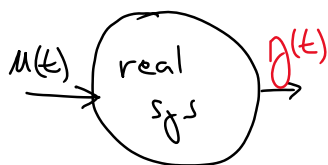FCH
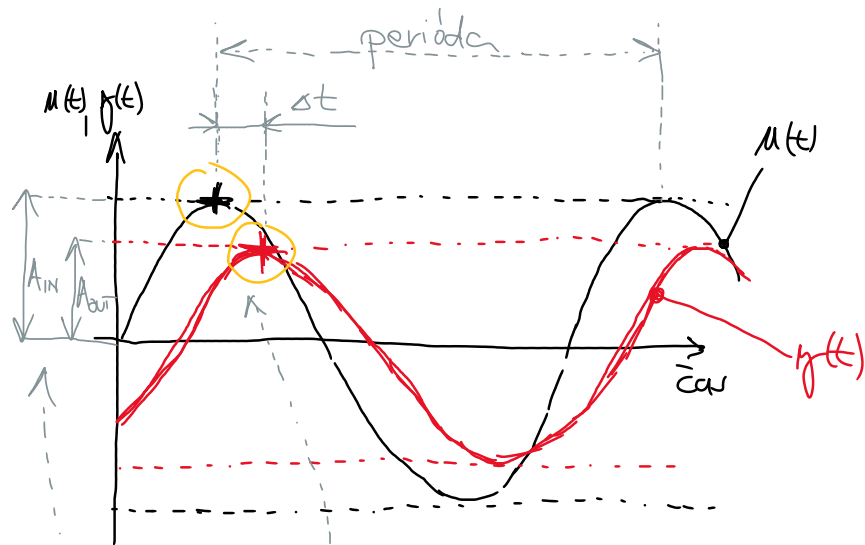

$$u(t) = A_{IN} \sin(\omega t)$$

... jednotková amplitúda

rad/s
$\omega = 2\pi f$

$y(t) = ?$

- iná amplitúda
- iná „fáza"

ROVNAKÁ FREKVENCIA!

model:

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{B(s)}{(s+s_1)(s+s_2)\cdots(s+s_n)}$$

$$Y(s) = G(s) U(s)$$

$$U(s) ? \qquad u(t) = \sin(\omega t)$$
$$U(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$Y(s) = G(s) \left[\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right]$$

$\Downarrow$

parc. zlomky ... $\rightarrow y(t)$ ...

komplexne združené k A

$$G(s) \left[\frac{\omega}{(s+j\omega)(s-j\omega)} \right] = \frac{A}{s+j\omega} + \frac{A^*}{s-j\omega} + \frac{B_1}{s+s_1} + \frac{B_2}{s+s_2} + \cdots + \frac{B_n}{s+s_n}$$

$$y(t) = A e^{-j\omega t} + A^* e^{j\omega t} + B_1 e^{-s_1 t} + B_2 e^{-s_2 t} + \cdots + B_n e^{-s_n t}$$

$$y(t) = A e^{-j\omega t} + A^* e^{j\omega t} + B_1 e^{-\zeta_1 t} + B_2 e^{-\zeta_2 t} + \cdots + B_n e^{-\zeta_n t}$$

"frekvenčný" ustálený stav:

$$y_{FUS}(t) = A e^{-j\omega t} + A^* e^{j\omega t}$$

$A, A^* = ?$

$$Y_{FUS}(s) = G(s) \left[\frac{\omega}{(s+j\omega)(s-j\omega)} \right] = \frac{A}{s+j\omega} + \frac{A^*}{s-j\omega}$$

$$G(s)\,\omega = A(s-j\omega) + A^*(s+j\omega)$$

$s = j\omega \qquad G(j\omega)\,\omega = A^*(j\omega + j\omega) \qquad A^* = \dfrac{G(j\omega)}{2j}$

$s = -j\omega \qquad G(-j\omega)\,\omega = A(-j\omega - j\omega) \qquad A = \dfrac{G(-j\omega)}{-2j}$

