Dynamická zbierka otázok a úloh

Mení sa v čase...

Obsah

1 Rôzne pojmy a definície

1.1 Úloha

Vlastnými slovami vysvetlite pojem *Kybernetika* (čo je to Kybernetika?).

Riešenie: Kybernetika je veda o riadení a prenose informácií v systémoch zahŕňajúcich stroje, živé organizmy a ľudskú spoločnosť.

1.2 Úloha

Vysvetlite pojem *zosilnenie systému* (alebo *statické zosilnenie systému*).

Riešenie: Zosilnenie systému je pomer medzi ustálenou hodnotou výstupného signálu systému a ustálenou hodnotou vstupného signálu systému.

1.3 Otázka

Ako sa nazýva pomer medzi ustálenou hodnotou výstupného signálu systému a ustálenou hodnotou vstupného signálu systému?

Odpoveď: Zosilnenie systému.

1.4 Úloha

Vysvetlite rozdiel medzi bezzotrvačným a zotrvačným systémom.

Riešenie: Každý systém je z istého hľadiska dynamickým systémom, teda takým, ktorého výstup sa mení v čase pričom aktuálny výstup závisí nielen od aktuálneho vstupu, ale aj od predchádzajúcich hodnôt vstupu a/alebo výstupu. Výstup sa tak zjavne nemení okamžite, systém má zotrvačnosť – zotrvačný systém. Teoreticky má význam uvažovať taký systém, ktorého výstup závisí len od aktuálneho vstupu. Teda výstup sa zmení okamžite po zmene vstupu, systém nemá zotrvačnosť – bezzotrvačný systém. Príkladom bezzotrvačného systému v praxi môže byť napríklad odporový delič elektrického napätia (napätie na výstupe sa zmení prakticky okamžite pri zmene napätia na vstupe).

1.5 Otázka

Čo sú to *začiatočné podmienky* dynamického systému?

Odpoveď: Začiatočné podmienky sú hodnoty veličín v čase považovanom za začiatočný, typicky v čase $t = 0$. Ide o veličiny, ktoré charakterizujú stav systému (stavové veličiny). Napríklad systém opísaný diferenciálnou rovnicou druhého rádu má dve začiatočné podmienky, pretože stav systému je daný minimálne dvoma veličinami.

1.6 Úloha

Vysvetlite pojem *prevodová charakteristika systému*.

Riešenie: Prevodová charakteristika systému je závislosť medzi ustálenou hodnotou výstupného signálu systému a ustálenou hodnotou vstupného signálu systému.

1.7 Otázka

Ako sa nazýva vzájomná závislosť medzi ustálenými hodnotami výstupného signálu systému a ustálenými hodnotami vstupného signálu?

Odpoveď: Prevodová charakteristika systému.

1.8 Otázka

Čo určuje sklon prevodovej charakteristiky?

Odpoveď: Sklon prevodovej charakteristiky určuje zosilnenie systému.

1.9 Úloha

Vysvetlite pojem *prechodová charakteristika systému*.

Riešenie: Prechodová charakteristika systému je časový priebeh výstupného signálu systému po skokovej zmene vstupného signálu s jednotkovou veľkosťou.

1.10 Otázka

Ako sa nazýva časový priebeh výstupného signálu systému po skokovej zmene vstupného signálu s jednotkovou veľkosťou?

Odpoveď: Prechodová charakteristika systému.

1.11 Úloha

Napíšte vzťah (rovnicu), ktorým je definovaná Laplaceova transformácia.

Riešenie: Laplaceova transformácia funkcie času $f(t)$ je definovaná vzťahom

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t \tag{1.1}$$

kde s je komplexná premenná (komplexné číslo). $F(s)$ je obraz funkcie $f(t)$.

1.12 Úloha

Napíšte Laplaceov obraz derivácie časovej funkcie $\frac{\mathrm{d}f(t)}{dt}$

Riešenie: Laplaceov obraz derivácie časovej funkcie je

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right\} = sF(s) - f(0) \tag{1.2}$$

kde $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ a $f(0)$ je začiatočná hodnota funkcie $f(t)$ v čase $t = 0$.

1.13 Úloha

Napíšte Laplaceov obraz jednotkového skoku.

Riešenie: Laplaceov obraz jednotkového skoku je

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s} \tag{1.3}$$

1.14 Úloha

Napíšte Laplaceov obraz Dirackovho impulzu.

Riešenie: Laplaceov obraz Dirackovho impulzu je

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1 \tag{1.4}$$

1.15 Úloha

Definujte prenosovú funkciu systému.

Riešenie: Prenosova funkcia je pomer Laplaceovho obrazu výstupného signálu systému k Laplaceovmu obrazu vstupného signálu systému pri nulových začiatočných podmienkach systému.

1.16 Otázka

Ako sa nazýva pomer Laplaceovho obrazu výstupného signálu systému k Laplaceovmu obrazu vstupného signálu systému pri nulových začiatočných podmienkach systému?

Odpoveď: Prenosová funkcia systému.

1.17 Úloha

Vysvetlite pojem *regulačná odchýlka*.

Riešenie: Regulačná odchýlka $e(t)$ je rozdiel žiadanej hodnoty $w(t)$ (setpoint) a výstupnej veličiny riadeného systému $y(t)$, teda

$$e(t) = w(t) - y(t) \tag{1.5}$$

Ak je regulačná odchýlka nulová, tak cieľ riadenia je splnený.

2 Diferenciálne rovnice vo všeobecnosti

2.1 Otázka

Čo je riešením obyčajnej diferenciálnej rovnice (vo všeobecnosti)?

Odpoveď: V kontexte predmetu MRS hovoríme o diferenciálnych rovniciach opisujúcich dynamický systém. Riešením diferenciálnej rovnice je funkcia, v uvedenom kontexte funkcia času (časová závislosť), ktorú keď dosadíme do diferenciálnej rovnice, tak táto rovnica platí.

2.2 Úloha

Vysvetlite rozdiel medzi homogénnou a nehomogénnou obyčajnou diferenciálnou rovnicou.

Riešenie: Homogénnou je rovnica vtedy, keď sa v rovnici nachádza len funkcia času, ktorá je neznámou. Iné funkcie času sa v rovnici nevyskytujú. Z hľadiska systému to znamená, že systém má len výstup, len výstupný signál.

Nehomogénnou je diferenciálna rovnica vtedy, keď obsahuje aj iné funkcie času ako neznámu. Z hľadiska systému to znamená, že systém má okrem výstupu aj vstup, teda vstupný signál.

2.3 Úloha

Uveďte príklad homogénnej obyčajnej diferenciálnej rovnice.

Riešenie:

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + ay(t) = 0 \tag{2.1}$$

Neznámou v tejto rovnici je funkcia času $y(t)$. Koeficient a je reálne číslo.

2.4 Úloha

Uveďte príklad nehomogénnej obyčajnej diferenciálnej rovnice.

Riešenie:

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + ay(t) = u(t) \tag{2.2}$$

Neznámou v tejto rovnici je funkcia času $y(t)$. Koeficient a je reálne číslo. kde $u(t)$ je funkcia času. Nie je to však neznáma funkcia času.

2.5 Úloha

Vysvetlite pojem *analytické riešenie* obyčajnej diferenciálnej rovnice.

Riešenie: Analytické riešenie diferenciálnej rovnice je funkcia času, ktorú je možné vyjadriť (zapísať) analyticky (matematicky). Napríklad $y(t) = 5\ t$ je analyticky zapísaná funkcia času (t je čas).

2.6 Úloha

Vysvetlite pojem *numerické riešenie* obyčajnej diferenciálnej rovnice.

Riešenie: Numerické riešenie diferenciálnej rovnice je funkcia času, inými slovami časová postupnosť, ktorá je vyjadrená (zapísaná) pomocou hodnôt, čísiel. Napríklad časová postupnosť vyjadrená tabuľkou priraďujúcou k časovým hodnotám hodnoty veličiny, ktorá je neznámou v diferenciálnej rovnici.

t	$y(t)$
0	0
1	5
2	10
$\vdots$	$\vdots$

Takáto časová postupnosť (funkcia času) môže byť validné riešenie diferenciálnej ale nie je to analyticky zapísaná časová funkcia. Je vyjadrená pomocou hodnôt, čísiel.

2.7 Otázka

Aký je rozdiel medzi analytickým a numerickým riešením diferenciálnej rovnice?

Odpoveď: Rozdiel je v spôsobe vyjadrenia (zápisu) funkcie času, ktorá je riešením diferenciálnej rovnice. Analytické riešenie je zapísané matematicky (analyticky), napríklad $y(t) = e^{-at}$, a numerické riešenie je zapísané pomocou hodnôt, čísiel, napríklad v tabuľke, kde prvý stĺpec sú časové hodnoty a druhý stĺpec sú hodnoty veličiny $y(t)$.

2.8 Úloha

Nasledujúcu diferenciálnu rovnicu druhého rádu prepíšte na sústavu diferenciálnych rovníc prvého rádu.

$$a_2\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t) \qquad a_2, a_1, a_0, b_0 \in \mathbb{R} \tag{2.3}$$

Riešenie: Ako prvé *zvoľme*

$$x_1(t) = y(t) \tag{2.4}$$

To znamená

$$\dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) \tag{2.5}$$

čo však nie je v tvare aký hľadáme. Na pravej strane vystupuje pôvodná veličina $y(t)$.

