

# Dynamický systém, diferenciálne rovnice (analytické a numerické riešenie)

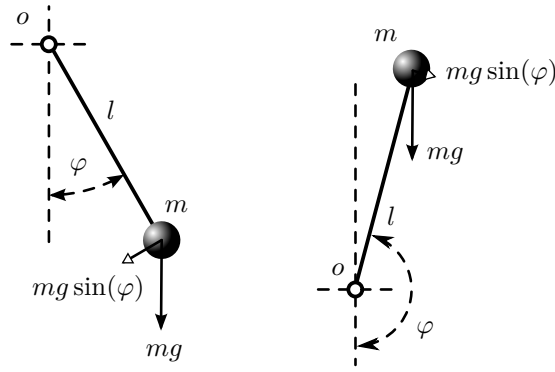
## Obsah

<b>1</b>	<b>O dynamickom systéme</b>	<b>1</b>
1.1	Kyvadlo . . . . .	1
1.2	Modelovanie dynamického systému vo všeobecnosti . . . . .	2
1.3	Kyvadlo ako dynamický systém . . . . .	3
1.3.1	Rovnica vyššieho rádu ako sústava rovníc 1. rádu . . . . .	4
<b>2</b>	<b>O analytickom riešení diferenciálnych rovníc</b>	<b>5</b>
2.1	Príklad s vybíjaním kondenzátora . . . . .	5
2.2	Príklad 2 . . . . .	7
2.3	Príklad pre širší rozhľad . . . . .	7
<b>3</b>	<b>O numerickom riešení diferenciálnych rovníc (a ODE solver)</b>	<b>10</b>
3.1	ODE solver . . . . .	10
3.2	Používanie ODE solvera . . . . .	11
3.2.1	MATLAB . . . . .	11
3.2.2	Python . . . . .	12
3.3	Ďalšie simulácie s kyvadlom . . . . .	13
3.3.1	Iné začiatočné podmienky . . . . .	13
3.3.2	Nenulový vstupný signál . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Cvičenie tretie</b>	<b>15</b>
4.1	Úlohy . . . . .	15
<b>5</b>	<b>Otázky a úlohy</b>	<b>15</b>

## 1 O dynamickom systéme

### 1.1 Kyvadlo

UVAŽUJME kyvadlo, ktorého kmity sú tlmené viskóznym trením s koeficientom  $\beta$  [ $\text{kg m}^2 \text{s}^{-1}$ ]. Kyvadlo je na Obr. 1, kde hmotný bod s hmotnosťou  $m$  [kg] pripevnený na ramene so zanedbateľnou hmotnosťou a dĺžkou  $l$  [m] kmitá,  $\theta$  označuje os otáčania kolmú na rovinu, v ktorej kyvadlo kmitá, uhol medzi zvislicou a ramenom kyvadla je označený  $\varphi$  [rad] a gravitačné zrýchlenie  $g$  [ $\text{m s}^{-2}$ ].



Obr. 1: Kyvadlo

Pohybová rovnica opisujúca dynamiku rotačného pohybu kyvadla je v tvare

$$ml^2\ddot{\varphi} + \beta\dot{\varphi} + mgl \sin \varphi = u \quad (1a)$$

$$ml^2\ddot{\varphi} = -\beta\dot{\varphi} - mgl \sin \varphi + u \quad (1b)$$

kde  $u(t)$  [kg m<sup>2</sup> s<sup>-2</sup>] je externý moment sily pôsobiaci na rameno kyvadla,  $\dot{\varphi}(t)$  [rad s<sup>-1</sup>] je uhlová rýchlosť a  $\ddot{\varphi}(t)$  [rad s<sup>-2</sup>] je uhlové zrýchlenie ramena kyvadla. Číselné hodnoty parametrov kyvadla sú uvedené v tabuľke 1.

## 1.2 Modelovanie dynamického systému vo všeobecnosti

Rovnica (1) je modelom uvažovaného dynamického systému. Model je matematická reprezentácia v tomto prípade fyzikálneho systému. Model umožňuje uvažovať o systéme a predpovedať ako sa bude systém správať. Uvedený model opisuje vstupno-výstupné správanie sa dynamického systému, kde vstupom je externý moment sily  $u$  a výstupom je uhol  $\varphi$ , avšak budeme pracovať aj opisom systému v „stavovom priestore“.

Stav systému je súbor premenných (súbor veličín), ktoré sumarizujú minulosť systému pre potreby predpovede budúcnosti systému. Pre fyzikálny systém je stav zložený z premenných potrebných pre výpočet zmeny hmotnosti, hybnosti a energie. Kľúčovou otázkou pri vytváraní modelu je ako presne má byť táto zmena popísaná.

Stavové premenné tvoria vektor  $x \in \mathbb{R}^n$ , ktorý sa nazýva *stavový vektor*. Vstupy, pomocou ktorých je systém riadený, tvoria vektor vstupov  $u \in \mathbb{R}^p$  a merateľné výstupy systému tvoria vektor výstupov  $y \in \mathbb{R}^q$ . V tomto prípade máme  $p = q = 1$ . Dynamický systém potom možno reprezentovať rovnicami v tvare

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (2a)$$

$$y = h(x, u) \quad (2b)$$

kde  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$  a  $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  sú hladké funkcie. Model v takomto tvare nazývame *model v stavovom priestore*.

Rozmer stavového vektora sa nazýva *rád systému*. Systém (2) sa nazýva *časovo-invariantný* pretože funkcie  $f$  a  $h$  nie sú priamo závislé na čase  $t$ . Pri časovo-invariantných systémoch sú. Model pozostáva z dvoch funkcií: funkcia  $f$  určuje rýchlosť zmeny stavového vektora ako funkciu stavu  $x$  a vstupu  $u$ , a funkcia  $h$  určuje merateľné výstupy ako funkciu stavu  $x$  a vstupu  $u$ .

Tabuľka 1: Parametre kyvadla

Parameter	Hodnota	Jednotky
$m$	1	kg
$l$	1	m
$g$	9,81	m s <sup>-2</sup>
$\beta$	$2 \cdot 0,5 \cdot \sqrt{g/l}$	kg m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup>

Systém sa nazýva lineárny ak sú funkcie  $f$  a  $h$  lineárne vzhľadom na  $x$  a  $u$ . Lineárny model v stavovom priestore má tvar

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3a)$$

$$y = Cx + Du \quad (3b)$$

kde  $A$ ,  $B$ ,  $C$  a  $D$  sú konštantné matice. Takýto systém sa nazýva lineárny a časovo-invariantný, v skratke LTI z anglického linear and time-invariant. Matica  $A$  sa nazýva dynamická matica, matica  $B$  sa nazýva vstupná matica, matica  $C$  sa nazýva výstupná matica a matica  $D$  sa nazýva priamy člen. Drvivá väčšina systémov nemá priamy člen, čo znamená, že vstup nemá priamy vplyv na výstup.

