1

Úloha:

Sústava rovníc :

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -a_0 x_1 - a_1 x_2 + b_0 u$$

prepíšte do maticového tvaru

$$\dot{x} = Ax + bu$$
$$y = c^T x$$

Riešenie

Zápavne signály vektor $\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}$ a teda $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

teda
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix}}_{\text{matica } A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix}}_{\text{vektor } b} u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{vektor } c^T} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Úloha:

Diferenciálnu rovnicu $a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_0 u$ rozložme na sústavu rovníc 1. rádu

Riešenie

Upravme: $$\ddot{y} = -\frac{a_1}{a_2}\dot{y} - \frac{a_0}{a_2} y + \frac{b_0}{a_2} u$$

Zvolíme $x_1 = y$ (prvá stavová veličina nech je výstupná veličina)

$\dot{x}_1 = \dot{y}$

Zvolíme $\dot{x}_1 = \dot{y} = x_2$ (druhá stavová veličina nech je takáto ...)

$\dot{x}_2 = \ddot{y}$

a teda: $$\dot{x}_2 = -\frac{a_1}{a_2} x_2 - \frac{a_0}{a_2} x_1 + \frac{b_0}{a_2} u$$

Výsledok:

1. dif. rovnica: $\dot{x}_1 = x_2$
2. dif rovnica: $\dot{x}_2 = -\frac{a_0}{a_2} x_1 - \frac{a_1}{a_2} x_2 + \frac{b_0}{a_2} u$

(2)

Úloha: Nájdite analyt. r. d.r. (CHR)

$$\dot{y} + ay = 0 \qquad y(0) = y_0$$

Riešenie: CHR: $s + a = 0$

korene: $s_1 = -a$

fundamentálne r.: $y_{f1} = e^{-at}$

všeob. r. $y(t) = c_1 e^{-at}$

konkrétne c_1 $\quad y(0) = y_0 = c_1 e^0 = c_1$

$$\underline{\underline{y(t) = y_0 e^{-at}}};$$

Úloha: Nájdite analytické r. d.r. (CHR metóda)

$$\ddot{y} + (a+b)\dot{y} + aby = 0 \qquad y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = z_0$$

Riešenie: CHR: $s^2 + (a+b)s + ab = 0$

korene: $s_1 = -a \quad s_2 = -b$

fundamentálne. r.: $y_{f1} = e^{-at} \quad y_{f2} = e^{-bt}$

všeob. r. $y(t) = c_1 e^{-at} + c_2 e^{-bt}$

konkrét. c_1, c_2 $\quad y(0) = y_0 = c_1 + c_2 \Rightarrow c_1 = y_0 - c_2$

$$\dot{y}(0) = z_0$$

$$\dot{y}(t) = c_1 e^{-at}(-a) + c_2 e^{-bt}(-b) = -ac_1 - bc_2 = z_0$$

$$-a(y_0 - c_2) - bc_2 = z_0$$

$$-ay_0 + ac_2 - bc_2 = z_0$$

$$c_2 = \frac{z_0 + ay_0}{(a-b)}$$

$$c_1 = y_0 - \frac{z_0 + ay_0}{(a-b)} = \frac{\cancel{ay_0} - by_0 - z_0 - \cancel{ay_0}}{(a-b)}$$

$$c_1 = \frac{-by_0 - z_0}{a-b}$$

$$\underline{\underline{y(t) = -\frac{(z_0 + by_0)}{(a-b)} e^{-at} + \frac{(z_0 + by_0)}{(a-b)} e^{-bt}}};$$

3

Úloha: Nájsť analyt. r. dif. r. s využitím LT

$\ddot{y} + 4\dot{y} + 3y = u \qquad y(0) = 3 \qquad u(t) = 1$

$\dot{y}(0) = -2$

Riešenie

L.T.:

$\frac{d}{dt}\left(sY(s) - y(0)\right)$

$s\left(sY(s) - y(0)\right) - \dot{y}(0) + 4\left(sY(s) - y(0)\right) + 3Y(s) = U(s) \qquad U(s) = \frac{1}{s}$

