Cvičenie úvodné

Obsah

Cieľom úvodného cvičenia je poskytnúť podnety k pojmu *systém* z hľadiska predmetu Modelovanie a riadenie systémov. Materiál je zostavený tak, že študentstvo by sa ním malo vedieť zaoberať bez potreby predchádzajúcej prednášky. Je tým ošetrený prípad keď je v rámci týždňa nejaký termín cvičení skôr ako termín prednášky.

Nasledujúce dva konkrétne príklady je možné využiť na úvodnú diskusiu k nasledujúcim pojmom a témam:

- Systém – má výstup a vstup (môže mať len výstup. . .)
- Signál. Na tomto predmete sa signál značí v princípe ako funkcia času, ako v čase premenlivá hodnota veličiny, teda napr. $y(t)$.
- Dynamický systém
- Systém, ktorého dynamiku nie je potrebné uvažovať.
- Rovnica ako nástroj pre matematický opis systému.
- Diferenciálna rovnica – matematický opis dynamického systému.

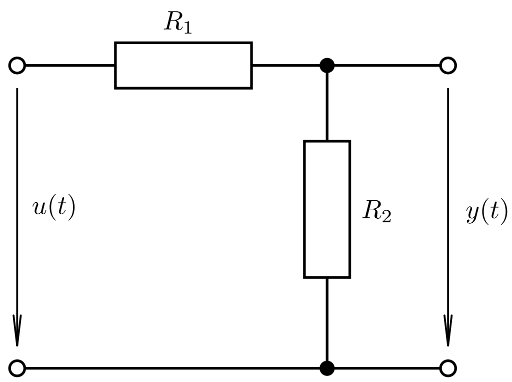
1 Úlohy

1. Odpovedajte na otázky uvedené v časti 2.1.
2. Zostavte diferenciálnu rovnicu, ktorá opisuje proces vybíjania kondenzátora (pozri časť 2.2).
3. Určte jednotky (rozmer) všetkých parametrov a signálov (veličín) v zostavenej rovnici.
4. Nájdite analytické riešenie uvedenej diferenciálnej rovnice.
5. Nakreslite graf časovej funkcie, ktorá je analytickým riešením diferenciálnej rovnice. Potrebné číselné hodnoty parametrov a signálov nech sú ľubovoľné.
6. Nájdite numerické riešenie diferenciálnej rovnice (s využitím Simulinku).

2 Konkrétne ilustračné príklady

2.1 Zosilnenie rezistorového deliča napätia

Uvažujme klasický odporový delič ako je znázornené na nasledujúcom obrázku.



Obr. 1: Odporový delič

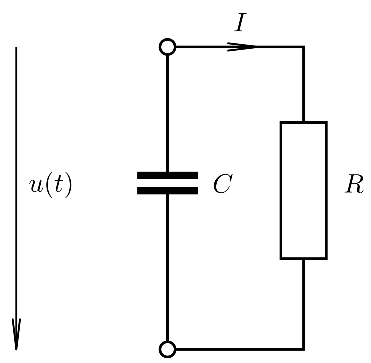
Vstupom uvažovaného systému nech je napätie označené ako $u(t)$ a výstupným signálom nech je napätie $y(t)$.

Otázky

- Nech hodnota vstupného signálu je konštantná, nemení sa, je ustálená. Aká je hodnota výstupného signálu, pričom pre jej určenie poznáme hodnoty rezistorov R_1 a R_2.
- Ako by ste definovali zosilnenie uvažovaného systému?
- Aká je veľkosť zosilnenia uvažovaného?

2.2 Vybíjanie kondenzátora – matematický model procesu

Majme RC obvod ako je znázornené na obr. 2.



Obr. 2: RC obvod

Nech je na začiatku, v čase $t = 0$, kondenzátor C nabitý a na jeho svorkách je napätie s hodnotou u_0. Inými slovami napätie $u(t)$ v čase 0 je u_0, teda $u(0) = u_0$.