Iná forma lineárnych diferenciálnych rovníc, ktorá je zovšeobecnením avšak linearizovanej dynamickej rovnice kyvadla (o linearizácii neskôr), má tvar

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{(n-1)} y}{dt^{(n-1)}} + \dots + a_0 y = b_0 u \quad (4)$$

kde  $t$  je nezávisle premenná (čas),  $y(t)$  je závisle premenná (výstup) a  $u(t)$  je vstup. Zápis  $\frac{d^n y}{dt^n}$  značí  $n$ -tú deriváciu  $y$  podľa času  $t$  (namiesto  $n$  bodiek). Hovoríme, že rovnica (4) je diferenciálna rovnica  $n$ -tého rádu, ktorá modeluje dynamiku systému  $n$ -tého rádu. Tento model môže byť konvertovaný na model v stavovom priestore napríklad definovaním stavového vektora v tvare

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \frac{dy}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d^{(n-1)} y}{dt^{(n-1)}} \end{bmatrix} \quad (5)$$

potom model v stavovom priestore možno zapísať v tvare

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & x_{n-1} & & & \\ & x_{n-2} & & & \\ & & \ddots & & \\ -a_{n-1}x_n & -\dots & -a_0x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b_0u \end{bmatrix} \quad (6a)$$

$$y = x_1 \quad (6b)$$

čo po vhodnej definícii matíc  $A$ ,  $B$ ,  $C$  a  $D$  má tvar (3).

Ešte všeobecnejší systém získame ak výstup bude lineárnou kombináciou všetkých stavových veličín (predpokladáme, že výstup nezávisí priamo od vstupu), teda

$$y = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad (7)$$

Potom model v stavovom priestore je

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u \quad (8a)$$

$$y = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_{n-2} \ c_{n-1} \ c_n] x \quad (8b)$$

### 1.3 Kyvadlo ako dynamický systém

Vráťme sa späť k nelineárnym dynamickým systémom.

Máme rovnicu opisujúcu dynamiku rotačného pohybu kyvadla. Rovnica je v tvare

$$ml^2\ddot{\varphi}(t) + \beta\dot{\varphi}(t) + mgl \sin \varphi(t) = u(t) \quad (9)$$

Túto rovnicu (rovnicu (1a)) možno prepísať aj na tvar

$$\ddot{\varphi} = -\frac{\beta}{ml^2}\dot{\varphi} - \frac{g}{l}\sin(\varphi) + \frac{1}{ml^2}u \quad (10)$$

čo je v tomto prípade úprava len kozmetická, ale relatívne užitočná, ako sa ukáže.

### Analytické a numerické riešenie

Samozrejme, ide o diferenciálnu rovnicu. Presnejšie o obyčajnú diferenciálnu rovnicu 2. rádu, ktorá je nehomogénna (vyskytuje sa v nej „externý signál“ (vstup)). Cieľom je nájsť riešenie tejto rovnice pre dané začiatočné podmienky a pre prípadné dané vstupy (vstupné signály).

Analytické riešenie diferenciálnej rovnice je v podstate nejaká funkcia času (a prípadne iných veličín). Numerické riešenie je postupnosť hodnôt, číselných hodnôt, ktoré pri daných predpokladoch vyhovujú diferenciálnej rovnici. Je to postupnosť hodnôt - vektor hodnôt, ku ktorému prislúcha časový vektor určujúci časovú postupnosť hodnôt numerického riešenia. Tu sme vynechali pár miliónov detailov, ale snáď sa dá vytušiť, čo sa tu myslí pod numerickým riešením.

#### 1.3.1 Rovnica vyššieho rádu ako sústava rovníc 1. rádu

Každú diferenciálnu rovnicu vyššieho rádu je možné zapísať ako sústavu rovníc prvého rádu. Napríklad sústavu dvoch rovníc prvého rádu je možné vo všeobecnosti zapísať v tvare

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = F\left(t, \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \dots\right) \quad (11)$$

V takejto novej sústave rovníc, vo všeobecnosti, vznikli nové veličiny (signály), ktoré sa vo všeobecnosti môžu líšiť od pôvodných veličín (signálov) v pôvodnej rovnici vyššieho rádu.

Nové veličiny vystupujúce v sústave rovníc sa v teórii systémov súhrnne označujú ako stav systému (stavové veličiny systému). Ak poznáme aktuálny stav systému potom spravidla vieme určiť predchádzajúce aj budúce stavy (vo všeobecnosti).

Napr. v rovnici kyvadla vystupujú veličiny (signály)  $\ddot{\varphi}(t)$ ,  $\dot{\varphi}(t)$  a  $\varphi(t)$ . Je zrejme (možno nie nad slnko jasné), že ako stav systému je možné zvoliť veličiny  $\varphi(t)$  a  $\dot{\varphi}(t)$ , teda polohu a uhlovú rýchlosť kyvadla. Ak poznáme tieto, poznáme celú históriu a budúcnosť pohybu kyvadla.

Môže existovať viac možností voľby stavových veličín. Pri lineárnych systémoch je možností nekonečne veľa (nekonečne veľa stavových priestorov). Z praktického hľadiska však majú význam len niektoré voľby - napr. pri pohybových systémoch, akým je kyvadlo, sú to prirodzene polohy, rýchlosti, zrýchlenie, trh atď., v závislosti od rádu systému.

Jednou z možností ako previesť rovnicu vyššieho rádu na sústavu rovníc prvého rádu je nasledovný postup. V tomto prípade je zhodou okolností výsledkom aj prakticky využiteľný stavový priestor (stavové veličiny  $\varphi(t)$  a  $\dot{\varphi}(t)$ ). Nech

$$x_1(t) = \varphi(t) \quad (12)$$

potom

$$\dot{x}_1(t) = \dot{\varphi}(t) \quad (13)$$

Ďalej nech

$$\dot{x}_1(t) = \dot{\varphi}(t) = x_2(t) \quad (14)$$

a to znamená, že

$$\dot{x}_2(t) = \ddot{\varphi}(t) \quad (15)$$

Tým sme získali veličiny  $x_1(t) = \varphi(t)$  a  $x_2(t) = \dot{\varphi}(t)$ . Je možné zostaviť stavový vektor  $x = [x_1(t) \ x_2(t)]^T$  a teda  $\dot{x} = [\dot{x}_1(t) \ \dot{x}_2(t)]^T$ .

Ako sme naznačili v súvislosti s (11), cieľom je vlastne konkretizovať funkciu  $F$  v rovnici

$$\dot{x} = F(t, x, \dots) \quad (16)$$

čo je kompaktný zápis sústavy

$$\dot{x}_1(t) = F_1(t, x_1(t), x_2(t), \dots) \quad (17)$$

$$\dot{x}_2(t) = F_2(t, x_1(t), x_2(t), \dots) \quad (18)$$

Prvú rovnicu v tomto prípade máme:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (19)$$

Druhá rovnica vyplynie z postrehu, že pôvodnú rovnicu druhého rádu možno zapísať v tvare

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}(t) &= -\frac{\beta}{ml^2}\dot{\varphi}(t) - \frac{g}{l}\sin(\varphi(t)) + \frac{1}{ml^2}u(t) \\ &= -\frac{\beta}{ml^2}x_2(t) - \frac{g}{l}\sin(x_1(t)) + \frac{1}{ml^2}u(t) \end{aligned} \quad (20)$$

kde sú využité novo zavedené stavové veličiny  $x_1(t)$  a  $x_2(t)$ . Je zrejmé, že druhá rovnica sústavy je

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{\beta}{ml^2}x_2(t) - \frac{g}{l}\sin(x_1(t)) + \frac{1}{ml^2}u(t) \quad (21)$$

a teda rovnice kyvadla v stavovom priestore sú

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -\frac{\beta}{ml^2}x_2(t) - \frac{g}{l}\sin(x_1(t)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix} u(t) \quad (22)$$

čím je funkcia  $F$  jasne stanovená.

