Laplaceova transformácia a prenosové funkcie

Obsah

LAPLACEOVA transformácia umožňuje efektívne pracovať s lineárnymi dynamickými systémami. Transformuje a tým zjednodušuje operácie súvisiace s hľadaním riešenia lineárnych diferenciálnych rovníc (LDR). Predovšetkým zjednodušuje prácu s konvolučnou rovnicou (konvolučným integrálom) (pozri časť 6).

K využitiu Laplaceovej transformácie pri riešení diferenciálnych rovníc patrí aj pojem *prenosová funkcia*. Ak hovoríme o prenosových funkciách, hovoríme o nástroji, ktorý umožňuje analyticky pracovať s dynamickými systémami. V tomto texte však nie je cieľom priamo sa zaoberať prenosovými funkciami. Ide o širší pojem, prípadne samostatný nástroj, ktorý sa netýka len samotného riešenia diferenciálnych rovníc.

1 Definícia Laplaceovej transformácie

V hrubých črtách je možné o definícii Laplaceovej transformácie uviesť nasledovné.

Majme časovú funkciu $f(t)$ (s vhodnými vlastnosťami, ktoré tu nebudeme uvádzať). Laplaceova transformácia (LT) transformuje, či mapuje, túto funkciu na inú funkciu.

Inú funkciu označme $F(s)$. LT je definovaná podľa vzťahu

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\mathrm{d}t \tag{1}$$

kde s je komplexná premenná (komplexné číslo).

Hovoríme, že ide o transformáciu z časovej oblasti (domény) do domény komplexnej premennej s. Premenná s sa často nazýva aj Laplaceov operátor (súvislosti sa ukážu neskôr). Keďže $s = \sigma + j\omega$ a teda $e^{-(\sigma+j\omega)t}$ je signál obsahujúci vo všeobecnosti aj harmonickú (kmitavú) zložku, v tejto súvislosti hovoríme tiež, že pri LT ide o transformáciu z časovej oblasti do frekvenčnej oblasti.

Výslednej transformovanej funkcii $F(s)$ sa hovorí tiež *obraz* pôvodného signálu $f(t)$ (alebo Laplaceov obraz signálu).

LT je lineárna transformácia, t.j. ak by sme chceli transformovať súčet dvoch signálov (dvoch časových funkcií) $f(t) + g(t)$ ako celok, tak je to možné urobiť transformáciou signálov jednotlivo a až následne sčítať transformované funkcie $F(s) + G(s)$.

2 Laplaceove obrazy signálov

Majme signál $f(t)$. Laplaceovym obrazom (L-obrazom) tohto signálu je $F(s)$ (samozrejme v zmysle definície LT) a samotnú operáciu transformácie značíme ako

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\mathrm{d}t \tag{2}$$

2.1 Derivácia

Nájdime L-obraz signálu $\frac{\mathrm{d}f(t)}{dt}$ (alebo teda signálu $\dot{f}(t)$), teda

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\mathrm{d}f(t)}{dt}\right\} = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}e^{-st}\mathrm{d}t \tag{3}$$

Tento integrál je možné nájsť metódou per partes, pri ktorej vo všeobecnosti platí

$$\int_0^\infty u(t)v'(t)\mathrm{d}t = \left[u(t)v(t)\right]_0^\infty - \int_0^\infty u'(t)v(t)\mathrm{d}t \tag{4}$$

Uvažujme tu $u(t) = e^{-st}$ a $v(t) = f(t)$, potom

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}e^{-st}\mathrm{d}t &= \left[e^{-st}f(t)\right]_0^\infty - (-s)\int_0^\infty f(t)e^{-st}\mathrm{d}t \\ &= 0 - f(0) + sF(s) \\ &= sF(s) - f(0)\end{aligned} \tag{5}$$

je L-obraz signálu $\frac{\mathrm{d}f(t)}{dt}$.

2.2 Integrál

Obdobne by sme mohli hľadať aj obraz signálu $\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau$, teda

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right\} = \int_0^\infty \left(\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right)e^{-st}\mathrm{d}t \tag{6}$$

Hľadajme L-obraz tak, že zavedieme signál $g(t) = \int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau$ čo potom znamená, že $\dot{g}(t) = f(t)$. Hľadáme $\mathcal{L}\left\{g(t)\right\} = G(s)$. Najskôr si však všimnime, že

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\dot{g}(t)\right\} =& sG(s) - g(0) \\ sG(s) - g(0) =& F(s)\end{aligned} \tag{7}$$

a k tomu vidíme, že $g(0) = \int_0^0 f(\tau)\mathrm{d}\tau = 0$. Teda

$$sG(s) = F(s) \tag{8a}$$

$$G(s) = \frac{1}{s}F(s) \tag{8b}$$

čím sme našli

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right\} = \frac{1}{s}F(s) \tag{9}$$

2.3 Obraz Dirackovho impulzu

Dirackov impulz je signál taký, že (napríklad)

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{ak } t \neq 0 \\ \infty & \text{ak } t = 0 \end{cases} \tag{10}$$

pričom z princípu platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)\mathrm{d}\tau = 1 \tag{11}$$

