Cvičenie úvodné

Hlavné ciele cvičenia

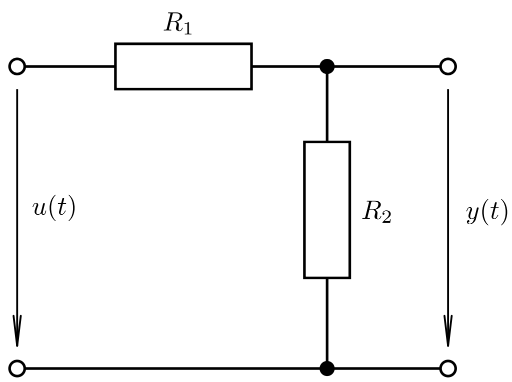
- Pojem *statický systém, dynamický systém*
- Pojem *matematický model procesu (deja)*
- Rovnica algebraická - riešenie (napr. v prípade určenia zosilnenia systému)
- Rovnica diferenciálna - riešenie (napr. v časového vývoja napätia na kondenzátore)
- Kreslenie grafov (napr. v MATLAB-e)

Obsah

1 Zosilnenie odporového deliča

Uvažujme klasický odporový delič ako je znázornené na nasledujúcom obrázku.

Ohmov zákon je všeobecne definovaný:
I=U/R



Prúd týmto obvodom je potom podielom:
I(t)=U(t)/(R1+R2)

Úbytok napätia na rezistore R2 je výstupným napätím y(t) a podľa Ohmovho zákona:
y(t)=R2/(R1+R2)*u(t)

y(t)=k*u(t)
kde k je konštanta definovaná ako:
k=R2/(R1+R2)

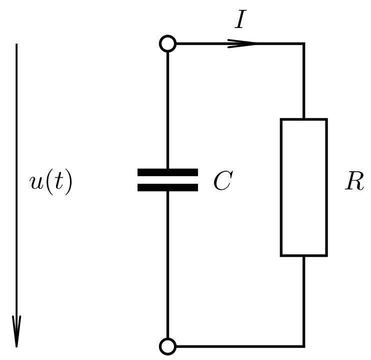
Obr. 1: Odporový delič

Vstupom uvažovaného systému nech je napätie označené ako $u(t)$ a výstupným signálom nech je napätie $y(t)$.

Všimnite si, že v získanom vzťahu pre napätie nevystupuje čas.
Systém, ktorého výstup nezávisí od času(nemení/nevyvíja sa) je statický systém.

1.1 Úlohy

1. Nech hodnota vstupného signálu je konštantná, nemení sa, je ustálená. Určte hodnotu výstupného signálu, pričom hodnoty rezistorov R_1 a R_2 sú známe.
2. Definujte zosilnenie uvažovaného systému a určte jeho veľkosť.



Obr. 2: RC obvod

2 Vybíjanie kondenzátora – matematický model procesu

Majme RC obvod ako je znázornené na obr. 2.

Nech je na začiatku, v čase $t = 0$, kondenzátor C nabitý a na jeho svorkách je napätie s hodnotou u_0. Inými slovami napätie $u(t)$ v čase 0 je u_0, teda $u(0) = u_0$.

Ku kondenzátoru C je pripojený rezistor R a preto sa kondenzátor s rastúcim časom vybíja.

2.1 Úlohy

1. Zostavte diferenciálnu rovnicu, ktorá opisuje proces vybíjania kondenzátora.
2. Určte jednotky (rozmer) všetkých parametrov a signálov (veličín) v zostavenej rovnici.
3. Nájdite analytické riešenie diferenciálnej rovnice.
4. Nakreslite graf časovej funkcie, ktorá je analytickým riešením diferenciálnej rovnice. Potrebné číselné hodnoty parametrov a signálov nech sú ľubovolné.
5. Nájdite numerické riešenie diferenciálnej rovnice (s využitím Simulinku).

2.2 Poznámky k riešeniu úloh

Pre kondenzátor platí

$$Q = CU \tag{1}$$

čo znamená, že elektrický náboj Q nazhromaždený v kondenzátore je úmerný napätiu na svorkách kondenzátora U (azda priveľmi zjednodušene povedané, čitateľ si však iste vie dohľadať podrobnosti). Parameter C predstavuje, ako je iste zrejmé, kapacitu kondenzátora.