### Zhrňme

Stavom kyvadla sú dve veličiny: uhol natočenia ramena kyvadla  $\varphi$  a uhlová rýchlosť ramena kyvadla  $\dot{\varphi}$ . Stavový vektor má preto dva prvky  $x^T = [x_1 \ x_2]$ , kde  $x_1 = \varphi$  a  $x_2 = \dot{\varphi}$ . Model kyvadla v stavovom priestore je v tvare

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{\beta}{ml^2}x_2 - \frac{g}{l}\sin(x_1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix} u \quad (23a)$$

$$\varphi = x_1 \quad (23b)$$

Toto je nelineárny časovo-invariantný systém druhého rádu.

## 2 O analytickom riešení diferenciálnych rovníc

### 2.1 Príklad s vybíjaním kondenzátora

Pripomeňme, že diferenciálna rovnica opisujúca vybíjanie kondenzátora je v tvare

$$\frac{dQ(t)}{dt} = -\frac{1}{RC}Q(t) \quad Q(0) = Q_0 \quad (24)$$

(podrobnosti boli vedené v inom (predchádzajúcom) dokumente).

Len pre zovšeobecnenie, zmeňme označenia v tejto rovnici (v snahe o univezálnější zápis):

$$\dot{y}(t) = -ay(t) \quad y(0) = y_0 \quad (25)$$

kde  $y(t)$  je hľadaná časová funkcia,  $a > 0$  a  $y_0$  je tzv. začiatočná hodnota (funkcie  $y(t)$ ). Ide o obyčajnú lineárnu diferenciálnu rovnicu (prípadne hovoríme len lineárna diferenciálna rovnica, skratkou LDR). Tiež môžeme písať

$$\dot{y}(t) + ay(t) = 0 \quad (26)$$

a teda vidíme, že rovnica (alebo teda dynamický systém, ktorý opisuje) je homogénna, teda nemá „vstup“, nemá „pravú stranu“. Preto celkové riešenie rovnice hľadáme ako lineárnu kombináciu fundamentálnych riešení.

Pre hľadanie fundamentálnych riešení sa využíva postup s využitím tzv. *charakteristickej rovnice*.

### Nie len ku charakteristickej rovnici:

- [https://cs.wikipedia.org/wiki/Charakteristick%C3%A1\\_rovnice](https://cs.wikipedia.org/wiki/Charakteristick%C3%A1_rovnice)
- <https://www.math.sk/skripta2/node88.html>
- <http://thales.doa.fmph.uniba.sk/sleziak/texty/gyurki/diferaky/dif.pdf>
- [https://math.libretexts.org/Courses/Monroe\\_Community\\_College/MTH\\_225\\_Differential\\_Equations/9%3A\\_Linear\\_Higher\\_Order\\_Differential\\_Equations/9.2%3A\\_Higher\\_Order\\_Constant\\_Coefficient\\_Homogeneous\\_Equations](https://math.libretexts.org/Courses/Monroe_Community_College/MTH_225_Differential_Equations/9%3A_Linear_Higher_Order_Differential_Equations/9.2%3A_Higher_Order_Constant_Coefficient_Homogeneous_Equations)
- atď, atď...

Zostavme charakteristickú rovnicu prislúchajúcu k diferenciálnej rovnici (26). Charakteristická rovnica v tomto prípade je:

$$s + a = 0 \quad (27)$$

Pre úplnosť, charakteristický polynóm je teda v tomto prípade:

$$s + a \quad (28)$$

Riešením charakteristickej rovnice (v ktorej premenná  $s$  teraz vlastne predstavuje len akúsi neznámu), alebo koreňom charakteristického polynómu je:

$$s_1 = -a \quad (29)$$

Keďže je len jedno riešenie charakteristickej rovnice, tak je len jedno fundamentálne riešenie. Totiž, vo všeobecnosti možno rozlišovať niekoľko prípadov, pre ktoré platí:

1. Ak má charakteristická rovnica  $n$  navzájom rôznych riešení  $s_i$  pre  $i = 1, \dots, n$ , potom zodpovedajúce fundamentálne riešenia (módy) sú:  $e^{s_1 t}, e^{s_2 t}, \dots, e^{s_n t}$ .
2. Ak sa medzi  $n$  koreňmi charakteristického polynómu vyskytne  $k$ -násobný koreň, vytvoríme  $k$  lineárne závislých riešení:  $e^{s_i t}, t e^{s_i t}, \dots, t^{k-1} e^{s_i t}$ .
3. V prípade výskytu dvojice komplexne združených koreňov charakteristického polynómu,  $s_{1,2} = \alpha \pm j\beta$ , kde  $j$  je imaginárna jednotka, využijeme na určenie fundamentálnych riešení Eulerov vzťah

$$e^{(\alpha \pm j\beta)t} = e^{\alpha t} (\cos \beta t \pm j \sin \beta t) \quad (30)$$

Preto potom možno písať príslušné fundamentálne riešenie v tvare

$$c_1 e^{(\alpha + j\beta)t} + c_2 e^{(\alpha - j\beta)t} = e^{\alpha t} (c' \cos \beta t + c'' \sin \beta t) \quad (31)$$

kde sú imaginárne časti nulové.

V tomto prípade teda fundamentálne riešenie je:

$$y_{f1}(t) = e^{s_1 t} = e^{(-a)t} \quad (32)$$

Celkové riešenie je lineárna kombinácia fundamentálnych riešení, v tomto prípade jednoducho:

$$y(t) = c_1 e^{(-a)t} \quad (33)$$

kde  $c_1$  je konštanta (reálne číslo). Táto konštanta má vo všeobecnosti neznámu hodnotu. Avšak, ak sú dané začiatočné podmienky pre LDR, potom je túto konstantu (alebo viac konštánt ak by bolo viac fundamentálnych riešení) možné určiť na základe začiatočných podmienok. Pre začiatok, teda čas 0, platí

$$y(0) = c_1 e^{(-a)0} = c_1 \quad (34)$$

A samotná hodnota  $y(0)$  je známa, keďže máme začiatočnú podmienku  $y(0) = y_0$ . Takže

$$c_1 = y_0 \quad (35)$$

To znamená, že riešenie diferenciálnej rovnice je:

$$y(t) = y_0 e^{(-a)t} \quad (36)$$

## 2.2 Príklad 2

Majme diferenciálnu rovnicu

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = 0 \quad y(0) = 3, \dot{y}(0) = -2 \quad (37)$$

Nájďme funkciu  $y(t)$ , ktorá je riešením diferenciálnej rovnice.