Totiž, v závislosti od toho ako by sme presnejšie matematicky špecifikovali Dirackov impulz $\delta(t)$ by sa konkrétne spôsoby aplikácie LT (výpočet integrálu) mohli formálne líšiť, avšak v každom prípade vždy platí

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1 \tag{12}$$

2.4 Obraz jednotkového skoku

Pri tzv. jednotkovom skoku sa uvažuje, že v čase 0 sa hodnota signálu skokovo zmení z 0 na 1 (má hodnotu „jedna jednotka“). Keďže sa tu nachádzame len v čase väčšom ako nula, môžeme uvažovať, že tu hľadáme obraz signálu $f(t) = 1$, teda

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{1\} &= \int_0^{\infty} 1e^{-st}\mathrm{d}t \\ &= \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^{\infty} \\ &= 0 - \frac{1}{s}e^{-s0} \\ &= \frac{1}{s} \end{aligned} \tag{13}$$

2.5 Obraz exponencialnej funkcie

Nájdime obraz $f(t) = e^{at}$.

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} e^{at}e^{-st}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\infty} e^{(a-s)t}\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{1}{a-s}e^{(a-s)t}\right]_0^{\infty} \\ &= 0 - \frac{1}{a-s} \\ &= \frac{1}{s-a} \end{aligned} \tag{14}$$

2.6 Obraz časového posunutia

Majme signál $f(t)$. Signál posunutý v čase je $f(t-D)$ (v zmysle vstupno-výstupného oneskorenia, alebo dopravného oneskorenia). Obrazom $f(t)$ je $F(s)$. Obrazom $f(t-D)$ je

$$\int_0^\infty f(t-D)e^{-st}\mathrm{d}t \tag{15}$$

Zaveďme substitúciu $\tau = t - D$, teda $t = \tau + D$ a tiež $\mathrm{d}t = \mathrm{d}\tau$ keďže D je v čase konštantné. Potom

$$\int_0^\infty f(\tau)e^{-s(\tau+D)}\mathrm{d}\tau = e^{-sD}\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}\mathrm{d}\tau \tag{16}$$

a je zrejmé, že

$$e^{-sD}F(s) \tag{17}$$

je obrazom posunutého signálu $f(t-D)$.

3 Inverzná Laplaceova transformácia

Na tomto mieste je vhodné uviesť opak Laplaceovej transformácie, teda inverznú Laplaceovu transformáciu. Značíme ju ako

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} = f(t) \tag{18}$$

pričom formálne ide o operáciu definovanú vzťahom

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} F(s)e^{st}\mathrm{d}s \tag{19}$$

Výpočet inverznej LT spravidla nie je jednoduchý. V praxi sa využíva tabuľka Laplaceových obrazov signálov, ktorá uvádza L-obrazy a k nim prislúchajúce časové signály. Tabuľka obsahuje výber typických a dôležitých signálov využívaných pri analýze dynamických systémov.

Zložitý obraz riešenia diferenciálnej rovnice je zväčša možné upraviť tak, že je v ňom vidieť jednotlivé dielčie obrazy zodpovedajúce typickým signálom (uvedeným v tabuľke). Z typických časových signálov sa potom vyskladá časová funkcia zodpovedajúca celkovému riešeniu (v časovej oblasti).

4 Tabuľka Laplaceových obrazov signálov

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}$	Poznámka
$f(t)$	$F(s)$	
$\dot{f}(t)$	$sF(s) - f(0)$	
$\frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n}$	$s^nF(s) - s^{(n-1)}f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$	
1	$\frac{1}{s}$	Skoková zmena v čase 0
$t^n \ (n = 0, 1, 2, \dots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}$	Poznámka
$\delta(t)$	1	Diracov impulz
$\delta(t-t_0)$	$1\,e^{-st_0}$	Časové oneskorenie
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$	
e^{-at}	$\dfrac{1}{s+a}$	
$\sin(kt)$	$\dfrac{k}{s^2+k^2}$	
$\cos(kt)$	$\dfrac{s}{s^2+k^2}$	
$\sinh(kt)$	$\dfrac{k}{s^2-k^2}$	
$\cosh(kt)$	$\dfrac{s}{s^2-k^2}$	
$\int_0^t f(x)g(t-x)\mathrm{d}x$	$F(s)G(s)$	Konvolučný integrál
$t^n f(t)$	$(-1)^n \dfrac{\mathrm{d}^n F(s)}{\mathrm{d}s^n}$	
te^{at}	$\dfrac{1}{(s-a)^2}$	
$t^n e^{at}$	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	
$t\sin kt$	$\dfrac{2ks}{(s^2+k^2)^2}$	
$t\cos kt$	$\dfrac{s^2-k^2}{(s^2+k^2)^2}$	
$t\sinh kt$	$\dfrac{2ks}{(s^2-k^2)^2}$	
$t\cosh kt$	$\dfrac{s^2+k^2}{(s^2-k^2)^2}$	
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$	
$e^{at}\sin kt$	$\dfrac{k}{(s-a)^2+k^2}$	
$e^{at}\cos kt$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+k^2}$	
$e^{at}\sinh kt$	$\dfrac{k}{(s-a)^2-k^2}$	
$e^{at}\cosh kt$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2-k^2}$	

