Modelovanie a riadenie systémov B
Semestrálna písomka, RT, ZS 2025

1. Vysvetlite rozdiel medzi homogénnou a nehomogénnou diferenciálnou rovnicou. [2b]
2. Schematicky znázornite dynamický systém daný v tvare diferenciálnej rovnice [3b]

$$\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 \dot{u}(t) \qquad y(0) = y_0$$

kde a_0, b_0 sú konštanty a $u(t)$ je známy vstupný signál.

3. Nájdite analytické riešenie diferenciálnej rovnice pričom $y(0) = 2$, $\dot{y}(0) = 1$ a $u(t) = 0$. Použite metódu charakteristickej rovnice. [7b]

$$\ddot{y}(t) + 7\dot{y}(t) + 6y(t) = u(t)$$

4. S využitím Laplaceovej transformácie nájdite analytické riešenie rovnice pričom $y(0) = 2$, $\dot{y}(0) = 1$ a $u(t) = \delta(t)$. [7b]

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 3y(t) = u(t)$$

5. Uvažujte astatický systém prvého rádu (AS1R) daný prenosovou funkciou v tvare

$$G(s) = \frac{b}{s}$$

kde $b \in \mathbb{R}$ je parameter systému. Stanovte časovú funkciu, ktorá je analytickým vyjadrením prechodovej charakteristiky tohto systému. [4b]

6. Uvažujme dynamický systém v tvare

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -6x_1(t) - a_1 x_2(t) + u(t) \\ y(t) &= x_1(t) \end{aligned}$$

kde $x_1(t)$ a $x_2(t)$ sú stavové veličiny systému, $u(t)$ je vstupná veličina systému a $y(t)$ je výstupná veličina systému. Parameter a_1 je neznáma konštanta.

a) Prepíšte do maticového tvaru (definujte signálny vektor $x(t)$, maticu A a vektory b a c): [3b]

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + bu(t) \\ y(t) &= c^{\mathsf{T}} x(t) \end{aligned}$$

b) Koľkého rádu je systém? [2b]

c) Aký je charakteristický polynóm daného dynamického systému? [1b]

d) Navrhnite takú hodnotu parametra a_1 aby bol systém stabilný. [1b]

Tabuľka Laplaceových obrazov:

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}$
$\frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n}$	$s^n F(s) - s^{(n-1)} f(0) \cdots - s^0 \frac{\mathrm{d}^{(n-1)}}{\mathrm{d}t^{(n-1)}} \left(f(0) \right)$
t^n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$	$n!/s^{n+1}$
$\delta(t)$	1
e^{at}	$1/(s-a)$