Ak sa kondenzátor vybíja, mení sa náboj. Preto má zmysel vyšetrovať časový priebeh veľkosti náboja. Tým sa získa celkový prehľad aj o ďalších veličinách súvisiacich s procesom vybíjania kondenzátora.

Časová zmena elektrického náboja je elektrický prúd, teda

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -I \tag{2}$$

kde I je elektrický prúd a dôvodom záporného znamienka je, že smer elektrického prúdu sa značí práve opačne ako smer pohybu záporného náboja.

Rovnica (2) je v princípe diferenciálnou rovnicou. Obsahuje časovú deriváciu veličiny – elektrického náboja. V tomto tvare však rovnicu nie je možné použiť na získanie časového priebehu samotnej veličiny (elektrického náboja). Totiž neznáme je nie len Q ale v podstate aj I.

Namiesto veličiny I by bolo vhodné mať na pravej strane rovnice (2) veličinu Q. Z Ohmovho zákona plynie

$$I = \frac{U}{R} \tag{3}$$

Napätie U, ktoré sa týka nášho problému, je vo vzťahu k veličine Q, viď rovnicu (1). Konkrétne

$$U = \frac{Q}{C} \tag{4}$$

Dosadením (4) do (3) sa získa

$$I = \frac{Q}{RC} \tag{5}$$

a následne dosadením (5) do (2)

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{RC}Q \tag{6}$$

Diferenciána rovnica (6) obsahuje jednu neznámu. Neznámou je veličina Q. Všeobecnejšie povedané, neznámou je časový priebeh veličiny. Neznámou je teda funkcia času. Preto píšme, že sa zaoberáme signálom (veličinou) $Q(t)$. Hodnoty R a C sú len pevné hodnoty odporu a kapacity (viď obr. 2). Neuvažujeme, že by sa menili v čase. Preto ich neoznačujeme ako signál (funkciu času). Teda signál označujme ako napr. $Q(t)$ a konštantu ako napr. R.

Typicky, a pre zjednodušenie, sa rovnice (6) zapisuje aj v tvare

$$\dot{Q}(t) = -\frac{1}{RC}Q(t) \tag{7}$$

kde bodka $\dot{}$ označuje deriváciu podľa času rovnako ako operátor $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$.

Riešením rovnice (7) je nejaká časová funkcia, nejaký signál, nejaký časový priebeh, konkrétne časový priebeh elektrického náboja, ktorý tu označujeme ako $Q(t)$.

Pre nájdenie jednoznačného riešenia je potrebné doplniť úlohu o začiatočnú podmienku. To je podmienka, ktorú musí spĺňať hľadaný signál $Q(t)$ na začiatku, teda v čase $t = 0$. Pripomeňme, že napätie pred vybíjaním je dané (známe) a má hodnotu u_0. Je teda zrejmé, že je známa aj hodnota $Q(0) = Cu_0$. Pre zjednodušenie označme ako $Q(0) = Q_0$.

2.2.1 Náčrt riešenia diferenciálnej rovnice separáciou premenných

Uvažujme, že premenná/signál Q(t) reprezentuje náboj a má nejakú jednotku ... pokojne ju pre tento účel môžeme označiť [CUL]

Zaoberáme sa problémom v tvare

$$\frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{RC}Q(t) \qquad Q(0) = Q_0 \tag{8}$$

kde $Q(t)$ je neznáma časová funkcia. Konštanty (nezávislé od času) R, C a aj Q_0 sú známe. V rovnici je však ešte jedna premenná a tou je čas t. Ten, ako je známe, si len tak plynie. Je premennou pretože sa napríklad „podľa neho derivuje“.

Mimochodom

- Aké jednotky (rozmer) má výraz RC v rovnici (8)?