5 Laplaceov obraz a originál riešenia diferenciálnej rovnice

5.1 Príklad s homogénnou diferenciálnou rovnicou

Majme diferenciálnu rovnicu

$$\dot{y}(t) - ay(t) = 0 \qquad y(0) = y_0 \tag{20}$$

Na jednotlivé signály v tejto rovnici aplikujme LT.

$$(sY(s) - y(0)) - aY(s) = 0 \tag{21}$$

kde $Y(s)$ je obrazom signálu $y(t)$. $Y(s)$ je teda obrazom riešenia rovnice. Vyjadrime $Y(s)$:

$$\begin{aligned} (s-a)Y(s) - y(0) &= 0 \\ Y(s) &= \frac{1}{(s-a)} y(0) \end{aligned} \tag{22}$$

Otázka je, ak poznáme signál v s-oblasti (v Laplaceovej doméne), vieme určiť pôvodný signál v časovej oblasti? Vieme nájsť pomocou obrazu riešenia $Y(s)$ samotné riešenie $y(t)$?

V tomto prípade je vzhľadom na časť 2.5 jasné, že

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{Y(s)\right\} = y(t) = e^{at}y(0) \tag{23}$$

kde $\mathcal{L}^{-1}\left\{\right\}$ predstavuje inverznú LT transformáciu. Tiež je jasné, že (23) je správne riešenie diferenciálnej rovnice (20).

5.2 Príklad s nehomogénnou diferenciálnou rovnicou

Majme rovnicu

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 3y(t) = u(t) \qquad y(0) = 3, \dot{y}(0) = -2 \tag{24}$$

kde vstupný signál $u(t) = 12$ (konštantný v čase). Aplikujme LT

$$\big(s\mathcal{L}\{\dot{y}\} - \dot{y}(0)\big) + 4\left(sY(s) - y(0)\right) + 3Y(s) = U(s) \tag{25a}$$

$$\Big(s\big(sY(s) - y(0)\big) - \dot{y}(0)\Big) + 4sY(s) - 4y(0) + 3Y(s) = U(s) \tag{25b}$$

$$s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) + 4sY(s) - 4y(0) + 3Y(s) = U(s) \tag{25c}$$

$$s^2Y(s) + 4sY(s) + 3Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) - 4y(0) = U(s) \tag{25d}$$

a teda

$$\big(s^2 + 4s + 3\big)\, Y(s) = sy(0) + \dot{y}(0) + 4y(0) + U(s) \tag{26a}$$

$$Y(s) = \frac{sy(0) + \dot{y}(0) + 4y(0)}{(s^2 + 4s + 3)} + \frac{1}{(s^2 + 4s + 3)} U(s) \tag{26b}$$

Poznáme aj konkrétny tvar obrazu $U(s)$, keďže $u(t) = 12$, tak $U(s) = 12\frac{1}{s}$, teda

$$Y(s) = \frac{sy(0) + \dot{y}(0) + 4y(0)}{(s^2 + 4s + 3)} + \frac{1}{(s^2 + 4s + 3)} 12\frac{1}{s} \tag{27}$$

a toto je obrazom riešenia diferenciálnej rovnice.

Všimnime si, že sú tu prítomné dve zložky

$$Y(s) = \underbrace{\frac{3s + 10}{(s^2 + 4s + 3)}}_{\text{vlastná zložka}} + \underbrace{\frac{12}{(s^2 + 4s + 3)\, s}}_{\text{vnútená zložka}} \tag{28}$$

kde sme aj číselne dosadili hodnoty začiatočných podmienok.

Keď je obraz riešenia v tvare (28) je prakticky nemožné priradiť k nemu originálny časový signál – nie sú tam očividné typické obrazy typických signálov.

Rozložme na parciálne zlomky

$$\frac{3s+10}{(s^2+4s+3)} = \frac{7}{2(s+1)} - \frac{1}{2(s+3)} \tag{29}$$

$$\frac{12}{(s^2+4s+3)\,s} = \frac{4}{s} - \frac{6}{(s+1)} + \frac{2}{(s+3)} \tag{30}$$

a tým sa hneď stáva zrejmé, že (29) má originál

$$y_{vlast}(t) = \frac{7}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t} \tag{31}$$

a (30) ma originál

$$y_{vnut}(t) = 4 - 6e^{-t} + 2e^{-3t} \tag{32}$$

Celkové riešenie je

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{7}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t} + 4 - 6e^{-t} + 2e^{-3t} \\ &= 4 - \frac{5}{2}e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-3t} \end{aligned} \tag{33}$$

6 Súvislosti so všeobecným riešením nehomogénnych diferenciálnych rovníc

Obdobne ako pri hľadaní riešenia homogénnej dif. rovnice, kde sa ako východisko predpokladá riešenie v tvare exponenciálnej funkcie e^{st}, tak pri hľadaní riešenia nehomogénnej dif. rovnice je možné skúmať predpoklad, že vstupný signál je v tvare exponenciálnej funkcie e^{st}.