úprava:

$s^2Y(s) - 3s - (-2) + 4sY(s) - 12 + 3Y(s) = \frac{1}{s}$

$Y(s)(s^2 + 4s + 3) = 3s - 2 + 12 + \frac{1}{s}$

$Y(s) = \frac{3s+10}{s^2+4s+3} + \frac{1}{(s^2+4s+3)s} \qquad \leftarrow$ L-obraz riešenia

hľadanie originálu

$Y_1(s) = \frac{3s+10}{\underbrace{s^2+4s+3}}$

$s_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} = \begin{cases} -1 \\ -3 \end{cases}$

$Y_1(s) = \frac{3s+10}{(s+1)(s+3)} = \frac{A}{(s+1)} + \frac{B}{(s+3)} \Rightarrow 3s+10 = A(s+3) + B(s+1)$

$s = -1 \Rightarrow -3+10 = A(-1+3) \Rightarrow A = \frac{7}{2}$

$s = -3 \Rightarrow -9+10 = B(-3+1) \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$

$Y_2(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)s} = \frac{C}{(s+1)} + \frac{D}{(s+3)} + \frac{E}{s} \Rightarrow 1 = C(s+3)s + D(s+1)s + E(s+1)(s+3)$

$s = -1 \Rightarrow 1 = C(-1+3)(-1) \Rightarrow C = \frac{1}{2}$

$s = -3 \Rightarrow 1 = D(-3+1)(-3) \Rightarrow D = \frac{1}{6}$

$s = 0 \Rightarrow 1 = E(1)(3) \Rightarrow E = \frac{1}{3}$

$y(t) = \frac{7}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t} + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{-3t} + \frac{1}{3}$

$y(t) = 4e^{-t} - \frac{1}{3}e^{-3t} + \frac{1}{3}$

4

Úloha: Nájsť analyt. r. dif. r. s využitím LT

$$\dot{y} + a_0 y = b_0 u \qquad y(0) = y_0 \qquad u(t) = \delta(t)$$

Riešenie: LT:

$$sY(s) - y(0) + a_0 Y(s) = b_0 U(s) \qquad U(s) = 1$$

Úprava:

$$Y(s)(s + a_0) = y_0 + b_0$$

$$Y(s) = \frac{y_0}{s+a_0} + \frac{b_0}{s+a_0}$$ ← Laplaceov obraz riešenia

⇓

inverzná LT

$$y(t) = y_0 e^{-a_0 t} + b_0 e^{-a_0 t} = \underline{\underline{(y_0 + b_0) e^{-a_0 t}}};$$

(5)

Úloha: Nájsť analyt. riešenie d.r. s využitím LT

$$\ddot{y} + (a+b)\dot{y} + aby = 0 \qquad \begin{array}{l} y(0)=y_0 \\ \dot{y}(0)=z_0 \end{array}$$

Riešenie: LT:

$$\frac{d}{dt}\left(sY(s) - y(0)\right)$$

$$s\left(sY(s) - y(0)\right) - \dot{y}(0) + (a+b)\left(sY(s) - y(0)\right) + abY(s) = 0$$

Úprava:

$$s^2Y(s) - sy_0 - z_0 + (a+b)sY(s) - (a+b)y_0 + abY(s) = 0$$

$$Y(s)\left(s^2 + (a+b)s + ab\right) = sy_0 + \left(z_0 + (a+b)y_0\right)$$

$$Y(s) = \frac{sy_0 + z_0 + (a+b)y_0}{\left(s^2+(a+b)s+ab\right)} \longleftarrow \text{Laplaceov obraz riešenia}$$

hľadanie originálu:

$$Y(s) = \frac{sy_0+z_0+(a+b)y_0}{(s+a)(s+b)} = \frac{A}{(s+a)} + \frac{B}{(s+b)}$$