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\phi} \quad \text{uhol}$$
$$\text{velkost}$$

$$G(-j\omega) = |G(-j\omega)| e^{-j\phi} = |G(j\omega)| e^{-j\phi}$$

$$y_{FUS}(t) = \frac{|G(j\omega)| e^{-j\phi} e^{-j\omega t}}{-2j} + \frac{|G(j\omega)| e^{j\phi} e^{j\omega t}}{2j}$$

$$y_{FUS}(t) = |G(j\omega)| \left(\frac{-e^{-j(\omega t + \phi)} + e^{j(\omega t + \phi)}}{2j} \right)$$

$$= |G(j\omega)| \left(\frac{e^{j(\omega t + \phi)} - e^{j(\omega t + \phi)}}{2j} \right)$$

$$\text{platí:}$$
$$e^{j(\omega t + \phi)} = \cos(\omega t + \phi) + j\sin(\omega t + \phi)$$
$$e^{-j(\omega t + \phi)} = \cos(-(\omega t + \phi)) + j\sin(-(\omega t + \phi))$$
$$\vdots \qquad \cos \text{ je párna fcm, } \sin \text{ nepárna...}$$
$$= \cos(\omega t + \phi) - j\sin(\omega t + \phi)$$

$$y_{FUS}(t) = |G(j\omega)| \left(\frac{\cos(\omega t + \phi) + j\sin(\omega t + \phi) - (\cos(\omega t + \phi) - j\sin(\omega t + \phi))}{2j} \right)$$

$$y_{FUS}(t) = |G(j\omega)| \left(\frac{j\sin(\omega t + \phi) + j\sin(\omega t + \phi)}{2j} \right)$$

$$y_{FUS}(t) = |G(j\omega)| \ \sin(\omega t + \phi)$$

amplitúda   fázové posunutie

...iná ako A_{IN}

pripomenme: $G(j\omega) = \underbrace{|G(j\omega)|}_{\text{velkosť}} e^{j\phi}$

komplexné číslo

uhol

ak poznáme $G(s)$

zaujíma nás „frekvenčný ustálený stav" pre frekvenciu ω

poznáme teda $G(j\omega)$

$|G(j\omega)|$ ← amplitúdové zosilnenie (závislé na ω)

ϕ ← fázové posunutie (závislé na ω)

„frekvenčná"
prenosová
funkcia

frekvenčné charakteristiky   FCH

AFCH

FFCH

Bodeho diagram

decibel [dB]

... jednotka pre zosilnenie

napríklad:

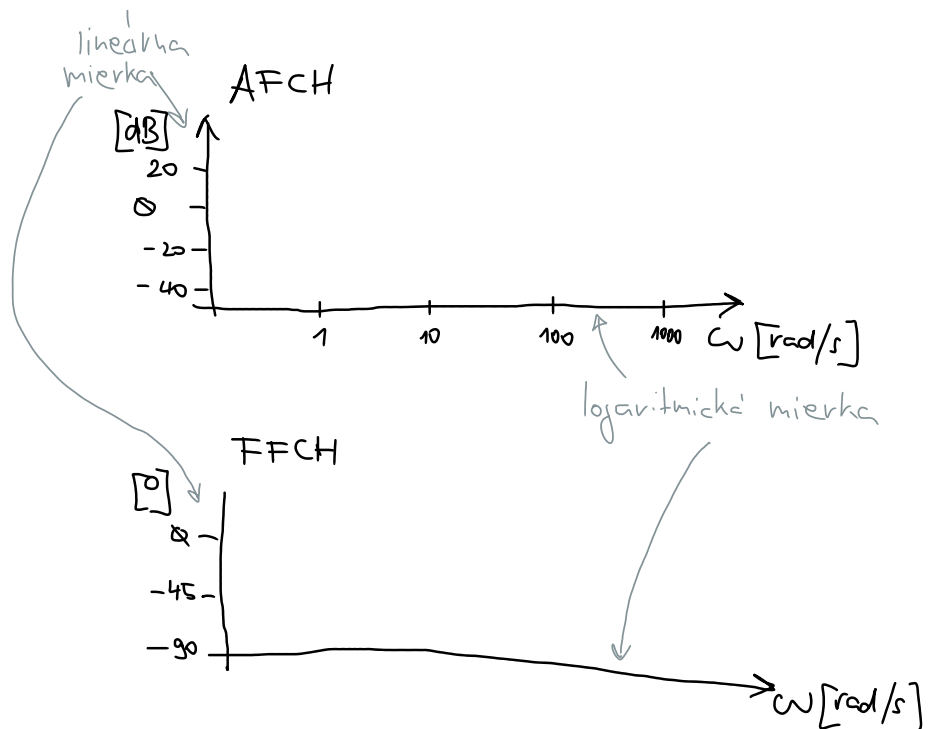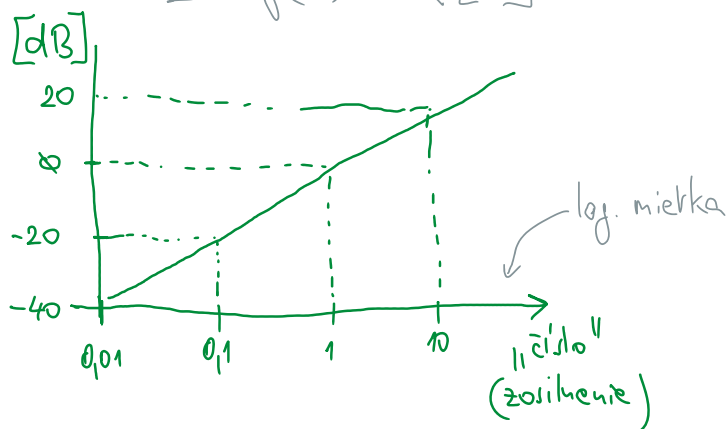$|G(j\omega)|$ je veľkosť komplexného čísla

