



Uzavretý regulačný obvod a PID regulátor

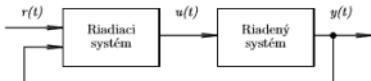
Obsah

1 O regulačnom obvode	1
1.1 Regulačná odchyľka	2
1.2 Lineárny uzavretý regulačný obvod	3
1.2.1 Otvorený regulačný obvod	3
1.2.2 Prenosová funkcia URO	4
1.2.3 Iné prenosové funkcie v URO	4
1.2.4 Stabilita URO	5
1.2.5 Kvalita URO	5
1.3 Návrh (lineárneho) URO vo všeobecnosti	6
2 O PID regulátore	7
2.1 Prenosová funkcia PID regulátora	7
2.2 Bloková schéma PID regulátora	8
3 O výbere štruktúry PID regulátora	8
3.1 Príklady	8
3.1.1 P regulátor a SSIR	8
3.1.2 PI regulátor a SSIR	10
3.1.3 PI regulátor a ASIR	13
4 O metódach návrhu PID regulátora	16
4.1 Analytický opis URO ako východisko	16
4.2 Círo analytické zamyslenie sa	17
4.2.1 Priame vyjadrenie $G_R(s)$	17
4.2.2 Príklad, ktorý vede na PI regulátor	18
4.3 Metóda rozmiestňovania pólov	19
4.4 Konkrétny príklad s PI regulátorom	20
4.4.1 Simulačný experiment pre ilustráciu	21
4.5 Metóda optimálneho modulu	22
4.5.1 Princíp metódy	23
4.5.2 Postup	23
4.5.3 Príklad	24
4.5.4 Poznámky k metóde	25
5 O ukazovateľoch kvality PCH URO	25

CIELOM textu je sprostredkovanie úvodných informácií ku konceptu *uzavretého regulačného obvodu* (URO). Skladá sa z riadeného systému a riadiaceho systému. Ak sme sa v predchádzajúcich textoch venovali primárne matematickému modelovaniu systémov, týkalo sa to prevažne riadeného systému v URO. Príkladom riadiaceho systému v URO je v tomto texte *PID regulátor*.

1 O regulačnom obvode

Regulačný obvod sa vo všeobecnosti skladá z riadiaceho systému a z riadeného systému. Zahŕňa tri základné signály. Výstupnú величинu $y(t)$, akčný zásah $u(t)$ a referenčný signál $r(t)$. Schematicky sa znázorjuje nasledovne:



Obr. 1: Všeobecný uzavretý regulačný obvod.

Výstupom riadeného systému je veličina, ktorá, okrem iného, hovorí o splnení cieľa riadenia. Cieľom riadenia napríklad je, aby táto veličina dosiahla istú hodnotu, prípadne aby pribeh tejto veličiny v čase vykazoval isté dynamické vlastnosti, a podobne. Pre skratenie sa práve táto veličina nazýva ako výstupná veličina (celého obvodu). Označuje sa $y(t)$.

Ulohou riadiaceho systému je splniť cieľ riadenia. Výstupom riadiaceho systému je tzv. akčný zásah (označuje sa $u(t)$). Je to signál (veličina), pomocou ktorého riadiaci systém ovplyvňuje riadený systém. Akčný zásah je teda na vstupe riadeného systému.

Pre splnenie cieľa riadenia potrebuje riadiaci systém dostať prílaz typicky vo forme signálu, ktorý je referenčným signáлом (označuje sa $r(t)$) alebo žiadanou hodnotou (označuje sa $w(t)$, v anglickom *setpoint*). Druhou informáciou, ktorú riadiaci systém potrebuje pre splnenie cieľa, je spätná väzba z výstupu riadeného systému.

S využitím uvedeného, teda spätnej väzby a referenčného signálu (alebo žiadanej hodnoty), riadiaci systém akčným zásahom ovplyvňuje riadiaci systém tak, aby bol splnený cieľ riadenia. Pre zvýraznenie principu spätnej väzby sa výsledný principiálny regulačný obvod nazýva *Uzavretý regulačný obvod* (URO).

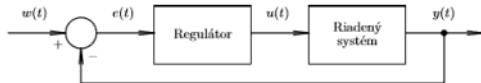
1.1 Regulačná odchýlka

Značne typickým uzavretým regulačným obvodom je taký, v ktorom sa využíva regulačná odchýlka.

Regulačná odchýlka $e(t)$ je rozdiel žiadanej hodnoty $w(t)$ (setpoint) a výstupnej veličiny riadeného systému $y(t)$, teda

$$e(t) = w(t) - y(t) \quad (1)$$

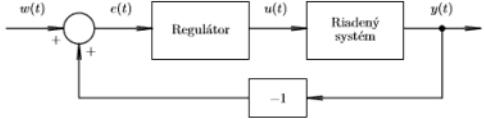
Je zrejmé, že ak je regulačná odchýlka nulová, tak cieľ riadenia je splnený.
V tomto prípade je URO možné schematicky znázorniť nasledovne:



Obr. 2: Uzavretý regulačný obvod s regulačnou odchýlkou a regulátorom.

Je možné konštatovať, že na obr. 2 je celkový riadiaci systém tvorený dvomi prvokmi: výpočtom regulačnej odchýlky a regulátorom. Typicky, vstupom regulátora je regulačná odchýlka.

Pre zdôraznenie faktu, že v uvedenom prípade ide jednoznačne (už z principu informácie o odchýlke (1)) o zápornú spätnú väzbu môžeme kresliť schému nasledovne:

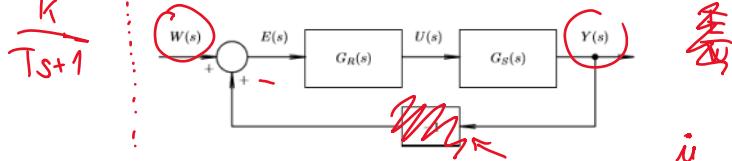


Obr. 3: Uzavretý regulačný obvod s blokom vyjadrujúcim zápornú spätnú väzbu.

1.2 Lineárny uzavretý regulačný obvod

V prípade, že riadiaci a riadený systém je možné opísť ako lineárne dynamické systémy, hovoríme o lineárnom uzavretom regulačnom obvode.

Typicky hovoríme, že regulátor, ktorého vstupom je regulačná odchýlka, a riadený systém je vtedy možné reprezentovať prenosovými funkciami. Klasický lineárny uzavretý regulačný obvod je potom možné schematicky znázorniť nasledovne:



Obr. 4: Lineárny uzavretý regulačný obvod.

V tomto prípade všetky bloky v schéme sú tvorené prenosovými funkciami (aj -1 je v princípe prenosová funkcia) pričom $G_R(s)$ je prenosová funkcia regulátora a $G_S(s)$ je prenosová funkcia riadeného systému (hovorí sa tiež prenosová funkcia riadenej sústavy).

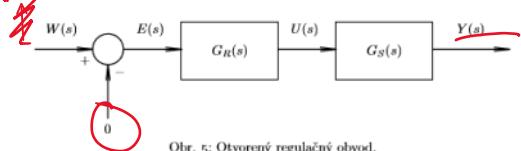
Aviak, ak sú blokmi URO prenosové funkcie, potom namiešte časových signálov je možné uvažovať ich Laplaceovo obrazy (L-obrazy), teda $W(s)$, $E(s)$, $U(s)$ a $Y(s)$.

1.2.1 Otvorený regulačný obvod

S využitím algebry prenosových funkcií vidíme, že $G_R(s)$ a $G_S(s)$ sú v súrivi a teda máme

$$G_{ORO}(s) = G_R(s)G_S(s) \quad (2)$$

pričom $G_{ORO}(s)$ je prenosová funkcia súvisiaca s pojmom otvorený regulačný obvod – je to situácia keď sa neuvažuje spätná väzba (obvod nie je uzavretý).



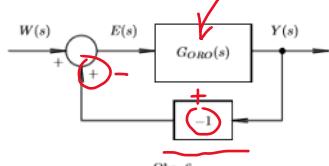
Obr. 5: Otvorený regulačný obvod.

1.2.2 Prenosová funkcia URO

Zároveň, na URO je potom jednoduché pozrieť sa ako na jeden celok. Celkovým výstupom URO je výstupná veľkosť $y(t)$, ktoréj L-obraz je $Y(s)$, a celkovým vstupom URO je žiadaná hodnota $w(t)$ s obrazom $W(s)$. Pomery obrazov $W(s)$ a $Y(s)$ je prenosovou funkciou URO.