$$sy_0 + z_0 + (a+b)y_0 = A(s+b) + B(s+a)$$

$$s=-a \qquad \cancel{-ay_0}+z_0+\cancel{ay_0}+by_0 = A(-a+b) \quad \Rightarrow \quad A = \frac{z_0+by_0}{-a+b}$$

$$s=-b \qquad \cancel{-by_0}+z_0+ay_0+\cancel{by_0} = B(-b+a) \quad \Rightarrow \quad B = \frac{z_0+ay_0}{-b+a}$$

$$y(t) = \frac{z_0+by_0}{-a+b}e^{-at} + \frac{z_0+ay_0}{-b+a}e^{-bt}$$

6

Úloha: Nájsť analytické r. d.r. s využitím LT

$$\dot{y} + a_0 y = b_0 u \qquad y(0) = y_0 \qquad u(t) = 1$$

Riešenie: LT:

$$sY(s) - y(0) + a_0 Y(s) = b_0 U(s) \qquad U(s) = \frac{1}{s}$$

Úprava:

$$Y(s)(s+a_0) - y_0 = b_0 \frac{1}{s}$$

$$Y(s)(s+a_0) = y_0 + b_0 \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{y_0}{s+a_0}}_{Y_1(s)} + \underbrace{\frac{b_0}{(s+a_0)s}}_{Y_2(s)}$$

Laplaceov obraz riešenia

$$Y_2(s) = \frac{b_0}{(s+a_0)s} = \frac{A}{(s+a_0)} + \frac{B}{s}$$

$$y_1(t) = y_0 e^{-a_0 t}$$

$$b_0 = As + B(s+a_0)$$

$$s = -a_0 \Rightarrow b_0 = A(-a_0) \Rightarrow A = -\frac{b_0}{a_0}$$

$$s = 0 \Rightarrow b_0 = B a_0 \Rightarrow B = \frac{b_0}{a_0}$$

$$y_2(t) = -\frac{b_0}{a_0} e^{-a_0 t} + \frac{b_0}{a_0}$$

$$y(t) = \left(y_0 - \frac{b_0}{a_0}\right) e^{-a_0 t} + \frac{b_0}{a_0}$$

Úloha Majme $\dot{x} = Ax$ $x \in \mathbb{R}^n$ Ekvilibrium? Stabilita?

Riešenie/odpoveď

Ekvilibrium = ustálený/rovnovážny stav

Vtedy $\dot{x} = \emptyset$

to je v tomto prípade možné len ak

$x = \emptyset$ ← ekvilibrium

Stabilita

$\dot{x} = Ax$

je lineárny systém preto, ak póly systému majú zápornú reálnu časť ekvilibrium systému je stabilné!

(ak kladnú – nestabilné)

(ak nulovú – na hranici stability)

Póly systému sú vlastné čísla matice A.

8

Úloha: Majme dynamický systém v tvare:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

Určiť prenosovú funkciu ...

Riešenie:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a v tomto prípade: $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$$\dot{x} = Ax + bu$$
$$y = c^T x$$

$s \leftarrow$ operátor derivácie...

jednotková matica

$\dot{x} \Rightarrow$ „sx" avšak x je vektor, preto $sIx = s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

aplikovanie LT:

$$= \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sx_1 \\ sx_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}$$

$sIx = Ax + bu$ kde x a u sú v podstate obrazy (Laplaceove...).
Takže hľadáme pomer „$\frac{x}{u}$" $\Rightarrow G(s)$

$$sIx - Ax = bu$$
$$(sI - A)x = bu$$
$$x = (sI - A)^{-1} bu$$
$$y = c^T x$$

teda: $Y(s) = c^T (sI - A)^{-1} b\, U(s)$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = c^T (sI - A)^{-1} b$$

