Dynamická zbierka otázok a úloh

Mení sa v čase...

Obsah

1 Rôzne pojmy a definície

1.1 Úloha

Vlastnými slovami vysvetlite pojem *Kybernetika* (čo je to Kybernetika?).

Riešenie: Kybernetika je veda o riadení a prenose informácií v systémoch zahŕňajúcich stroje, živé organizmy a ľudskú spoločnosť.

1.2 Úloha

Vysvetlite pojem *zosilnenie systému* (alebo *statické zosilnenie systému*).

Riešenie: Zosilnenie systému je pomer medzi ustálenou hodnotou výstupného signálu systému a ustálenou hodnotou vstupného signálu systému.

1.3 Otázka

Ako sa nazýva pomer medzi ustálenou hodnotou výstupného signálu systému a ustálenou hodnotou vstupného signálu systému?

Odpoveď: Zosilnenie systému.

1.4 Úloha

Vysvetlite rozdiel medzi bezzotrvačným a zotrvačným systémom.

Riešenie: Každý systém je z istého hľadiska dynamickým systémom, teda takým, ktorého výstup sa mení v čase pričom aktuálny výstup závisí nielen od aktuálneho vstupu, ale aj od predchádzajúcich hodnôt vstupu a/alebo výstupu. Výstup sa tak zjavne nemení okamžite, systém má zotrvačnosť – zotrvačný systém. Teoreticky má význam uvažovať taký systém, ktorého výstup závisí len od aktuálneho vstupu. Teda výstup sa zmení okamžite po zmene vstupu, systém nemá zotrvačnosť – bezzotrvačný systém. Príkladom bezzotrvačného systému v praxi môže byť napríklad odporový delič elektrického napätia (napätie na výstupe sa zmení prakticky okamžite pri zmene napätia na vstupe).

1.5 Otázka

Čo sú to *začiatočné podmienky* dynamického systému?

Odpoveď: Začiatočné podmienky sú hodnoty veličín v čase považovanom za začiatočný, typicky v čase $t = 0$. Ide o veličiny, ktoré charakterizujú stav systému (stavové veličiny). Napríklad systém opísaný diferenciálnou rovnicou druhého rádu má dve začiatočné podmienky, pretože stav systému je daný minimálne dvoma veličinami.

2 Diferenciálne rovnice vo všeobecnosti

2.1 Otázka

Čo je riešením obyčajnej diferenciálnej rovnice (vo všeobecnosti)?

Odpoveď: V kontexte predmetu MRS hovoríme o diferenciálnych rovniciach opisujúcich dynamický systém. Riešením diferenciálnej rovnice je funkcia, v uvedenom kontexte funkcia času (časová závislosť), ktorú keď dosadíme do diferenciálnej rovnice, tak táto rovnica platí.

2.2 Úloha

Vysvetlite rozdiel medzi homogénnou a nehomogénnou obyčajnou diferenciálnou rovnicou.

Riešenie: Homogénnou je rovnica vtedy, keď sa v rovnici nachádza len funkcia času, ktorá je neznámou. Iné funkcie času sa v rovnici nevyskytujú. Z hľadiska systému to znamená, že systém má len výstup, len výstupný signál.

Nehomogénnou je diferenciálna rovnica vtedy, keď obsahuje aj iné funkcie času ako neznámu. Z hľadiska systému to znamená, že systém má okrem výstupu aj vstup, teda vstupný signál.

2.3 Úloha

Uveďte príklad homogénnej obyčajnej diferenciálnej rovnice.

Riešenie:

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + ay(t) = 0 \tag{2.1}$$

Neznámou v tejto rovnici je funkcia času $y(t)$. Koeficient a je reálne číslo.

2.4 Úloha

Uveďte príklad nehomogénnej obyčajnej diferenciálnej rovnice.

Riešenie:
$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + ay(t) = u(t) \tag{2.2}$$

Neznámou v tejto rovnici je funkcia času $y(t)$. Koeficient a je reálne číslo. kde $u(t)$ je funkcia času. Nie je to však neznáma funkcia času.

2.5 Úloha

Vysvetlite pojem *analytické riešenie* obyčajnej diferenciálnej rovnice.

Riešenie: Analytické riešenie diferenciálnej rovnice je funkcia času, ktorú je možné vyjadriť (zapísať) analyticky (matematicky). Napríklad $y(t) = 5\ t$ je analyticky zapísaná funkcia času (t je čas).

2.6 Úloha

Vysvetlite pojem *numerické riešenie* obyčajnej diferenciálnej rovnice.