Ku kondenzátoru C je pripojený rezistor R a preto sa kondenzátor s rastúcim časom vybíja.

2.2.1 Zostavenie diferenciálnej rovnice

Zostavme diferenciálnu rovnicu, ktorá opisuje proces vybíjania kondenzátora.

Pre kondenzátor platí

$$Q = CU \tag{1}$$

čo znamená, že elektrický náboj Q nazhromaždený v kondenzátore je úmerný napätiu na svorkách kondenzátora U (azda priveľmi zjednodušene povedané, čitateľ si však iste vie dohľadať podrobnosti). Parameter C predstavuje, ako je iste zrejmé, kapacitu kondenzátora.

Ak sa kondenzátor vybíja, mení sa náboj. Preto má zmysel vyšetrovať časový priebeh veľkosti náboja. Tým sa získa celkový prehľad aj o ďalších veličinách súvisiacich s procesom vybíjania kondenzátora.

Časová zmena elektrického náboja je elektrický prúd, teda

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -I \tag{2}$$

kde I je elektrický prúd a dôvodom záporného znamienka je, že smer elektrického prúdu sa značí práve opačne ako smer pohybu záporného náboja.

Rovnica (2) je v princípe diferenciálnou rovnicou. Obsahuje časovú deriváciu veličiny – elektrického náboja. V tomto tvare však rovnicu nie je možné použiť na získanie časového priebehu samotnej veličiny (elektrického náboja). Totiž neznáme je nie len Q ale v podstate aj I.

Namiesto veličiny I by bolo vhodné mať na pravej strane rovnice (2) veličinu Q. Z Ohmovho zákona plynie

$$I = \frac{U}{R} \tag{3}$$

Napätie U, ktoré sa týka nášho problému, je vo vzťahu k veličine Q, viď rovnicu (1). Konkrétne

$$U = \frac{Q}{C} \tag{4}$$

Dosadením (4) do (3) sa získa

$$I = \frac{Q}{RC} \tag{5}$$

a následne dosadením (5) do (2)

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{RC}Q \tag{6}$$

Diferenciána rovnica (6) obsahuje jednu neznámu. Neznámou je veličina Q. Všeobecnejšie povedané, neznámou je časový priebeh veličiny. Neznámou je teda funkcia času. Preto píšme, že sa zaoberáme signálom (veličinou) $Q(t)$. Hodnoty R a C sú len pevné hodnoty odporu a kapacity (viď obr. 2). Neuvažujeme, že by sa menili v čase. Preto ich neoznačujeme ako signál (funkciu času). Teda signál označujme ako napr. $Q(t)$ a konštantu ako napr. R.

Typicky, a pre zjednodušenie, sa rovnice (6) zapisuje aj v tvare

$$\dot{Q}(t) = -\frac{1}{RC}Q(t) \tag{7}$$

kde bodka $\dot{}$ označuje deriváciu podľa času rovnako ako operátor $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$.

Riešením rovnice (7) je nejaká časová funkcia, nejaký signál, nejaký časový priebeh, konkrétne časový priebeh elektrického náboja, ktorý tu označujeme ako $Q(t)$.

Pre nájdenie jednoznačného riešenia je potrebné doplniť úlohu o začiatočnú podmienku. To je podmienka, ktorú musí spĺňať hľadaný signál $Q(t)$ na začiatku, teda v čase $t = 0$. Pripomeňme, že napätie pred vybíjaním je dané (známe) a má hodnotu u_0. Je teda zrejmé, že je známa aj hodnota $Q(0) = Cu_0$. Pre zjednodušenie označme ako $Q(0) = Q_0$.

2.2.2 Náčrt riešenia diferenciálnej rovnice separáciou premenných

Zaoberáme sa problémom v tvare

$$\frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{RC}Q(t) \qquad Q(0) = Q_0 \tag{8}$$

kde $Q(t)$ je neznáma časová funkcia. Konštanty (nezávislé od času) R, C a aj Q_0 sú známe. V rovnici je však ešte jedna premenná a tou je čas t. Ten, ako je známe, si len tak plynie. Je premennou pretože sa napríklad „podľa neho derivuje".