Konkrétne:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\left(\begin{bmatrix} s & -1 \\ a_0 & (s+a_1) \end{bmatrix} \right)^{-1}} \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \left(\frac{1}{s(s+a_1) + a_0} \begin{bmatrix} (s+a_1) & 1 \\ -a_0 & s \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s+a_1}{s^2+a_1 s+a_0} & \frac{1}{s^2+a_1 s+a_0} \\ \frac{-a_0}{s^2+a_1 s+a_0} & \frac{s}{s^2+a_1 s+a_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{b_0}{s^2+a_1 s+a_0} \\ \frac{b_0 s}{s^2+a_1 s+a_0} \end{bmatrix} = \frac{b_0}{s^2+a_1 s+a_0} = G(s)$$

pozn: inverzia matice:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Úloha: určiť póly systému $G(s) = \dfrac{as+b}{s^2+(c+d)s+cd}$

Riešenie póly systému sú korene charakteristického polynómu.

CHP: $A(s) = s^2+(c+d)s+cd$

korene $s_1 = -c$

$s_2 = -d$

Prípadne podľa vzťahu pre korene kvadratického polynómu:

$$s_{1,2} = \frac{-(c+d) \pm \sqrt{(c+d)^2 - 4cd}}{2}$$

$$(c+d)^2 - 4cd = c^2+2cd+d^2-4cd = c^2-2cd+d^2 = (c-d)^2$$

$$= \frac{-(c+d) \pm \sqrt{(c-d)^2}}{2}$$

$$= \frac{-(c+d) \pm (c-d)}{2} = \begin{cases} \dfrac{-c-d+c-d}{2} = \dfrac{-2d}{2} = -d \\[2ex] \dfrac{-c-d-c+d}{2} = \dfrac{-2c}{2} = -c \end{cases}$$

Úloha: nájsť diferenciálnu rovnicu zodpovedajúcu $G(s) = \dfrac{b_0}{s^2+a_1 s+a_0}$

Riešenie: podľa def. $G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)}$

$$Y(s) = \frac{b_0}{s^2+a_1 s+a_0} U(s)$$

$$Y(s)(s^2+a_1 s+a_0) = b_0 U(s)$$

$$s^2 Y(s) + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) = b_0 U(s)$$

$$\Downarrow \text{ inverzná LT}$$

$$\ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_0 u$$

Úloha: Nájdť diferenciálnu rovnicu pre $G(s) = \frac{b_1 s}{s^2 + a_1 s + a_0}$

Riešenie: $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ $\quad Y(s) = \frac{b_1 s}{s^2 + a_1 s + a_0} U(s)$

$$Y(s)(s^2 + a_1 s + a_0) = b_1 s\, U(s)$$

$$s^2 Y(s) + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) = b_1 s U(s)$$

$$\Big\Downarrow \text{ inverzná LT}$$

$$\ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_1 \dot{u}$$

Úloha: určiť charakteristický polynóm systému daného prenosovou funkciou:

$$G(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

Riešenie:

Charakteristický polynóm je polynóm v menovateli prenosovej funkcie.

Označuje sa (typicky) $A(s)$

$$\underline{\underline{A(s) = a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}}$$

11

Úloha: nájdite prenosovú funkciu $a_1\dot{y} + a_0 y = b_0 u$

Riešenie: keďže T.F. tak $y(0)=0$

a aplikujme (uplatnime ?) LT

$$a_1\left(sY(s) - y(0)\right) + a_0 Y(s) = b_0 U(s)$$

$$a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) = b_0 U(s)$$

$$(a_1 s + a_0) Y(s) = b_0 U(s)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{a_1 s + a_0};$$

Úloha: nájsť prenosovú funkciu pre $\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = b_0 u$

Riešenie: keďže T.F. tak $y(0)=0$

$\dot{y}(0)=0$

Uplatnime LT:

$$\frac{d}{dt}\left(sY(s) - y(0)\right)$$

$$s\left(sY(s) - y(0)\right) - \dot{y}(0) + a_1\left(sY(s) - y(0)\right) + a_0 Y(s) = b_0 U(s)$$

$$s^2 Y(s) + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) = b_0 U(s)$$

$$Y(s)\left(s^2 + a_1 s + a_0\right) = b_0 U(s)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{s^2 + a_1 s + a_0};$$