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = G_{URO}(s) \quad (3)$$

Prenosovú funkciu URO je ďalej možné konkrétizovať s využitím algebry prenosových funkcií. S využitím $G_{ORO}(s)$ máme situáciu:



Obr. 6

a teda

$$G_{URO}(s) = \frac{G_{ORO}(s)}{1 + G_{ORO}(s)} = \frac{G_R(s)G_S(s)}{1 + G_R(s)G_S(s)} \quad (4)$$

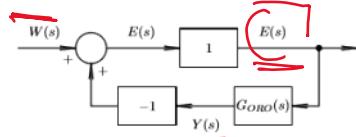
Tejto prenosovej funkcií sa tiež hovorí prenosová funkcia riadenia

1.2.3 Iné prenosové funkcie v URO

Obdobne je možné skúmať aj iné pomery L-obrazov signálov v uzavretom regulačnom obvode. Napríklad tzv. prenosová funkcia regulačnej odchyľky

$$\frac{E(s)}{W(s)} = G_E(s) \quad (5)$$

V tomto prípade teda:



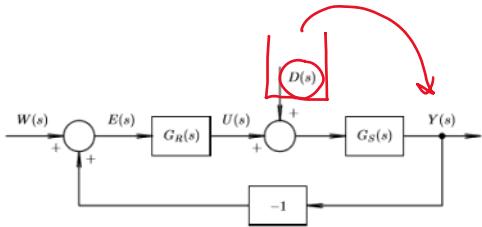
Obr. 7

a

$$G_E(s) = \frac{1}{1 + G_{ORO}(s)} = \frac{1}{1 + G_R(s)G_S(s)} \quad (6)$$

Túto skutočnosť je možné využiť pri skúmaní dynamiky a ustáleného stavu regulačnej odchyľky. Regulačná odchyľka totiž priamo hovorí o splnení či nesplnení cieľa riadenia.

Typickým je tiež uvažovať tzv. poruchu akčného zásahu a skúmať jej vplyv na výstup URO. Situácia vyzerá nasledovne:

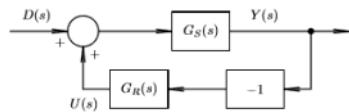


Obr. 8: Lineárny uzavretý obvod s uvažovaním poruchy akčného zásahu.

Pre izolovanie vplyvu poruchy na výstupnom veličínu je v prvom rade potrebné neuvážovať vplyv samotnej žiadanej hodnoty, teda $W(s) = 0$. Potom hovoríme o prenosovej funkcií poruchy akčného zásahu.

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = G_D(s) \quad (7)$$

teda:



Obr. 9

a

$$G_D(s) = \frac{G_S(s)}{1 + G_S(s)G_R(s)} \quad (8)$$

1.2.4 Stabilita URO

Uvažujeme tu o lineárnom URO a teda existuje prenosová funkcia URO. Akékoľvek otázky súvisiacie so stabilitou URO sú preto totožné ako v prípade prenosovej funkcie vo všeobecnosti. Stabilita URO je daná charakteristickým polynomom prenosovej funkcie URO a teda polohou pôlov URO v komplexnej rovine.

1.2.5 Kvalita URO

Pod kvalitou URO sa typicky rozumie presnosť sledovania zmien signálu $w(t)$ (žiadanej hodnoty) výstupnou veličinou $y(t)$. Ideálnym URO by bol taký, kde $y(t) = w(t) \forall t$, alebo teda $e(t) = w(t) - y(t) = 0 \forall t$. Pre reálne systémy so zotrvačnosfou je to však nerozšírená požiadavka.

Je treba vyšetrovať kvalitu URO (kvalitu riadenia) separátne v ustálenom stave a v prechodných stavoch (prechodných dejoch).

Kvalita v ustálenom stave

Kritériom kvality v ustálenom stave je v princípe

$$\left| \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) \right| = |e(\infty)| \rightarrow \min \quad (9)$$

kde

$$e(\infty) = w(\infty) - y(\infty) \quad (10)$$

sa nazýva trvalá regulačná odchýlka. V ideálnom prípade samozrejme $|e(\infty)| = 0$, t.j. $y(\infty) = w(\infty)$.

Typickými časovými priebehmi signálu $w(t)$ sú, zovšeobecnené povedané, skok polohy, skok rýchlosťi a skok zrýchlenia. Všetky tieto prípady možno vyjadriť ako

$$w(t) = w_p t^q \quad (11)$$

kde w_p je konštantá a q nadobúda hodnoty 0, 1 alebo 2. L-образom takého signálu je

$$W(s) = \frac{q!}{s^{q+1}} w_p \quad (12)$$

Uvažujme všeobecný prenosovú funkciu otvoreného regulačného obvodu:

$$G_{ORO}(s) = \frac{K}{s^\nu} \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + 1}{a_{n-\nu} s^{n-\nu} + \dots + a_1 s + 1} \quad (13)$$

kde ν rád astatizmu a K je zosilnenie predmetnej prenosovej funkcie. Z prenosovej funkcie regulačnej odchýlky potom máme

$$\begin{aligned} E(s) &= \frac{W(s)}{1 + G_{ORO}(s)} \\ &= \frac{s^\nu (a_{n-\nu} s^{n-\nu} + \dots + a_1 s + 1)}{s^\nu (a_{n-\nu} s^{n-\nu} + \dots + a_1 s + 1) + K (b_m s^m + \dots + b_1 s + 1)} \frac{q!}{s^{q+1}} w_p \end{aligned} \quad (14)$$

Na základe vety o konečnej hodnote platí

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(q! w_p \frac{s^{\nu-q}}{s^\nu + K} \right) \quad (15)$$

Potom je zrejmé, že ak $\nu > q$ potom $e(\infty) = 0$. Ďalej ak $\nu < q$ potom $e(\infty) = \infty$ (a teda URO je v princípe nestabilný). Nakoniec ak $\nu = q$ potom $0 < e(\infty) < \infty$ a teda vzniká nemovná trvalá regulačná odchýlka. Hodnota trvalej regulačnej odchýlky je tiež možné aj vyjadriť, napríklad pre $\nu = q = 0$ je $e(\infty) = \frac{w_p}{1+K}$.

1.3 Návrh (lineárneho) URO vo všeobecnosti

V princípe sa dajú klasifikovať tri typické výhodiskové situácie.

1. Je daná štruktúra riadiaceho systému a navrhujú sa jeho parametre. V tomto prípade to znamená, že poznáme stupne polynómov v prenosovej funkcií $G_R(s)$ ale nepoznáme hodnoty koeficientov v polynónoch, ktoré sú v princípe parametrami riadiaceho systému ako celku.
2. Navrhuje sa aj štruktúra (nie je presne daná) aj parametre. Teda pri $G_R(s)$ aj stupne aj koeficienty polynómov.
3. Štruktúra je častočne známa (napríklad relatívny stupeň $G_R(s)$) a pri týchto podmienkach sa následne navrhujú parametre.

Nástrojmi a informáciami využívanými pri návrhu sú:

- Požiadavky na kvalitu prechodného deja a ustáleného stavu regulačného obvodu.
- Vlastnosti a matematický model riadeného systému
- Časové priebehy výstupnej veličiny riadeného systému, typicky prechodové charakteristiky a podobne.
- Znalosť/odhad poruchových veličín, obmedzenia akčného zásahu a podobne...

2 O PID regulátore

PID regulátor patrí medzi najviac rozšírené súčasti riadiacich systémov vo všeobecnosti. V princípe využíva regulačnú odchyliku a tiež ju možné opísť pomocou lineárneho dynamického systému a teda pomocou prenosovej funkcie.

Názov *PID* regulátora vystihuje skutočnosť, že tento regulátor má tri principiálne zložky. Proporcionalnú, Integračnú a Derivačnú. Ide pri tom o tri spôsoby ako sa tu využíva informácia o regulačnej odchylike.

Regulátor v skutočnosti pracuje s troma signálmi. Prvým je samotná regulačná odchyliku $e(t) = w(t) - y(t)$. Z regulačnej odchyly sa získavajú ďalšie dva signály. Časový integrál regulačnej odchyly a časová derivácia regulačnej odchyly. Formálnejsie:

$$e_i(t) = \int e(t) dt \quad (16)$$

je časový integrál regulačnej odchyly a

$$e_d(t) = \frac{de(t)}{dt} \quad (17)$$

je časová derivácia regulačnej odchyly.

Každý z týchto signálov je násobený (zosilnený) nejakou nastaviteľnou konštantou (parametrom regulátora) a výsledný akčný zásah $u(t)$ je súčet týchto troch členov, teda

$$u(t) = Pe(t) + I \int e(t) dt + D \frac{de(t)}{dt} \quad (18)$$

kde P , I a D sú parametre (konštanty, čísla, zosilnenia) regulátora.

2.1 Prenosová funkcia PID regulátora

Zo všeobecného hľadiska je vstupom regulátora regulačná odchyliku – signál $e(t)$. Jeho L-obrazom je $E(s)$. Výstupom regulátora je akčný zásah, ktorého L-obrazom je $U(s)$. Prenosová funkcia PID regulátora potom formálne je

$$G_R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} \quad (19)$$

alebo teda akčný zásah je

$$U(s) = G_R(s)E(s) \quad (20)$$

L-obrazom integrálu regulačnej odchyly je $\frac{1}{s}E(s)$ a L-obrazom derivácie regulačnej odchyly je $sE(s)$. Potom akčný zásah je

$$U(s) = PE(s) + \frac{1}{s}E(s) + DsE(s) \quad (21)$$

konvenčne sa v tejto súvislosti pre označenie parametrov PID používajú r_0 , r_{-1} a r_1 , kde číselný index má vyjadrovať mocninu premennej s , pri ktorej sa parameter nachádza. Teda

$$U(s) = r_0 E(s) + r_{-1} \frac{1}{s} E(s) + r_1 s E(s) \quad (22)$$

Prenosová funkcia PID regulátora je potom v tvarze

$$\frac{U(s)}{E(s)} = G_R(s) = r_0 + r_{-1} \frac{1}{s} + r_1 s \quad (23)$$

Tento tvar sa nazýva požkozový tvar, totiž, túto prenosovú funkciu je možné vyjadríť aj v tvarze

$$G_R(s) = P \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) \quad (24)$$

7 | MRS10 - ZS2025

kde zmyslom je zavedenie časových konštant T_I a T_D (tieto parametre majú rozmer času) a pri tom platí $P = r_0$, $T_I = \frac{r_0}{T}$ a $T_D = \frac{r_0}{T}$.