"Logaritmická veľkosť" potom je

$$20 \log\Big(|G(j\omega)|\Big)$$
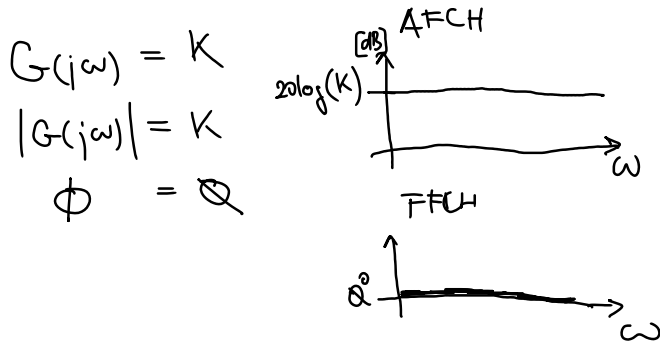
kde log je pri základe 10

napríklad "jednotkové" zosilnenie

$$20 \log(1) = 0 \,[dB]$$

AFCH

FFCH

lineárna mierka

logaritmická mierka

log. mierka

"číslo"
(zosilnenie)

Bodeho diagram pre:

$$G(s) = K \qquad \text{(len zosilnenie)}$$

$$G(j\omega) = K$$
$$|G(j\omega)| = K$$
$$\phi = \varnothing$$

AFCH

$20\log(K)$

ω

FFCH

$0°$

ω

$$a + jb$$
$$|a+jb| = \sqrt{a^2+b^2}$$
$$\angle a+jb = -\operatorname{atan}\left(\frac{b}{a}\right)$$

Bodeho diag. pre $G(s) = \dfrac{1}{S}$
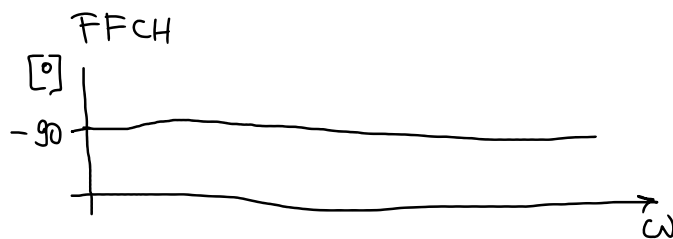
$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} \qquad \frac{1}{j\omega} \cdot \frac{-j\omega}{-j\omega} = \frac{-j\omega}{\omega^2} = \frac{-j}{\omega} = \varnothing + j\frac{1}{\omega}$$