Druhou voľbou preto nech je

$$x_2(t) = \dot{y}(t) \tag{2.6}$$

pretože potom môžeme písať prvú diferenciálnu rovnicu v tvare

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \tag{2.7}$$

Ostáva zostaviť druhú diferenciálnu rovnicu.

Keďže sme zvolili (2.6), tak je zrejmé, že platí

$$\dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t) \tag{2.8}$$

Otázkou je $\ddot{y}(t) = ?$ Odpoveďou je pôvodná diferenciálna rovnica druhého rádu. Upravme (2.3) na tvar

$$\ddot{y}(t) + \frac{a_1}{a_2}\dot{y}(t) + \frac{a_0}{a_2}y(t) = \frac{b_0}{a_2}u(t) \tag{2.9}$$

$$\ddot{y}(t) = -\frac{a_1}{a_2}\dot{y}(t) - \frac{a_0}{a_2}y(t) + \frac{b_0}{a_2}u(t) \tag{2.10}$$

To znamená, že

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{a_1}{a_2}\dot{y}(t) - \frac{a_0}{a_2}y(t) + \frac{b_0}{a_2}u(t) \tag{2.11}$$

čo však stále nie je požadovaný tvar druhej hľadanej diferenciálnej rovnice. Na pravej strane rovnice (2.11) môžu figurovať len nové veličiny $x_1(t)$ a $x_2(t)$, nie pôvodná veličina $y(t)$. Stačí si však všimnúť skôr zvolené (2.4) a (2.6). Potom môžeme písať

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{a_1}{a_2}x_2(t) - \frac{a_0}{a_2}x_1(t) + \frac{b_0}{a_2}u(t) \tag{2.12}$$

čo je druhá hľadaná diferenciálna rovnica prvého rádu.

2.9 Úloha

Sústavu rovníc

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \tag{2.13a}$$

$$\dot{x}_2(t) = -a_0x_1(t) - a_1x_2(t) + b_0u(t) \tag{2.13b}$$

$$y(t) = x_1(t) \tag{2.13c}$$

prepíšte do maticového tvaru:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \tag{2.14a}$$

$$y(t) = c^\mathsf{T}x(t) \tag{2.14b}$$

(definujte signálny vektor $x(t)$, maticu A a vektory b a c).

Riešenie: Ide o sústavu dvoch diferenciálnych rovníc prvého rádu kde neznámymi sú funkcie času $x_1(t)$ a $x_2(t)$. Stavový vektor je teda

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

Potom môžeme písať

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u(t) \tag{2.16}$$

a teda

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix} \tag{2.17}$$

Výstupná rovnica s využitím stavového vektora je

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

a teda

$$c^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

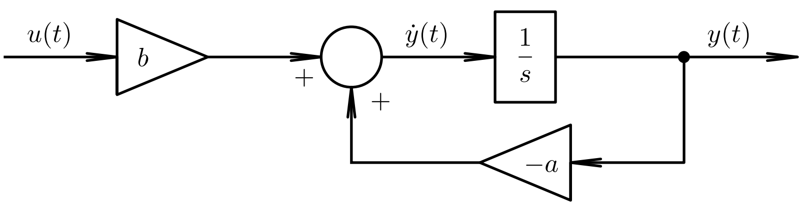
2.10 Úloha

Schematicky znázornite dynamický systém daný v tvare diferenciálnej rovnice

$$\dot{y}(t) + ay(t) = bu(t) \qquad y(0) = y_0$$

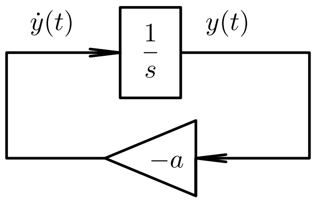
kde a, b sú konštanty a $u(t)$ je známy vstupný signál.

Riešenie:



2.11 Úloha

Podľa zadanej blokovej schémy zostavte diferenciálnu rovnicu, ktorá popisuje dynamický systém.



Riešenie: Diferenciálna rovnica je

$$\dot{y}(t) + ay(t) = 0 \qquad y(0) = y_0 \tag{2.20}$$

3 Analytické riešenie lineárnej obyčajnej diferenciálnej rovnice – metóda charakteristickej rovnice

Poznámka

Pri hľadaní riešenia metódou charakteristickej rovnice je možné využiť nasledujúce konštatovania:

1. Ak má charakteristická rovnica n navzájom rôznych riešení s_i pre $i = 1, \dots, n$, potom zodpovedajúce fundamentálne riešenia (módy) sú: $e^{s_1 t}$, $e^{s_2 t}$, $\dots$, $e^{s_n t}$.
2. Ak sa medzi n koreňmi charakteristického polynómu vyskytne k-násobný koreň, vytvoríme k lineárne závislých riešení: $e^{s_i t}$, $te^{s_i t}$, $\dots$, $t^{k-1}e^{s_i t}$
3. V prípade výskytu dvojice komplexne združených koreňov charakteristického polynómu, $s_{1,2} = \alpha \pm j\beta$, kde j je imaginárna jednotka, využijeme na určenie fundamentálnych riešení Eulerov vzťah
$$e^{(\alpha \pm j\beta)t} = e^{\alpha t}\left(\cos\beta t \pm j\sin\beta t\right)$$
Preto potom možno písať príslušné fundamentálne riešenie v tvare
$$c_1 e^{(\alpha + j\beta)t} + c_2 e^{(\alpha - j\beta)t} = e^{\alpha t}\left(c'\cos\beta t + c''\sin\beta t\right)$$
kde sú imaginárne časti nulové.

3.1 Úloha

Nájdite analytické riešenie diferenciálnej rovnice

$$\dot{y}(t) + ay(t) = 0 \qquad y(0) = y_0 \qquad a \in \mathbb{R},\ y_0 \in \mathbb{R}$$

Riešenie: (metódou charakteristickej rovnice)

Prvým krokom je stanovenie charakteristickej rovnice. Tú je možné určiť nahradením derivácií neznámej funkcie mocninami pomocnej premennej, označme ju s. Napríklad prvú deriváciu $\dot{y}(t)$ nahradíme s^1, nultú deriváciu $y(t)$ nahradíme s^0. Charakteristická rovnica pre danú diferenciálnu rovnicu bude

$$s + a = 0 \tag{3.1}$$

Druhým krokom je stanovenie fundamentálnych riešení diferenciálnej rovnice, ktoré sú dané riešeniami charakteristickej rovnice. Riešením charakteristickej rovnice je

$$s_1 = -a \tag{3.2}$$

Fundamentálne riešenie je teda len jedno

$$y_{f1}(t) = e^{-at} \tag{3.3}$$

Tretím krokom je stanovenie všeobecného riešenia dif. rovnice. Je lineárnou kombináciou fundamentálnych riešení. Teda

$$y(t) = c_1 e^{-at} \tag{3.4}$$

kde $c_1 \in \mathbb{R}$ je konštanta.

Štvrtým krokom je stanovenie konkrétneho riešenia dif. rovnice v prípade, ak sú dané začiatočné podmienky. Konkrétne ide o stanovenie hodnoty konštanty c_1. Pre čas $t = 0$ má všeobecné riešenie tvar

$$y(0) = c_1 \, e^{(-a)0} = c_1 \tag{3.5}$$

Samotná hodnota $y(0)$ je známa, keďže máme začiatočnú podmienku $y(0) = y_0$. Takže

$$c_1 = y_0 \tag{3.6}$$

To znamená, že riešenie úlohy je:

$$y(t) = y_0 \, e^{(-a)t} \tag{3.7}$$

3.2 Úloha

Nájdite analytické riešenie diferenciálnej rovnice. Použite metódu charakteristickej rovnice.

$$\ddot{y}(t) + (a+b)\dot{y}(t) + aby(t) = 0 \qquad y(0) = y_0 \qquad \dot{y}(0) = z_0 \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

Riešenie: Prvým krokom je stanovenie charakteristickej rovnice. V tomto prípade

$$s^2 + (a+b)s + ab = 0 \tag{3.8}$$

V druhom kroku pre stanovenie fundamentálnych riešení hľadáme riešenia charakteristickej rovnice. Vo všeobecnosti

$$s_{1,2} = \frac{-(a+b) \pm \sqrt{(a+b)^2 - 4ab}}{2} \tag{3.9}$$

avšak v tomto prípade tiež vidíme, že

$$s^2 + (a+b)s + ab = (s+a)(s+b) \tag{3.10}$$

Riešenia charakteristickej rovnice teda sú

$$s_1 = -a \tag{3.11a}$$

$$s_2 = -b \tag{3.11b}$$

Zodpovedajúce fundamentálne riešenia sú

$$y_{f1}(t) = e^{-at} \tag{3.12a}$$

$$y_{f2}(t) = e^{-bt} \tag{3.12b}$$

Tretím krokom je stanovenie všeobecného riešenia dif. rovnice. Je lineárnou kombináciou fundamentálnych riešení. Teda

$$y(t) = c_1 e^{-at} + c_2 e^{-bt} \tag{3.13}$$

kde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sú konštanty.