Najskôr pripomeňme, že riešením homogénnej dif. rovnice

$$\dot{y}(t) + ay(t) = 0 \qquad y(0) = y_0 \tag{34}$$

je

$$y(t) = e^{-at}y_0 \tag{35}$$

a ide tu o rovnicu prvého rádu.

Formálne je však aj tu možné uplatniť rozklad dif. rovnice vyššieho rádu na sústavu rovníc prvého rádu v zmysle

$$\dot{x}(t) = ax(t) \qquad x(0) = x_0 \tag{36a}$$

$$y(t) = x(t) \tag{36b}$$

kde $a \in \mathbb{R}$ a $x(t)$ je stavová veličina. Pri dif. rovnici vyššieho rádu by $x(t)$ bol vektor stavových veličín a udával by sústavu rovníc v tvare

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \qquad x(0) = x_0 \tag{37a}$$

$$y(t) = c^{\mathsf{T}}x(t) \tag{37b}$$

kde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je matica, $c \in \mathbb{R}^n$ je vektor a $x_0 \in \mathbb{R}^n$ je vektor. Riešením je

$$y(t) = c^{\mathsf{T}}e^{At}x_0 \tag{38}$$

kde sme využili objekt e^{At} čo je tzv. maticová exponenciálna funkcia. Tu sa jej definícii nebudeme venovať podrobne, čitateľa odkazujeme napr. na [1]. Ide zjavne o zovšeobecnenie skalárneho prípadu (systémy prvého rádu) pre vektorový prípad (systémy vyššieho rádu). Definícia a následné využívanie matice e^{At} je základom pre pojmy ako fundamentálne riešenia systému (diferenciálnej rovnice). Samotná matica e^{At} sa označuje napríklad aj ako matica fundamentálnych riešení. Takpovediac

„účinok“ matice e^{At} je daný maticou A, a tú možno charakterizovať jej vlastnými číslami (a vlastnými vektormi). Tieto sú následne zdrojom definície pojmu charakteristická rovnica tak ako sa to využíva pri hľadaní analytického riešenia diferenciálnej rovnice.

V prípade nehomogénnej dif. rovnice je systém daný sústavou rovníc v tvare

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \qquad x(0) = x_0 \tag{39a}$$

$$y(t) = c^\mathsf{T} x(t) \tag{39b}$$

kde $u(t)$ je vstupný signál, $b \in \mathbb{R}^n$ je vektor. Je možné ukázať, že

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} bu(\tau) \mathrm{d}\tau \tag{40}$$

a teda samotné riešenie (výstupný signál $y(t)$) je

$$y(t) = c^\mathsf{T} x(t) \tag{41a}$$

$$y(t) = c^\mathsf{T} e^{At}x(0) + \int_0^t c^\mathsf{T} e^{A(t-\tau)} bu(\tau) \mathrm{d}\tau \tag{41b}$$

Prvý člen (na pravej strane rovnice (41b)) sa nazýva *vlastná zložka riešenia* (je vyvolaná začiatočnými podmienkami) a druhý člen sa nazýva *vnútená zložka riešenia* (je vyvolaná vstupným signálom).

Ako sme uviedli, zámerom je skúmať predpoklad, že vstupný signál je v tvare exponenciálnej funkcie

$$u(t) = e^{st} \tag{42}$$

kde $s = \sigma + j\omega$ (vo všeobecnosti). To, že s je komplexné číslo (komplexná premenná) umožňuje považovať tento špeciálny signál vlastne za triedu signálov (rôzneho typu). Reálna časť premennej s určuje exponenciálny rast alebo pokles (dokonca ak $s = 0$ potom je špeciálny signál vlastne konštantným) a imaginárna časť určuje harmonické kmitanie signálu.

Máme (40), a teda:

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t \left(e^{A(t-\tau)} b e^{s\tau} \right) \mathrm{d}\tau \tag{43}$$

kde pri manipulácii s výrazom $\left(e^{A(t-\tau)} b e^{s\tau}\right)$ treba manipulovať s ohľadom na fakt, že ide o matice a vektory. V každom prípade, po integrácii sa získa

$$x(t) = e^{At}x(0) + e^{At} \left(sI - A\right)^{-1} \left(e^{(sI-A)t} - I \right) b \tag{44}$$

kde I je jednotková matica.