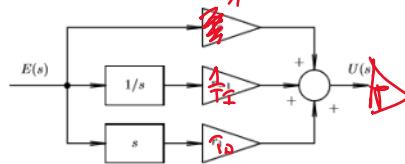
Len pre názornosť, ak by sme chceli vyjadríť prenosovú funkciu (23) ako jediný zlomok, potom

$$G_R(s) = \frac{r_1 s^2 + r_0 s + r_{-1}}{s} \quad (25)$$

kde je zrejmé, že stupeň čítača je vyšší ako stupeň menovateľa a teda ide o nekanzálny systém. To súvisí so skutočnosťou, že realizovať časovú deriváciu, takú, pri ktorej by bola veľkosť časového úseku dľa nekončene malá, je nereálne. V praxi je možné realizovať kvalitnú aproximáciu ideálnej časovej derivácie, čo sa v týchto súvislostach prejaví tak, že obrazom signálu v derivačnej zložke nie je $sE(s)$, ale iný výraz, taký, že to má za následok splnenie podmienky kauzality v celkovej prenosovej funkcií PID regulátora.

2.2 Bloková schéma PID regulátora

Schematicky, pomocou základných funkčných prvkov, vzhľadom na jeho prenosovú funkciu, je možné PID regulátor znázorniť nasledovne:



Obr. 10: Bloková schéma PID regulátora

3 O výbere štruktúry PID regulátora

PID regulátor vo všeobecnosti pozostáva z troch zložiek. Často však nie je potrebné použiť všetky tri zložky. Niekoľko to môže byť až výslovne nežiaduce.

V princípe je možné uvažovať tri samostatné regulátory (zložky PID regulátora). Hovoríme o P-regulátoru (využíva sa len proporcionalná zložka PID), o I-regulátoru (využíva sa len integračná zložka PID) a o D-regulátoru (využíva sa len derivačná zložka PID).

Zároveň je možné uvažovať aj vzájomné kombinácie uvedených regulátorov. Veľmi častým prípadom je PI regulátor. Aj PD regulátor je v praxi používaný. Niečo ako „ID regulátor“ môže mať uplatnenie ale ide o ojedineľné prípady.

3.1 Príklady

3.1.1 P regulátor a SS1R

Majme URO, kde

$$G_R(s) = r_0 \quad \text{a} \quad G_S(s) = \frac{K}{Ts + 1} \quad (26)$$

teda:

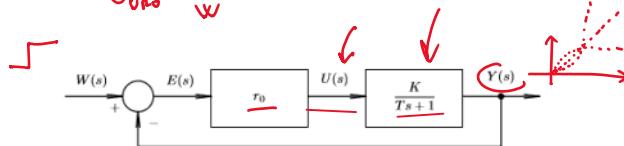
$$s_4 = -\frac{1}{T}$$

SS1R



8 | MRS510 - ZS2025

$$G_{UPO} = \frac{Y}{W}$$



Obr. 11

Prenosová funkcia ORO

Nájdime prenosovú funkciu ORO.

$$G_{ORO}(s) = G_R(s)G_S(s) = \frac{r_0 K}{Ts + 1} \quad (27)$$

Prenosová funkcia URO

Nájdime prenosovú funkciu URO.

$$\begin{aligned} G_{URO}(s) &= \frac{G_{ORO}(s)}{1 + G_{ORO}(s)} = \frac{\frac{r_0 K}{Ts + 1}}{1 + \frac{r_0 K}{Ts + 1}} = \frac{\frac{r_0 K}{Ts + 1}}{\frac{Ts + 1 + r_0 K}{Ts + 1}} \\ &= \frac{r_0 K}{Ts + (1 + r_0 K)} = \frac{\frac{r_0 K}{T}}{s + \frac{1 + r_0 K}{T}} \end{aligned} \quad (28)$$

URO je systémom prvého rádu bez astatizmu.

Stabilita

Vyšetríme stabilitu URO. Charakteristický polynóm URO je

$$A(s) = s + \frac{1 + r_0 K}{T} \quad (29)$$

Pôl URO je $s_1 = -\frac{1 + r_0 K}{T}$. URO je stabilný ak $\Re[s_1] < 0$.

Kvalita v ustálenom stave

Uvažujme $w(t) = 1$ a vyšetríme veľkosť trvalej regulačnej odchyľky $e(\infty)$.

L-obrázom žiadanej hodnoty je $W(s) = \frac{1}{s}$. Teda

$$Y(s) = G_{URO}(s) \frac{1}{s} \quad (30)$$

Podľa vety o konečnej hodnote platí

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(s G_{URO}(s) \frac{1}{s} \right) \quad (31)$$

takže ak uvažujeme $w(t) = 1$, potom

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} G_{URO}(s) \quad (32)$$

Úvod

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(s G_{URO}(s) \right) \quad (31)$$

takže ak uvažujeme $w(t) = 1$, potom

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} G_{URO}(s) \quad (32)$$

V tomto prípade

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{r_0 K}{Ts + (1 + r_0 K)} \right) = \frac{r_0 K}{(1 + r_0 K)} \quad (33)$$

Trvalá regulačná odchýlka je $e(\infty) = w(\infty) - y(\infty)$, pričom v tomto prípade samozrejme $w(\infty) = 1$, teda

$$e(\infty) = w(\infty) - y(\infty) = 1 - \frac{r_0 K}{(1 + r_0 K)} = \frac{1 + r_0 K - r_0 K}{(1 + r_0 K)} = \frac{1}{(1 + r_0 K)} \quad (34)$$

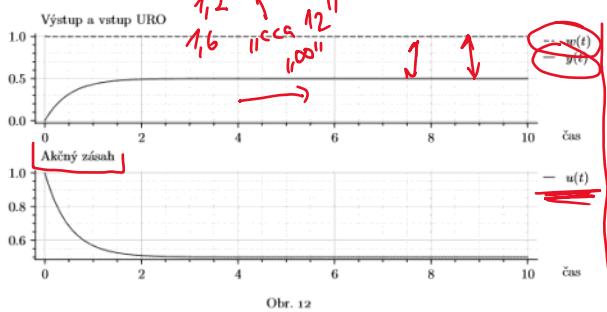
Trvalá regulačná odchýlka bude vždy nemôžuť.

Prechodný dej

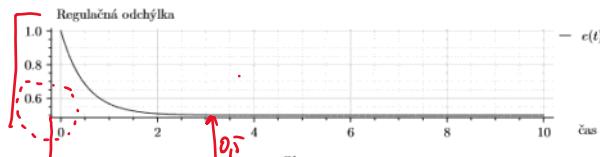
Veľmi pomerne URO opisuje prenosovú funkciu 1. rádu. Tým je daný aj typický tvar prechodej charakteristiky URO (tri prípady: kladný/záporný/mluvčí pôl). Zároveň tu má význam hovoriť o časovej konštannte URO, ktorá má hodnotu $\frac{1}{(1+r_0 K)}$ a zosilnenie URO, ktoré má hodnotu $\frac{r_0 K}{(1+r_0 K)}$.

Simulácia

Pre príklad uvažujeme $K = 1$, $T = 1$ a parameter $r_0 = 1$. Výsledok simulácie je nasledovný:



Pre ilustráciu, regulačná odchýlka:

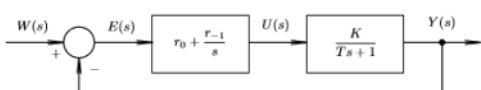


3.1.2 PI regulátor a SS1R

Majme URO, kde

$$G_R(s) = r_0 + \frac{r_{-1}}{s} \quad \text{a} \quad G_S(s) = \frac{K}{Ts + 1} \quad (35)$$

teda:



Obr. 14

Prenosová funkcia ORO

Nájdime prenosovú funkciu ORO.

$$G_{ORO}(s) = G_R(s)G_S(s) = \frac{Kr_0s + Kr_{-1}}{Ts^2 + s} \quad (36)$$

Prenosová funkcia URO

Nájdime prenosovú funkciu URO.

$$\begin{aligned} G_{URO}(s) &= \frac{G_{ORO}(s)}{1 + G_{ORO}(s)} = \frac{\frac{Kr_0s + Kr_{-1}}{Ts^2 + s}}{1 + \frac{Kr_0s + Kr_{-1}}{Ts^2 + s}} = \frac{Kr_0s + Kr_{-1}}{Ts^2 + s + Kr_0s + Kr_{-1}} \\ &= \frac{\frac{Kr_0s + Kr_{-1}}{Ts^2 + s}}{\frac{Ts^2 + s + Kr_0s + Kr_{-1}}{Ts^2 + s}} = \frac{Kr_0s + Kr_{-1}}{Ts^2 + (1 + Kr_0)s + Kr_{-1}} \end{aligned} \quad (37)$$

URO je systémom druhého rádu bez astatizmu s jednou nulou.