Vo štvrtom kroku je možné na základe začiatočných podmienok stanoviť konkrétne riešenie. Pre čas $t = 0$ má všeobecné riešenie tvar

$$y(0) = c_1 \, e^{(-a)0} + c_2 \, e^{(-b)0} = c_1 + c_2 \tag{3.14}$$

Derivácia všeobecného riešenia je

$$\dot{y}(t) = -ac_1 e^{-at} - bc_2 e^{-bt} \tag{3.15}$$

Pre čas $t = 0$ má derivácia všeobecného riešenia tvar

$$\dot{y}(0) = -ac_1 - bc_2 \tag{3.16}$$

Z uvedeného vyplýva sústava dvoch rovníc o dvoch neznámych konštantách c_1 a c_2

$$c_1 + c_2 = y_0 \tag{3.17a}$$
$$-ac_1 - bc_2 = z_0 \tag{3.17b}$$

Do druhej rovnice dosaďme $c_1 = y_0 - c_2$

$$-a(y_0 - c_2) - bc_2 = z_0 \tag{3.18a}$$
$$-ay_0 + ac_2 - bc_2 = z_0 \tag{3.18b}$$
$$c_2(a - b) = z_0 + ay_0 \tag{3.18c}$$
$$c_2 = \frac{z_0 + ay_0}{a - b} \tag{3.18d}$$

potom

$$c_1 = y_0 - c_2 \tag{3.19a}$$
$$c_1 = y_0 - \frac{z_0 + ay_0}{a - b} \tag{3.19b}$$
$$c_1 = \frac{y_0(a - b) - z_0 - ay_0}{a - b} \tag{3.19c}$$
$$c_1 = \frac{y_0 a - y_0 b - z_0 - ay_0}{a - b} \tag{3.19d}$$
$$c_1 = \frac{-y_0 b - z_0}{a - b} \tag{3.19e}$$

Konkrétne riešenie úlohy teda je

$$y(t) = \frac{-y_0 b - z_0}{a - b} e^{-at} + \frac{z_0 + ay_0}{a - b} e^{-bt} \tag{3.20}$$

3.3 Úloha

Nájdite analytické riešenie diferenciálnej rovnice. Použite metódu charakteristickej rovnice.

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = u(t) \qquad y(0) = 3,\ \dot{y}(0) = -2 \qquad u(t) = 0$$

Riešenie: Prvým krokom je stanovenie charakteristickej rovnice. V tomto prípade

$$s^2 + 3s + 2 = 0 \tag{3.21}$$

V druhom kroku pre stanovenie fundamentálnych riešení hľadáme riešenia charakteristickej rovnice. Riešením charakteristickej rovnice sú

$$s_1 = -1 \tag{3.22a}$$
$$s_2 = -2 \tag{3.22b}$$

Zodpovedajúce fundamentálne riešenia sú

$$y_{f1}(t) = e^{-t} \tag{3.23a}$$
$$y_{f2}(t) = e^{-2t} \tag{3.23b}$$

Tretím krokom je stanovenie všeobecného riešenia dif. rovnice. Je lineárnou kombináciou fundamentálnych riešení. Teda

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} \tag{3.24}$$

kde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sú konštanty.

Vo štvrtom kroku je možné na základe začiatočných podmienok stanoviť konkrétne riešenie. Pre čas $t = 0$ má všeobecné riešenie tvar

$$y(0) = c_1 \, e^{(-1)0} + c_2 \, e^{(-2)0} = c_1 + c_2 \tag{3.25}$$

Tým sme takpovediac zúžitkovali informáciu o začiatočnej hodnote $y(0) = 3$. Druhá začiatočná podmienka sa týka derivácie riešenia. Derivácia všeobecného riešenia je

$$\dot{y}(t) = -c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{-2t} \tag{3.26}$$

Pre čas $t = 0$ má derivácia všeobecného riešenia tvar

$$\dot{y}(0) = -c_1 - 2c_2 \tag{3.27}$$

Z uvedeného vyplýva sústava dvoch rovníc o dvoch neznámych konštantách c_1 a c_2

$$c_1 + c_2 = 3 \tag{3.28a}$$
$$-c_1 - 2c_2 = -2 \tag{3.28b}$$

Platí $c_2 = 3 - c_1$, a teda

$$-c_1 - 2(3 - c_1) = -2 \tag{3.29a}$$
$$-c_1 - 6 + 2c_1 = -2 \tag{3.29b}$$
$$c_1 = 4 \tag{3.29c}$$

potom

$$c_2 = 3 - c_1 \tag{3.30a}$$
$$c_2 = 3 - 4 \tag{3.30b}$$
$$c_2 = -1 \tag{3.30c}$$

Našli sme funkciu $y(t)$, ktorá je riešením diferenciálnej rovnice pre konkrétne začiatočné podmienky

$$y(t) = 4e^{-t} - e^{-2t} \tag{3.31}$$

4 Analytické riešenie lineárnej obyčajnej diferenciálnej rovnice – využitie Laplaceovej transformácie

Poznámka

Pri využití Laplaceovej transformácie je potrebné využiť tabuľku Laplaceových obrazov signálov, z ktorej vybrané položky sú uvedené v nasledujúcej tabuľke:

$f(t)$	$F(s)$
$\dot{f}(t)$	$sF(s) - f(0)$
$\dfrac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n}$	$s^n F(s) - s^{(n-1)} f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$
1	$\dfrac{1}{s}$
$\delta(t)$	1
e^{-at}	$\dfrac{1}{s+a}$

4.1 Úloha

Nájdite analytické riešenie diferenciálnej rovnice. Použite Laplaceovu transformáciu.

$$\dot{y}(t) - ay(t) = 0 \qquad y(0) = y_0 \tag{4.1}$$

Riešenie: Na jednotlivé signály v tejto rovnici aplikujme LT.

$$(sY(s) - y(0)) - aY(s) = 0 \tag{4.2}$$

kde $Y(s)$ je obrazom signálu $y(t)$. $Y(s)$ je teda obrazom riešenia rovnice. Vyjadrime $Y(s)$:

$$\begin{aligned}(s-a)Y(s) - y(0) &= 0\\ Y(s) &= \frac{1}{(s-a)}y(0)\end{aligned} \tag{4.3}$$

V tomto prípade je priamo z tabuľky Laplaceových obrazov a originálov zrejmé, že

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{Y(s)\right\} = y(t) = e^{at}y(0) \tag{4.4}$$

čím sme priamo našli riešenie danej diferenciálnej rovnice s danou začiatočnou podmienkou.

$$y(t) = e^{at}y_0 \tag{4.5}$$

4.2 Úloha

Nájdite analytické riešenie diferenciálnej rovnice. Použite Laplaceovu transformáciu.

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 3y(t) = 0 \qquad y(0) = 2,\ \dot{y}(0) = 1 \tag{4.6}$$

Riešenie: Na jednotlivé signály v tejto rovnici aplikujme LT.

$$s\left(sY(s) - y(0)\right) - \dot{y}(0) + 4\left(sY(s) - y(0)\right) + 3Y(s) = 0 \tag{4.7}$$

$$\left(s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)\right) + 4\left(sY(s) - y(0)\right) + 3Y(s) = 0 \tag{4.8}$$

kde $Y(s)$ je obrazom signálu $y(t)$. $Y(s)$ je teda obrazom riešenia rovnice. Vyjadrime $Y(s)$:

$$s^2Y(s) + 4sY(s) + 3Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) - 4y(0) = 0 \tag{4.9}$$

$$s^2Y(s) + 4sY(s) + 3Y(s) - s\cdot 2 - 1 - 4\cdot 2 = 0 \tag{4.10}$$

$$\left(s^2 + 4s + 3\right)Y(s) = 2s + 9 \tag{4.11}$$

$$Y(s) = \frac{2s+9}{s^2+4s+3} \tag{4.12}$$

Uvedený výraz $Y(s)$ je potrebné rozložiť na parciálne zlomky, pričom korene menovateľa sú

$$s^2 + 4s + 3 = (s+1)(s+3) \tag{4.13}$$

Teda

$$Y(s) = \frac{2s+9}{(s+1)(s+3)} = \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s+1} \tag{4.14}$$

kde A a B sú konštanty. Zapíšme túto rovnosť v tvare

$$2s + 9 = A(s+1) + B(s+3) \tag{4.15}$$

Uvedené platí pre akékoľvek s, teda môžeme dosadiť ľubovoľné hodnoty. Pre $s = -3$ platí

$$2\cdot(-3) + 9 = A\cdot(-3+1) + B\cdot 0 \tag{4.16}$$

$$3 = -2A \tag{4.17}$$

$$A = -\frac{3}{2} \tag{4.18}$$

Pre $s = -1$ platí

$$2 \cdot (-1) + 9 = A \cdot 0 + B \cdot (-1 + 3) \tag{4.19}$$
$$7 = 2B \tag{4.20}$$
$$B = \frac{7}{2} \tag{4.21}$$

Teda

$$Y(s) = -\frac{3}{2}\frac{1}{s+3} + \frac{7}{2}\frac{1}{s+1} \tag{4.22}$$

Na záver využijeme tabuľku Laplaceových obrazov a originálov na nájdenie riešenia diferenciálnej rovnice