Celkové riešenie, inými slovami výstupný signál systému, potom je

$$\begin{aligned}
y(t) &= c^\mathsf{T} e^{At}x(0) + c^\mathsf{T} e^{At} \left(sI - A\right)^{-1} \left(e^{(sI-A)t} - I \right) b \\
&= c^\mathsf{T} e^{At}x(0) + c^\mathsf{T} e^{At} \left(sI - A\right)^{-1} \left(e^{st} e^{-At} - I \right) b \\
&= c^\mathsf{T} e^{At}x(0) + c^\mathsf{T} e^{At} \left(sI - A\right)^{-1} \left(e^{st} e^{-At} b - b \right) \\
&= c^\mathsf{T} e^{At}x(0) + \left(c^\mathsf{T} e^{At} \left(sI - A\right)^{-1} e^{st} e^{-At} b - c^\mathsf{T} e^{At} \left(sI - A\right)^{-1} b \right) \\
&= c^\mathsf{T} e^{At}x(0) + \left(c^\mathsf{T} \left(sI - A\right)^{-1} e^{st} b - c^\mathsf{T} e^{At} \left(sI - A\right)^{-1} b \right)
\end{aligned} \tag{45}$$

V tomto bode je možné konštatovať:

$$y(t) = \underbrace{c^\mathsf{T} e^{At}x(0)}_{\text{vlastná zložka}} + \underbrace{\left(c^\mathsf{T} \left(sI - A\right)^{-1} e^{st} b - c^\mathsf{T} e^{At} \left(sI - A\right)^{-1} b \right)}_{\text{vnútená zložka}} \tag{46}$$

a zároveň:

$$
\begin{aligned}
y(t) &= c^\mathsf{T} e^{At} \left(x(0) - (sI - A)^{-1} b \right) + \left(c^\mathsf{T} (sI - A)^{-1} b e^{st} \right) \\
&= \underbrace{c^\mathsf{T} e^{At} \left(x(0) - (sI - A)^{-1} b \right)}_{\text{zložka opisujúca prechodné deje}} + \underbrace{\left(c^\mathsf{T} (sI - A)^{-1} b \right) e^{st}}_{\text{čisto exponenciálna zložka}}
\end{aligned} \tag{47}
$$

O vplyve samotného špeciálneho signálu e^{st} na celkové riešenie teda rozhoduje výraz $c^\mathsf{T} (sI - A)^{-1} b$. Formálne sa

$$
G(s) = c^\mathsf{T} (sI - A)^{-1} b \tag{48}
$$

nazýva prenosová funkcia systému.

Uvedené je založené na fakte vyjadrenom všeobecným riešením (40) pričom ide o riešenie sústavy dif. rovníc prvého rádu v tvare (39). Takpovediac pôvodná dif. rovnica vyššieho rádu je pre tento prípad v tvare

$$
\frac{\mathrm{d}^n y(t)}{\mathrm{d}t^n} + a_{n-1} \frac{\mathrm{d}^{(n-1)} y(t)}{\mathrm{d}t^{(n-1)}} + \cdots + a_0 y(t) = b_m \frac{\mathrm{d}^m u(t)}{\mathrm{d}t^m} + b_{m-1} \frac{\mathrm{d}^{m-1} u(t)}{\mathrm{d}t^{m-1}} + \cdots + b_0 u(t) \tag{49}
$$

Potom ak na vstupe uvažujeme $u(t) = e^{st}$ a zároveň vieme, že riešenie systému je tiež nejaký exponenciálny signál, čo možno vo všeobecnosti vyjadriť ako $y(t) = y_0 e^{st}$ (kde y_0 najmä odlišuje $y(t)$ od $u(t)$). Ak $y(t)$ a $u(t)$ dosadíme do (49), vidíme, že

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^n y_0 e^{st}}{\mathrm{d}t^n} + a_{n-1} \frac{\mathrm{d}^{(n-1)} y_0 e^{st}}{\mathrm{d}t^{(n-1)}} + \cdots + a_0 y_0 e^{st} &= b_m \frac{\mathrm{d}^m e^{st}}{\mathrm{d}t^m} + b_{m-1} \frac{\mathrm{d}^{m-1} e^{st}}{\mathrm{d}t^{m-1}} + \cdots + b_0 e^{st} \\
y_0 e^{st} s^n + a_{n-1} y_0 e^{st} s^{(n-1)} + \cdots + a_0 y_0 e^{st} &= b_m e^{st} s^m + b_{m-1} e^{st} s^{m-1} + \cdots + b_0 e^{st} \\
\left(s^n + a_{n-1} s^{(n-1)} + \cdots + a_0 \right) y_0 e^{st} &= \left(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0 \right) e^{st} \\
y_0 e^{st} &= \frac{\left(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0 \right)}{\left(s^n + a_{n-1} s^{(n-1)} + \cdots + a_0 \right)} e^{st}
\end{aligned} \tag{50}
$$

a teda môžeme povedať, že riešenie systému závislé od špeciálneho signálu e^{st} je

$$
y(t) = \frac{\left(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0 \right)}{\left(s^n + a_{n-1} s^{(n-1)} + \cdots + a_0 \right)} e^{st} \tag{51}
$$

Označme

$$
B(s) = \left(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0 \right) \tag{52a}
$$

$$
A(s) = \left(s^n + a_{n-1} s^{(n-1)} + \cdots + a_0 \right) \tag{52b}
$$

a výraz

$$
G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \tag{53}
$$

vyjadruje prenosovú funkciu systému.