Mimochodom

- Aké jednotky (rozmer) má výraz RC v rovnici (8)?

Upravme diferenciálnu rovnicu (8) tak, aby rovnaké premenné boli na rovnakých stranách. V tvare (8) je signál $Q(t)$ na oboch stranách rovnice. Nech je len na ľavej strane. Rovnako, nech čas t je len na pravej strane. Teda

$$\frac{1}{Q(t)}\mathrm{d}Q(t) = -\frac{1}{RC}\mathrm{d}t \tag{9}$$

Všimnime si, že teraz je možné obe strany rovnice integrovať, každú podľa vlastnej premennej, teda

$$\int \frac{1}{Q(t)}\mathrm{d}Q(t) = \int -\frac{1}{RC}\mathrm{d}t \tag{10}$$

Výsedkom inegrovania je

$$\ln\left(Q(t)\right) + k_1 = -\frac{1}{RC}t + k_2 \tag{11}$$

kde k_1 a k_2 sú konštanty vyplývajúce z neurčitých integrálov (a tiež sme potichu uvážili, že $Q(t)$ nebude nadobúdať záporné hodnoty).

Rovnica (11) už nie je diferenciálna. Žiadna veličina v nej nie je derivovaná podľa času.

Vyjadrime z rovnice (11) signál $Q(t)$. Úpravou

$$\ln\left(Q(t)\right) = -\frac{1}{RC}t + k_3 \tag{12}$$

sme zaviedli konštantu $k_3 = k_2 - k_1$. Ďalej

$$Q(t) = e^{\left(-\frac{1}{RC}t+k_3\right)} \tag{13a}$$

$$Q(t) = e^{\left(-\frac{1}{RC}t\right)}e^{k_3} \tag{13b}$$

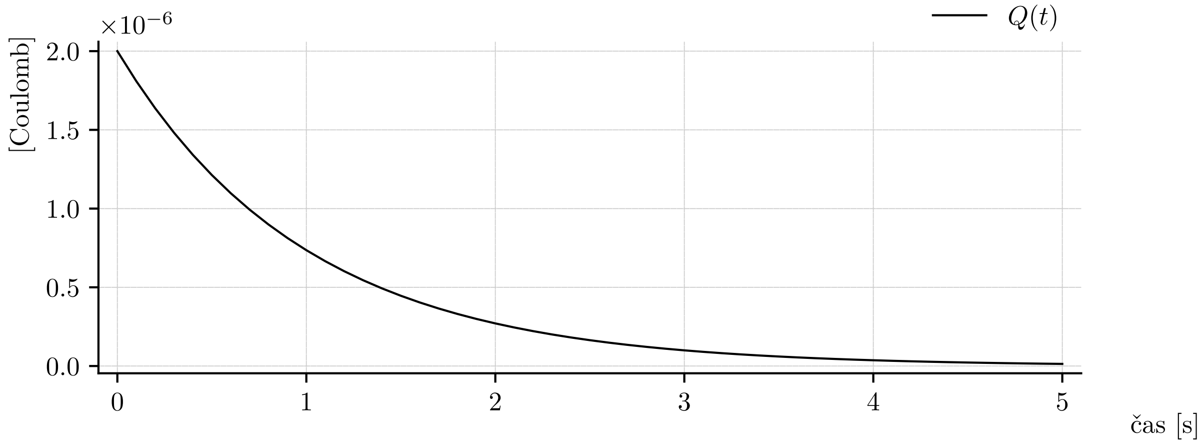
Už v tomto bode je rovnica (13b) predpisom, ktorý udáva časovú závislosť veličiny Q. Vyjadruje signál (časovú funkciu) $Q(t)$. Časová funkcia $Q(t)$ je riešením diferenciálnej rovnice (9).