Určme charakteristickú rovnicu:

$$s^2 + 3s + 2 = 0 \quad (38)$$

Jej korene sú

$$s_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 + 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{-1}}{2} \quad (39)$$

a teda

$$s_1 = -2 \quad s_2 = -1 \quad (40)$$

Lineárna kombinácia fundamentálnych riešení potom je

$$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t} \quad (41)$$

Konštanty  $c_1$  a  $c_2$  nájdeme využitím začiatočných podmienok. Začiatočné podmienky určujú hodnoty pre  $y(0)$  a pre  $\dot{y}(0)$ . Preto nás zaujímajú aj  $y(t)$  a  $\dot{y}(t)$ . Všeobecný predpis pre  $y(t)$  už máme - (41). Práve z neho je možné získať aj predpis pre  $\dot{y}(t)$ , keďže ide o  $\frac{d}{dt}y(t)$ , a ten je

$$\dot{y}(t) = c_1 e^{-2t}(-2) + c_2 e^{-t}(-1) \quad (42a)$$

$$\dot{y}(t) = -2c_1 e^{-2t} - c_2 e^{-t} \quad (42b)$$

Potom, na základe podmienok zhody musí platiť

$$y(0) = c_1 + c_2 = 3 \quad (43a)$$

$$\dot{y}(0) = -2c_1 - c_2 = -2 \quad (43b)$$

Takže  $c_2 = 3 - c_1$ , a teda

$$-2c_1 - 3 + c_1 = -2 \quad (44a)$$

$$-c_1 = 1 \quad (44b)$$

$$c_1 = -1 \quad (44c)$$

a

$$c_2 = 4 \quad (45)$$

Našli sme funkciu  $y(t)$ , ktorá je riešením diferenciálnej rovnice:

$$y(t) = -e^{-2t} + 4e^{-t} \quad (46)$$

## 2.3 Príklad pre širší rozhľad

Majme diferenciálnu rovnicu:

$$\ddot{y} + 5,4\ddot{y} + 9,7\dot{y} + 5,592y = 2e^{-1,2t} \quad (47)$$

Pre tento dynamický systém zvolme nenulové začiatočné podmienky nasledovne:

$$y(0) = 1 \quad \dot{y}(0) = 1 \quad \ddot{y}(0) = 1$$

Rovnica (47) je nehomogénna lineárna diferenciálna rovnica s konštantnými koeficientami tretieho rádu ( $n_r = 3$ ). Jej Charakteristická rovnica je

$$s^3 + 5,4s^2 + 9,7s + 5,592 = 0 \quad (48)$$

Riešeniami Charakteristickej rovnice sú

$$s_1 = -2, 1 + 0,5i \quad s_2 = -2, 1 - 0,5i \quad s_3 = -1, 2 \quad (49)$$

Fundamentálne riešenia (módy) rovnice (47) zodpovedajúce jednotlivým riešeniam Charakteristickej rovnice sú

$$y_1(t) = e^{(-2,1+0,5i)t} = e^{-2,1t} (\cos(0,5t) + i \sin(0,5t)) \quad (50a)$$

$$y_2(t) = e^{(-2,1-0,5i)t} = e^{-2,1t} (\cos(0,5t) - i \sin(0,5t)) \quad (50b)$$

$$y_3(t) = e^{-1,2t} \quad (50c)$$

Totíž, vo všeobecnosti možno rozlišovať niekoľko prípadov, pre ktoré platí:

1. Ak má charakteristická rovnica  $n$  navzájom rôznych riešení  $s_i$  pre  $i = 1, \dots, n$ , potom zodpovedajúce fundamentálne riešenia (módy) sú:  $e^{s_1 t}, e^{s_2 t}, \dots, e^{s_n t}$ .
2. Ak sa medzi  $n$  koreňmi charakteristického polynómu vyskytne  $k$ -násobný koreň, vytvoríme  $k$  lineárne závislých riešení:  $e^{s_i t}, t e^{s_i t}, \dots, t^{k-1} e^{s_i t}$
3. V prípade výskytu dvojice komplexne združených koreňov charakteristického polynómu,  $s_{1,2} = \alpha \pm j\beta$ , kde  $j$  je imaginárna jednotka, využijeme na určenie fundamentálnych riešení Eulerov vzťah

$$e^{(\alpha \pm j\beta)t} = e^{\alpha t} (\cos \beta t \pm j \sin \beta t) \quad (51)$$

Preto potom možno písať príslušné fundamentálne riešenie v tvare

$$c_1 e^{(\alpha+j\beta)t} + c_2 e^{(\alpha-j\beta)t} = e^{\alpha t} (c' \cos \beta t + c'' \sin \beta t) \quad (52)$$

kde sú imaginárne časti nulové.

Výsledné reálne všeobecné riešenie homogénnej časti má tvar

$$y_{h_{vs}}(t) = c_1 e^{-2,1t} \cos(0,5t) + c_2 e^{-2,1t} \sin(0,5t) + c_3 e^{-1,2t} \quad (53)$$

kde  $c_1, c_2$  a  $c_3$  sú reálne konštanty.

Pravá strana  $q(t)$  diferenciálnej rovnice (47) má vo všeobecnosti tvar  $q(t) = e^{\alpha t} P_n(t)$ , pričom platí

$$P_n(t) = 2 \quad (54a)$$

$$\alpha = -1, 2 \quad (54b)$$

Pre tento špeciálny tvar pravej strany má partikulárne riešenie  $\psi(t)$  tvar  $\psi(t) = t^k e^{\alpha t} Q_n(t)$ , kde  $k$  je násobnosť koreňa  $\alpha$  a  $Q_n(t)$  je všeobecný polynóm rovnakého stupňa ako  $P_n(t)$ . V tomto prípade

$$k = 1 \quad (55a)$$

$$Q_n(t) = A_0 \quad (55b)$$

Partikulárne riešenie  $\psi(t)$  určíme použitím metódy neurčitých koeficientov, a teda partikulárne riešenie a jeho derivácie dosadíme do diferenciálnej rovnice.

$$\psi(t) = A_0 t e^{-1,2t} \quad (56a)$$

$$\dot{\psi}(t) = A_0 e^{-1,2t} - 1,2 A_0 t e^{-1,2t} \quad (56b)$$

$$\ddot{\psi}(t) = -2,4 A_0 e^{-1,2t} + 1,44 A_0 t e^{-1,2t} \quad (56c)$$

$$\dddot{\psi}(t) = 4,32 A_0 e^{-1,2t} - 1,728 A_0 t e^{-1,2t} \quad (56d)$$

Rovnice (56) dosadíme do diferenciálnej rovnice (47) a upravíme.

$$\begin{aligned} 2e^{-1,2t} &= 4,32 A_0 e^{-1,2t} - 1,728 A_0 t e^{-1,2t} + 5,4 (-2,4 A_0 e^{-1,2t} + 1,44 A_0 t e^{-1,2t}) \\ &\quad + 9,7 (A_0 e^{-1,2t} - 1,2 A_0 t e^{-1,2t}) + 5,592 (A_0 t e^{-1,2t}) \end{aligned} \quad (57a)$$

$$\begin{aligned} 2e^{-1,2t} &= 4,32 A_0 e^{-1,2t} - 1,728 A_0 t e^{-1,2t} - 12,96 A_0 e^{-1,2t} + 7,776 A_0 t e^{-1,2t} \\ &\quad + 9,7 A_0 e^{-1,2t} - 8,5 A_0 t e^{-1,2t} + 5,592 A_0 t e^{-1,2t} \end{aligned} \quad (57b)$$

$$2e^{-1,2t} = 1,06 A_0 e^{-1,2t} + 3,14 t e^{-1,2t} \quad (57c)$$



Z (57c) vyplýva

$$2 = 1,06A_0 \quad \Rightarrow \quad A_0 = \frac{2}{1,06} \doteq 1,8868 \quad (58)$$

a partikulárne riešenie  $\psi(t)$  je

$$\psi(t) = 1,8868te^{-1,2t} \quad (59)$$

Všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice (47) je súčet (53) s (59):

$$y_{vs}(t) = c_1e^{-2,1t} \cos(0,5t) + c_2e^{-2,1t} \sin(0,5t) + c_3e^{-1,2t} + 1,8868te^{-1,2t} \quad (60a)$$