7 O prenosovej funkcii

Prenosová funkcia je nástroj pre matematické modelovanie lineárnych časovo-invariantných dynamických systémov.

Primárne sú dynamické systémy opisované diferenciálnymi rovnicami. Ak sú tieto rovnice lineárne, hovoríme, že systém, ktorý opisujú, je lineárny. Ak koeficienty v dif. rovnici nie sú funkciami času, hovoríme, že systém je časovo invariantný.

Vo všeobecnosti hľadáme riešenie dif. rovnice. V kontexte dynamických systémov je riešením dif. rovnice funkcia času. Z hľadiska systému hovoríme, že táto funkcia je výstupným signálom systému. Na hľadané riešenie má vplyv niekoľko faktorov. Vo všeobecnosti je riešenie dané samozrejme samotnou dif. rovnicou, jej rádom a hodnotami jej koeficientov. Konkrétne riešenia sú potom dané začiatočnými podmienkami a vstupným signálom systému.

Z hľadiska systému hovoríme o ráde dif. rovnice a o jej koeficientoch ako o parametroch systému. Hovoriť o začiatočných podmienkach systému má samozrejme tiež význam. Napokon nás zaujíma vplyv vstupného signálu na výstupný signál systému a s matematickým modelovaním tohto vplyvu súvisí pojem prenosová funkcia. Obrazne hovoríme o prenose zo vstupu na výstup systému.

7.1 Definícia prenosovej funkcie s využitím Laplaceovej transformácie

Prenosová funkcia je definovaná ako pomer Laplaceovho obrazu výstupného signálu systému k Laplaceovmu obrazu vstupného signálu pri nulových začiatočných podmienkach systému.

Laplaceova transformácia sa týka lineárnych časovo invariantných systémov. Majme teda takýto systém, ktorého vstupným signálom je signál $u(t)$ a výstupným signálom je signál $y(t)$. V zmysle Laplaceovej transformácie existuje obraz vstupného signálu $U(s)$ a obraz výstupného signálu $Y(s)$ pričom tieto obrazy sú stanovené pri nulových začiatočných podmienkach systému.

Ilustrujme na príklade. Lineárny časovo invariantný systém nech je daný dif. rovnicou v tvare

$$a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t) \tag{54}$$

kde $y(t)$ a $u(t)$ sú samozrejme výstupný a vstupný signál. Koeficienty $a_1, a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ sú konštantné. Aplikujme Laplaceovu transformáciu na prvky danej dif. rovnice.

$$\begin{aligned} a_1\mathcal{L}\left\{\dot{y}(t)\right\} + a_0\mathcal{L}\left\{y(t)\right\} &= b_0\mathcal{L}\left\{u(t)\right\} \\ a_1 sY(s) - a_1 y(0) + a_0 Y(s) &= b_0 U(s) \end{aligned} \tag{55}$$

Pri nulových začiatočných podmienkach potom platí

$$a_1 sY(s) + a_0 Y(s) = b_0 U(s) \tag{56}$$

Prenosová funkcia je definovaná ako pomer $Y(s)/U(s)$, teda

$$Y(s)\left(a_1 s + a_0\right) = b_0 U(s) \tag{57a}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{a_1 s + a_0} \tag{57b}$$

Ako samostatný objekt sa prenosová funkcia označuje samostatne, napríklad sko $G(s)$, teda v tomto prípade

$$G(s) = \frac{b_0}{a_1 s + a_0} \tag{58}$$

a vo všeobecnosti

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \tag{59}$$

Z iného hľadiska má tiež zmysel samostatne označovať polynómy v čitateli a menovateli prenosovej funkcie. Polynóm v čitateli sa typicky označuje ako $B(s)$ a polynóm v menovateli sa označuje ako $A(s)$. V tomto prípade

$$B(s) = b_0 \qquad A(s) = a_1 s + a_0 \tag{60}$$

a vo všeobecnosti teda

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \tag{61}$$

7.2 Súvisiace pojmy

Prenosová funkcia je opisuje lineárny časovo invariantný dynamický systém pričom je dané, že začiatočné podmienky systému sú nulové. Daný dynamický systém je možné opísať diferenciálnou rovnicou alebo prenosovou funkciou a tieto dva opisy sú ekvivalentné.

Uvažujme prenosovú funkciu vo všeobecnosti

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \tag{62}$$

kde $A(s)$ a $B(s)$ sú polynómy, ktorých nezávisle premenná je Laplaceov operátor s (pritom s je komplexné číslo).

Polynóm $A(s)$ má stupeň n a polynóm $B(s)$ má stupeň m.

Reálne/skutočné dynamické deje/systémy „v prírode" sú samozrejme kauzálne[1], teda výstup je následkom diania v súčastnosti a minulosti. Ak prenosová funkcia opisuje kauzálny systém, potom pre stupne polynómov $A(s)$ a $B(s)$ platí $n \geq m$.