Časová derivácia na ľavej strane rovnice má potom rozmer [CUL/čas] - pretože derivácia= zmena za čas. Platí, že pravá strana rovnice musí mať rovnaký rozmer, preto bude rozmer výrazu RC -[čas], teda sekunda [s]. RC sa v tomto prípade môže označiť aj pojmom "časová konštanta systému", ktorej rozmer je vždy [s]

Upravme diferenciálnu rovnicu (8) tak, aby rovnaké premenné boli na rovnakých stranách. V tvare (8) je signál $Q(t)$ na oboch stranách rovnice. Nech je len na ľavej strane. Rovnako, nech čas t je len na pravej strane. Teda

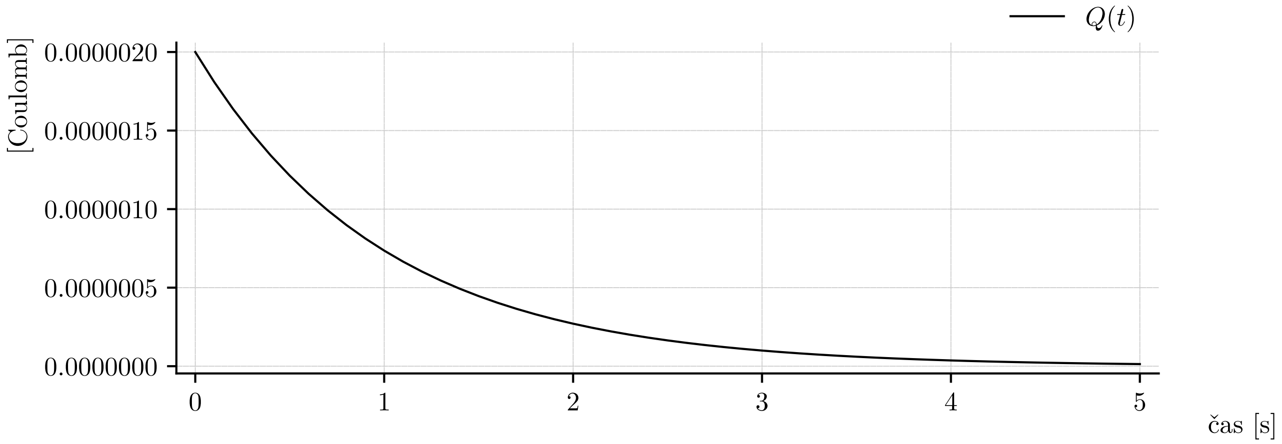
$$\frac{1}{Q(t)}\mathrm{d}Q(t) = -\frac{1}{RC}\mathrm{d}t \tag{9}$$

Všimnime si, že teraz je možné obe strany rovnice integrovať, každú podľa vlastnej premennej, teda

$$\int \frac{1}{Q(t)}\mathrm{d}Q(t) = \int -\frac{1}{RC}\mathrm{d}t \tag{10}$$

Výsedkom inegrovania je

$$\ln\left(Q(t)\right) + k_1 = -\frac{1}{RC}t + k_2 \tag{11}$$



Obr. 3: Graf funkcie (14) pre $R = 10^6$ [Ω], $C = 1$ [μF] a $Q_0 = 2 \cdot 10^{-6}$ [Coulomb] (ľubovolné hodnoty len ako príklad)

kde k_1 a k_2 sú konštanty vyplývajúce z neurčitých integrálov (a tiež sme potichu uvážili, že $Q(t)$ nebude nadobúdať záporné hodnoty).

Rovnica (11) už nie je diferenciálna. Žiadna veličina v nej nie je derivovaná podľa času.

Vyjadrime z rovnice (11) signál $Q(t)$. Úpravou

$$\ln\left(Q(t)\right) = -\frac{1}{RC}t + k_3 \tag{12}$$

sme zaviedli konštantu $k_3 = k_2 - k_1$. Ďalej

$$Q(t) = e^{\left(-\frac{1}{RC}t + k_3\right)} \tag{13a}$$

$$Q(t) = e^{\left(-\frac{1}{RC}t\right)}e^{k_3} \tag{13b}$$

Už v tomto bode je rovnica (13b) predpisom, ktorý udáva časovú závislosť veličiny Q. Vyjadruje signál (časovú funkciu) $Q(t)$. Časová funkcia $Q(t)$ je riešením diferenciálnej rovnice (9).