Konštanty  $c_1$ ,  $c_2$  a  $c_3$  sú dané konkrétnymi začiatočnými podmienkami, ktoré sa dosadia do príslušných derivácií všeobecného riešenia. V tomto prípade sú potrebné okrem nulte derivácie (60a) aj prvá a druhá derivácia všeobecného riešenia:

$$\begin{aligned} \dot{y}_{vs}(t) = & 1,8868e^{-1,2t} - 2,2642te^{-1,2t} - 2,1c_3e^{-1,2t} - 2,1c_2e^{-2,1t} \sin(0,5t) \\ & + 0,5c_2e^{-2,1t} \cos(0,5t) - 2,1c_1e^{-2,1t} \cos(0,5t) - 0,5c_1e^{-2,1t} \sin(0,5t) \end{aligned} \quad (60b)$$

$$\begin{aligned} \ddot{y}_{vs}(t) = & -4,5283e^{-1,2t} + 2,717te^{-1,2t} + 1,44c_3e^{-1,2t} + 4,16c_2e^{-2,1t} \sin(0,5t) \\ & - 2,1c_2e^{-2,1t} \cos(0,5t) + 4,16c_1e^{-2,1t} \cos(0,5t) + 2,1c_1e^{-2,1t} \sin(0,5t) \end{aligned} \quad (60c)$$

Dosadením začiatočných podmienok do (60a), (60b) a (60c) získame sústavu troch rovníc o troch neznámych, ktorá má v maticovom zápise tvar

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2,1 & 0,5 & -1,2 \\ 4,16 & -2,1 & 1,44 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 - 1,8868 \\ 1 + 4,5283 \end{bmatrix} \quad (61)$$

a jej riešením je

$$c_1 = -5,0979 \quad (62a)$$

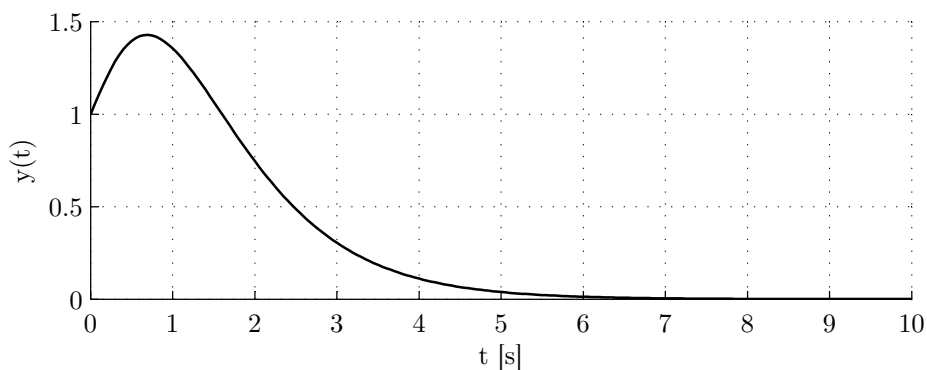
$$c_2 = -8,5498 \quad (62b)$$

$$c_3 = 6,0979 \quad (62c)$$

Riešením diferenciálnej rovnice (47) je

$$y(t) = -5,0979e^{-2,1t} \cos(0,5t) - 8,5498e^{-2,1t} \sin(0,5t) + 6,0979e^{-1,2t} + 1,8868te^{-1,2t} \quad (63)$$

Graficky je riešenie znázornené na Obr. 2.



Obr. 2: Grafické znázornenie riešenia získaného analyticky

### Riešenie pomocou Symbolic toolboxu (MATLAB)

Pre výpočet riešenia pomocou toolboxu Symbolic je potrebné zadať nasledujúce príkazy:

```

1 yt = dsolve('D3y + 5.4*D2y + 9.7*Dy + 5.592*y = 2*exp(-1.2*t)', 'y(0)
2       =1', 'Dy(0)=1', 'D2y(0)=1')
3 ezplot(yt,[0 10])

```

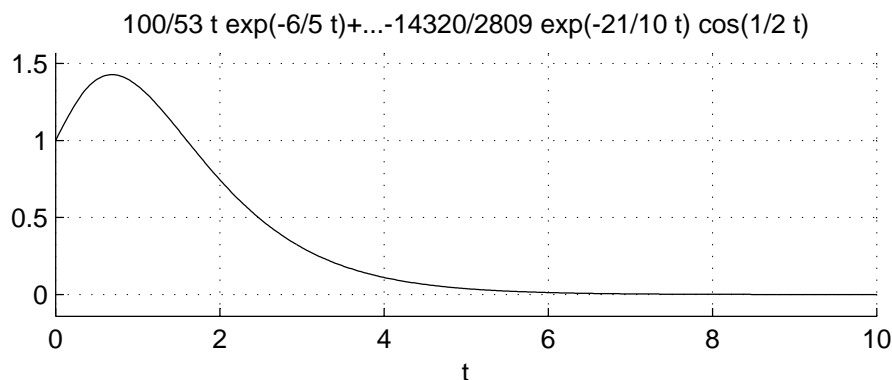
Odpoveďou je riešenie a vykreslenie jeho priebehu znázornené na Obr. 3.

yt =

```

100/53*t*exp(-6/5*t)+17129/2809*exp(-6/5*t)-120082/14045*exp(-21/10*t)*sin(1/2*t)
-14320/2809*exp(-21/10*t)*cos(1/2*t)

```



Obr. 3: Grafické znázornenie riešenia získaného pomocou toolboxu Symbolic

### 3 O numerickom riešení diferenciálnych rovníc (a ODE solver)

#### 3.1 ODE solver

Pre hľadanie numerického riešenia využijeme ODE solver. ODE je skratka pre obyčajné diferenciálne rovnice (ordinary differential equation).

Úlohou ODE solvera je nájsť numerické riešenie na základe rovnice (diferenciálnej), ktorú je možné vo všeobecnosti zapísať v tvare

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), \dots) \quad (64)$$

kde  $f$  je funkcia, ktorej argumenty sú čas  $t$ , prirodzene, samotný výstupný (hľadaný, neznámy) signál  $x(t)$  a prípadne iné ďalšie parametre či veličiny - napríklad externý vstup. Uvedená rovnica doslova predpisuje aká je časová zmena signálu  $x(t)$ . Časová zmena signálu, inými slovami časová derivácia (derivácia podľa času) je označená ako  $\dot{x}(t)$ .

Ak teda do funkcie  $f$  dosadíme hodnoty argumentov (čas, signál  $x(t)$ , a prípadne iné), získame hodnotu časovej zmeny  $\dot{x}(t)$ . Na základe informácie o  $\dot{x}(t)$ , ktorá zodpovedá aktuálnemu (dosadenému) signálu  $x(t)$ , môžeme určiť hodnotu  $x(t)$  o nejaký čas neskôr. Túto novú hodnotu  $x(t)$  možno opäť dosadiť do funkcie  $f$  a následne nájsť ďalšiu ešte ďalej v čase - atď. ODE solver využíva práve tento jednoduchý princíp pre postupné hľadanie hodnôt (numerických hodnôt) signálu  $x(t)$ .