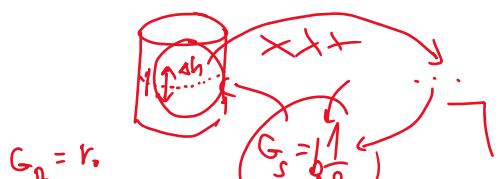
Stabilita

Vyšetrimo stabilitu URO. Charakteristický polynóm URO je

$$A(s) = Ts^2 + (1 + Kr_0)s + Kr_{-1} \quad (38)$$

Zaujímajú nás podmienky, pri ktorých bude URO stabilný. Tieto podmienky ba malo byť možné využiť pri návrhu/volbe parametrov regulátora. Využijme skutočnosť, že ak sú všetky koeficienty polynómu druhého stupňa kladné, potom jeho koeficienty majú zápornú reálnu časť.

URO bude teda stabilný ak



$$G_{ORO} = \frac{r_0}{s}$$

$$G_{URO} = \frac{\frac{r_0}{s}}{1 + \frac{r_0}{s}} = \frac{r_0}{s + r_0}$$

$$\frac{s + r_0}{s}$$

$$G_{URO} = \frac{r_0}{s + r_0}$$

$$\stackrel{\text{lin}}{\longrightarrow} 20s = \frac{r_0}{r_0}$$

$$\frac{1}{r_0} r_0$$

$$\frac{r_0}{s + r_0}$$

$$\frac{1}{r_0} s + \frac{r_0}{r_0}$$

$$(s) \quad \omega - j = \infty$$

$$\frac{1}{\frac{1}{r_0} s + 1}$$

$$\frac{\omega}{s + \omega}$$

$$A(s) = Ts^a + (1 + Kr_0)s + Kr_{-1} \quad (38)$$

Zaujímajú nás podmienky, pri ktorých bude URO stabilný. Tieto podmienky ba malo byť možné využiť pri návrhu/volbe parametrov regulátora. Využíme skutočnosť, že ak sú všetky koeficienty polynómu druhého stupňa kladné, potom jeho korene majú zápornú reálnu časť.

URO bude teda stabilný ak

$$T > 0 \quad 1 + Kr_0 > 0 \quad Kr_{-1} > 0 \quad (39)$$

Kvalita v ustálenom stave

Uvažujme $w(t) = 1$ a vyšetrimo veľkosť trvalej regulačnej odchýlky $e(\infty)$.

Cieľom je zistíť aká je dosiahnutelná minimálna trvalá regulačná odchýlka, teda $e(\infty) = w(\infty) - y(\infty)$.

Keďže $W(s) = \frac{1}{s}$ a URO je stabilný, potom

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} G_{URO}(s) = \frac{Kr_{-1}}{Kr_{-1}} = 1 \quad (40)$$

Trvalá regulačná odchýlka je $e(\infty) = w(\infty) - y(\infty)$, pricinou v tomto prípade samozrejme $w(\infty) = 1$, teda

$$e(\infty) = w(\infty) - y(\infty) = 1 - 1 = 0 \quad (41)$$

Trvalá regulačná odchýlka bude vždy nulová.

Prechodný dej

Cieľom je vyhodnotiť možnosti ovplyvnenia prechodného deja, ktorý vykazuje URO, pomocou parametrov regulátora.

V tomto prípade je prenosová funkcia URO prenosovou funkciou druhého rádu. Prechodný dej teda môže byť kmitavý (dva komplexne združené póly) alebo aperiodický (dva reálne póly).

Charakteristický polynom v tomto prípade je

$$A(s) = Ts^2 + (1 + Kr_0)s + Kr_{-1} \quad (42)$$

a jeho korene

$$s_{1,2} = \frac{-(1 + Kr_0)}{2T} \pm \frac{\sqrt{(1 + Kr_0)^2 - 4Tk_{-1}}}{2T} \quad (43)$$

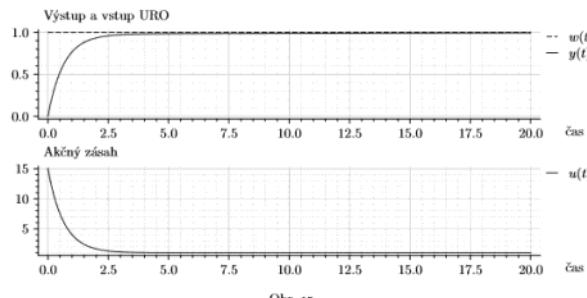
O charaktere koreňov rozhoduje diskriminant, teda v tomto prípade ak

$$(1 + Kr_0)^2 - 4Tk_{-1} \geq 0 \quad (44)$$

tak prechodný dej URO bude aperiodický, inak bude kmitavý.

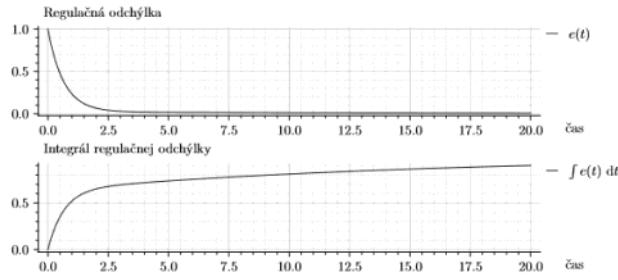
Simulácia 1 (nekmitavý prechodný dej)

Pre príklad uvažujme $K = 1$, $T = 10$ a $r_0 = 15$, $r_{-1} = 1$. Výsledok je nasledovný:



Obr. 15

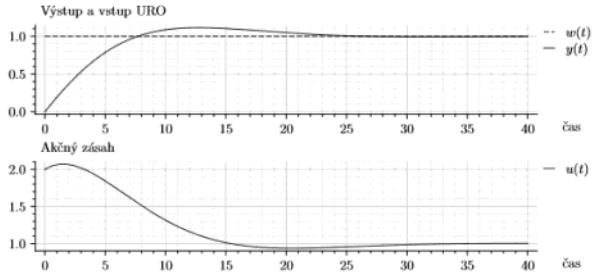
Pre ilustráciu, regulačná odchýlka:



Obr. 16

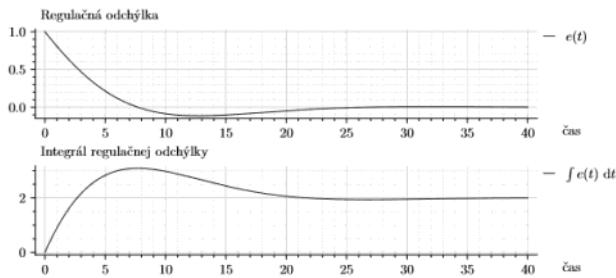
Simulácia 2 (kmitavý prechodný dej)

Pre príklad uvažujme $K = 1$, $T = 10$ a $r_0 = 2$, $r_{-1} = 0,5$. Výsledok je nasledovný:



Obr. 17

Pre ilustráciu, regulačná odchýlka:



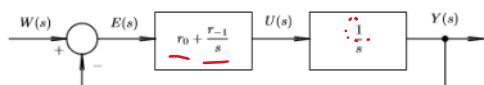
Obr. 18

3.1.3 PI regulátor a AS1R

Majme \overline{URO} , kde

$$G_R(s) = r_0 + \frac{r-1}{s} \quad \text{a} \quad G_S(s) = \frac{1}{s} \quad (45)$$

teda:



Obr. 19

Prenosová funkcia ORO

Nájdime prenosovú funkciu ORO.

$$G_{ORO}(s) = G_R(s)G_S(s) = \frac{r_0s + r_{-1}}{s^2} \quad (46)$$

Prenosová funkcia URO

Nájdime prenosovú funkciu URO.

$$G_{URO}(s) = \frac{G_{ORO}(s)}{1 + G_{ORO}(s)} = \frac{\frac{r_0s + r_{-1}}{s^2}}{\frac{s^2 + r_0s + r_{-1}}{s^2}} = \frac{r_0s + r_{-1}}{s^2 + r_0s + r_{-1}} \quad (47)$$

URO je systémom druhého rádu bez astatizmu s jednou mulou.

Stabilita

Vyšetrimo stabilitu URO. Charakteristický polynóm URO je

$$A(s) = s^2 + r_0s + r_{-1} \quad (48)$$

Nutnou a postačujúcou podmienkou stability teda je ak sú oba parametre regulátora kladné, $r_0 > 0, r_{-1} > 0$.

Kvalita v ustálenom stave

Uvažujme $w(t) = 1$ a vyšetrimo veľkosť trvalej regulačnej odchýlky $e(\infty)$. Kedže $W(s) = \frac{1}{s}$ (a URO je stabilný), potom

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} G_{URO}(s) = \frac{r_{-1}}{r_0} = 1 \quad (49)$$

teda

$$e(\infty) = w(\infty) - y(\infty) = 1 - 1 = 0$$

Trvalá regulačná odchýlka bude vždy nulová.