Polynóm $A(s)$ sa nazýva charakteristický polynóm prenosovej funkcie. Pojem charakteristická rovnica alebo charakteristický polynóm je používaný aj v kontexte analytických metód riešenia lineárnych dif. rovníc. Ide pritom o ekvivalentné pojmy, charakteristický polynóm prenosovej funkcie je to isté ako charakteristický polynóm lineárnej diferenciálnej rovnice.

Stupeň polynómu $A(s)$, teda hodnota n, sa nazýva rád prenosovej funkcie. Ide o ekvivalent pojmu rád dynamického systému (najvyšší stupeň derivácie neznámej v dif. rovnici).

Korene polynómu $A(s)$ sa nazývajú póly prenosovej funkcie. Ekvivalentne je možné hovoriť o póloch lineárneho dynamického systému. Keďže ide o korene charakteristického polynómu, s pólmi systému priamo súvisia fundamentálne riešenia dif. rovnice. Fundamentálne riešenia sú dané pólmi systému. Iný termín pre fundamentálne riešenia je *módy dynamického systému*.

Z hľadiska stability dynamického systému hovoríme, že systém je stabilný ak sú všetky póly systému v ľavej polrovine komplexnej roviny. Inými slovami, systém je stabilný ak reálne časti všetkých pólov sú záporné. Pod stabilitou systému samozrejme myslíme stabilitu rovnovážneho stavu daného lineárneho dynamického systému.

Korene polynómu $B(s)$ sa nazývajú nuly prenosovej funkcie (nuly lineárneho dynamického systému).

Nuly systému súvisia predovšetkým so vstupným signálom systému. Širšia interpretácia prenosovej funkcie, ako vieme, sa zaoberá skúmaním vplyvu exponenciálneho vstupného signálu $u(t) = e^{st}$ (s je komplexné číslo) na výstup systému. Zjednodušene povedané, nuly nulujú zodpovedajúce vstupné exponenciálne signály. Neprenesú sa na výstup. Poloha nuly v komplexnej rovine určuje signál e^{st}, ktorý je nulovaný a neprenesie sa na výstup (neovplyvní výstupnú veličinu). Ďalšia diskusia v tejto veci je nad rámec tohto textu a čitateľ sa odkazuje na zodpovedajúcu literatúru, napríklad aj [1].

V súvislosti s prenosovou funkciou, o ktorej uvažujeme v tvare

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \tag{63}$$

je užitočné využívať *vetu o konečnej hodnote riešenia*. Ak máme k dispozícii obraz riešenia diferenciálnej rovnice, teda obraz výstupného signálu systému $Y(s)$, potom veta o konečnej hodnote hovorí, že konečná hodnota výstupného signálu $y(t)$, označme túto hodnotu symbolom $y(\infty)$, je daná ako

$$y(\infty) = \lim_{s \to 0} s\, Y(s) \tag{64}$$

Napríklad, poznáme prenosovú funkciu (58) a napríklad vstupom systému je jednotkový skok, ktorého Laplaceov obraz je $U(s) = 1/s$. Potom obraz výstupného signálu je

$$Y(s) = G(s)U(s) = \left(\frac{b_0}{a_1 s + a_0} \right) \frac{1}{s} \tag{65}$$

Konečná hodnota tohto signálu bude

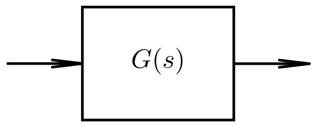
$$y(\infty) = \lim_{s \to 0} s\, Y(s) = \lim_{s \to 0} s \left(\frac{b_0}{a_1 s + a_0} \right) \frac{1}{s} \tag{66a}$$

$$= \lim_{s \to 0} \left(\frac{b_0}{a_1 s + a_0} \right) = \frac{b_0}{a_0} \tag{66b}$$

[1] Nekauzalita je skôr matematická/abstraktná záležitosť.

8 Algebra prenosových funkcií

Prenosová funkcia je nástroj pre matematické modelovanie lineárnych časovo-invariantných dynamických systémov. Prenosovú funkciu je možné vidieť aj ako jeden blok v blokovej schéme, teda:

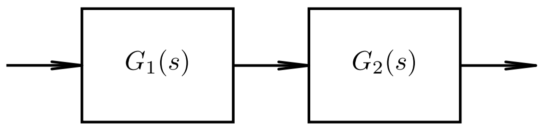


Obr. 1: Prenosová funkcia ako jeden blok v blokovej schéme

Manipulácia s takýmito blokmi je jednou z aplikácií algebry prenosových funkcií. V tomto zmysle je potrebné uvažovať tri základné situácie. Sériové zapojenie blokov, paralelné zapojenie blokov a spätnoväzbové zapojenie blokov.

8.1 Sériové zapojenie blokov

Uvažujme systém, ktorý je tvorený kaskádnou kombináciou dvoch podsystémov. Prenosové funkcie podsystémov sú $G_1(s)$ a $G_2(s)$. Vstup prvého podsystému je zároveň vstupom celkového systému. Výstup prvého podsystému je vstupom druhého podsystému. Výstup druhého podsystému je zároveň výstupom celkového systému. Ide o sériové zapojenie podsystémov.



