

Analytické riešenie lineárnej diferenciálnej rovnice druhého rádu s konštantnými koeficientami

Martin Dodek

8. októbra 2020

1 Diferenciálna rovnica

Majme diferenciálnu rovnicu s nasledovnými vlastnosťami:

- Rovnica je druhého rádu, teda obsahuje nanajvýš druhú deriváciu závislej premennej y
- Rovnica má nulovú pravú stranu. Takúto rovnicu tiež označujeme ako *homogénna*.
- Rovnica je *lineárna*, teda vystupujú v nej výlučne násobky premenných konštantami a nie iné operácie s premennými (vzájomné násobenie, umocňovanie).
- Koeficienty a_i sú rovnako konštantné, teda sa nemenia v čase.

Rovnicu teda môžeme formulovať nasledovne:

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0y = 0 \quad (1)$$

Riešenie diferenciálnej rovnice spočíva v nájdení *funkcie* $f(t)$ popisujúcej vývoj premennej y v čase.

$$y(t) = f(t)$$

Počiatkové podmienky (hodnoty premenných a ich derivácií v čase $t = 0$) nech sú dané ako y_0 a \dot{y}_0 . Táto úloha sa potom zvykne označovať aj pojmom “*initial value problem*”

2 Charakteristická rovnica

Charakteristická rovnica vychádza priamo z koeficientov diferenciálnej rovnice (charakteristický polynóm premennej λ) a je formulovaná nasledovne:

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0 \quad (2)$$

Riešením tejto charakteristickej rovnice sú dve čísla - teda korene. Tieto korene hľadáme štandardne tak, ako v prípade kvadratickej rovnice.

Diskriminant rovnice:

$$D = a_1^2 - 4a_0 \quad (3)$$

Riešenie charakteristickej rovnice:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2} \quad (4)$$

Len pre pripomenutie:

$$\sqrt{-1} = i$$

Tieto korene sú dva a sú vo všeobecnosti komplexné. Vzhľadom na ich polohu v komplexnej rovine môže riešenie diferenciálnej rovnice nadobúdať nasledovné vlastnosti.

3 Všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice

Podľa rozloženia koreňov charakteristického polynómu rozlišujeme nasledovné prípady:

3.1 Rôzne reálne korene

Riešenie diferenciálnej rovnice je v tomto prípade všeobecne definované ako súčet exponenciál.

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \quad (5)$$

Prvá derivácia riešenia bude:

$$\dot{y}(t) = c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \quad (6)$$

3.2 Dvojnásobný reálny koreň

Riešenie diferenciálnej rovnice je v tomto prípade všeobecne definované nasledovne:

$$y(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t} \quad (7)$$

Prvá derivácia riešenia bude:

$$\dot{y}(t) = c_1 \lambda e^{\lambda t} + c_2 e^{\lambda t} (1 + t\lambda) \quad (8)$$

3.3 Dva komplexne združené korene

Komplexne združený koreň má rovnakú reálnu a opačnú imaginárnu zložku.

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \lambda_a + i\lambda_b \\ \lambda_2 &= \lambda_a - i\lambda_b\end{aligned}$$

Riešenie diferenciálnej rovnice je v tomto prípade všeobecne definované ako súčet komplexných exponenciál. A keďže komplexná exponenciála obsahuje periodickú zložku:

$$e^{a+bi} = e^a (\cos(b) + i \sin(b))$$

Bude aj riešenie obsahovať trigonometrické funkcie.

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_a t} \cos(\lambda_b t) + c_2 e^{\lambda_a t} \sin(\lambda_b t) \quad (9)$$

Prvá derivácia riešenia bude:

$$\dot{y}(t) = c_1 e^{\lambda_a t} (\lambda_a \cos(\lambda_b t) - \lambda_b \sin(\lambda_b t)) + c_2 e^{\lambda_a t} (\lambda_a \sin(\lambda_b t) + \lambda_b \cos(\lambda_b t)) \quad (10)$$

4 Riešenie s počiatočnými podmienkami

Pre určenie koeficientov riešenia diferenciálnej rovnice c_i , potrebujeme poznať počiatočné podmienky. Dosadíme nulový čas do riešenia diferenciálnej rovnice a rovnako aj do jeho prvej derivácie. Všeobecne máme opäť tri možnosti:

4.1 Rôzne reálne korene

Do rovníc riešenia (5) a derivácie riešenia (6) dosadíme $t = 0$.

$$y(0) = c_1 + c_2 \quad (11)$$

$$\dot{y}(0) = c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2 \quad (12)$$

Zostavíme zodpovedajúcu sústavu rovníc

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ \dot{y}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad (13)$$