Prechodný dej

Je závislý od pôlov URO. Pôly URO sú

$$s_{1,2} = \frac{-(r_0)}{2} \pm \frac{\sqrt{(r_0)^2 - 4r_{-1}}}{T} \quad (50)$$

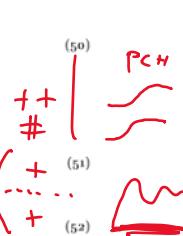
Ak teda

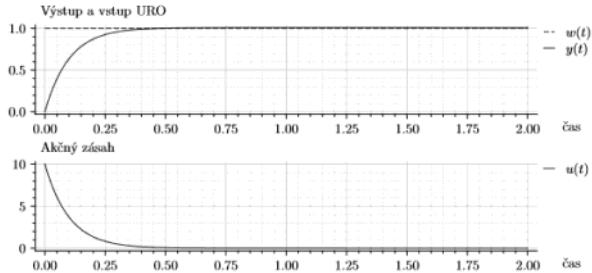
$$r_0^2 - 4r_{-1} \geq 0$$

prechodný dej bude aperiodický, inak bude kmitavý.

Simulácia 1 [nekmitavý prechodný dej]

Pre príklad uvažujme $r_0 = 10, r_{-1} = 1$. Vtedy jednoznačne platí $r_0^2 - 4r_{-1} \geq 0$. Výsledok je nasledovný:

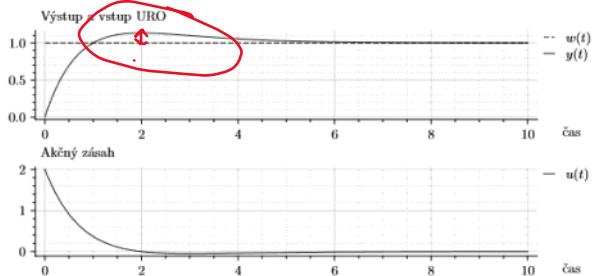




Obr. 20

Simulácia 2 (dva reálne póly)

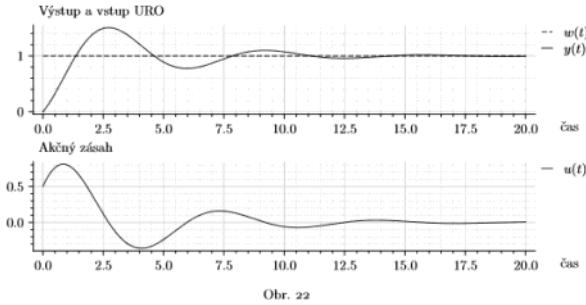
Pre príklad uvažujme $r_0 = 2$, $r_{-1} = 1$. Vtedy stále platí, že $r_0^2 - 4r_{-1} \geq 0$. Výsledok je však nasledovný, prejavuje sa vplyv mly prenosovej funkcie URO na prechodovú charakteristiku URO.



Obr. 21

Simulácia 3 (dva komplexne združené póly)

Pre príklad uvažujme $r_0 = 0.5$, $r_{-1} = 1$. Vtedy platí, že $r_0^2 - 4r_{-1} < 0$. Výsledok je nasledovný:



Obr. 22

4 O (vybraných) metódach návrhu PID regulátora

Cieľom tohto textu je veľmi stručný úvod do metód návrhu parametrov PID regulátora v zmysle klasického lineárneho regulačného obvodu (URO) aký bol diskutovaný v predchádzajúcom učebnom teste. Je teda zrejmé, že tieto metódy predpokladajú dostupnosť modelu riadeného systému vo forme prenosovej funkcie. Zvyčajne je tiež potrebné doplniť výstupy a výsledky metód o analýzu z hľadiska stability a kvality výsledného URO.

4.1 Analytický opis URO ako východisko

Metódy, ktorími sa tu budeme zaoberať, využívajú analytický opis URO ako východisko. Preto táto časť je skratkou pripomína lineárny URO ako taký.

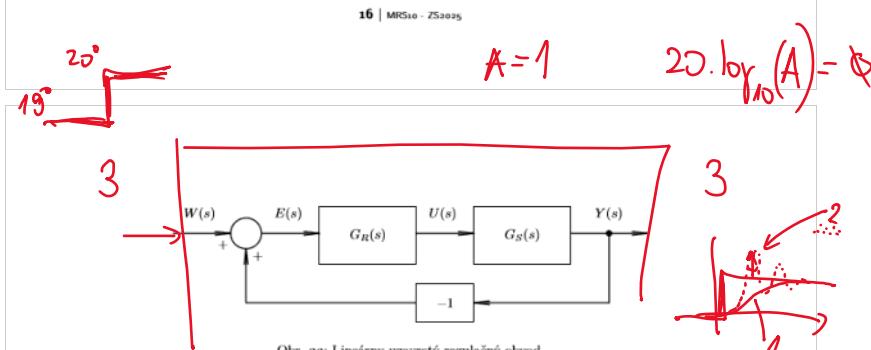
Ak totiž máme k dispozícii analytický opis URO, vieme o URO povedať prakticky čokoľvek. Vráťme toho ako má a môže vyzerať prenosová funkcia samotného regulátora v URO.

Možných je relativne veľa metód ako z matematického opisu URO odvodiť samotný regulátor a určiť jeho parametre. Napríklad sa môžeme priamo z analytického opisu URO pokúsiť vyjadríť prenosovú funkciu regulátora (pozri časť 4.2). Celkom prirodzenou požiadavkou na URO môže byť stanovenie želanej dynamiky URO, čo v lineárnom URO vlastne znamená stanovenie polohy pólov URO (pozri časť 4.3). Zmienkum postupu sú na prvý pohľad jednoduché, avšak pri ich uplatňovaní sa nezriedkavo vyskytujú rôzne problémky, ktoré môžu viesť až k nemôžnosti navrhnuť parametre regulátora tak aby bol daný cieľ riadenia splnený. Aj preto má význam skúmať metódy, ktoré na prvý pohľad nemusia byť zrejmé, avšak ich uplatnenie vedie k uspokojivým výsledkom v relatívne širšej triede súlo oproti zmienkum postupom. Príkladom takej dobre známej metódy je tu Metóda optimálneho modulu prezentovaná v časti 4.5.

V nasledujúcich častiach sú uvedené názvaky metód (relativne jednoduchých) návrhu parametrov PID (alebo PI, P atď.). Tento učebný text však neskladá uvedené metódy vo všeobecnosti, neskôr možnosti a obmedzenia ich uplatnenia. Pre ďalšie štúdium sa čitateľ odkažuje na klasickú literatúru venovanú návrhu PID regulátorov (nespočetne veľa autorov a diel).

Klasický lineárny uzavretý regulačný obvod

Pripomeňme, že uvažujeme klasický lineárny uzavretý regulačný obvod, ktorý je možné schematicky znázorniť nasledovne:



Obr. 23: Lineárny uzavretý regulačný obvod.

V schéme $G_R(s)$ je prenosová funkcia regulátora a $G_S(s)$ je prenosová funkcia riadeného systému. Blokmi URO sú tu teda prenosové funkcie, potom namiesto časových signálov je možné uvažovať ich Laplaceove obrazy (L-obrazy), a teda $W(s)$ je želaná hodnota (setpoint), $E(s)$ je regulačná odchyľka, $U(s)$ je akčný zásis a $Y(s)$ je výstupná (riadená) veličina URO.

Prenosová funkcia ORO a URO

Prenosové funkcie $G_R(s)$ a $G_S(s)$ sú v sérii a tvoria otvorený regulačný obvod, ktorého prenosová funkcia je v tvaru

$$G_{ORO}(s) = G_R(s)G_S(s) \quad (53)$$

Celkovým výstupom URO je výstupná veličina $Y(s)$, a celkovým vstupom URO je žiadana hodnota $W(s)$. Pomer obrazov $W(s)$ a $Y(s)$ je prenosovou funkciou URO.

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = G_{URO}(s) \quad (54)$$

Konkrétnie pre tu uvažovaný prípad a vzhľadom na vyššie uvedené

$$G_{URO}(s) = \frac{G_{ORO}(s)}{1 + G_{ORO}(s)} = \frac{G_R(s)G_S(s)}{1 + G_R(s)G_S(s)} \quad (55)$$

$$G_R ? \boxed{\square}$$

4.2 Čierno analyticke zamyslenie sa...