V rovnici (13b) je konštanta e^{k_3}. Je to všeobecná konštanta a môže mať akúkoľvek hodnotu. Je možné ukázať, my si tu však dovolíme neuviesť formálnu ukážku, že táto konštanta je daná začiatočnou podmienkou priradenou k diferenciálnej rovnici. V tomto prípade platí $e^{k_3} = Q_0$.

Hľadaným riešením diferenciálnej rovnice je časová funkcia v tvare

$$Q(t) = Q_0\ e^{\left(-\frac{1}{RC}t\right)} \tag{14}$$

Funkcia je graficky znázornená na obrázku 3.



Obr. 3: Graf funkcie (14) pre $R = 10^6$ [Ω], $C = 1$ [μF] a $Q_0 = 2 \cdot 10^{-6}$ [Coulomb] (ľubovolné hodnoty len ako príklad)

2.2.3 Časový priebeh napätia na kondenzátore

Vyšetrili sme časový priebeh elektrického náboja počas vybíjania kondenzátora. Opis situácie na začiatku časti 2.2 však nepriamo predpokladá, že sa budeme venovať napätiu. Vzájomný vzťah už poznáme, a jeho formálne presnejší zápis (napätie $u(t)$ ako signál) je

$$u(t) = \frac{1}{C} Q(t) \tag{15}$$

Takže ak poznáme priebeh $Q(t)$, poznáme aj priebeh $u(t)$.

Začiatočnú podmienku pre signál $Q(t)$, teda hodnotu $Q(0)$ samozrejme tiež možno určiť so želanej (danej) začiatočnej podmienky signálu $u(t)$.

$$Q(0) = C u_0 \tag{16}$$

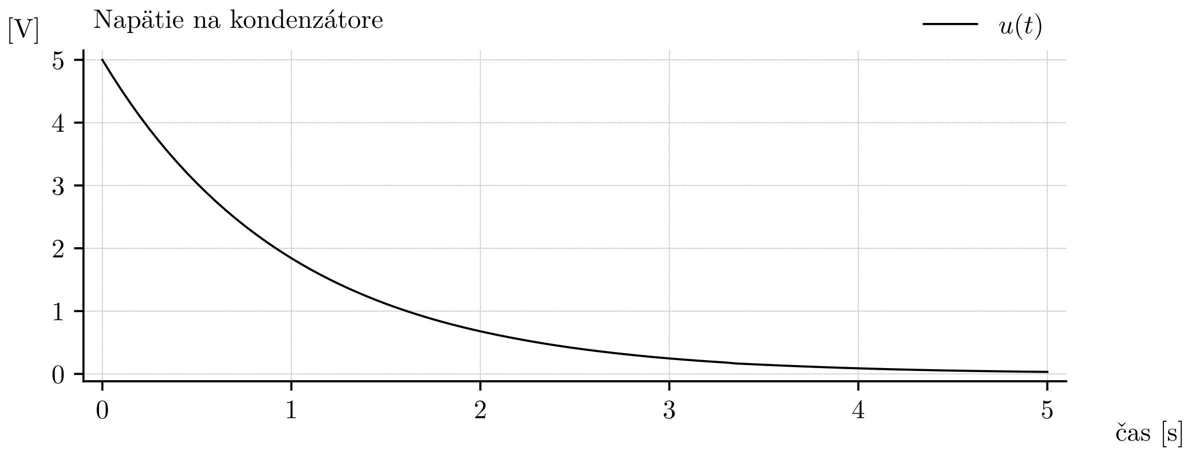
V zmysle úvodu časti 2.2 uvažujme nasledujúci príklad

$$C = 1 \ [\mu\text{F}]$$
$$R = 10^6 \ [\Omega]$$
$$u_0 = 5 \ [\text{V}]$$

Pre tento príklad je následne začiatočná podmienka pre signál $Q(t)$

$$Q(0) = 10^{-6} \cdot 5 = 0.000050 \ [\text{Coulomb}] \tag{17}$$

Výsledný priebeh napätia je zobrazený na obr. 4.