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\varnothing^2 + \frac{1}{\omega^2}}$$
$$= \sqrt{\frac{1}{\omega^2}}$$
$$= \frac{1}{\omega}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\omega} \qquad 20\log\left(\frac{1}{\omega}\right) = 20\left(-\log(\omega)\right) = -20\log(\omega)$$
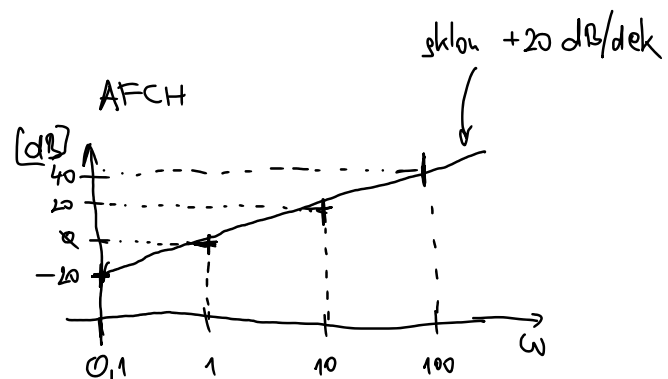
AFCH

[dB]

$-20\log(0,1) = 20$

$-20\log(1) = \varnothing$

$-20\log(10) = -20$

sklon $-20\,dB$ na dekádu ω

$0,1 \qquad 1 \qquad 10 \qquad 100 \qquad \omega$

$$\phi = -\operatorname{atan}\left(\frac{\frac{1}{\omega}}{\varnothing}\right) = -\operatorname{atan}(\infty) = -90°$$

FFCH

[°]

-90

ω

Bodeho diagram pre $G(s) = S$

AFCH

sklon $+20\,dB/dek$

[dB]

40

20

$\varnothing$

-20

$0,1 \qquad 1 \qquad 10 \qquad 100 \qquad \omega$

$+90°$ ————————————

ω →
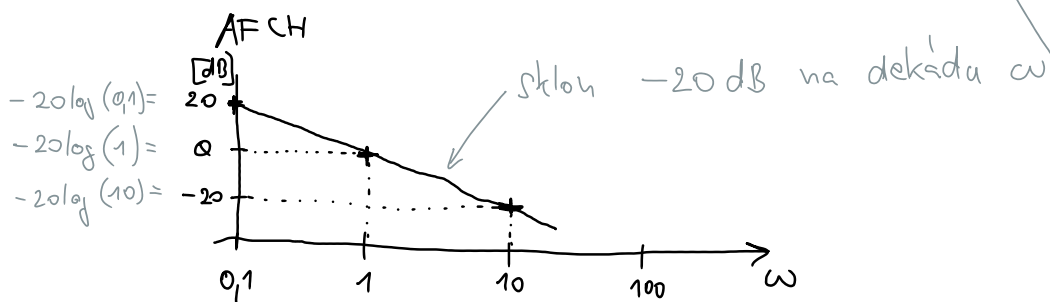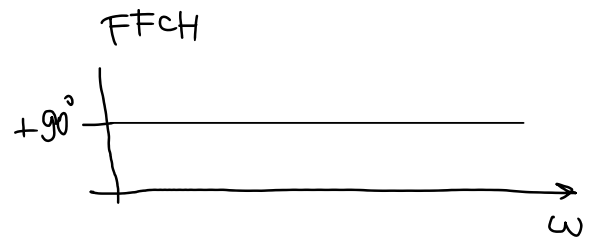
T má rozmer $[čas]$

$\frac{1}{T}$ je frekvencia ...

$$G(s) = \frac{1}{Ts+1}$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{Tj\omega+1}$$

$$\frac{1}{1+j\,T\omega} \cdot \frac{1-j\,T\omega}{1-j\,T\omega} = \frac{1-j\,T\omega}{1+T^2\omega^2} = \frac{1}{1+T^2\omega^2} + j\,\frac{T\omega}{1+T^2\omega^2}$$