4.2.1 Priame vyjadrenie $G_R(s)$

Ak by sme mali k dispozícii takpovediac želanú prenosovú funkciu $G_{URO}(s)$, tak z (55) by bolo možné priamo vyjadríť prenosovú funkciu regulátora $G_R(s)$. Máme

$$G_{URO}(s) = \frac{G_R(s)G_S(s)}{1 + G_R(s)G_S(s)} \quad (56)$$

a teda

$$G_{URO}(s) + G_{URO}(s)G_R(s)G_S(s) - G_R(s)G_S(s) = 0 \quad (57)$$

$$G_R(s)G_S(s)(G_{URO}(s) - 1) = -G_{URO}(s) \quad (58)$$

$$G_R(s)G_S(s) = \frac{-G_{URO}(s)}{(G_{URO}(s) - 1)} \quad (59)$$

$$G_R(s)G_S(s) = \frac{G_{URO}(s)}{(1 - G_{URO}(s))} \quad (60)$$

$$G_R(s)G_S(s)(G_{URO}(s) - 1) = -G_{URO}(s) \quad (58)$$

$$G_R(s)G_S(s) = \frac{-G_{URO}(s)}{(G_{URO}(s) - 1)} \quad (59)$$

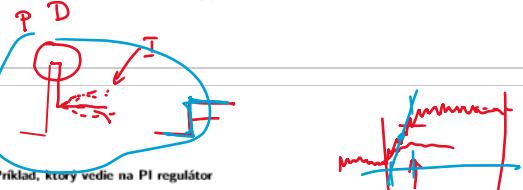
$$G_R(s)G_S(s) = \frac{G_{URO}(s)}{(1 - G_{URO}(s))} \quad (60)$$

a nakończe

$$G_R(s) = \frac{1}{G_S(s)} \frac{G_{URO}(s)}{(1 - G_{URO}(s))} \quad (61)$$

Mimochojom, je zrejmé, že dominantnou vlastnosťou výsledného regulátora je krátkomu nul a polovia riadeného systému (keďže obsahuje inverziu $G_S(s)$). To často zo seba prináša rôzne problémy (podrobnejšie vysvetlenie je nad rámcem tohto učebného textu), prípadne, ak nemôžete realizovať takýto regulátor. Navýše výber nie je zrejmé, či daný regulátor je PID regulátorom (alebo nejaká kombinácia súčiadi P, I a D). Kľúčovým problémom je tiež ako určiť či zvoliť želanú prenosovú funkciu $G_{URO}(s)$.

17 | MRS10 - ZS2025



4.2.2 Príklad, ktorý viedie na PI regulátor

Nech modelom riadeného systému je prenosová funkcia

$$G_S(s) = \frac{K}{Ts + 1} \quad (62)$$

kde K a T sú parametre riadeného systému.

Vyskúšajme želanú prenosovú funkciu $G_{URO}(s)$ v tvare

$$G_{URO}(s) = \frac{1}{T\lambda s + 1} \quad (63)$$

pričom sme zaviedli voliteľný parameter λ . Ak $\lambda = 1$, tak potom URO bude mať rovnakú dynamiku ako riadený systém. Ak $\lambda < 1$, dynamika URO bude rýchlejšia a ak $\lambda > 1$, dynamika URO bude pomalšia vzhľadom na dynamiku riadeného systému.

Určme prenosovú funkciu regulátora $G_R(s)$.

$$\begin{aligned} G_R(s) &= \frac{Ts + 1}{K} \frac{\frac{1}{T\lambda s + 1}}{\frac{T\lambda s + 1 - 1}{T\lambda s + 1}} \\ &= \frac{Ts + 1}{K} \frac{1}{T\lambda s} \\ &= \frac{1}{KT\lambda} \frac{Ts + 1}{s} \\ &= \frac{T}{s} + \frac{1}{KT\lambda} \end{aligned} \quad (64)$$

Je zrejmé, že $G_R(s)$ predstavuje PI regulátor s prenosovou funkciou

$$G_R(s) = \frac{r_0 s + r_{-1}}{s} \quad (65)$$

kde parametre regulátora sú

$$r_0 = \frac{1}{K\lambda} \quad \text{a} \quad r_{-1} = \frac{1}{KT\lambda} \quad (66)$$

Simulačný experiment 1

Pre uvedený príklad uvažujme konkrétnie

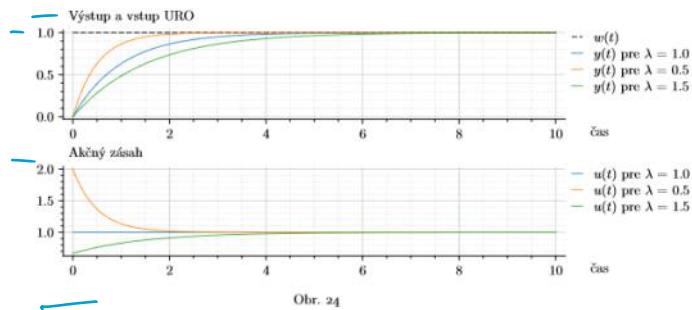
$$G_S(s) = \frac{1}{s + 1} \quad (67)$$

kde teda $K = 1$ a $T = 1$ sú parametre riadeného systému. Podľa (66) a napríklad pre $\lambda = 1$ majú parametre PI regulátora hodnoty:

$$r_0 = 1 \quad \text{a} \quad r_{-1} = 1 \quad (68)$$

Pre $\lambda = 1$ (a napríklad pre iné hodnoty $\lambda = 0,5$ a $\lambda = 1,5$) je simulácia regulácie na želanú hodnotu uvedená na obrázku 24.

18 | MRS10 - ZS2025



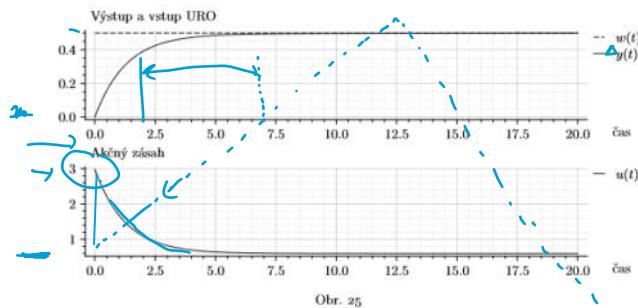
Obr. 24

Simulačný experiment 2Uvažujme prenosovú funkciu s parametrami $K = 0,84$ a $T = 6,66$.

$$G_S(s) = \frac{0,84}{6,66s + 1} \quad (69)$$

Podľa (66) a pre $\lambda = 0,2$ majú parametre PI regulátora hodnoty:

$$r_0 = 5,95 \quad \text{a} \quad r_{-1} = 0,89 \quad (70)$$

Výsledky simulácie regulácie na žiadanú hodnotu ($w(t) = 0,5$) sú na nasledujúcom obrázku (obr. 25).

Obr. 25

4.3 Metóda rozmiestňovania pólov

Vzhľadom na to, že sa tu zaoberáme PID regulátorom je zrejmé, že póly, ktoré má zmysel rozmiestňovať, sú póly URO. Predpísaním pólov URO je možné stanoviť želanú výslednú dynamiku URO.

4.4 Konkrétny príklad s PI regulátorom

Pre ilustráciu uvedieme príklad. Uvažuje sa model riadeného systému v tvare



a PI regulátor s parametrami P a T_i

$$G_S(s) = \frac{K}{T} \left(\frac{1}{s + \frac{1}{T}} \right) \quad (71)$$

$$G_R(s) = P \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) = P \left(\frac{s + \frac{1}{T_i}}{s} \right) \quad (72)$$

Výsledná prenosová funkcia URO bude druhého rádu.

Nech zadaným charakteristickým polynómom prenosovej funkcie URO je

$$Z(s) = s^2 + 2\omega_0 s + \omega_0^2 \quad (73)$$

kde koeficienty b a frekvencia ω_0 sú voliteľnými parametrami. Ich volbou sú jednoznačne určené korene polynómu $Z(s)$ a naopak. Ak by bol polynóm $Z(s)$ charakteristickým polynómom URO, potom by, samozrejme, išlo o rozmiestňovanie polov URO volbou parametrov b a ω_0 .

Stanovenie prenosovej funkcie URO

Uvažme, že prenosová funkcia URO je

$$G_{URO}(s) = \frac{G_{ORO}(s)}{1 + G_{ORO}(s)} \quad (74)$$

pričom v tomto prípade

$$\begin{aligned} G_{ORO}(s) &= \frac{K}{T} \frac{1}{\left(s + \frac{1}{T} \right)} P \left(\frac{s + \frac{1}{T_i}}{s} \right) \\ &= \frac{KP}{T} \frac{\left(s + \frac{1}{T_i} \right)}{\left(s + \frac{1}{T} \right)s} \end{aligned} \quad (75)$$

Následne

$$\begin{aligned} G_{URO}(s) &= \frac{KP \left(s + \frac{1}{T_i} \right)}{T \left(s + \frac{1}{T} \right)s + KP \left(s + \frac{1}{T_i} \right)} \\ &= \frac{KP \left(s + \frac{1}{T_i} \right)}{Ts^2 + s + KP s + \frac{KP}{T_i}} \quad (76) \\ &= \frac{KP}{T} \frac{\left(s + \frac{1}{T_i} \right)}{s^2 + \left(\frac{1+KP}{T} \right)s + \frac{KP}{TT_i}} \end{aligned}$$

Prenosová funkcia $G_{URO}(s)$ je teda stanovená.

Povšimnutia

Povšimnime si, že v ustálenom stave (teda $s \rightarrow 0$) platí

$$\frac{y(\infty)}{w(\infty)} = \frac{\frac{KP}{TT_i}}{\frac{KP}{TT_i} - 1} \quad (77)$$

Zosilnenie URO je teda jednotkové, čo je takpovediac samozrejma požiadavka kladenia na URO (môžu byť prípady keď sa to nevyžaduje).