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{Y(s)\right\} = y(t) = -\frac{3}{2}e^{-3t} + \frac{7}{2}e^{-t} \tag{4.23}$$

4.3 Úloha

Nájdite analytické riešenie diferenciálnej rovnice. Použite Laplaceovu transformáciu.

$$\ddot{y}(t) + (a+b)\dot{y}(t) + aby(t) = 0 \qquad y(0) = y_0 \qquad \dot{y}(0) = z_0 \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

Riešenie: Na jednotlivé členy diferenciálnej rovnice aplikujeme Laplaceovu transformáciu.

$$\mathcal{L}\{\ddot{y}(t)\} = s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) \tag{4.24a}$$
$$\mathcal{L}\{(a+b)\dot{y}(t)\} = (a+b)(sY(s) - y(0)) \tag{4.24b}$$
$$\mathcal{L}\{aby(t)\} = abY(s) \tag{4.24c}$$

Potom rovnica v Laplaceovej oblasti bude

$$s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) + (a+b)(sY(s) - y(0)) + abY(s) = 0 \tag{4.25a}$$
$$s^2Y(s) - sy_0 - z_0 + (a+b)(sY(s) - y_0) + abY(s) = 0 \tag{4.25b}$$
$$s^2Y(s) - sy_0 - z_0 + asY(s) + bsY(s) - ay_0 - by_0 + abY(s) = 0 \tag{4.25c}$$

Členy obsahujúce $Y(s)$ zoskupíme na ľavej strane rovnice

$$Y(s)(s^2 + as + bs + ab) = sy_0 + z_0 + ay_0 + by_0 \tag{4.26}$$

Obrazom riešenia dif. rovnice teda je

$$Y(s) = \frac{sy_0 + z_0 + ay_0 + by_0}{s^2 + (a+b)s + ab} \tag{4.27}$$

Zaujíma nás však originál tohto obrazu. V uvedenom tvare obrazu však nie je možné nájsť jeho originál s využitím tabuľky Laplaceových obrazov signálov. Obraz je potrebné prepísať na jednoduchšie výrazy, typicky je účelným rozklad na parciálne zlomky. Menovateľ $s^2 + (a+b)s + ab$ je kvadratický polynóm, ktorý má dva rôzne korene a tie sú

$$s_1 = -a \tag{4.28a}$$
$$s_2 = -b \tag{4.28b}$$

Takže platí

$$Y(s) = \frac{sy_0 + z_0 + ay_0 + by_0}{s^2 + (a+b)s + ab} = \frac{sy_0 + z_0 + ay_0 + by_0}{(s+a)(s+b)} = \frac{A}{s+a} + \frac{B}{s+b} \tag{4.29}$$

kde A a B sú neznáme konštanty. To je možné zapísať aj v tvare

$$sy_0 + z_0 + ay_0 + by_0 = A(s+b) + B(s+a) \tag{4.30}$$

Uvedené platí pre akékoľvek s, teda aj pre $s = -a$ a $s = -b$. Pre $s = -a$ dostaneme

$$-ay_0 + z_0 + ay_0 + by_0 = A(-a+b) + B(-a+a) \tag{4.31a}$$
$$z_0 + by_0 = A(-a+b) \tag{4.31b}$$
$$A = \frac{z_0 + by_0}{-a+b} \tag{4.31c}$$

Pre $s = -b$ dostaneme

$$-by_0 + z_0 + ay_0 + by_0 = A(-b+b) + B(-b+a) \tag{4.32a}$$
$$z_0 + ay_0 = B(-b+a) \tag{4.32b}$$
$$B = \frac{z_0 + ay_0}{-b+a} \tag{4.32c}$$

Obraz riešenia dif. rovnice potom je v tvare

$$Y(s) = \frac{z_0 + by_0}{-a+b}\left(\frac{1}{s+a}\right) + \frac{z_0 + ay_0}{-b+a}\left(\frac{1}{s+b}\right) \tag{4.33}$$

Originálom k výrazu $\frac{1}{s+a}$ je v zmysle tabuľky Laplaceových obrazov signálov funkcia e^{-at}. Originálom k výrazu $\frac{1}{s+b}$ je v zmysle tabuľky Laplaceových obrazov signálov funkcia e^{-bt}. Preto originálom obrazu riešenia dif. rovnice je

$$y(t) = \frac{z_0 + by_0}{-a+b} e^{-at} + \frac{z_0 + ay_0}{-b+a} e^{-bt} \tag{4.34}$$

Našli sme riešenie diferenciálnej rovnice pre dané začiatočné podmienky.

4.4 Úloha

Nájdite analytické riešenie diferenciálnej rovnice. Použite Laplaceovu transformáciu.

$$\dot{y}(t) + ay(t) = bu(t) \qquad y(0) = 0 \qquad u(t) = \delta(t) \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

kde $\delta(t)$ je Dirackov impulz.

Riešenie: Na jednotlivé členy diferenciálnej rovnice aplikujeme Laplaceovu transformáciu.

$$\mathcal{L}\{\dot{y}(t)\} = sY(s) - y(0) \tag{4.35a}$$
$$\mathcal{L}\{ay(t)\} = aY(s) \tag{4.35b}$$
$$\mathcal{L}\{bu(t)\} = bU(s) = b \cdot 1 \tag{4.35c}$$

Potom rovnica v Laplaceovej oblasti bude

$$sY(s) - y(0) + aY(s) = b \tag{4.36a}$$
$$sY(s) + aY(s) = b \tag{4.36b}$$

Členy obsahujúce $Y(s)$ zoskupíme na ľavej strane rovnice

$$Y(s)(s+a) = b \tag{4.37}$$

Obrazom riešenia dif. rovnice teda je

$$Y(s) = \frac{b}{s+a} = b\,\frac{1}{s+a} \tag{4.38}$$

Zaujíma nás však originál tohto obrazu. V tomto prípade je priamo z tabuľky Laplaceových obrazov signálov zrejmé, že originálom je funkcia

$$y(t) = b\,e^{-at} \tag{4.39}$$

čím sme našli riešenie diferenciálnej rovnice.

4.5 Úloha

Nájdite analytické riešenie diferenciálnej rovnice. Použite Laplaceovu transformáciu.

$$\dot{y}(t) + ay(t) = bu(t) \qquad y(0) = y_0 \qquad u(t) = 1 \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

kde $u(t)$ je v tejto súvislosti skoková zmena vstupného signálu v čase $t = 0$.

Riešenie: Na jednotlivé členy diferenciálnej rovnice aplikujeme Laplaceovu transformáciu.

$$\mathcal{L}\{\dot{y}(t)\} = sY(s) - y(0) \tag{4.40a}$$

$$\mathcal{L}\{ay(t)\} = aY(s) \tag{4.40b}$$

$$\mathcal{L}\{bu(t)\} = bU(s) = b \cdot \frac{1}{s} \tag{4.40c}$$

Potom rovnica v Laplaceovej oblasti bude

$$sY(s) - y(0) + aY(s) = b\frac{1}{s} \tag{4.41a}$$

$$sY(s) - y_0 + aY(s) = b\frac{1}{s} \tag{4.41b}$$

Členy obsahujúce $Y(s)$ zoskupíme na ľavej strane rovnice

$$Y(s)(s + a) = y_0 + b\frac{1}{s} \tag{4.42}$$

Obrazom riešenia dif. rovnice teda je

$$Y(s) = \frac{y_0}{s + a} + b\frac{1}{s(s + a)} \tag{4.43}$$

Zaujíma nás však originál tohto obrazu. Prvý výraz je

$$Y_1(s) = \frac{y_0}{s + a} \tag{4.44}$$

Súvisí so začiatočnou podmienkou a jeho originálom (podľa tabuľky Laplaceových obrazov) je funkcia

$$y_1(t) = y_0 e^{-at} \tag{4.45}$$

Druhý výraz je

$$Y_2(s) = \frac{b}{s(s + a)} \tag{4.46}$$

Súvisí so vstupným signálom $u(t)$ a nie je možné priamo určiť jeho originál z tabuľky Laplaceových obrazov signálov. Preto je potrebné využiť rozklad na parciálne zlomky. V tomto prípade

$$Y_2(s) = \frac{b}{s(s + a)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + a} \tag{4.47}$$

kde A a B sú neznáme konštanty. To je možné zapísať aj v tvare

$$b = A(s + a) + Bs \tag{4.48}$$

Uvedené platí pre akékoľvek s, teda aj pre $s = 0$ a $s = -a$. Pre $s = 0$ dostaneme

$$b = Aa \tag{4.49a}$$

$$A = \frac{b}{a} \tag{4.49b}$$

Pre $s = -a$ dostaneme

$$b = B(-a) \tag{4.50a}$$

$$B = \frac{-b}{a} \tag{4.50b}$$

Teda

$$Y_2(s) = \frac{b}{a}\left(\frac{1}{s}\right) - \frac{b}{a}\left(\frac{1}{s+a}\right) \tag{4.51}$$

a originálna funkcia je

$$y_2(t) = \frac{b}{a} - \frac{b}{a}e^{-at} \tag{4.52}$$

Súčet $y_1(t) + y_2(t)$ je riešením diferenciálnej rovnice

$$y(t) = y_0 e^{-at} + \frac{b}{a} - \frac{b}{a}e^{-at} \tag{4.53}$$

4.6 Úloha

Nájdite analytické riešenie diferenciálnej rovnice. Použite Laplaceovu transformáciu.