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\left(\frac{1}{1+T^2\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{T\omega}{1+T^2\omega^2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1+T^2\omega^2}{(1+T^2\omega^2)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{1+T^2\omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}$$

$$20 \log\left(\frac{1}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}\right) = -20 \log\left(\sqrt{1+T^2\omega^2}\right)$$

$$\angle G(j\omega) = -\operatorname{atan}\left(\frac{\frac{T\omega}{(1+T^2\omega^2)}}{\frac{1}{(1+T^2\omega^2)}}\right) = -\operatorname{atan}(T\omega)$$

$$\omega \lll \frac{1}{T}$$

$$|G(j\omega)| = -20 \log(1) = 0 \ [dB]$$

$$\omega \ggg \frac{1}{T}$$

$$|G(j\omega)| = -20 \log\left(\sqrt{1+T^2\omega^2}\right) \approx -20 \log(T\omega) \ [dB]$$
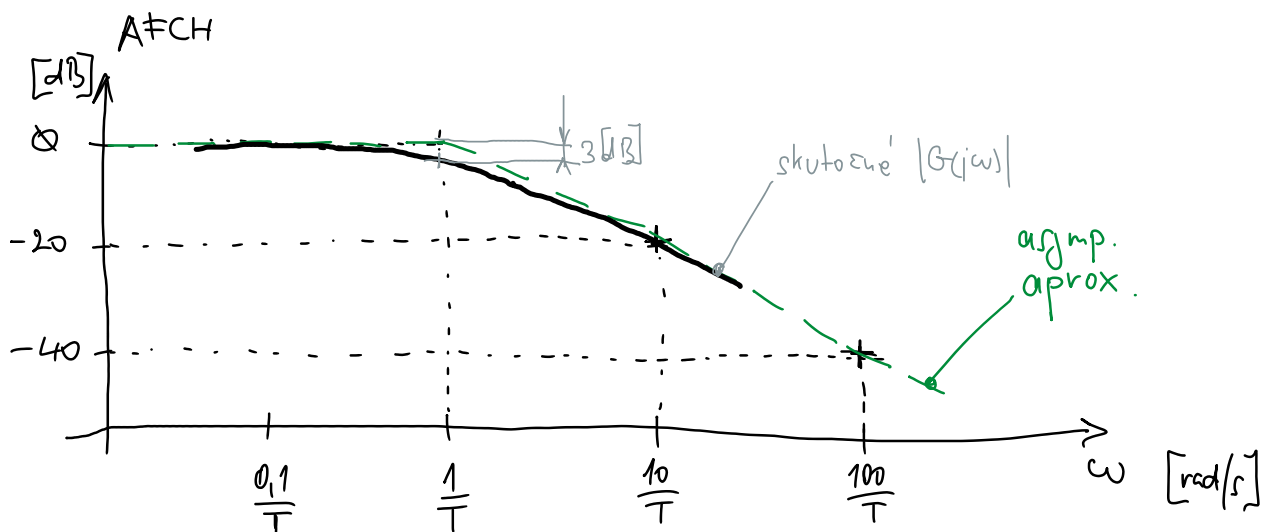
$$1 \lll T^2\omega^2$$
$$\Downarrow$$
$$\sqrt{T^2\omega^2}$$

ω	aprox. $\|G(j\omega)\|\ [dB]$
$\frac{1}{T}$	0
$\frac{10}{T}$	-20
$\frac{100}{T}$	-40

$$\omega = \frac{1}{T}$$

$$|G(j\omega)| = -20 \log\left(\sqrt{1+1}\right) = -20 \log\left(\sqrt{2}\right) \approx -20 \cdot 0.15 = -3 \ [dB]$$

AFCH

[dB]

0

−20

−40

3 [dB]

skutočné $|G(j\omega)|$

asymp. aprox.

$\dfrac{0,1}{T}$ $\dfrac{1}{T}$ $\dfrac{10}{T}$ $\dfrac{100}{T}$ ω [rad/s]

$$\phi = -\text{atan}(T\omega)$$

ω	ϕ [°]
0	0
$\frac{1}{T}$	−45
∞	−90

FFCH

[°]