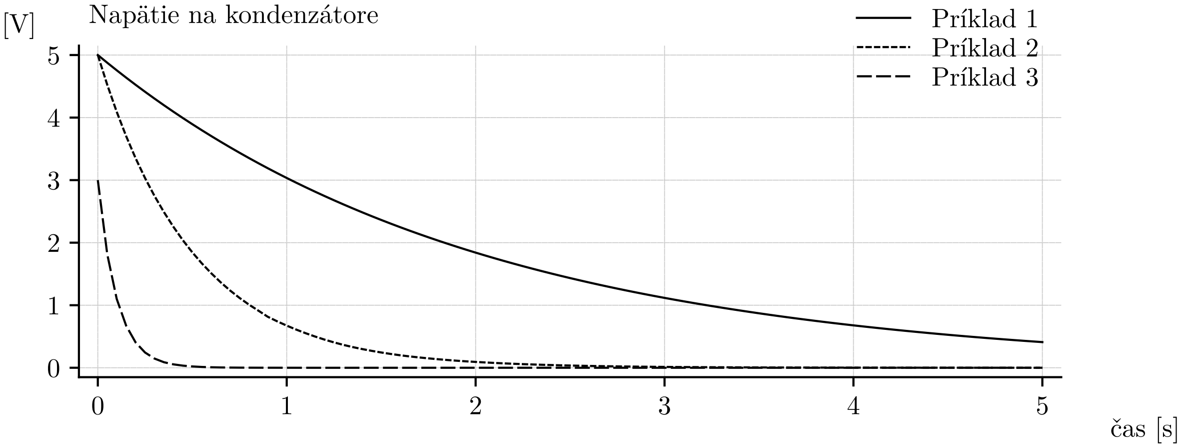
Obr. 4: Časový priebeh napätia na kondenzátore

Tabuľka 1: Príklady rôznych parametrov

	C [F]	R [Ω]	u_0 [V]
Príklad 1	$2 \cdot 10^{-6}$	10^{6}	5
Príklad 2	$\frac{1}{2} \cdot 10^{-6}$	10^{6}	5
Príklad 3	10^{-6}	$\frac{1}{10} \cdot 10^{6}$	3

2.2.4 Príklady pre rôzne parametre R a C

Pre zaujímavosť, ukážme priebeh napätia pre rôzne parametre R a C. Príklady sú sumarizované v tabuľke 1. Graficky znázornené časové priebehy na obr. 5.



Obr. 5: Časový priebeh napätia na kondenzátore

3 Ďalšie poznámky

3.1 Vykreslenie grafu časovej funkcie – MATLAB

Nech cieľom je vykresliť graf časovej funkcie (14), teda

$$Q(t) = Q_0 \; e^{\left(-\frac{1}{RC} t\right)}$$

Vzor výsledného grafu je teda na obr. 3.

Takpovediac minimálny kód pre MATLAB by mohol vyzerať nasledovne:

Výpis kódu 1: Súbor MRS01_plotexample.m

```
% Parametre
R = 10^6;
C = 10^-6;
Q_0 = 2*10^-6;


% Súradnice bodov na x osi
plotData_x = 0:0.1:5;

% Výpočet hodnôt na y osi v zmysle danej časovej funkcie
plotData_y = Q_0 * exp( ( -1.0/(R*C)) * plotData_x );

% Kreslenie grafu
plot(plotData_x,plotData_y)
xlabel('čas [sec]')
ylabel('Q [Coulomb]')
```

3.2 Vykreslenie grafu časovej funkcie – Python

Nech cieľom je vykresliť graf časovej funkcie (14), teda

$$Q(t) = Q_0 \; e^{\left(-\frac{1}{RC} t\right)}$$

Vzor výsledného grafu je teda na obr. 3.