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 3y(t) = u(t) \qquad y(0) = 3 \qquad \dot{y}(0) = -2 \qquad u(t) = 1$$

Riešenie: Na jednotlivé členy diferenciálnej rovnice aplikujeme Laplaceovu transformáciu.

$$\mathcal{L}\{\ddot{y}(t)\} = s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) \tag{4.54a}$$
$$\mathcal{L}\{4\dot{y}(t)\} = 4(sY(s) - y(0)) \tag{4.54b}$$
$$\mathcal{L}\{3y(t)\} = 3Y(s) \tag{4.54c}$$
$$\mathcal{L}\{u(t)\} = U(s) = \frac{1}{s} \tag{4.54d}$$

Potom rovnica v Laplaceovej oblasti bude

$$s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) + 4sY(s) - 4y(0) + 3Y(s) = \frac{1}{s} \tag{4.55a}$$
$$s^2Y(s) - s \cdot 3 - (-2) + 4sY(s) - 4 \cdot 3 + 3Y(s) = \frac{1}{s} \tag{4.55b}$$
$$s^2Y(s) - 3s + 2 + 4sY(s) - 12 + 3Y(s) = \frac{1}{s} \tag{4.55c}$$
$$s^2Y(s) + 4sY(s) + 3Y(s) = 3s + 10 + \frac{1}{s} \tag{4.55d}$$

Členy obsahujúce $Y(s)$ zoskupíme na ľavej strane rovnice

$$Y(s)(s^2 + 4s + 3) = 3s + 10 + \frac{1}{s} \tag{4.56}$$

Obrazom riešenia dif. rovnice teda je

$$Y(s) = \frac{3s+10}{s^2+4s+3} + \frac{1}{s(s^2+4s+3)} \tag{4.57}$$

Zaujíma nás však originál tohto obrazu. Prvý výraz je

$$Y_1(s) = \frac{3s+10}{s^2+4s+3} \tag{4.58}$$

Súvisí so začiatočnými podmienkami a nie je možné priamo určiť jeho originál z tabuľky Laplaceových obrazov signálov. Preto je potrebné využiť rozklad na parciálne zlomky. Výraz v menovateli $s^2 + 4s + 3$ je kvadratický polynóm, ktorý má dva rôzne korene a tie sú

$$s_{1,2} = \frac{-(4) \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} \tag{4.59}$$

teda

$$s_1 = -1 \tag{4.60a}$$
$$s_2 = -3 \tag{4.60b}$$

Potom v tomto prípade

$$Y_1(s) = \frac{3s+10}{s^2+4s+3} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+3} \tag{4.61}$$

kde A a B sú neznáme konštanty. To je možné zapísať aj v tvare

$$3s + 10 = A(s+3) + B(s+1) \tag{4.62}$$

Uvedené platí pre akékoľvek s, teda aj pre $s = -1$ a $s = -3$. Pre $s = -1$ dostaneme

$$-3 + 10 = A(-1+3) \tag{4.63a}$$
$$7 = 2A \tag{4.63b}$$
$$A = \frac{7}{2} \tag{4.63c}$$

Pre $s = -3$ dostaneme

$$-9 + 10 = B(-3+1) \tag{4.64a}$$
$$1 = -2B \tag{4.64b}$$
$$B = -\frac{1}{2} \tag{4.64c}$$

Teda

$$Y_1(s) = \frac{3s+10}{s^2+4s+3} = \frac{7}{2}\left(\frac{1}{s+1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+3}\right) \tag{4.65}$$

a originálna funkcia je

$$y_1(t) = \frac{7}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t} \tag{4.66}$$

Druhý výraz je

$$Y_2(s) = \frac{1}{s(s^2+4s+3)} \tag{4.67}$$

Súvisí so vstupným signálom $u(t)$ a nie je možné priamo určiť jeho originál z tabuľky Laplaceových obrazov signálov. Preto je potrebné využiť rozklad na parciálne zlomky. V tomto prípade

$$Y_2(s) = \frac{1}{s(s^2+4s+3)} = \frac{C}{s} + \frac{D}{s+1} + \frac{E}{s+3} \tag{4.68}$$

kde C, D a E sú neznáme konštanty. To je možné zapísať aj v tvare

$$1 = C(s+1)(s+3) + Ds(s+3) + Es(s+1) \tag{4.69}$$

Uvedené platí pre akékoľvek s, teda aj pre $s = 0$, $s = -1$ a $s = -3$. Pre $s = 0$ dostaneme

$$1 = C(0+1)(0+3) \tag{4.70a}$$
$$1 = 3C \tag{4.70b}$$
$$C = \frac{1}{3} \tag{4.70c}$$

Pre $s = -1$ dostaneme

$$1 = D(-1)(-1+3) \tag{4.71a}$$
$$1 = 2D \tag{4.71b}$$
$$D = \frac{1}{2} \tag{4.71c}$$

Pre $s = -3$ dostaneme

$$1 = E(-3)(-3+1) \tag{4.72a}$$
$$1 = 6E \tag{4.72b}$$
$$E = \frac{1}{6} \tag{4.72c}$$

Teda

$$Y_2(s) = \frac{1}{s(s^2+4s+3)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{s}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+1}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{s+3}\right) \tag{4.73}$$

a originálna funkcia je

$$y_2(t) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{-3t} \tag{4.74}$$

Súčet $y_1(t) + y_2(t)$ je riešením diferenciálnej rovnice

$$y(t) = \frac{7}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{-3t} \tag{4.75a}$$

$$y(t) = 4e^{-t} - \frac{1}{3}e^{-3t} + \frac{1}{3} \tag{4.75b}$$

5 Prepis tvaru: dif. rovnica ↔ prenosová funkcia ↔ stavový priestor

5.1 Úloha

Nájdite prenosovú funkciu dynamického systému daného diferenciálnou rovnicou v tvare

$$a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = b_0u(t) \qquad a_0, a_1, b_0 \in \mathbb{R} \tag{5.1}$$

Riešenie: Aplikujme Laplaceovu transformáciu na jednotlivé členy diferenciálnej rovnice.

$$a_1\left(sY(s) - y(0)\right) + a_0Y(s) = b_0U(s) \tag{5.2}$$

Začiatočné podmienky sú nulové, teda $y(0) = 0$, potom

$$a_1sY(s) + a_0Y(s) = b_0U(s) \tag{5.3}$$

Hľadáme $\frac{Y(s)}{U(s)}$, osamostatnime preto $Y(s)$

$$Y(s)\left(a_1s + a_0\right) = b_0U(s) \tag{5.4}$$

$$Y(s) = \frac{b_0}{a_1s + a_0}U(s) \tag{5.5}$$

Prenosová funkcia systému je teda

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{a_1s + a_0} \tag{5.6}$$

5.2 Úloha

Nájdite prenosovú funkciu dynamického systému daného diferenciálnou rovnicou v tvare

$$\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = b_0u(t) \qquad a_0, a_1, b_0 \in \mathbb{R} \tag{5.7}$$

Riešenie: Aplikujme Laplaceovu transformáciu na jednotlivé členy diferenciálnej rovnice.

$$s\left(sY(s) - y(0)\right) - \dot{y}(0) + a_1\left(sY(s) - y(0)\right) + a_0Y(s) = b_0U(s) \tag{5.8}$$

Začiatočné podmienky sú nulové, teda $y(0) = 0$ a $\dot{y}(0) = 0$, potom

$$s^2Y(s) + a_1sY(s) + a_0Y(s) = b_0U(s) \tag{5.9}$$

Osamostatnime $Y(s)$:

$$Y(s)\left(s^2 + a_1s + a_0\right) = b_0U(s) \tag{5.10}$$

$$Y(s) = \frac{b_0}{s^2 + a_1s + a_0}U(s) \tag{5.11}$$

Prenosová funkcia systému je teda

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{s^2 + a_1s + a_0} \tag{5.12}$$

5.3 Úloha

Pre dynamický systém opísaný pomocou prenosovej funkcie nájdite zodpovedajúcu diferenciálnu rovnicu.

$$G(s) = \frac{b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \tag{5.13}$$

Riešenie: Platí $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$, teda

$$Y(s) = G(s)U(s) \tag{5.14}$$

$$Y(s) = \frac{b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} U(s) \tag{5.15}$$

$$(s^2 + a_1 s + a_0)Y(s) = b_0 U(s) \tag{5.16}$$

$$s^2 Y(s) + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) = b_0 U(s) \tag{5.17}$$

Prvý člen rovnice je v podstate

$$s^2 Y(s) = s^2 Y(s) - s \cdot 0 - 0 \tag{5.18}$$

pretože prenosová funkcia predpokladá nulové začiatočné podmienky. Originálom tohto obrazu je

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{s^2 Y(s)\right\} = \ddot{y}(t) \tag{5.19}$$