Vo všeobecnosti sa uvedený princíp nazýva numerická integrácia. ODE solver teda numericky integruje. Je množstvo metód pre numerickú integráciu, ktoré sa líšia spôsobom riešenia problémov súvisiacich so samotným procesom numerickej integrácie (voľba (optimalizácia) časového kroku integrácie, zohľadnenie matematických vlastností daného typu diferenciálnych rovníc a iné). ODE solvre sa môžu líšiť aj samotnou implementáciou niektorej z metód numerickej integrácie. Podrobnejší opis ODE solvera je nad rámec tohto textu.

## 3.2 Používanie ODE solvera

ODE solver ako funkcia v programe môže mať napríklad nasledujúce vstupy (argumenty) a výstupy:

```
x = odesolver(fcnF, init, timeVect)
```

kde  $\mathbf{x}$  je, samozrejme, hľadané numerické riešenie. Prvým argumentom je funkcia s názvom `fcnF`, ktorá implementuje sústavu diferenciálnych rovníc v zmysle predchádzajúceho textu. `init` označuje začiatočné hodnoty stavových veličín. `timeVect` označuje časové okamihy (vzorky), v ktorých hľadáme hodnoty numerického riešenia.

### 3.2.1 MATLAB

MATLAB obsahuje hneď niekoľko ODE solverov. Tu budeme používať `ode45`.

Vytvoríme funkciu, ktorá realizuje sústavu diferenciálnych rovníc (22), avšak, uvažujme, že vstupný signál  $u(t)$  je nulový. Teda neuvažujme vstupný signál vôbec. Ešte inými slovami, externý moment sily je nulový,  $u(t) = 0$  a preto potom možno písať

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{\beta}{ml^2}x_2 - \frac{g}{l}\sin(x_1) \end{bmatrix} \quad (65)$$

Toto je autonómny nelineárny časovo-invariantný systém druhého rádu. Jeho správanie závisí len od začiatočného stavu na začiatku uvažovaného času.

Funkcia, ktorá realizuje uvedenú sústavu, môže byť nasledovná:

Celý súbor `PravaStr.m`

```
1 function dotx = PravaStr(t,x)
2
3 global m l g beta
4
5 dotx1 = x(2);
6 dotx2 = -(beta/m*l^2)*x(2) - (g/l)*sin(x(1));
7
8 dotx = [dotx1; dotx2];
9
10 end
```

Vytvoríme „hlavný skript“, v ktorom všetko potrebné nastavíme a v ktorom budeme volať ODE solver. Ako prvé nech su globálne premenné (v tomto prípade parametre kyvadla):

Časť súboru `hlSkript.m`

```
1 global m l g beta
2
3 m = 1; %kg
4 l = 1; %m
5 g = 9.81; %m/s^2
6 beta = 2*0.5*sqrt(g/l); %kgm^2/s
```

Definujme časový vektor, ktorý určí pre aké časové okamihy ODE solver vráti numerické riešenie:

Časť súboru `hlSkript.m`

```
7 timeVect = 0:0.1:5;
```

Zavolajme ODE solver, pričom ostáva zvoliť začiatočné podmienky - začiatočný stav kyvadla. Nech začiatočný stav je  $x_1(0) = 0.25$  [rad] a  $x_2(0) = 0$  [rad/s].

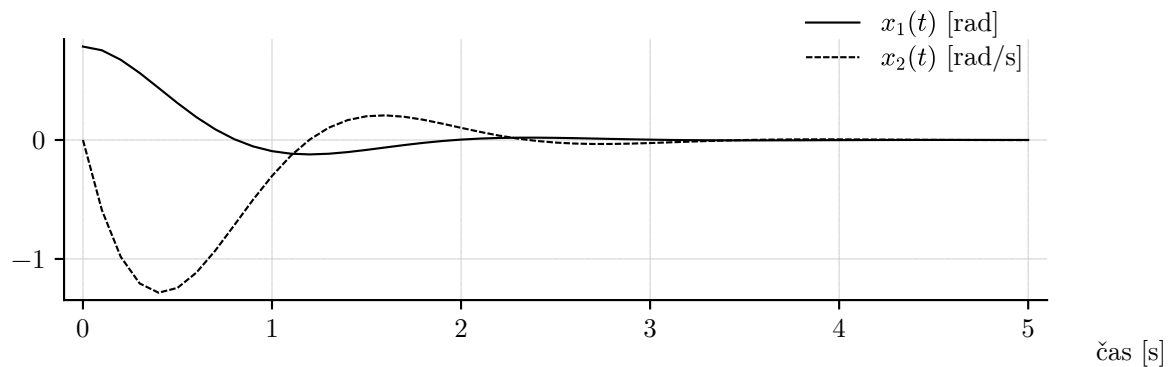
Časť súboru `hlSkript.m`

```
8 [t,x] = ode45(@(t,x) PravaStr(t,x), timeVect, [pi/4; 0]);
```

Premenná  $\mathbf{x}$  teraz obsahuje dva stĺpce - prvý stĺpec je prvá stavová veličina a druhý stĺpec je druhá stavová veličina. Pre nakreslenie vypočítaného riešenia:

Časť súboru `hlSkript.m`

```
9 figure(1)
10 plot(t,x)
```



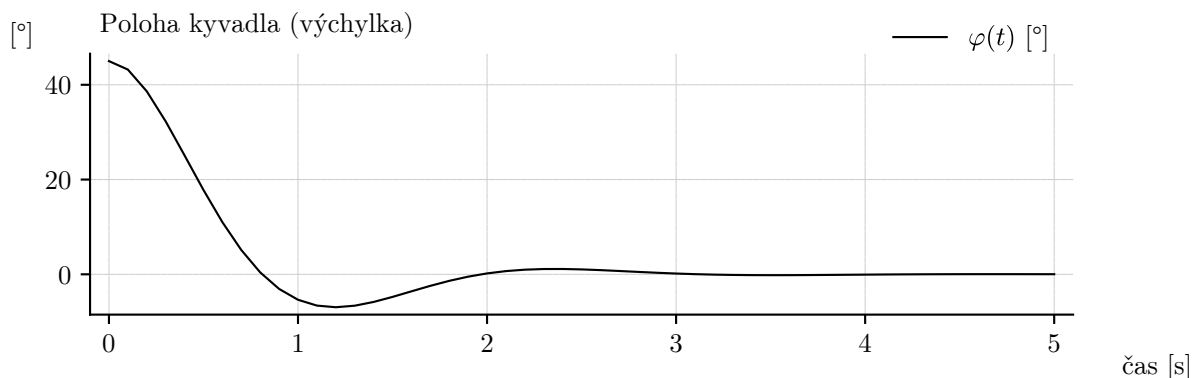
Obr. 4: Grafické zobrazenie numerického riešenia

Výsledné numerické riešenie je graficky znázornené na obr. 4.