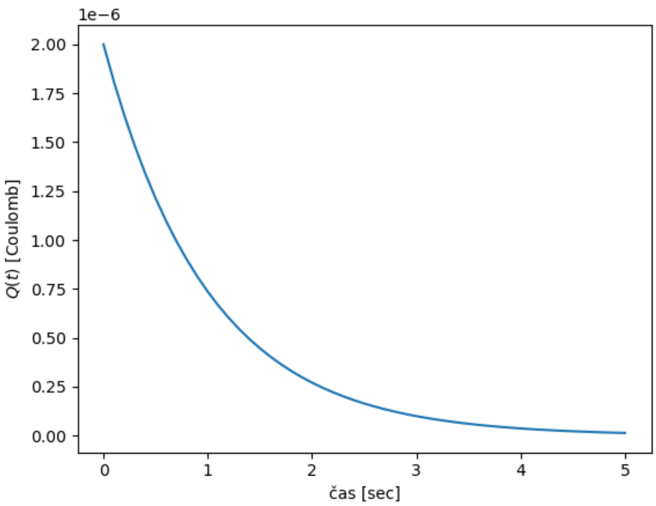
Takpovediac minimálny kód pre jazyk Python s využitím modulov NumPy a Pyplot by mohol vyzerať nasledovne, pričom ide o bunky z jupyter notebooku:

Výpis kódu 2: Súbor `MRS01_plotexample.ipynb cell:01`

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

Výpis kódu 3: Súbor `MRS01_plotexample.ipynb cell:02`

```
# Parametre
R = 10**6
C = 10**-6
Q_0 = 2*10**-6

# Súradnice bodov na x osi
plotData_x = np.arange(0,5.1,0.1)

# Výpočet hodnôt na y osi v zmysle danej časovej funkcie
plotData_y = Q_0 * np.exp( (-1.0/(R*C)) * plotData_x )

plt.plot(plotData_x , plotData_y)
plt.xlabel('čas [sec]')
plt.ylabel('$Q(t)$ [Coulomb]')
plt.show ()
```



Ak sa tu čitateľ prvý krát stretáva s Python-om pre numerické výpočty, azda užitočnými mu budú tieto odkazy:

Python (inštalovaný ako distribúcia balíčkov...)

Pre všeobecné používanie Python-u na Windows, obzvlášť pre „vedecké výpočty“, sa čitateľovi odporúča, tak ako sa uvádza aj tu: `https://www.scipy.org/install.html`, distribúcia Anaconda: `https://www.anaconda.com/download/`

Ak nie je výslovne uvedené inak, používa sa tu Python vo verzii 3.

Jupyter

V týchto súvislostiach je vhodné tiež upozorniť na `https://jupyter.org/`. IPython ako aj Jupyter notebook sú súčasťou distribúcie Anaconda.

3.3 Numerická simulácia – Simulink

Ako sme uviedli, diferenciálna rovnica (8) opisuje dynamický systém. Pripomeňme

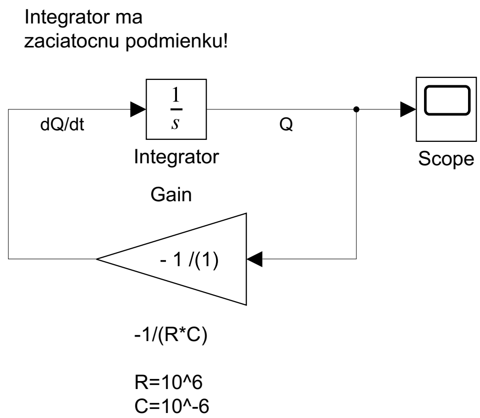
$$\frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{RC}Q(t) \qquad Q(0) = Q_0 \tag{18}$$

kde $Q(t)$ je neznáma časová funkcia. Konštanty (nezávislé od času) R, C a aj Q_0 sú známe. Úlohou je nájsť časový priebeh veličiny $Q(t)$. Nájsť riešenie diferenciálnej rovnice. V predchádzajúcom sme hľadali riešenie analyticky, výsledkom bola časová funkcia $Q(t)$, ktorej graf sme následne vykreslili.

V tejto časti budeme hľadať numerické riešenie diferenciálnej rovnice (18) s využitím Simulinku. Výsledkom bude časový priebeh veličiny $Q(t)$. Budú to numerické hodnoty, ktoré sú priradené k časovým údajom. Výsledok je potom tiež možné vykresliť ako závislosť $Q(t)$ od času t.