0

−45

−90

$\dfrac{1}{T}$ ω
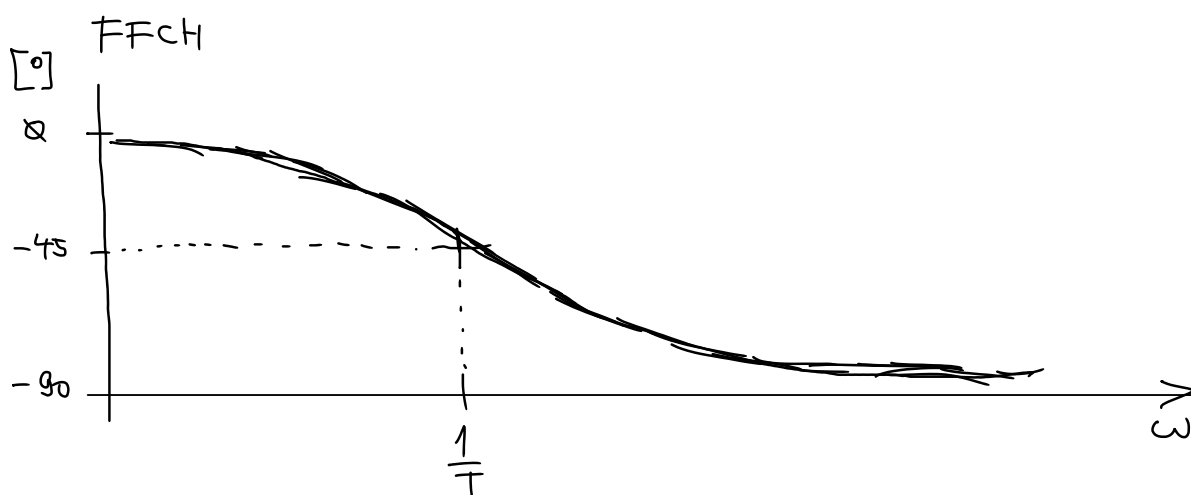
$$G(s) = (Ts + 1)$$

← obrátený výraz oproti $\dfrac{1}{(Ts+1)}$

Výhoda Bodeho diagramu...
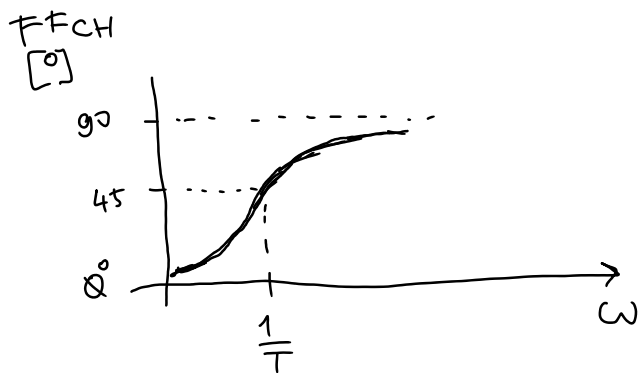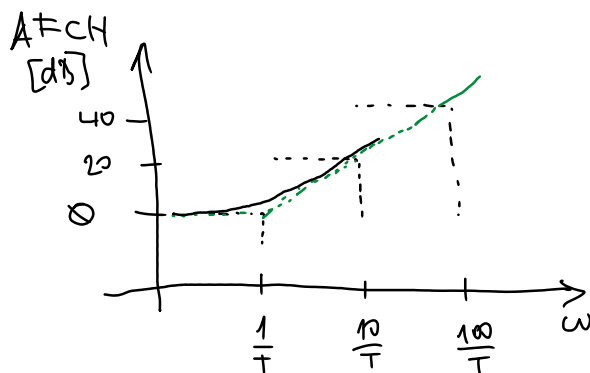(použitie $20\log(|G(j\omega)|)$

platí totiž:

plati totiž:

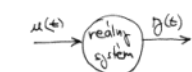$$\boxed{+}\ 20 \log\left(\left|T j\omega + 1\right|\right) = \boxed{-}\ 20 \log\left(\left|\frac{1}{T j\omega + 1}\right|\right)$$

len opačné znamienko...

$$\boxed{+}\ \angle{T_j\omega + 1} = \operatorname{atan}(T\omega) = \boxed{-}\ \angle{\frac{1}{T_j\omega + 1}}$$

Takže:

MRS 08 (Beta verzia)

strana 1

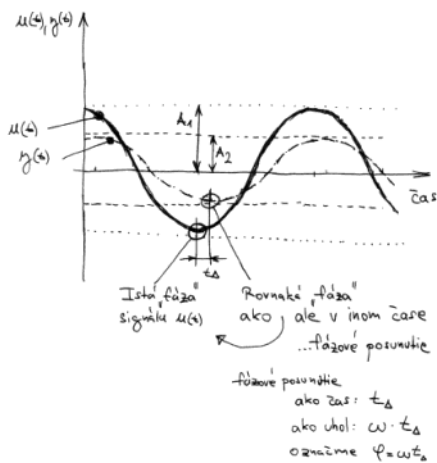$\mu(t) \rightarrow$ reálny systém $\rightarrow y(t)$

$\mu(t) = A_1 \cos(\omega t)$

amplitúda A_1

frekvencia ω

ustálený stav
„Ustálená situácia"

$y(t) = ?$

||| frekvencia rovnaká ako $\mu(t)$

— iná amplitúda A_2
— tzv. fázový posun

$y(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi)$

Istá „fáza" signálu $\mu(t)$

Rovnaké „fáza" ako, ale v inom čase

...fázové posunutie

fázové posunutie
ako čas: t_Δ
ako uhol: $\omega \cdot t_\Delta$
označíme $\varphi = \omega t_\Delta$

Amplitúdové zosilnenie A

Nech $A_1 = 1$ [jednotka]

$A = \dfrac{A_2}{A_1}$

Závislé od ω...
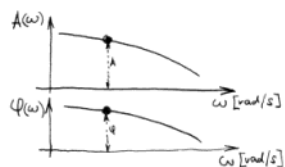
$A(\omega)$
$\varphi(\omega)$

Amplitúdová frekvenčná charakteristika
AFCH

Frekvenčná Fázová Frekvenčná charakteristika
FFCH

„xy" graf:

$A(\omega)$

ω [rad/s]

$\varphi(\omega)$

ω [rad/s]

polárne súradnice:

φ

A

MRS 08 (Beta verzia)

URO:

FCH ORO a návrh URO

ORO:

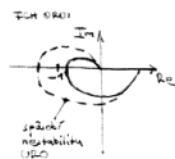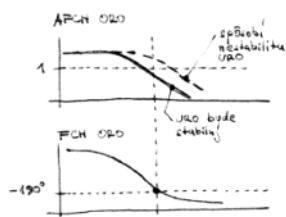$V(\omega)$ $\xrightarrow{}$ $G_{ORO}(\omega)$ $\xrightarrow{}$ $Y(\omega)$
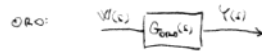
Na základe FCH ORO
je možné zaoberať sa nasledovnými
vlastnosťami URO

- ■ stabilita URO — Nyquistove kritérium

- ■ Trvalá regulačná odchýlka URO $e(\infty)$ $e(\infty)$ sa zmenšuje ak
                                                    $A(\omega)$ sa zvyšuje pri nízkych ω
                                                    ↗ amplitúdové zosilnenie ORO

- ■ Preregulovanie URO → je menšie ak bezpečnosť (rezerva) vo fáze
                           je väčšia

- ■ Doba regulácie URO → je kratšia ak pásmo priepustnosti ORO
                          je väčšie

PCH URO   max. preregulovanie

AFCH

3dB ─┤

pásmo priepustnosti
napríklad
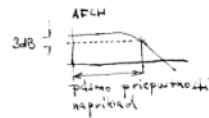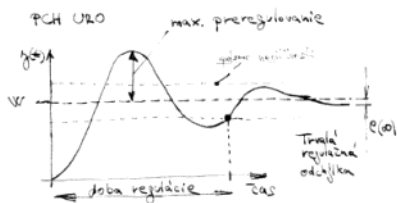
Nyquistove kritérium
stability (bez dôkazu...)

URO je stabilný ak
AFCH ORO má hodnotu
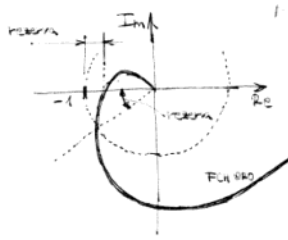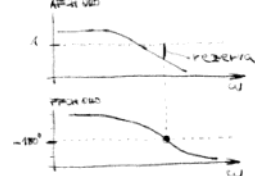menej ako 1 (0 dB) pri
frekvencii kde FFCH ORO
má hodnotu 180°