Riešenie: Numerické riešenie diferenciálnej rovnice je funkcia času, inými slovami časová postupnosť, ktorá je vyjadrená (zapísaná) pomocou hodnôt, čísiel. Napríklad časová postupnosť vyjadrená tabuľkou priraďujúcou k časovým hodnotám hodnoty veličiny, ktorá je neznámou v diferenciálnej rovnici.

t	$y(t)$
0	0
1	5
2	10
⋮	⋮

Tákáto časová postupnosť (funkcia času) môže byť validné riešenie diferenciálnej ale nie je to analyticky zapísaná časová funkcia. Je vyjadrená pomocou hodnôt, čísiel.

2.7 Otázka

Aký je rozdiel medzi analytickým a numerickým riešením diferenciálnej rovnice?

Odpoveď: Rozdiel je v spôsobe vyjadrenia (zápisu) funkcie času, ktorá je riešením diferenciálnej rovnice. Analytické riešenie je zapísané matematicky (analyticky), napríklad $y(t) = e^{-at}$, a numerické riešenie je zapísané pomocou hodnôt, čísiel, napríklad v tabuľke, kde prvý stĺpec sú časové hodnoty a druhý stĺpec sú hodnoty veličiny $y(t)$.

2.8 Úloha

Nasledujúcu diferenciálnu rovnicu druhého rádu prepíšte na sústavu diferenciálnych rovníc prvého rádu.

$$a_2\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = b_0u(t) \qquad a_2, a_1, a_0, b_0 \in \mathbb{R} \tag{2.3}$$

Riešenie: Ako prvé *zvoľme*
$$x_1(t) = y(t) \tag{2.4}$$

To znamená
$$\dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) \tag{2.5}$$

čo však nie je v tvare aký hľadáme. Na pravej strane vystupuje pôvodná veličina $y(t)$.

Druhou voľbou preto nech je

$$x_2(t) = \dot{y}(t) \tag{2.6}$$

pretože potom môžeme písať prvú diferenciálnu rovnicu v tvare

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \tag{2.7}$$

Ostáva zostaviť druhú diferenciálnu rovnicu.

Keďže sme zvolili (2.6), tak je zrejmé, že platí

$$\dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t) \tag{2.8}$$

Otázkou je $\ddot{y}(t) = ?$ Odpoveďou je pôvodná diferenciálna rovnica druhého rádu. Upravme (2.3) na tvar

$$\ddot{y}(t) + \frac{a_1}{a_2}\dot{y}(t) + \frac{a_0}{a_2}y(t) = \frac{b_0}{a_2}u(t) \tag{2.9}$$

$$\ddot{y}(t) = -\frac{a_1}{a_2}\dot{y}(t) - \frac{a_0}{a_2}y(t) + \frac{b_0}{a_2}u(t) \tag{2.10}$$

To znamená, že

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{a_1}{a_2}\dot{y}(t) - \frac{a_0}{a_2}y(t) + \frac{b_0}{a_2}u(t) \tag{2.11}$$

čo však stále nie je požadovaný tvar druhej hľadanej diferenciálnej rovnice. Na pravej strane rovnice (2.11) môžu figurovať len nové veličiny $x_1(t)$ a $x_2(t)$, nie pôvodná veličina $y(t)$. Stačí si však všimnúť skôr zvolené (2.4) a (2.6). Potom môžeme písať

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{a_1}{a_2}x_2(t) - \frac{a_0}{a_2}x_1(t) + \frac{b_0}{a_2}u(t) \tag{2.12}$$

čo je druhá hľadaná diferenciálna rovnica prvého rádu.

2.9 Úloha

Sústavu rovníc

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \tag{2.13a}$$
$$\dot{x}_2(t) = -a_0x_1(t) - a_1x_2(t) + b_0u(t) \tag{2.13b}$$
$$y(t) = x_1(t) \tag{2.13c}$$

prepíšte do maticového tvaru:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \tag{2.14a}$$
$$y(t) = c^{\mathsf{T}}x(t) \tag{2.14b}$$

(definujte signálny vektor $x(t)$, maticu A a vektory b a c).

Riešenie: Ide o sústavu dvoch diferenciálnych rovníc prvého rádu kde neznámymi sú funkcie času $x_1(t)$ a $x_2(t)$. Stavový vektor je teda

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

Potom môžeme písať

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u(t) \tag{2.16}$$

a teda

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix} \tag{2.17}$$

Výstupná rovnica s využitím stavového vektora je

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

a teda

$$c^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

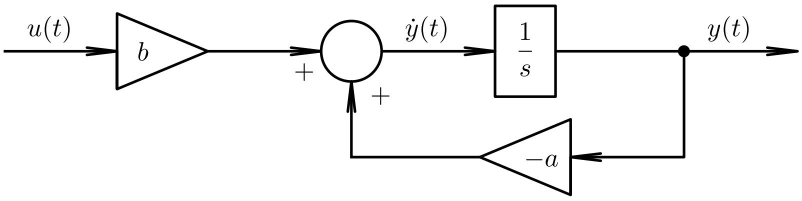
2.10 Úloha

Schematicky znázornite dynamický systém daný v tvare diferenciálnej rovnice

$$\dot{y}(t) + ay(t) = bu(t) \qquad y(0) = y_0$$

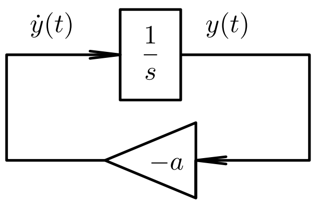
kde a, b sú konštanty a $u(t)$ je známy vstupný signál.