V simulinku je potrebné rovnicu (18) zadefinovať formou schematického znázornenia dynamického systému (pozri aj [KUT007]). K tomu prislúcha nastavenie začiatočných podmienok systému (initial conditions v integrátoroch).

Pozornosť je potrebné venovať aj požadovanej časovej dĺžke simulácie, teda dĺžke časového intervalu, na ktorom požadujeme numerické riešenie dif. rovnice. Signál $Q(t)$ je možné zobraziť pomocou Scope bloku.



Obr. 6: Simulačná schéma zodpovedajúca rovnici (18)

3.4 Numerická simulácia – ODE solver (MATLAB)

Pre numerický výpočet riešenia pomocou procedúry `ode45` je potrebné predmetný systém (rovnicu) zapísať ako funkciu, ktorú bude procedúra `ode45` používať. V tomto prípade:

```
function dQ = fundif(t,x);
R = 10^6;
C = 10^(-6);
Q = x;
dQ = -(1/(R*C)) * Q;
```

Je potrebné vytvoriť samostatný súbor **`fundif.m`**, ktorý bude obsahovať uvedenú fukknciu, tak ako je tu uvedené.

Mimochodom, na tomto mieste nebudeme (tu v texte) uvádzať podrobnosti k ODE solveru. Cieľom je tu len oboznámiť čitateľa s možnosťami ako získať numerické riešenie. Ako to „funguje“ bude jemne komentované neskôr.

Samotné použitie procedúry `ode45` sa vykoná nasledovnými príkazmi (povedzme v skripte v inom m-súbore):

```
Q_0 = 2 * 10^(-6);
[t,y] = ode45('fundif',[0 5],[Q_0]);
plot(t,y)
```

Obrázok sa ponecháva na čitateľa…

3.5 Numerická simulácia – Python, knižnica SciPy.integrate

Príklad použitia ODE Solvera z knižnice SciPy.integrate je možné nájsť v `jupyter` notebooku `PY/MRS01_ODEsolver.ipynb`.

Výpis kódu 4: Súbor MRS01_ODEsolver.ipynb cell:01

```
# Import potrebných modulov
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint
```

Výpis kódu 5: Súbor MRS01_ODEsolver.ipynb cell:02

```
# Definovanie funkcie, ktorá realizuje predmetnú diferenciálnu
    rovnicu

def fcn_difRovnica_01(x, t, param):

    R, C = param
    Q = x
    dotQ = (-1.0/(R*C)) * Q

    return dotQ
```