Taktiež si povšimnime, že prenosová funkcia $G_{URO}(s)$ má vo všeobecnosti nulu, polynómov v čítateľi je prvého stupňa. Poloha tejto nuly je daná parametrom regulátora T_i . Táto nula sa nevyhnutne prejaví pri regulárnom priebehu (napr. pri skokovej zmene želanej hodnoty). Iným slovami, táto nula nevyhnutne bude ovplyvňovať celkovú dynamiku URO. To môže byť nežiaduce, pretože želaná výsledná dynamika tu má byť daná len pôlmi $G_{URO}(s)$. Ako zmeniť vplyv uvedenej nuly je nad rámec tohto učebného textu. Vyžaduje sa to štrukturálnu zmenu samotného PID regulátora (metódy známe ako vahovanie žiadanej hodnoty) a tým by sa do istej miery pozmenila aj vyššie uvedená analýza vedúca na stanovenie prenosovej funkcie $G_{URO}(s)$.

Charakteristický polynóm URO

Charakteristický polynóm URO je v tvare

$$A_{URO}(s) = s^2 + \left(\frac{1+KP}{T} \right) s + \frac{KP}{TT_i} \quad (78)$$

Cieľom je aby tento polynóm zhodoval s $Z(s)$. Pre tento cieľ je možné vhodne stanoviť parametre regulátora P a T_i .

Výpočet parametrov regulátora

Pre zhodu $A_{URO}(s)$ a $Z(s)$ musí platiť

$$\frac{1+KP}{T} = 2b\omega_0 \quad (79)$$

$$1+KP = 2b\omega_0 T \quad (80)$$

$$KP = 2b\omega_0 T - 1 \quad (81)$$

$$P = \frac{2b\omega_0 T - 1}{K} \quad (82)$$

a zároveň

$$\frac{KP}{TT_i} = \omega_0^2 \quad (83)$$

preto

$$\frac{2b\omega_0 T - 1}{TT_i} = \omega_0^2 \quad (84)$$

$$\omega_0^2 TT_i = 2b\omega_0 T - 1 \quad (85)$$

$$T_i = \frac{2b\omega_0 T - 1}{\omega_0^2 T} \quad (86)$$

Všimnime si, že ak majú byť parametre regulátora kladné, voliteľný parameter ω_0 musí spĺňať $\omega_0 > \frac{1}{2bT}$.

4.4.1 Simulačný experiment pre ilustráciu

Pre uvedený príklad uvažujme konkrétnie

$$G_S(s) = \frac{1}{s+1} \quad (87)$$

kde teda $K = 1$ a $T = 1$ sú parametre riadeného systému.

Zelané rozmiestnenie pôlov stanovme voľbou parametrov

$$b = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad a = \omega_0 = 2 \cdot \frac{1}{2bT} \quad (88)$$

Podľa (82) a (86) majú parametre PI regulátora hodnoty

$$P = 1 \quad a = T_i = 0,5 \quad (89)$$

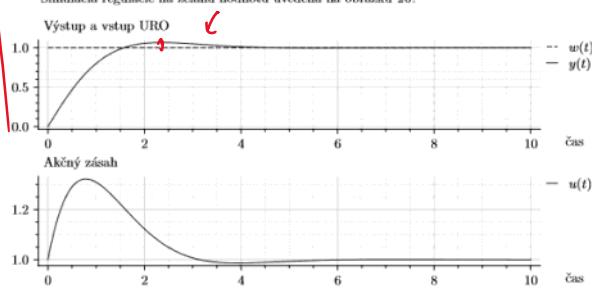
Pôly URO (teda korene charakteristického polynomu URO) sú

$$s_{k1} = -1 + j \quad a \quad s_{k2} = -1 - j \quad (90)$$

a nula URO (koreň polynomu v čitateli $G_{URO}(s)$) je

$$s_{n1} = -2 \quad (91)$$

Simulácia regulácie na želanú hodnotu uvedená na obrázku 26.



Obr. 26

4.5 Metóda optimálneho modulu

Táto metóda vychádza z predstavy ideálnej prenosovej funkcie URO. Ide odtiaľ že bolo, ak by $G_{URO}(s) = 1$. To by totiž znamenalo, že signál predstavujúci želanú hodnotu $W(s)$ (alebo referenčný signál) by sa okamžite (bez akékoľvek zotrvačnosti) prenesol na výstup URO $Y(s)$, keďže $Y(s) = G_{URO}W(s)$. Formálnejšie:

$$\boxed{G_{URO}(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} + 1} \Rightarrow y(t) = w(t) \forall t \quad (92)$$

Toto je samozrejme, nerealizovateľné. Nie je možné mať URO s nekonečne rýchlo dynamikou.

k. o.

Modul $G_{URO}(j\omega)$
Keďže $G_{URO}(s) = 1$ je nereálna požiadavka, Metóda optimálneho modulu je postavená na požiadavke týkajúcej sa modulu prenosovej funkcie $G_{URO}(s)$ namiesto požiadavky na prenosovú funkciu samotnú. Hovoríme o module v zmysle rovnakom ako keď hovoríme o komplexnom číslе. Výraz $G_{URO}(s)$ totiž je komplexné číslo. Vzhľadom na súvislosti vyplývajúce z Laplaceovej transformácie (a Fourierovej transformácie), o ktorých tu nebudeme hovoriť, má význam uvažovať $s = j\omega$, kde j je komplexná jednotka a ω [rad/s] je frekvencia. Ak $s = j\omega$ tak $G_{URO}(j\omega)$ je takzvaná frekvenčná prenosová funkcia (podrobnosti sú nad rámcem tohto učebného textu).

V každom prípade, $G_{URO}(j\omega)$ je komplexné číslo. Modul tohto komplexného čísla sa označuje ako $|G_{URO}(j\omega)|$.

4.5.1 Princíp metódy

Pre približenie hľavnej myšlienky metódy je možné konštatovať, že ak nemôžeme mať $G_{ORO}(s) = 1$, tak nech aspoň modul tejto prenosovej funkcie nech je jednotkový.

Konkrétnejšie, pri Metóde optimálneho modulu je požiadavou aby kвadrát modulu $G_{ORO}(j\omega)$ bol jednotkový pre čo najväčší rozsah frekvenčí ω . Formálnejšie, kde modul označme M

$$|G_{ORO}(j\omega)|^2 = M^2(\omega) \stackrel{!}{=} 1 \quad (93)$$

Metóda ponúka nasledujúce riešenie uvedenej požiadavky. Platí

$$G_{ORO}(j\omega) = \frac{G_{ORO}(j\omega)}{1 + G_{ORO}(j\omega)} \quad (94)$$

Dalej platí

$$G_{ORO}(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega) \quad (95)$$

kde $U(\omega)$ a $V(\omega)$ sú reálna a imaginárna časť komplexného čísla $G_{ORO}(j\omega)$. Samotné hodnoty U a V sú závislé od frekvenčí ω . Následne môžeme písat

$$\begin{aligned} M^2(\omega) &= |G_{ORO}(j\omega)|^2 \\ &= \left| \frac{G_{ORO}(j\omega)}{1 + G_{ORO}(j\omega)} \right|^2 \\ &= \left| \frac{U(\omega) + jV(\omega)}{1 + U(\omega) + jV(\omega)} \right|^2 \\ &= \frac{|U(\omega) + jV(\omega)|^2}{|1 + U(\omega) + jV(\omega)|^2} \\ &= \frac{U^2(\omega) + V^2(\omega)}{1 + 2U(\omega) + U^2(\omega) + V^2(\omega)} \end{aligned} \quad (96)$$

Je zrejmé, že ak by platilo

$$1 + 2U(\omega) = 0 \quad (97)$$

tak by tiež platilo

$$M^2(\omega) = 1 \quad (98)$$

V tomto momente teda požiadavku je aby

$$U(\omega) = -\frac{1}{2} \quad (99)$$

Iným slovami, reálna časť komplexného čísla $G_{ORO}(j\omega)$ má mať hodnotu $-\frac{1}{2}$.

$$\Re\{G_{ORO}(j\omega)\} = -\frac{1}{2} \quad (100)$$

4.5.2 Postup

Vzhľadom na uvedené je možné stanoviť nasledujúci postup.

- Je známa prenosová funkcia riadeného systému $G_S(s)$.
- Zvolí regulátor (struktúra PID regulátora) a tým prenosová funkcia regulátora $G_R(s)$.
- Prenosová funkcia otvoreného regulačného obvodu je $G_{ORO}(s) = G_R(s)G_S(s)$.
- Za s sa dosadi $j\omega$ a získá sa frekvenčná prenosová funkcia $G_{ORO}(j\omega)$.
- Stanoví sa $\Re\{G_{ORO}(j\omega)\}$, označme $U(\omega)$, príčom ide formálne o polynómovom vzhľadom na premennú ω . Vo výrazu $U(\omega)$ sa vo všeobecnosti nachádzajú parametre riadeného systému (tie sú známe) a neznáme parametre regulátora (vo všeobecnosti to sú r_0 , r_{-1} a r_1).
- Parametre regulátora hľadáme riešením rovnice

$$U(\omega) = -\frac{1}{2} \quad (101)$$

Ide o diofantickú rovnicu ($U(\omega)$ je polynóm vzhľadom na ω). Riešenie hľadáme porovnaním koeficientov pri rovnakých mocninách ω na oboch stranach rovnice (101).