Na obr. 4 ide však len o akési základné zobrazenie. Zmyslupnnejšie by napríklad mohlo byť, ak by sme do grafu nakreslili len priebeh polohy (výchylky) kyvadla samostatne a navyše nie v radiánoch ale v stupňoch – viď obr. 5. Pre takýto obrázok možno do hl. skriptu pridať:

Časť súboru hlSkript.m

```
11 figure(2)
12 plot(t,x(:,1)*180/pi)
```



Obr. 5: Grafické zobrazenie priebehu polohy kyvadla

### 3.2.2 Python

Pre informáciu, nasledovne by vyzeralo hľadanie numerického riešenia v rámci jazyka Python.

Knižnica [SciPy](#), presnejšie [scipy.integrate](#) obsahuje ODEsolver s názvom `odeint`. Vytvorme skript využívajúci tento ODE solver:

Skript v Python-e

```
1 import numpy as np
2 from scipy.integrate import odeint
3 import matplotlib.pyplot as plt
4
5 m = 1.0
6 l = 1.0
7 g = 9.81
8 beta = 2 * 0.5 * np.sqrt(g/l)
9
10 def fcn_rovniceKyvadla(x, t, u):
11     x_1, x_2 = x
12     dotx_1 = x_2
13     dotx_2 = -(beta/m*l**2) * x_2 - (g/l) * np.sin(x_1) + (1.0/m*l
14         **2) * u
15     return [dotx_1, dotx_2]
```

```

15
16
17 timeVect = np.arange(0, 5.1, 0.1)
18
19 u = 0
20
21 x = odeint(fcn_rovniceKyvadla,
22           [np.pi/4, 0], # zaciatočne podmienky
23           timeVect,
24           args=(u,),
25           )
26
27 plt.figure(1)
28 plt.plot(timeVect, x)
29 plt.xlabel(u'cas [s]')
30 plt.legend(['$x_1(t)$ [rad]', '$x_2(t)$ [rad/s]'])
31
32 plt.figure(2)
33 plt.plot(timeVect, x[:,0]*180/np.pi)
34 plt.xlabel(u'cas [s]')
35 plt.ylabel(u'$x_1(t)$ [stupne]')

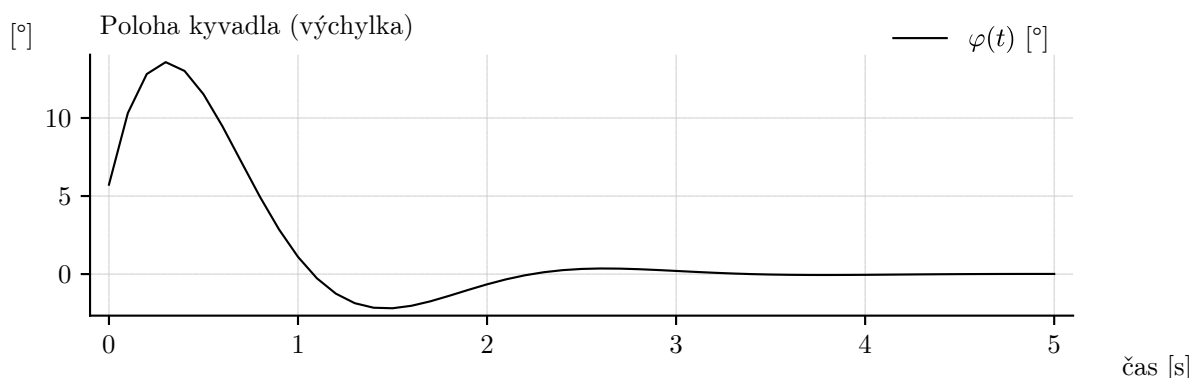
```

Pozornému čitateľovi iste neuniklo, že uvedený skript v Pythone obsahuje funkciu, ktorá realizuje sústavu diferenciálnych rovníc (22), ale v tomto prípade zahŕňa aj vstupnú veličinu  $u(t)$ . Táto je potom v tomto prípade nastavená na nulovú hodnotu.

### 3.3 Ďalšie simulácie s kyvadlom

#### 3.3.1 Iné začiatočné podmienky

Nech začiatočné podmienky (začiatočný stav) sú:  $x_1(0) = 0.1$  [rad] a  $x_2(0) = 1$  [rad/s]. Pritom nech vstup  $u(t)$  je stále nulový. Výsledok simulácie je na obrázku 6.



Obr. 6: Grafické zobrazenie priebehu polohy kyvadla

Ďalšie simulácie s rôznymi začiatočnými podmienkami kyvadla sa ponechávajú na čitateľa.

#### 3.3.2 Nenulový vstupný signál

Modifikujme pôvodnú funkciu a skrip v MATLAB-e tak, aby bolo možné simulovať nenulový vstupný signál  $u(t)$ .

Funkciu, ktorá realizuje sústavu diferenciálnych rovníc (22) aj so vstupným signálom  $u(t)$ :

Celý súbor PravaStr\_u.m

```

1 function dotx = PravaStr_u(t,x, u)
2
3 global m l g beta
4
5 dotx1 = x(2);
6 dotx2 = -(beta/m*l^2)*x(2) - (g/l)*sin(x(1)) + (1/m*l^2) * u;
7
8 dotx = [dotx1; dotx2];
9
10 end

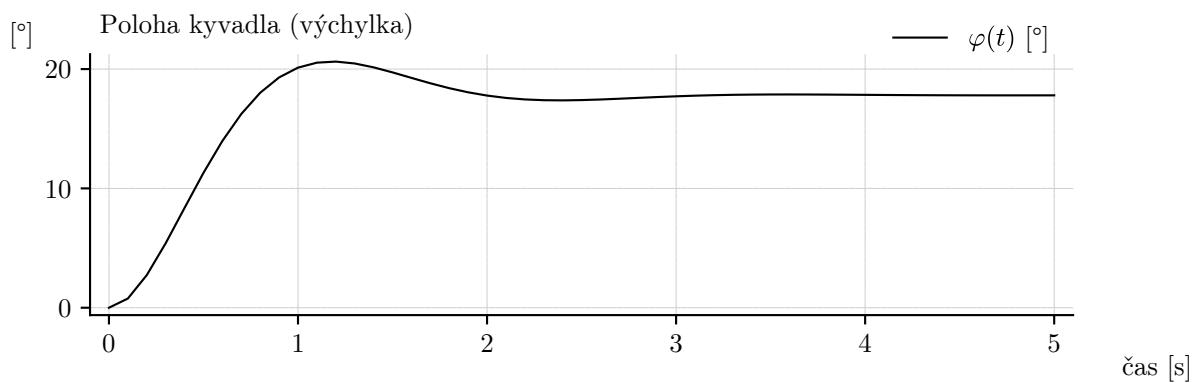
```

Vytvorme „hlavný skript“, v ktorom všetko potrebné nastavíme a v ktorom budeme volať ODE solver:

Súbor hlSkript\_.m

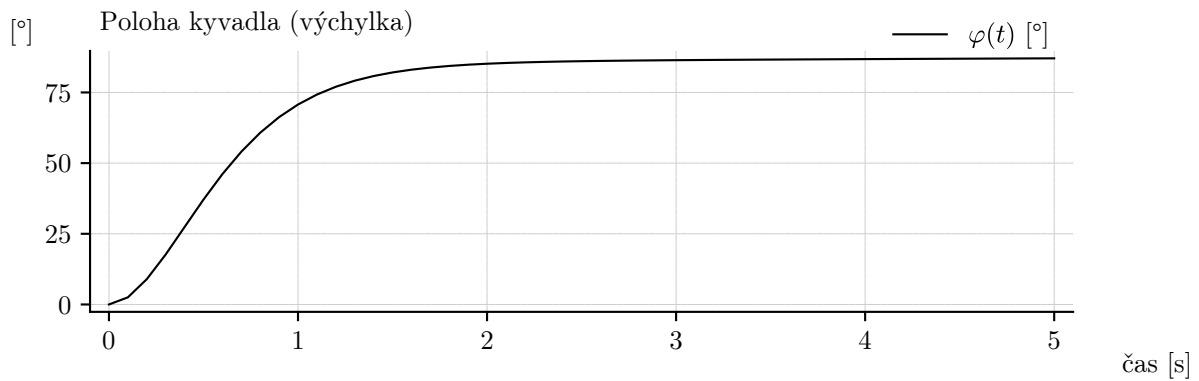
```
1 global m l g beta
2
3 m = 1; %kg
4 l = 1; %m
5 g = 9.81; %m/s^2
6 beta = 2*0.5*sqrt(g/l); %kgm^2/s
7
8 u = 3
9
10 [t,x] = ode45(@PravaStr_u(t,x,u), [0 10], [0; 0]);
11
12 figure(3)
13 plot(t,x(:,1)*180/pi)
```

Simulujme prípad keď napríklad  $u(t) = 3 \text{ [kg m}^2 \text{ s}^{-2}]$  (pozn.: pre lepšiu názornosť uvažujme začiatočné podmienky nulové). Výsledok simulácie je na obrázku 7.



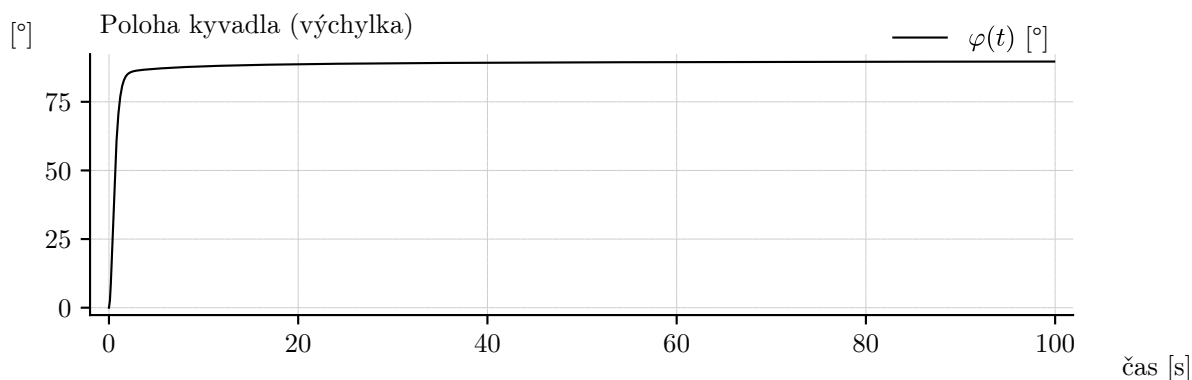
Obr. 7: Grafické zobrazenie priebehu polohy kyvadla

Zaujímavý prípad je, keď  $u(t) = 9,81 \text{ [kg m}^2 \text{ s}^{-2}]$ . Výsledok simulácie je na obrázku 8.



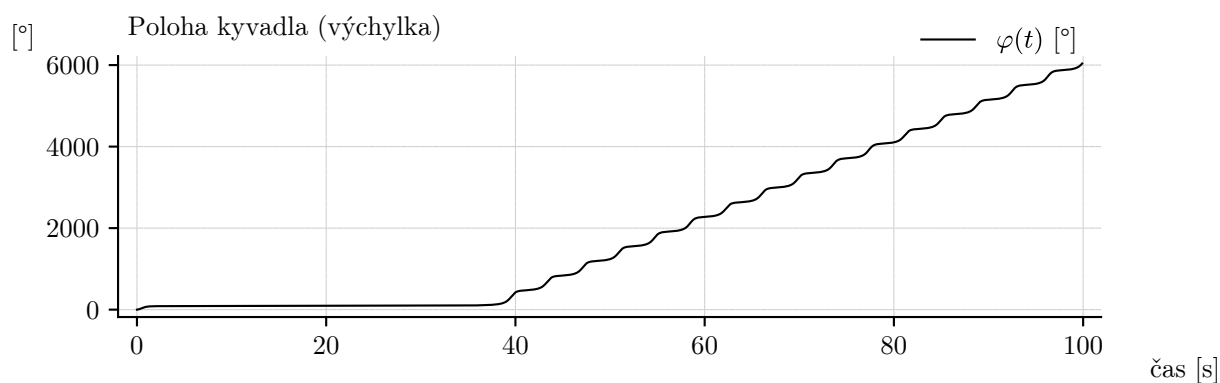
Obr. 8: Grafické zobrazenie priebehu polohy kyvadla

Avšak, lepšie sa to ukáže, ak predĺžime časový vektor (čas simulácie) – viď obrázok 9. Je zrejmé, že kyvadlo sa približuje k hodnote 90 stupňov.



Obr. 9: Grafické zobrazenie priebehu polohy kyvadla

Čo sa stane ak  $u = 9,82 \text{ [kg m}^2 \text{ s}^{-2}]$ ? (obr. 10)



Obr. 10: Grafické zobrazenie priebehu polohy kyvadla

## 4 Cvičenie tretie

### 4.1 Úlohy

- Vytvorte numerickú („počítačovú“) simuláciu časového priebehu výchylky kyvadla (kyvadlo ako nelineárny dynamický systém).
  - Schematické znázornenie pre implementáciu v prostredí MATLAB-Simulink (základné bloky).
  - Implementácia s využitím všeobecného ODE solvera.
- Simulujte priebeh výchylky kyvadla
  - pre začiatočný stav  $\varphi = 0,25 \text{ [rad]}$ ,  $\dot{\varphi} = 0 \text{ [rad/s]}$  a  $\ddot{\varphi} = 0 \text{ [rad/s}^2]$  pričom  $u(t) = 0 \text{ [kg m}^2 \text{ s}^{-2}]$ ,
  - pre skokovú zmenu signálu  $u(t)$ , ktorá nastane v čase  $t = 0$  a hodnota signálu sa zmení z 0  $\text{[kg m}^2 \text{ s}^{-2}]$  na  $9,81 \text{ [kg m}^2 \text{ s}^{-2}]$ .

## 5 Otázky a úlohy

- Čo je riešením obyčajnej diferenciálnej rovnice (vo všeobecnosti)?
- Čo je to *analytické riešenie* obyčajnej diferenciálnej rovnice?
- Čo je to *numerické riešenie* obyčajnej diferenciálnej rovnice?
- Nájdite analytické riešenie diferenciálnej rovnice (nejaká bude zadaná)

## Odporúčaná literatúra

- [1] K. J. Åström and R. M. Murray. *Feedback Systems*. Princeton University Press, 2008.

## Ďalšie zdroje

- [http://www.cds.caltech.edu/~murray/amwiki/index.php/Second\\_Edition](http://www.cds.caltech.edu/~murray/amwiki/index.php/Second_Edition)
- <https://math.libretexts.org/Bookshelves>
- <https://matlabacademy.mathworks.com/details/matlab-onramp/gettingstarted>