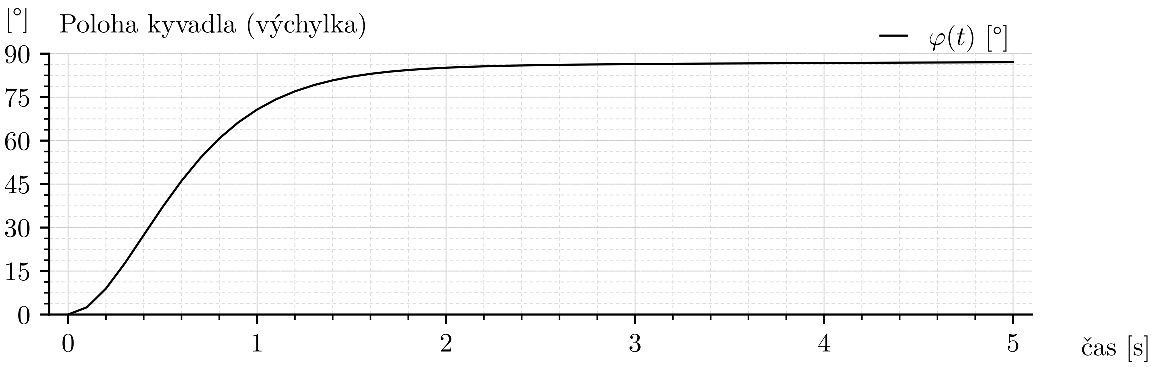
```
global m l g beta

m = 1; %kg
l = 1; %m
g = 9.81; %m/s^2
beta = 2*0.5*sqrt(g/l); %kgm^2/s

u = 3

[t,x] = ode45(@(t,x) PravaStr_u(t,x,u), [0 10], [0; 0]);

figure(3)
plot(t,x(:,1)*180/pi)
```

Simulujme prípad keď napríklad $u(t) = 3$ [kg m^2 s^{-2}] (pozn.: pre lepšiu názornosť uvažujme začiatočné podmienky nulové). Výsledok simulácie je na obrázku 11.



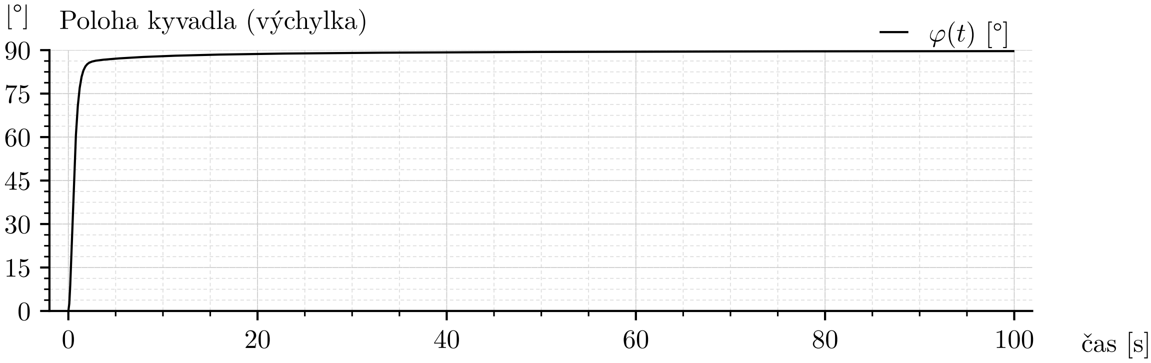
Obr. 11: Grafické zobrazenie priebehu polohy kyvadla.

Zaujímavý prípad je, keď $u(t) = 9,81$ [kg m^2 s^{-2}]. Výsledok simulácie je na obrázku 12.



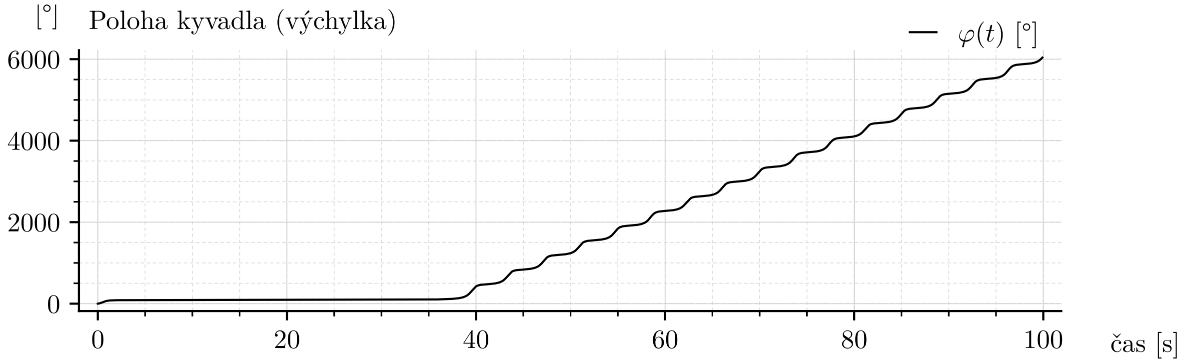
Obr. 12: Grafické zobrazenie priebehu polohy kyvadla.

Avšak, lepšie sa to ukáže, ak predĺžime časový vektor (čas simulácie) – viď obrázok 13. Je zrejmé, že kyvadlo sa približuje k hodnote 90 stupňov.



Obr. 13: Grafické zobrazenie priebehu polohy kyvadla.

Čo sa stane ak $u = 9,82$ [kg m^2 s^{-2}]? (obr. 14)



Obr. 14: Grafické zobrazenie priebehu polohy kyvadla.