Obdobne pre druhý člen rovnice

$$a_1 s Y(s) \Longrightarrow a_1 \dot{y}(t) \tag{5.20}$$

Tretí člen je jednoducho

$$a_0 Y(s) \Longrightarrow a_0 y(t) \tag{5.21}$$

a pravá strana rovnice je

$$b_0 U(s) \Longrightarrow b_0 u(t) \tag{5.22}$$

Celá diferenciálna rovnica má tvar

$$\ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t) \tag{5.23}$$

5.4 Úloha

Pre dynamický systém opísaný pomocou prenosovej funkcie nájdite zodpovedajúcu diferenciálnu rovnicu.

$$G(s) = \frac{b_1 s}{s^2 + a_1 s + a_0} \tag{5.24}$$

Riešenie: Platí $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$, teda

$$Y(s) = G(s)U(s) \tag{5.25}$$

$$Y(s) = \frac{b_1 s}{s^2 + a_1 s + a_0} U(s) \tag{5.26}$$

$$(s^2 + a_1 s + a_0)Y(s) = b_1 s U(s) \tag{5.27}$$

$$s^2 Y(s) + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) = b_1 s U(s) \tag{5.28}$$

Pomocou tabuľky Laplaceových obrazov a originálov nájdeme originály jednotlivých členov rovnice.

$$s^2 Y(s) \Longrightarrow \ddot{y}(t) \qquad a_1 s Y(s) \Longrightarrow a_1 \dot{y}(t) \quad a_0 Y(s) \Longrightarrow a_0 y(t) \quad b_1 s U(s) \Longrightarrow b_1 \dot{u}(t) \tag{5.29}$$

Celá diferenciálna rovnica má tvar

$$\ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_1 \dot{u}(t) \tag{5.30}$$

5.5 Úloha

Sústavu rovníc

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \tag{5.31a}$$
$$\dot{x}_2(t) = -a_0x_1(t) - a_1x_2(t) + b_0u(t) \tag{5.31b}$$
$$y(t) = x_1(t) \tag{5.31c}$$

prepíšte do maticového tvaru:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \tag{5.32a}$$
$$y(t) = c^\mathsf{T}x(t) \tag{5.32b}$$

(definujte signálny vektor $x(t)$, maticu A a vektory b a c).

Riešenie: Neznámymi v zadaných dif. rovniciach sú $x_1(t)$ a $x_2(t)$. Nech tieto signály tvoria stavový vektor

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \tag{5.33}$$

potom je zrejmé, že

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -a_0x_1(t) - a_1x_2(t) + b_0u(t) \end{bmatrix} \tag{5.34}$$

Uvedené môžeme prepísať do maticového tvaru

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u(t) \tag{5.35}$$

Teda

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix} \tag{5.36}$$

Rovnica dávajúca do vzťahu zavedený stavový vektor a výstup systému je

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \tag{5.37}$$

Teda

$$c^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.38}$$

5.6 Úloha

Dynamický systém daný prenosovou funkciu prepíšte do opisu v stavovom priestore (stanovte stavové veličiny).

$$G(s) = \frac{b_0}{s^2 + a_1s + a_0} \tag{5.39}$$

Riešenie: Danej prenosovej funkcii zodpovedá rovnica

$$(s^2 + a_1s + a_0)Y(s) = b_0U(s) \tag{5.40}$$
$$s^2Y(s) + a_1sY(s) + a_0Y(s) = b_0U(s) \tag{5.41}$$

a teda zodpovedajúca diferenciálna rovnica má tvar

$$\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = b_0u(t) \tag{5.42}$$
$$\ddot{y}(t) = -a_1\dot{y}(t) - a_0y(t) + b_0u(t) \tag{5.43}$$

Túto rovnicu druhého rádu je možné prepísať na sústavu dvoch rovníc prvého rádu. Zvoľme $x_1(t) = y(t)$ a $x_2(t) = \dot{y}(t)$. Potom platí

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \tag{5.44}$$

$$\dot{x}_2(t) = -a_0 x_1(t) - a_1 x_2(t) + b_0 u(t) \tag{5.45}$$

Nech stavový vektor je

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \tag{5.46}$$

potom je zrejmé, že

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -a_0 x_1(t) - a_1 x_2(t) + b_0 u(t) \end{bmatrix} \tag{5.47}$$

Uvedené môžeme prepísať do maticového tvaru

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u(t) \tag{5.48}$$

a rovnica dávajúca do vzťahu zavedený stavový vektor a výstup systému je

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \tag{5.49}$$

čím sme prepísali systém daný prenosovou funkciou do opisu v stavovom priestore.

6 Prenosová funkcia ako model dynamického systému

6.1 Úloha

Uvažujte statický systém prvého rádu (SS1R) daný prenosovou funkciou v tvare

$$Y(s) = \frac{b_0}{s + a_0} U(s) \tag{6.1}$$

kde $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ sú parametre systému. Stanovte časovú funkciu, ktorá je analytickým vyjadrením prechodovej charakteristiky tohto systému.

Riešenie: Prechodová charakteristika systému je odpoveď systému na jednotkový skok. V Laplaceovej oblasti je jednotkový skok daný ako

$$U(s) = \frac{1}{s} \tag{6.2}$$

Dosadením do opisu systému získame obraz výstupnej veličiny systému:

$$Y(s) = \frac{b_0}{s + a_0} \cdot \frac{1}{s} = \frac{b_0}{s(s + a_0)} \tag{6.3}$$

Tento obraz výstupnej veličiny presne zodpovedá situácii, ktorá definuje prechodovú charakteristiku systému. Začiatočné podmienky sú nulové a na vstupe systému je jednotkový skok. Je potrebné nájsť originál tohto obrazu. Rozložme daný výraz na parciálne zlomky:

$$Y(s) = \frac{b_0}{s(s + a_0)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + a_0} \tag{6.4}$$

kde A a B sú neznáme konštanty. To je možné zapísať aj v tvare

$$b_0 = A(s + a_0) + Bs \tag{6.5}$$

Uvedené platí pre akékoľvek s, teda aj pre $s = 0$ a $s = -a_0$. Pre $s = 0$ platí

$$b_0 = Aa_0 \tag{6.6}$$

$$A = \frac{b_0}{a_0} \tag{6.7}$$

Pre $s = -a_0$ platí

$$b_0 = B(-a_0) \tag{6.8}$$

$$B = \frac{-b_0}{a_0} \tag{6.9}$$

Teda

$$Y(s) = \frac{b_0}{a_0}\left(\frac{1}{s}\right) - \frac{b_0}{a_0}\left(\frac{1}{s + a_0}\right) \tag{6.10}$$

Na záver využijeme tabuľku Laplaceových obrazov a originálov na nájdenie originálu obrazu výstupnej veličiny systému:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{Y(s)\right\} = y(t) = \frac{b_0}{a_0} - \frac{b_0}{a_0}e^{-a_0 t} \tag{6.11}$$

čím sme našli analytické vyjadrenie prechodovej charakteristiky systému.

6.2 Úloha

Určte charakteristický polynóm prenosovej funkcie

$$G(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \tag{6.12}$$

Riešenie: Charakteristický polynóm prenosovej je menovateľ prenosovej funkcie, teda

$$a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 \tag{6.13}$$

6.3 Úloha

Určte póly dynamického systému daného prenosovou funkciou

$$G(s) = \frac{as + b}{s^2 + (c + d)s + cd} \tag{6.14}$$

Riešenie: Póly systému sú korene charakteristického polynómu, teda korene menovateľa prenosovej funkcie. Charakteristický polynóm je

$$s^2 + (c + d)s + cd \tag{6.15}$$

Je zrejmé, že platí

$$s^2 + (c + d)s + cd = (s + c)(s + d) \tag{6.16}$$

Korene charakteristického polynómu sú

$$s_1 = -c \qquad s_2 = -d \tag{6.17}$$

6.4 Úloha

Vyšetrite stabilitu dynamického systému daného prenosovou funkciou

$$G(s) = \frac{5s}{s^2 + 5s + 6} \tag{6.18}$$

Riešenie: Stabilita dynamického systému je daná pólmi systému, teda koreňmi charakteristického polynómu. Charakteristický polynóm je menovateľ prenosovej funkcie, teda

$$s^2 + 5s + 6 \tag{6.19}$$

Korene charakteristického polynómu sú

$$s_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2} \tag{6.20}$$

$$s_1 = -2 \qquad s_2 = -3 \tag{6.21}$$

Korene sú reálne a záporné, ležia teda v ľavej polrovine komplexnej roviny. Preto je systém stabilný.

6.5 Úloha

Nájdite hodnoty koeficientov a a b, pre ktoré je dynamický systém stabilný

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + (a+b)s + ab} \tag{6.22}$$

Riešenie: Stabilita dynamického systému je daná pólmi systému, teda koreňmi charakteristického polynómu. Charakteristický polynóm je menovateľ prenosovej funkcie, teda

$$s^2 + (a+b)s + ab \tag{6.23}$$

Je zrejmé, že platí

$$s^2 + (a+b)s + ab = (s+a)(s+b) \tag{6.24}$$

Korene charakteristického polynómu sú

$$s_1 = -a \qquad s_2 = -b \tag{6.25}$$

Pre stabilitu systému musia byť oba korene v ľavej polrovine komplexnej roviny, teda ich reálna časť musí byť záporná. Preto pre hodnoty koeficientov musí platiť

$$a > 0 \qquad b > 0 \tag{6.26}$$

6.6 Úloha

Určte ustálenú hodnotu (konečnú hodnotu), na ktorej sa ustáli výstup systému daného prenosovou funkciou

$$G(s) = \frac{b_0}{s + a_0} \tag{6.27}$$

keď vstupom systému je jednotkový skok.