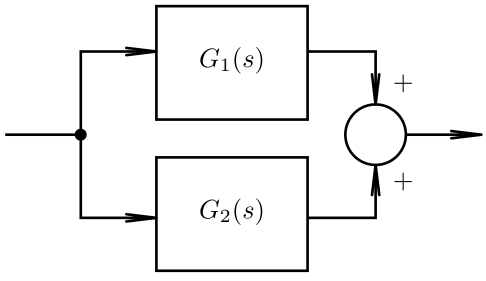
Obr. 2: Sériové zapojenie blokov

Hľadáme prenosovú funkciu celkového systému, označme ju $G(s)$. Pre sériové zapojenie podsystémov platí

$$G(s) = G_1(s)\ G_2(s) \tag{67}$$

Výslednú prenosovú funkciu teda získame súčinom prenosových funkcií podsystémov.

8.2 Paralelné zapojenie blokov



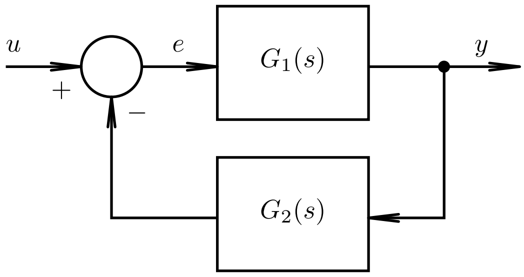
Obr. 3: Paralelné zapojenie blokov

Pri paralelnom zapojení podsystémov s prenosovými funkciami $G_1(s)$ a $G_2(s)$ je výstupom celkového systému jednoducho súčet výstupov podsystémov. Pre prenosovú funkciu celkového systému $G(s)$ platí

$$G(s) = G_1(s) + G_2(s) \tag{68}$$

8.3 Spätnoväzbové zapojenie blokov

Spätnoväzbové zapojenie blokov je znázornené na obr. 4. Pre lepšiu orientáciu je vstup celkového systému označený ako u a výstup celkového systému ako y. Signál y je vstupom spätnoväzbového podsystému $G_2(s)$. Takáto spätná väzba je odčítavaná (ide o zápornú spätnú väzbu) od vstupného signálu u. Vzniká odchýlkový signál e, ktorý je vstupom podsystému $G_1(s)$.



Obr. 4: Spätnoväzbové zapojenie blokov

Bez uvádzania podrobností a predpokladov môžeme písať o odchýlkovom signále:

$$e = u - G_2(s)y \tag{69}$$

a potom

$$y = G_1(s)e \tag{70a}$$

$$y = G_1(s)\left(u - G_2(s)y\right) \tag{70b}$$

$$\left(1 + G_1(s)G_2(s)\right)y = G_1(s)u \tag{70c}$$

$$y = \frac{G_1(s)}{\left(1 + G_1(s)G_2(s)\right)}u \tag{70d}$$

Pre prenosovú funkciu celkového systému $G(s)$ platí

$$G(s) = \frac{G_1(s)}{\left(1 + G_1(s)G_2(s)\right)} \tag{71}$$

9 Otázky a úlohy

1. Napíšte vzťah (rovnicu), ktorým je definovaná Laplaceova transformácia.
2. Napíšte Laplaceov obraz derivácie časovej funkcie $\frac{df(t)}{dt}$.
3. Napíšte Laplaceov obraz jednotkového skoku.
4. Napíšte Laplaceov obraz Diracknovho impulzu.
5. Nájdite analytické riešenie diferenciálnej rovnice s využitím Laplaceovej transformácie.

$$\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t) \qquad y(0) = y_0 \qquad a_0, b_0, y_0 \in \mathbb{R} \qquad u(t) = 1$$

6. Nájdite analytické riešenie diferenciálnej rovnice s využitím Laplaceovej transformácie.

$$\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t) \qquad y(0) = y_0 \qquad a_0, b_0, y_0 \in \mathbb{R} \qquad u(t) = \delta(t)$$

7. Nájdite analytické riešenie diferenciálnej rovnice s využitím Laplaceovej transformácie.

$$\ddot{y}(t) + (a+b)\dot{y}(t) + aby(t) = 0 \qquad y(0) = y_0,\ \dot{y}(0) = z_0 \qquad a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R},\ y_0 \in \mathbb{R},\ z_0 \in \mathbb{R}$$

8. Nájdite analytické riešenie diferenciálnej rovnice s využitím Laplaceovej transformácie.

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 3y(t) = u(t) \qquad y(0) = 3,\ \dot{y}(0) = -2 \qquad u(t) = 1$$

K dispozícii je tabuľka Laplaceových obrazov:

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$
$\frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n}$	$s^n F(s) - s^{(n-1)} f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
1	$\frac{1}{s}$
$\delta(t)$	1

Literatúra

[1] Karl Johan Åström a Richard M. Murray. *Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers*. Princeton University Press, jan. 2020. ISBN: 978-0-691-13576-2. URL: `https://fbswiki.org/wiki/index.php/Main_Page`.