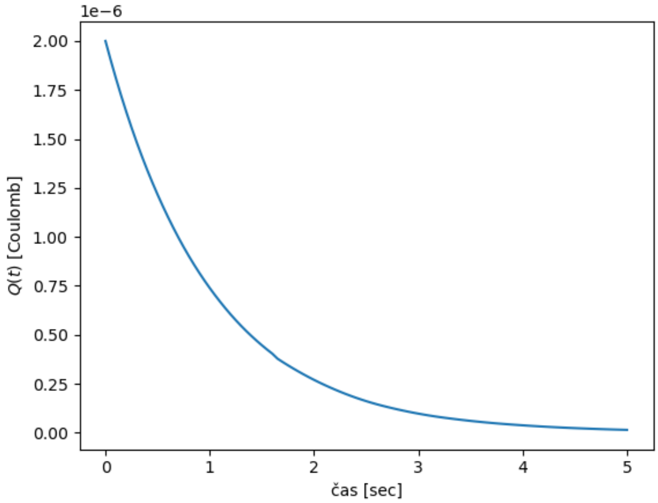
Výpis kódu 6: Súbor MRS01_ODEsolver.ipynb cell:03

```
# Použitie ODE solvera (odeint imporotvaný z knižnice scipy)

# Príprava parametrov a začiatočných podmienok
param_C = 10**-6
param_R = 10**6
param = [param_R, param_C]          # zoznam parametrov

Q_0 = 2*10**-6                      # Začiatočná podmienka

# Časový vektor, pre ktorý požadujeme riešenie
sim_t_start = 0
sim_t_final = 5
sim_T_s = 0.05
timeVect = np.arange(sim_t_start, sim_t_final+sim_T_s, sim_T_s)

# Volanie ODE solvera
odeOut = odeint(fcn_difRovnica_01,  # volaná funkcia (dif. rovnica)
                Q_0,                # začiatočná podmienka
                timeVect,           # časový vektor
                args=(param,)       # argumenty volanej funkcie
                )

print(odeOut[:,0]) # Výpis výsledkov simulácie - numerické riešenie
    ...
```

```
[2.00000000e-06 1.90242604e-06 1.80961688e-06 1.72134793e-06
 1.63737823e-06 1.55765170e-06 1.48195836e-06 1.41008245e-06
 1.34180819e-06 1.27691980e-06 1.21520151e-06 1.15643755e-06
 1.10041214e-06 1.04690950e-06 9.95852513e-07 9.47340655e-07
 9.01247200e-07 8.57438923e-07 8.15782598e-07 7.76145000e-07
 7.38392904e-07 7.02393084e-07 6.68012315e-07 6.35129586e-07
 6.03824871e-07 5.74086386e-07 5.45838175e-07 5.19004282e-07
 4.93508750e-07 4.69275623e-07 4.46228943e-07 4.24292755e-07
 4.03391101e-07 3.77739286e-07 3.60602172e-07 3.44032035e-07
 3.28028877e-07 3.12592697e-07 2.97723495e-07 2.83421271e-07
 2.69686025e-07 2.56517758e-07 2.43914212e-07 2.31827496e-07
 2.20238343e-07 2.09146754e-07 1.98552727e-07 1.88456263e-07
 1.78857363e-07 1.69756026e-07 1.61152252e-07 1.53046041e-07
 1.45437393e-07 1.38326308e-07 1.31649509e-07 1.25254891e-07
 1.19135788e-07 1.13292200e-07 1.07724127e-07 1.02431569e-07
 9.74145263e-08 9.26729984e-08 8.82069856e-08 8.40164877e-08
 8.01015049e-08 7.64573621e-08 7.29848135e-08 6.96439350e-08
 6.64347268e-08 6.33571888e-08 6.04113210e-08 5.75971234e-08
 5.49145960e-08 5.23637388e-08 4.99445518e-08 4.76570350e-08
 4.55011884e-08 4.34600932e-08 4.14930814e-08 3.95983705e-08
 3.77759605e-08 3.60258514e-08 3.43480432e-08 3.27425359e-08
 3.12093294e-08 2.97484239e-08 2.83598192e-08 2.70435154e-08
 2.57986173e-08 2.46061198e-08 2.34583775e-08 2.23553905e-08
 2.12971589e-08 2.02836825e-08 1.93149614e-08 1.83909957e-08
 1.75117852e-08 1.66773301e-08 1.58876302e-08 1.51426857e-08
 1.44373720e-08]
```

Výpis kódu 7: Súbor MRS01_ODEsolver.ipynb cell:04

```
# Grafické zobrazenie výsledkov simulácie

plt.plot(timeVect , odeOut)
plt.xlabel('čas [sec]')
plt.ylabel('$Q(t)$ [Coulomb]')
plt.show()
```



3.6 MATLAB Online Training Suite

K uvedeným témam je možné odporučiť aj MATLAB Online Training Suite kde základom sú kurzy:

- MATLAB Onramp
  https://matlabacademy.mathworks.com/details/matlab-onramp/gettingstarted
- Simulink Onramp
  https://matlabacademy.mathworks.com/details/simulink-onramp/simulink

Priamo k tomuto textu azda:

- Solving Ordinary Differential Equations with MATLAB
  https://matlabacademy.mathworks.com/details/solving-ordinary-differential-equations-with-matlab/odes