Riešenie 1: Laplaceov obraz jednotkového skoku je

$$U(s) = \frac{1}{s} \tag{6.28}$$

Obraz výstupnej veličiny systému je teda

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{b_0}{s + a_0} \cdot \frac{1}{s} = \frac{b_0}{(s + a_0)s} \tag{6.29}$$

čo je samozrejme obrazom riešenia diferenciálnej rovnice systému pri jednotkovom skoku na vstupe. Je možné využiť vetu o konečnej hodnote riešenia dif. rovnice, ktorá hovorí, že ak poznáme obraz riešenia $Y(s)$, tak konečnú hodnotu riešenia môžeme nájsť ako

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{s \to 0} sY(s) \tag{6.30}$$

Potom

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{b_0}{(s+a_0)s} \tag{6.31}$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{b_0}{s+a_0} \tag{6.32}$$

$$= \frac{b_0}{a_0} \tag{6.33}$$

Takže ustálená hodnota výstupnej veličiny systému je $y(\infty) = \frac{b_0}{a_0}$.

Riešenie 2: Alternatívne by sme mohli uvážiť, že systém daný prenosovou funkciou (6.27) je možné prepísať na diferenciálnu rovnicu v tvare

$$\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t) \tag{6.34}$$

Na vstupe je jednotkový skok, teda $u(t) = 1$, a teda aj $u(\infty) = 1$. V ustálenom stave sú zmeny signálov nulovém teda $\dot{y}(t) = 0$. Potom diferenciálna rovnica v ustálenom stave má tvar

$$0 + a_0 y(\infty) = b_0 u(\infty) \tag{6.35}$$

Zaujíma nás

$$y(\infty) = \frac{b_0}{a_0} u(\infty) = \frac{b_0}{a_0} \cdot 1 = \frac{b_0}{a_0} \tag{6.36}$$

6.7 Úloha

Určte rád astatizmu dynamického systému daného prenosovou funkciou

$$G(s) = \frac{b_0}{s^2 + a_0 s} \tag{6.37}$$

Riešenie: Rád astatizmu systému je daný počtom pólov v počiatku komplexnej roviny, teda počtom koreňov charakteristického polynómu rovného nule. Charakteristický polynóm je menovateľ prenosovej funkcie, teda

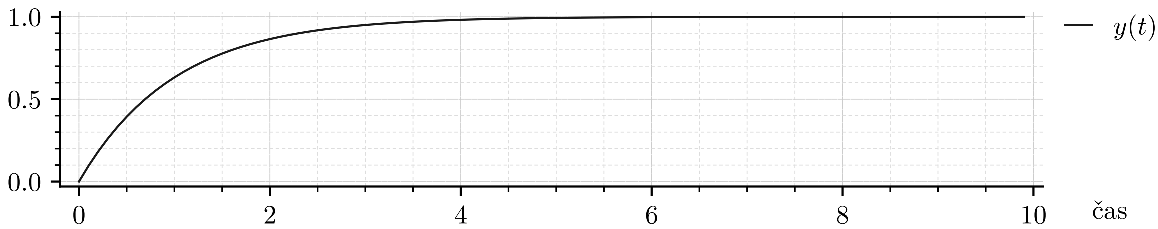
$$s^2 + a_0 s = s(s + a_0) \tag{6.38}$$

Charakteristický polynóm má jeden koreň rovný nule, teda systém má astatizmus prvého rádu.

6.8 Úloha

Načrtnite prechodovú charakteristiku statického systému prvého rádu.

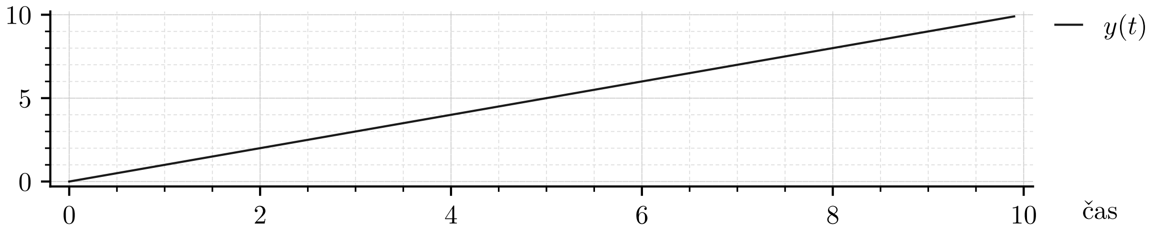
Riešenie:



6.9 Úloha

Načrtnite prechodovú charakteristiku astatického systému prvého rádu.

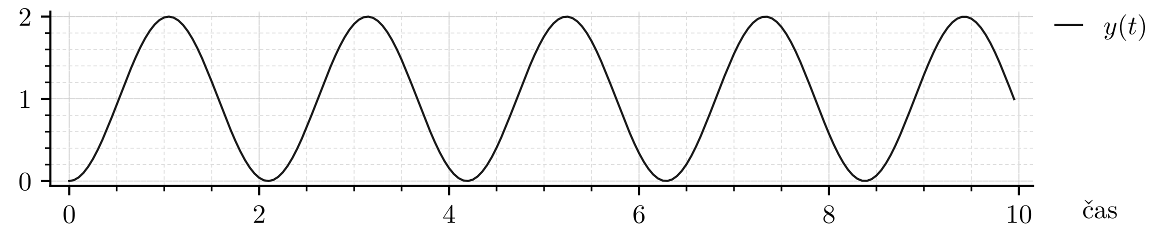
Riešenie:



6.10 Úloha

Načrtnite prechodovú charakteristiku statického systému druhého rádu, ktorého charakteristický polynóm je v tvare $A(s) = s^2 + 2\beta\omega_0 s + \omega_0^2$ pričom $\beta = 0$.

Riešenie:

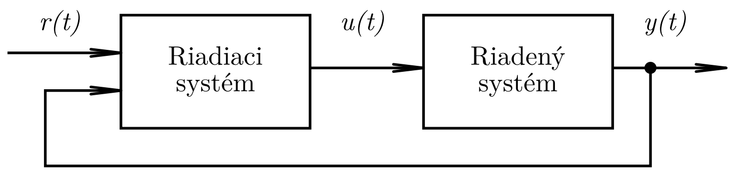


7 Klasický lineárny uzavretý regulačný obvod (URO)

7.1 Úloha

Schematicky znázornite všeobecný regulačný obvod, opíšte bloky a signály, z ktorých pozostáva.

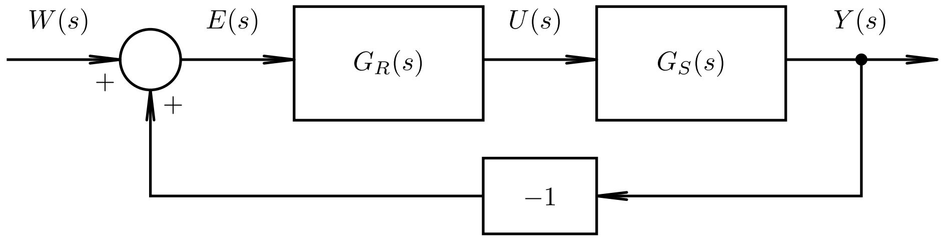
Riešenie: Regulačný obvod sa vo všeobecnosti skladá z riadiaceho systému a z riadeného systému. Zahŕňa tri základné signály. Výstupnú veličinu $y(t)$, akčný zásah $u(t)$ a referenčný signál $r(t)$ (označuje sa aj ako žiadaná hodnota (setpoint) $w(t)$). Schematicky sa znázorňuje nasledovne:



7.2 Úloha

Schematicky znázornite lineárny uzavretý regulačný obvod, opíšte prenosové funkcie a signály (L-obrazy signálov), z ktorých pozostáva.

Riešenie:



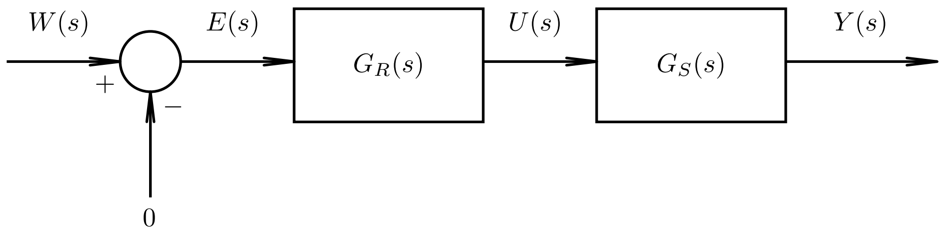
Všetky bloky v schéme sú tvorené prenosovými funkciami (aj -1 je v princípe prenosová funkcia) pričom $G_R(s)$ je prenosová funkcia regulátora a $G_S(s)$ je prenosová funkcia riadeného systému (hovorí sa tiež prenosová funkcia riadenej sústavy).