4.2 Dvojnásobný reálny koreň

Do rovníc riešenia (7) a derivácie riešenia (8) dosadíme $t = 0$.

$$y(0) = c_1 \quad (14)$$

$$\dot{y}(0) = c_1 \lambda + c_2 \quad (15)$$

Zostavíme zodpovedajúcu sústavu rovníc

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ \dot{y}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad (16)$$

4.3 Dva komplexne združené korene

Do rovníc riešenia (9) a derivácie riešenia (10) dosadíme $t = 0$.

$$y(0) = c_1 \tag{17}$$

$$\dot{y}(0) = c_1 \lambda_a + c_2 \lambda_b \tag{18}$$

Zostavíme zodpovedajúcu sústavu rovníc

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ \dot{y}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda_a & \lambda_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \tag{19}$$

5 Príklady

5.1 Príklad

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 0$$

Počiatkové podmienky nech sú dané:

$$y_0 = 4 \quad \dot{y}_0 = 3$$

Charakteristická rovnica (2) bude zostavená v tvare:

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

Riešenie charakteristickej rovnice (2)

$$\lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2}$$

$$\lambda_2 = -1 \quad \lambda_1 = -2$$

Získavame dva rôzne reálne korene. Formulujeme sústavu rovníc (13).

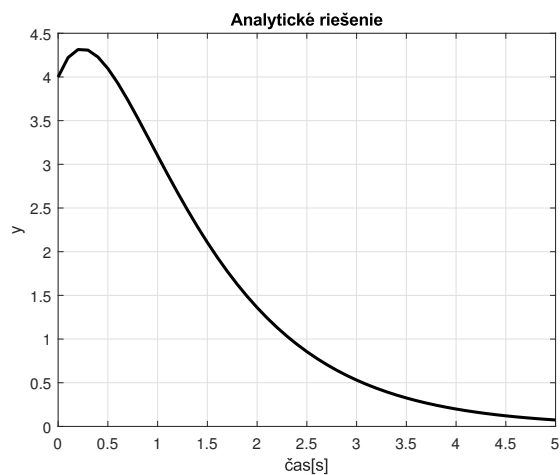
$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 4 \\ -2c_1 - c_2 &= 3 \end{aligned}$$

Sústavu riešime elimináciou premenných

$$\begin{aligned} c_1 &= -7 \\ c_2 &= 11 \end{aligned}$$

Výsledné riešenie diferenciálnej rovnice je vo forme funkcie (6).

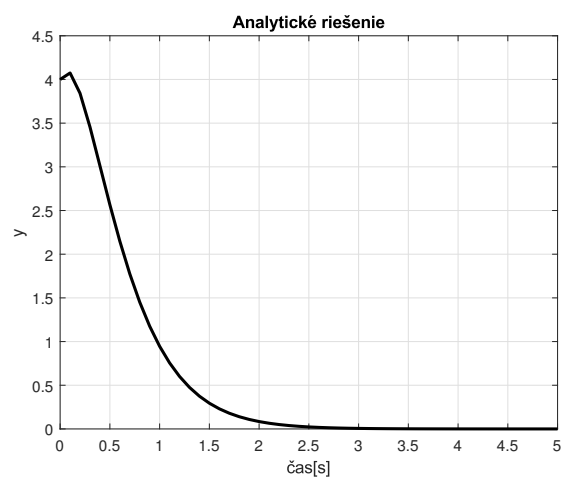
$$y(t) = -7e^{-2t} + 11e^{-t}$$



Obr. 1: Časový priebeh funkcie riešenia

5.2 Príklad

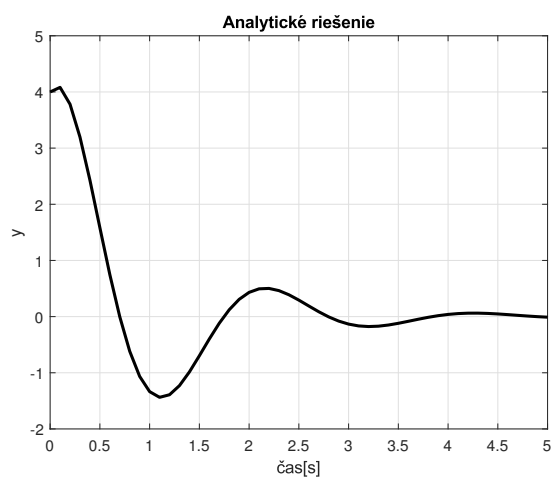
$$\ddot{y} + 6\dot{y} + 9y = 0$$



Obr. 2: Časový priebeh funkcie riešenia

5.3 Príklad

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + 10y = 0$$



Obr. 3: Časový priebeh funkcie riešenia