Riešenie:



2.11 Úloha

Podľa zadanej blokovej schémy zostavte diferenciálnu rovnicu, ktorá popisuje dynamický systém.



Riešenie: Diferenciálna rovnica je

$$\dot{y}(t) + ay(t) = 0 \qquad y(0) = y_0 \tag{2.20}$$

3 Analytické riešenie lineárnej obyčajnej diferenciálnej rovnice – metóda charakteristickej rovnice

3.1 Úloha

Nájdite analytické riešenie diferenciálnej rovnice

$$\dot{y}(t) + ay(t) = 0 \qquad y(0) = y_0 \qquad a \in \mathbb{R},\ y_0 \in \mathbb{R}$$

Riešenie: (metódou charakteristickej rovnice)

Prvým krokom je stanovenie charakteristickej rovnice. Tú je možné určiť nahradením derivácií neznámej funkcie mocninami pomocnej premennej, označme ju s. Napríklad prvú deriváciu $\dot{y}(t)$ nahradíme s^1, nultú deriváciu $y(t)$ nahradíme s^0. Charakteristická rovnica pre danú diferenciálnu rovnicu bude

$$s + a = 0 \tag{3.1}$$

Druhým krokom je stanovenie fundamentálnych riešení diferenciálnej rovnice, ktoré sú dané riešeniami charakteristickej rovnice. Riešením charakteristickej rovnice je

$$s_1 = -a \tag{3.2}$$

Fundamentálne riešenie je teda len jedno

$$y_{f1}(t) = e^{-at} \tag{3.3}$$

Tretím krokom je stanovenie všeobecného riešenia dif. rovnice. Je lineárnou kombináciou fundamentálnych riešení. Teda

$$y(t) = c_1 e^{-at} \tag{3.4}$$

kde $c_1 \in \mathbb{R}$ je konštanta.

Štvrtým krokom je stanovenie konkrétneho riešenia dif. rovnice v prípade, ak sú dané začiatočné podmienky. Konkrétne ide o stanovenie hodnoty konštanty c_1. Pre čas $t = 0$ má všeobecné riešenie tvar

$$y(0) = c_1 \, e^{(-a)0} = c_1 \tag{3.5}$$

Samotná hodnota $y(0)$ je známa, keďže máme začiatočnú podmienku $y(0) = y_0$. Takže

$$c_1 = y_0 \tag{3.6}$$

To znamená, že riešenie úlohy je:

$$y(t) = y_0 \, e^{(-a)t} \tag{3.7}$$

3.2 Úloha

Nájdite analytické riešenie diferenciálnej rovnice. Použite metódu charakteristickej rovnice.

$$\ddot{y}(t) + (a+b)\dot{y}(t) + aby(t) = 0 \qquad y(0) = y_0 \qquad \dot{y}(0) = z_0 \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

Riešenie: Prvým krokom je stanovenie charakteristickej rovnice. V tomto prípade

$$s^2 + (a+b)s + ab = 0 \tag{3.8}$$

V druhom kroku pre stanovenie fundamentálnych riešení hľadáme riešenia charakteristickej rovnice. Vo všeobecnosti

$$s_{1,2} = \frac{-(a+b) \pm \sqrt{(a+b)^2 - 4ab}}{2} \tag{3.9}$$

avšak v tomto prípade tiež vidíme, že

$$s^2 + (a+b)s + ab = (s+a)(s+b) \tag{3.10}$$

Riešenia charakteristickej rovnice teda sú

$$s_1 = -a \tag{3.11a}$$
$$s_2 = -b \tag{3.11b}$$

Zodpovedajúce fundamentálne riešenia sú

$$y_{f1}(t) = e^{-at} \tag{3.12a}$$
$$y_{f2}(t) = e^{-bt} \tag{3.12b}$$

Tretím krokom je stanovenie všeobecného riešenia dif. rovnice. Je lineárnou kombináciou fundamentálnych riešení. Teda

$$y(t) = c_1 e^{-at} + c_2 e^{-bt} \tag{3.13}$$

kde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sú konštanty.

