Cvičenie šieste

Obsah

Cieľom cvičení sú témy primárne týkajúce sa analytického riešenia diferenciálnych rovníc s využitím Laplaceovej transformácie. K tomu je možné sledovať súvislosti z hľadiska pojmu *prenosová funkcia*.

1 Analytické riešenie dif. rovnice s využitím Laplaceovej transformácie

1.1 Príklad 1 – homogénna DR1R

Nájdite analytické riešenie diferenciálnej rovnice s využitím Laplaceovej transformácie. Rovnica je tvare

$$\dot{y}(t) - ay(t) = 0 \qquad y(0) = y_0 \tag{1}$$

kde $a \in \mathbb{R}$ je parameter a y_0 je hodnota začiatočnej podmienky.

1.2 Príklad 2 – nehomogénna DR1R (vstup je Diracov impulz)

Nájdite analytické riešenie diferenciálnej rovnice s využitím Laplaceovej transformácie. Rovnica je tvare

$$\dot{y}(t) - ay(t) = u(t) \qquad y(0) = 0 \tag{2}$$

kde $a \in \mathbb{R}$ je parameter a $u(t) = \delta(t)$, čo je Diracov impulz v čase 0.

1.3 Postreh k príkladu 1 a 2

Riešenie systému prvého rádu (čo je len „slang“ pre riešenie diferenciálnej rovnice prvého rádu opisujúcej dynamický systém), ktorý má nulový (žiadny) vstup ale má nenulovú začiatočnú podmienku je, ako vieme, $y(t) = e^{at}y(0)$.

Riešenie systému prvého rádu, ktorý má nulovú začiatočnú podmienku ale na vstupe má Dirackov impulz (signál $\delta(t)$) je $y(t) = e^{at}$.

Ak by sme zovšeobecnili vstup spôsobom $u(t) = y_0\delta(t)$, teda zaviedli sme faktor y_0, potom riešenie je zjavne $y(t) = e^{at}y_0$.

Začiatočná podmienka $y(0)$ a faktor y_0 plnia tú istú úlohu. Čo znamená, že pomocou Dirackovho impulzu je možné nahradiť vplyv začiatočnej podmienky systému. Nevýhodou je, že v praxi nie je možné realizovať Dirackov impulz, keďže má nekonečne malú šírku, len jeho aproximáciu, ktorou je impulz s relatívne malou šírkou.

1.4 Príklad 3 – nehomogénna DR1R (vstup je jednotkový skok)

Nájdite analytické riešenie diferenciálnej rovnice s využitím Laplaceovej transformácie. Rovnica je tvare

$$\dot{y}(t) - ay(t) = u(t) \quad y(0) = 0 \tag{3}$$

kde $a \in \mathbb{R}$ je parameter a $u(t) = 1$.

1.5 Príklad 4 – nehomogénna DR2R

Nájdite analytické riešenie diferenciálnej rovnice. Použite Laplaceovu transformáciu.

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 3y(t) = u(t) \qquad y(0) = 3 \qquad \dot{y}(0) = -2 \qquad u(t) = 1 \tag{4}$$

2 Prenosové funkcie

2.1 Príklad 1 – prepis DR na prenosovú funkciu

Dynamický systém je opísaný diferenciálnou rovnicou

$$\dot{y}(t) - ay(t) = u(t) \tag{5}$$

zapíšte v tvare prenosovej funkcie.

2.2 Príklad 2 – prepis DR na prenosovú funkciu

Dynamický systém je opísaný diferenciálnou rovnicou

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 3y(t) = u(t) \tag{6}$$

zapíšte v tvare prenosovej funkcie.

3 Control System Toolbox

V tejto časti budeme pre výpočty s dynamickými systémami využívať `Control System Toolbox` v prostredí MATLAB.

3.1 Príklad 1 (`tf`)

Majme prenosovú funkcie v tvare:

$$G(s) = \frac{1}{s+1} \tag{7}$$

Vytvorte v MATLABe objekt, ktorý (v rámci `Control System Toolbox`) reprezentuje túto prenosovú funkciu. Použite príkaz `tf`.

```
G1 = tf(1,[1 1])
```

Alternatívne:

```
s = tf('s');
G2 = 1/(s+1)
```

3.2 Príklad 2 (`tf`)

Majme prenosovú funkcie v tvare:

$$G(s) = \frac{s+5}{s^2+2s+1} \tag{8}$$

Vytvorte v MATLABe objekt, ktorý (v rámci `Control System Toolbox`) reprezentuje túto prenosovú funkciu. Použite príkaz `tf`.

```
G3 = tf([1 5],[1 2 1])
```

Alternatívne:

```
s = tf('s');
G4 = (s+5)/(s^2 + 2*s + 1)
```

3.3 Príklad 3 (`impulse`)

Príkaz `impulse` slúži na nájdenie odozvy systému na Dirackov impulz. Uvažujme systém daný diferenciálnou rovnicou v tvare

$$\dot{y}(t) - ay(t) = u(t) \tag{9}$$

kde $a = 3$. Stanovte prenosovú funkciu systému. Pomocou príkazu `tf` vytvorte objekt reprezentujúci túto prenosovú funkciu. Následne pomocou príkazu `impulse` zistite odozvu systému na Dirackov impulz.

3.3.1 Dodatok k príkladu 3

Stanovte časovú funkciu, ktorá je analytickým vyjadrením impulznej charakteristiky systému daného diferenciálnou rovnicou (9), kde $a = 3$. Poznámka: všimnite si úlohu v časti 1.2. Bonus: graficky porovnajte výsledok príkazu `impulse` s analytickým riešením.

3.4 Príklad 4 (`step`)

Príkaz `step` slúži na nájdenie odozvy systému na jednotkový skok. Uvažujme systém daný diferenciálnou rovnicou v tvare

$$\dot{y}(t) - ay(t) = u(t) \tag{10}$$

kde $a = 3$. Stanovte prenosovú funkciu systému. Pomocou príkazu `tf` vytvorte objekt reprezentujúci túto prenosovú funkciu. Následne pomocou príkazu `step` zistite odozvu systému na jednotkový skok.

3.4.1 Dodatok k príkladu 4

Stanovte časovú funkciu, ktorá je analytickým vyjadrením prechodovej charakteristiky systému daného diferenciálnou rovnicou (10), kde $a = 3$. Poznámka: všimnite si úlohu v časti 1.4. Bonus: graficky porovnajte výsledok príkazu `step` s analytickým riešením.