4.5.3 Príklad

Riadenej systém

$$G_S(s) = \frac{K}{Ts + 1} \quad (102)$$

Regulátor

$$G_R(s) = \frac{r_0 s + r_{-1}}{s} \quad (103)$$

Otvorený regulačný obvod

$$G_{ORO}(s) = \frac{Kr_0 s + Kr_{-1}}{Ts^2 + s} \quad (104)$$

$$\begin{aligned} G_{ORO}(j\omega) &= \frac{Kr_0 j\omega + Kr_{-1}}{T(j\omega)^2 + j\omega} \\ &= \frac{Kr_0 j\omega + Kr_{-1}}{-T\omega^2 + j\omega} \cdot \frac{-T\omega^2 - j\omega}{-T\omega^2 - j\omega} \quad (105) \\ &= \frac{Kr_0 j\omega(-T\omega^2 - j^2 Kr_0 \omega - Kr_{-1} T\omega^2 - j Kr_{-1} \omega)}{(-T\omega^2)^2 + \omega^2} \\ &= \frac{Kr_0 \omega - Kr_{-1} T\omega^2 + j(Kr_0 \omega(-T\omega^2) - Kr_{-1} \omega)}{T^2 \omega^4 + \omega^2} \end{aligned}$$

Preto

$$\Re\{G_{ORO}(j\omega)\} = \frac{Kr_0 \omega - Kr_{-1} T\omega^2}{T^2 \omega^4 + \omega^2} \quad (106)$$

Neznáme parametre r_0 a r_{-1} hľadame riešením rovnice

$$\frac{Kr_0 \omega - Kr_{-1} T\omega^2}{T^2 \omega^4 + \omega^2} = -\frac{1}{2} \quad (107)$$

$$Kr_0 \omega - Kr_{-1} T\omega^2 = -\frac{1}{2} (T^2 \omega^4 + \omega^2) \quad (108)$$

$$Kr_0 \omega - Kr_{-1} T\omega^2 = -\frac{1}{2} T^2 \omega^4 - \frac{1}{2} \omega^2 \quad (109)$$

Ak uvážime koeficienty pri ω a ω^2 potom

$$Kr_0 = 0 \quad (110)$$

$$-Kr_{-1} T = -\frac{1}{2} \quad (111)$$

a teda

$$r_0 = 0 \quad (112)$$

$$r_{-1} = \frac{1}{2KT} \quad (113)$$

Tým sme určili parametre prenosovej funkcie regulátora, príom pre tento prípad ide o I regulátor (P zložka má nulový parameter).

Simulačný experiment

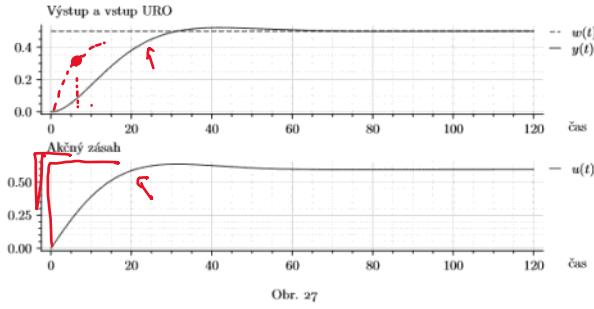
Uvažujme prenosovú funkciu s parametrami $K = 0,84$ a $T = 6,66$.

$$G_S(s) = \frac{0,84}{6,66s + 1} \quad (114)$$

Podľa výsledku vyššie majú parametre PI regulátora hodnoty:

$$r_0 = 0 \quad \text{a} \quad r_{-1} = 0,089 \quad (115)$$

Výsledky simulácie regulácie na žiadanú hodnotu ($w(t) = 0,5$) sú na nasledujúcom obrázku (obr. 27).



Obr. 27

4.5.4 Poznámky k metóde

- Metóda nezaručuje stabilitu URO. Tú je potrebné vyšetriť následne po získaní parametrov prenosovej funkcie regulačora.
- Metóda nezaručuje existenciu riešenia rovnice $U(\omega) = -\frac{1}{2}$ (nezároveň parametre r_0 , r_{-1} a r_1) pre akúkoľvek kombináciu štruktúry PID a prenosovej funkcie riadeného systému.
- Výsledok metódy je možné interpretovať ako tvoranie frekvenčnej charakteristiky otvoreného regulačného obvodu (ORO) tak, aby pre čo najväčší rozsah frekvencií ω platilo, že frekvenčná charakteristika ORO je zhodná s takou priamkou v komplexnej rovine, ktorá je rovnobežná s imaginárnu osou a prechádza bodom $-0,5 + j0$.
- Metódu je možné čiastočne zovšeobecniť ak sa prenosová funkcia riadeného systému upraví do tvaru

$$G_S(s) \sim \frac{K}{1 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + \dots} \quad (116)$$

Potom, pre I regulátor platí

$$r_{-1} = \frac{1}{2K} \frac{1}{a_1} \quad (117)$$

pre PI regulátor platí

$$\begin{bmatrix} a_1 & -1 \\ a_2 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{-1} \\ r_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2K} \begin{bmatrix} 1 \\ -a_1^2 + 2a_2 \end{bmatrix} \quad (118)$$

pre PD regulátor platí

$$\begin{bmatrix} -a_2 & a_1 \\ a_4 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2K} \begin{bmatrix} -a_1^2 + 2a_2 \\ a_2^2 - 2a_1 a_3 + 2a_4 \end{bmatrix} \quad (119)$$

a pre PID regulátor platí

$$\begin{bmatrix} a_1 & -1 & 0 \\ a_3 & -a_2 & a_1 \\ a_5 & -a_4 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{-1} \\ r_0 \\ r_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2K} \begin{bmatrix} 1 \\ -a_1^2 + 2a_2 \\ a_2^2 - 2a_1 a_3 + 2a_4 \end{bmatrix} \quad (120)$$

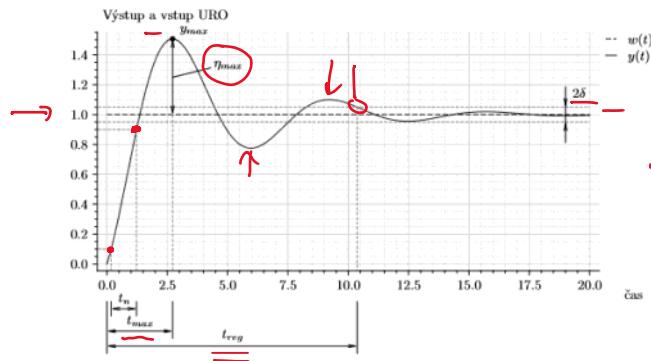
5 O ukazovateľoch kvality PCH URO

Typicky sa pri posudzovaní kvality uzavretého regulačného obvodu (URO) využíva prechodová charakteristika (PCH). Vstupom URO je želaná hodnota (referenčný signál) $w(t)$ a výstupom je výstupná veličina riadeného systému $y(t)$. Prechodová

charakteristika URO je teda príbeh výstupnej veľičiny po skokovej zmene želanej hodnoty.

V tomto prípade teda ide takpovediac o kvalitu URO pri prechodných dejoch.

Prechodová charakteristika URO v mnohých prípadoch vykazuje čierné oscilácie pred dosiahnutím ustáleného stavu. Príkladom nech je obr. 28.



Obr. 28

Z prechodovej charakteristiky URO je možné odčítať niekoľko hodnôt, ktoré sa používajú ako ukazovatele kvality URO (pri prechodnom dejí):

- Maximálne preregulovanie η_{max}
- Doba regulácie t_{reg} (alebo čas regulácie)
- Doba nábehu t_n (alebo čas nábehu)

Maximálne preregulovanie

Maximálne preregulovanie η_{max} sa typicky udáva v percentách pričom 100 % je ustálená hodnota výstupnej veľičiny $y(\infty)$. Maximálne preregulovanie je

$$\eta_{max} = \frac{y_{max} - y(\infty)}{y(\infty)} \times 100\% \quad (121)$$

kde y_{max} je maximálna hodnota výstupnej veľičiny $y(t)$, ktorá nastala v čase t_{max} po skokovej zmene želanej hodnoty.

Doba regulácie

Doba regulácie t_{reg} je čas, ktorý uplynie od skokovej zmene želanej hodnoty kým sa výstupná veľičina dostane do pásmo necitlivosti a ostane v ňom.

Pásma necitlivosti je určené percentom z ustálenej hodnoty výstupnej veľičiny $y(\infty)$. Toto percento je typicky 2 až 5 %, pripadne aj viac v závislosti od konkrétej aplikácie. Uvažuje sa teda pásma so stredom v $y(\infty)$ a šírkou 2δ pričom δ je daná uvedeným percentom, napríklad

$$\delta = 0,05 \cdot y(\infty) \quad (122)$$

Doba nábehu

Ukazovateľom rýchlosťi regulácie môže byť aj takzvaná doba nábehu t_n . Je to čas, za ktorý sa výstupná veličina $y(t)$ zvýší z 10 % na 90 % svojej ustálenej hodnoty $y(\infty)$. Používajú sa aj iné percentá, napríklad 5 a 95 % alebo 0 a 100 %, opäť v závislosti na aplikácii.