Namiesto časových signálov je možné uvažovať ich Laplaceove obrazy (L-obrazy), teda $W(s)$, $E(s)$, $U(s)$ a $Y(s)$, pričom $W(s)$ je L-obraz signálu žiadanej hodnoty, $E(s)$ je L-obraz regulačnej odchýlky, $U(s)$ je L-obraz akčného zásahu a $Y(s)$ je L-obraz výstupnej veličiny.

7.3 Úloha

Vysvetlite pojem *prenosová funkcia otvoreného regulačného obvodu*.

Riešenie: Ak v klasickom lineárnom uzavretom regulačnom obvode (URO) neuvažujeme spätnú väzbu, vznikne otvorený regulačný obvod (obvod nie je uzavretý):



Vidíme, že $G_R(s)$ a $G_S(s)$ sú v sérii a teda máme

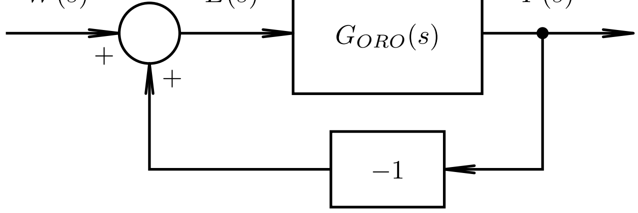
$$G_{ORO}(s) = G_R(s)G_S(s) \tag{7.1}$$

pričom $G_{ORO}(s)$ je prenosová funkcia otvoreného regulačného obvodu.

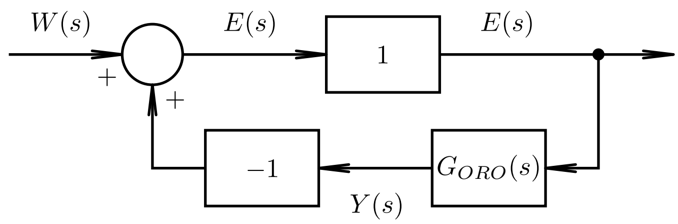
7.4 Úloha

S využitím algebry prenosových funkcii odvoďte prenosovú funkciu regulačnej odchýlky v klasickom lineárnom URO.

Riešenie: Znázornime klasický lineárny URO s využitím prenosovej funkcie otvoreného regulačného obvodu:



Ak hovoríme o prenosovej funkcii regulačnej odchýlky, máme na mysli pomer L-obrazov kde ako výstup vystupuje L-obraz regulačnej odchýlky $E(s)$ a ako vstup L-obraz žiadanej hodnoty $W(s)$. Schematicky znázornené:



Uplatnením algebry prenosových funkcií

$$\frac{E(s)}{W(s)} = \frac{1}{1 + G_{ORO}(s)} \tag{7.2}$$

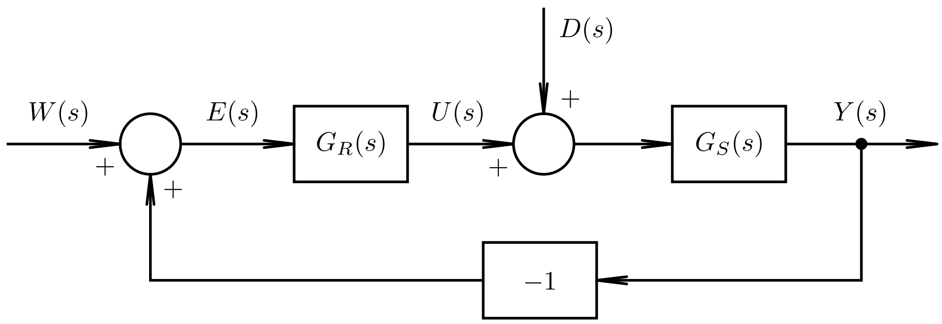
a ak uvážime, že vo všeobecnosti $G_{ORO}(s) = G_R(s)G_S(s)$, tak

$$\frac{E(s)}{W(s)} = \frac{1}{1 + G_R(s)G_S(s)} \tag{7.3}$$

čo je prenosová funkcia regulačnej odchýlky v klasickom lineárnom URO.

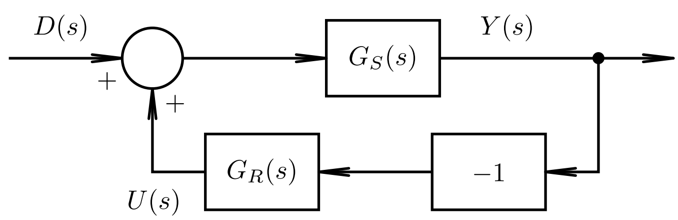
7.5 Úloha

Majme lineárny uzavretý regulačný obvod s uvažovaním poruchovej veličiny $D(s)$ ako je znázornené na obr.:



S využitím algebry prenosových funkcií odvoďte prenosovú funkciu definovanú pomerom L-obrazov $\frac{Y(s)}{D(s)}$ pri $W(s) = 0$.

Riešenie: Ak uvažujeme $W(s) = 0$, tak je možné schému zjednodušiť nasledovne:



Uplatnením algebry prenosových funkcií

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G_S(s)}{1 + G_S(s)G_R(s)} \tag{7.4}$$

8 PID regulátor

8.1 Úloha

Stručne opíšte PID regulátor.

Riešenie: Skratka PID plynie zo skutočnosti, že výstup PID regulátora je tvorený súčtom troch zložiek: Proporcionálnej (P), Integračnej (I) a Derivačnej (D). Celkovým vstupom PID regulátora je regulačná odchýlka $e(t)$. Výstupom je akčný zásah $u(t)$.

P-zložka používa signál samotnej regulačnej odchýlky $e(t)$ a násobí ho zosilnením s hodnotou r_0. I-zložka najskôr vytvorí signál, ktorý nazvime integrál regulačnej odchýlky a tento je zosilnený konštantou r_{-1}. D-zložka najskôr vytvorí signál, ktorý nazvime derivácia regulačnej odchýlky a tento je zosilnený konštantou r_1. Akčný zásah $u(t)$ je:

$$u(t) = r_0 e(t) + r_{-1} \int e(t)\mathrm{d}t + r_1 \frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t} \tag{8.1}$$

8.2 Úloha

Napíšte prenosovú funkciu PID regulátora.

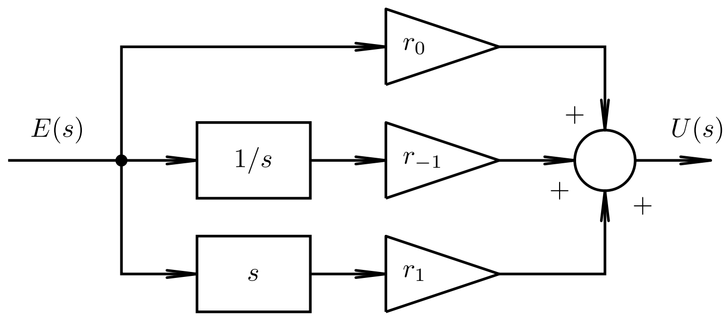
Riešenie:

$$G_R(s) = r_0 + r_{-1}\frac{1}{s} + r_1 s \tag{8.2}$$

8.3 Úloha

Nakreslite blokovú schému PID regulátora.

Riešenie:



9 Rôzne úlohy

9.1 Úloha

Uvažujme lineárny dynamický systém v tvare

$$\dot{x}(t) = a\,x(t) + b\,u(t) \tag{9.1a}$$
$$y(t) = x(t) \tag{9.1b}$$

kde $x(t)$ je stavová veličina systému, $u(t)$ je vstupná veličina systému a $y(t)$ je výstupná veličina systému. Parameter $b = 1$ a parameter a je neznáma konštanta.

a) Koľkého rádu je systém?

b) Aký je charakteristický polynóm daného dynamického systému?

c) Pre ktoré a je systém stabilný a pre ktoré a je nestabilný? Nájdite intervaly.

Riešenie:

a) Parameter a je skalár, nie je to matica – prípadne môžeme povedať, že je to matica 1×1. Vo všeobecnosti je táto matica štvorcová a jej rozmer zodpovedá rádu systému. V tomto prípade je teda systém prvého rádu.

b) Keďže ide o systém prvého rádu, je jednoduché priamo určiť jeho prenosovú funkciu. Charakteristický polynóm systému je potom menovateľ prenosovej funkcie. Keďže $y(t) = x(t)$ tak diferenciálna rovnica systému je

$$\dot{y}(t) = a\,y(t) + b\,u(t) \tag{9.2}$$

Aplikujme Laplaceovu transformáciu na obe strany rovnice

$$sY(s) - y(0) = aY(s) + bU(s) \tag{9.3}$$

Prenosová funkcia je pomer výstupného a vstupného signálu v Laplaceovej oblasti pri nulových začiatočných podmienkach, teda $y(0) = 0$, potom

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b}{s - a} \tag{9.4}$$

Charakteristický polynóm systému je teda

$$(s - a) \tag{9.5}$$

c) Stabilita lineárneho systému je daná pólmi systému, teda koreňmi charakteristického polynómu. Ak všetky korene charakteristického polynómu ležia v ľavej polrovine komplexnej roviny, teda ich reálna časť je záporná, systém je stabilný. V tomto prípade je koreň charakteristického polynómu $s = a$. Preto systém je stabilný pre $a < 0$ a nestabilný pre $a > 0$. Pre $a = 0$ je systém na hranici stability.