Vo štvrtom kroku je možné na základe začiatočných podmienok stanoviť konkrétne riešenie. Pre čas $t = 0$ má všeobecné riešenie tvar

$$y(0) = c_1 \, e^{(-a)0} + c_2 \, e^{(-b)0} = c_1 + c_2 \tag{3.14}$$

Derivácia všeobecného riešenia je

$$\dot{y}(t) = -ac_1 e^{-at} - bc_2 e^{-bt} \tag{3.15}$$

Pre čas $t = 0$ má derivácia všeobecného riešenia tvar

$$\dot{y}(0) = -ac_1 - bc_2 \tag{3.16}$$

Z uvedeného vyplýva sústava dvoch rovníc o dvoch neznámych konštantách c_1 a c_2

$$c_1 + c_2 = y_0 \tag{3.17a}$$
$$-ac_1 - bc_2 = z_0 \tag{3.17b}$$

Do druhej rovnice dosaďme $c_1 = y_0 - c_2$

$$-a(y_0 - c_2) - bc_2 = z_0 \tag{3.18a}$$
$$-ay_0 + ac_2 - bc_2 = z_0 \tag{3.18b}$$
$$c_2(a - b) = z_0 + ay_0 \tag{3.18c}$$
$$c_2 = \frac{z_0 + ay_0}{a - b} \tag{3.18d}$$

potom

$$c_1 = y_0 - c_2 \tag{3.19a}$$
$$c_1 = y_0 - \frac{z_0 + ay_0}{a - b} \tag{3.19b}$$
$$c_1 = \frac{y_0(a - b) - z_0 - ay_0}{a - b} \tag{3.19c}$$
$$c_1 = \frac{y_0 a - y_0 b - z_0 - ay_0}{a - b} \tag{3.19d}$$
$$c_1 = \frac{-y_0 b - z_0}{a - b} \tag{3.19e}$$

Konkrétne riešenie úlohy teda je

$$y(t) = \frac{-y_0 b - z_0}{a - b} e^{-at} + \frac{z_0 + ay_0}{a - b} e^{-bt} \tag{3.20}$$

3.3 Úloha

Nájdite analytické riešenie diferenciálnej rovnice. Použite metódu charakteristickej rovnice.

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = u(t) \qquad y(0) = 3,\ \dot{y}(0) = -2 \qquad u(t) = 0$$

Riešenie: Prvým krokom je stanovenie charakteristickej rovnice. V tomto prípade

$$s^2 + 3s + 2 = 0 \tag{3.21}$$

V druhom kroku pre stanovenie fundamentálnych riešení hľadáme riešenia charakteristickej rovnice. Riešením charakteristickej rovnice sú

$$s_1 = -1 \tag{3.22a}$$
$$s_2 = -2 \tag{3.22b}$$

Zodpovedajúce fundamentálne riešenia sú

$$y_{f1}(t) = e^{-t} \tag{3.23a}$$
$$y_{f2}(t) = e^{-2t} \tag{3.23b}$$

Tretím krokom je stanovenie všeobecného riešenia dif. rovnice. Je lineárnou kombináciou fundamentálnych riešení. Teda

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} \tag{3.24}$$

kde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sú konštanty.

Vo štvrtom kroku je možné na základe začiatočných podmienok stanoviť konkrétne riešenie. Pre čas $t = 0$ má všeobecné riešenie tvar

$$y(0) = c_1\, e^{(-1)0} + c_2\, e^{(-2)0} = c_1 + c_2 \tag{3.25}$$

Tým sme takpovediac zúžitkovali informáciu o začiatočnej hodnote $y(0) = 3$. Druhá začiatočná podmienka sa týka derivácie riešenia. Derivácia všeobecného riešenia je

$$\dot{y}(t) = -c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{-2t} \tag{3.26}$$

Pre čas $t = 0$ má derivácia všeobecného riešenia tvar

$$\dot{y}(0) = -c_1 - 2c_2 \tag{3.27}$$

Z uvedeného vyplýva sústava dvoch rovníc o dvoch neznámych konštantách c_1 a c_2

$$c_1 + c_2 = 3 \tag{3.28a}$$
$$-c_1 - 2c_2 = -2 \tag{3.28b}$$

Platí $c_2 = 3 - c_1$, a teda

$$-c_1 - 2(3 - c_1) = -2 \tag{3.29a}$$
$$-c_1 - 6 + 2c_1 = -2 \tag{3.29b}$$
$$c_1 = 4 \tag{3.29c}$$

potom

$$c_2 = 3 - c_1 \tag{3.30a}$$
$$c_2 = 3 - 4 \tag{3.30b}$$
$$c_2 = -1 \tag{3.30c}$$

Našli sme funkciu $y(t)$, ktorá je riešením diferenciálnej rovnice pre konkrétne začiatočné podmienky

$$y(t) = 4e^{-t} - e^{-2t} \tag{3.31}$$