AFCH ORO   spôsobí nestabilitu URO

1

URO bude stabilný

FCH ORO

-180°

FCH ORO: Im   Re

spôsobí nestabilitu URO

MRS 08 (Beta verzia)

strana 6

Rezerva vo fáze
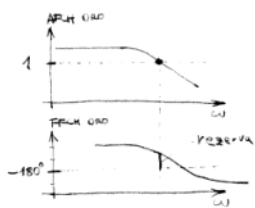
AFCH URO

1

FFCH URO

rezerva

$-180°$

Rezerva v amplitúde
(v zosilnení)

AFCH URO

1 rezerva

FFCH URO

$-180°$

rezerva Im

-1 Re

rezerva

FCH URO

Tabuľka pre Z-N metóda:

	P	T_I	T_D
P	$0,5 P_K$		
PI	$0,45 P_K$	$0,85 T_K$	
PID	$0,6 P_K$	$0,5 T_K$	$0,12 T_K$

Ak URO na hranici stability
tak pre FCH URO platí:

$$A(\omega) = 1$$
$$\varphi(\omega) = -\pi$$

Ako dostať URO na hranicu stability ?
Zmenou zosilnenia URO, a teda P-regulátorom

Napríklad: $G_R(s) = P$ $\quad Z(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$

$$G_{URO}(s) = \frac{P}{(s+1)^3}$$

$$G_{URO}(j\omega) = \frac{P}{(j\omega+1)^3} = \frac{P(1-3\omega^2)}{(\omega^2+1)^3} - j\frac{P\omega(3-\omega^2)}{(\omega^2+1)^3}$$

$$= U(\omega) + j V(\omega)$$

kritický bod:
$U(\omega) = -1$ $\omega_K = ?$
$V(\omega) = 0$

$$V(\omega_K) = \frac{P\omega_K(3-\omega_K^2)}{(\omega_K^2+1)^3} = 0$$

$$\omega_K^2 = 3 \qquad \omega_K = \sqrt{3}$$

$$U(\omega_K) = -1 = \frac{P(1-3\omega_K^2)}{(\omega_K^2+1)^3} \implies P_K = 8$$

Metóda Zeiglera a Nicholsa
je experimentálna metóda návrhu parametrov
PID regulátora. Uvažuje sa:

$$G_R(s) = P\left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s\right)$$

Postup návrhu parametrov (P, T_I, T_D):

1) URO len s P regulátorom nastavíme na hranicu stability (postupné zvyšovanie P)

2) Získame tak kritické zosilnenie P-regulátora (P_K) a z ustálených kmitov výstupnej veličiny určíme perióda kmitov T_K (frekvencia $\omega_K = \frac{2\pi}{T_K}$)

3) Parametre PID regulátora potom sú

... Ak je G(s) známe, potom v určitých prípadoch je možné P_K a T_K nájsť analyticky.

Statické vlastnosti URO
... teda $e_{(\infty)}$

Ak sme si v podstate žiadali
P-regulátor umožňuje vypočítať
zosilnenie URO.

Kvôli zosilnenia URO sa dá okrem
iného vypočítať trvalá regulačná
odchýlka $e_{(\infty)}$.

$$\frac{E_{(s)}}{W_{(s)}} = G_{E}(s) = \frac{1}{1 + G_{0w}(s)} = \frac{1}{1 + G_{R}(s) G_{S}(s)}$$

$$G_{R}(s) = P$$

$$W_{(s)} = \frac{1}{s}$$

$$e_{(\infty)} = \lim_{s \to 0} s E(s) = \lim_{s \to 0} \frac{1}{1 + P G_{S}(s)}$$

$$\Downarrow$$
$$P$$

Dynamické vlastnosti URO
... teda - preregulovanie
        - doba regulácie

$$\Downarrow$$

KOREKČNÝ ČLEN

(všeobecne známe ako Lead-Lag controller)

Prenosová funkcia
korekčného člena
(základný princíp)

$$G_{K}(s) = \frac{aTs + 1}{Ts + 1}$$

ak $a > 1$ KČ má fázový
            predstih
            (Lead controller)

ak $a < 1$ KČ má fázové
            zaostávanie
            (Lag controller)

Použitie KČ v URO:

FCH $G_{K}(s)$ pre $a > 1$