V rovnici (13b) je konštanta e^{k_3}. Je to všeobecná konštanta a môže mať akúkoľvek hodnotu. Je možné ukázať, my si tu však dovolíme neuviesť formálnu ukážku, že táto konštanta je daná začiatočnou podmienkou priradenou k diferenciálnej rovnici. V tomto prípade platí $e^{k_3} = Q_0$.

Hľadaným riešením diferenciálnej rovnice je časová funkcia v tvare

Aký priebeh má exponenciálna funkcia?

$$Q(t) = Q_0\, e^{\left(-\frac{1}{RC}t\right)} \tag{14}$$

Čomu je rovné?
e^0
e^-1
e^-inf

Funkcia je graficky znázornená na nasledujúcom obrázku.

2.2.2 Časový priebeh napätia na kondenzátore

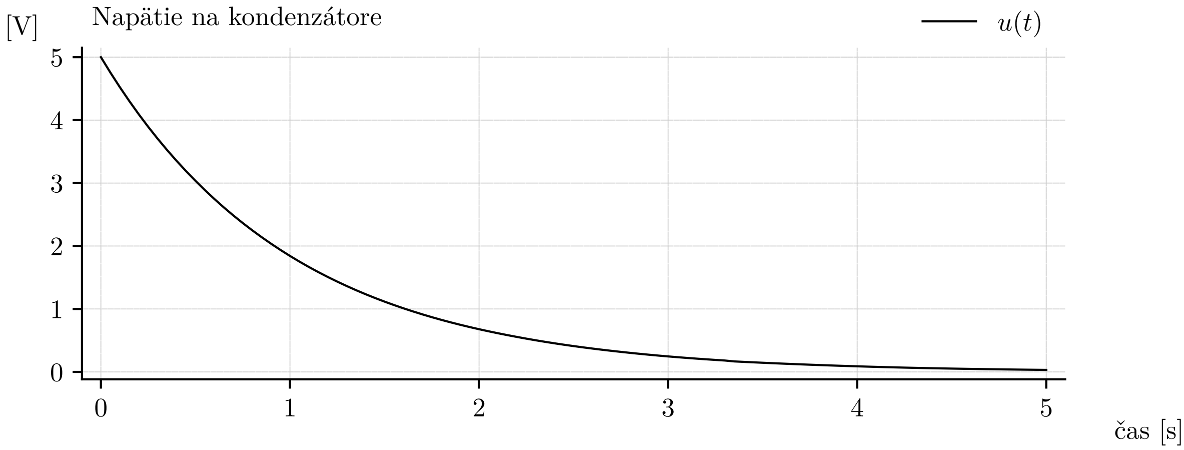
Vyšetrili sme časový priebeh elektrického náboja počas vybíjania kondenzátora. Opis situácie na začiatku časti 2 však nepriamo predpokladá, že sa budeme venovať napätiu. Vzájomný vzťah už poznáme, a jeho formálne presnejší zápis (napätie $u(t)$ ako signál) je

$$u(t) = \frac{1}{C}Q(t) \tag{15}$$

Takže ak poznáme priebeh $Q(t)$, poznáme aj priebeh $u(t)$.

Začiatočnú podmienku pre signál $Q(t)$, teda hodnotu $Q(0)$ samozrejme tiež možno určiť so želanej (danej) začiatočnej podmienky signálu $u(t)$.

$$Q(0) = Cu_0 \tag{16}$$



Obr. 4: Časový priebeh napätia na kondenzátore

V zmysle úvodu časti 2 uvažujme nasledujúci príklad

$$C = 1\ [\mu\mathrm{F}]$$
$$R = 10^6\ [\Omega]$$
$$u_0 = 5\ [\mathrm{V}]$$

Pre tento príklad je následne začiatočná podmienka pre signál $Q(t)$

$$Q(0) = 10^{-6} \cdot 5 = 0.000050\ [\mathrm{Coulomb}] \tag{17}$$

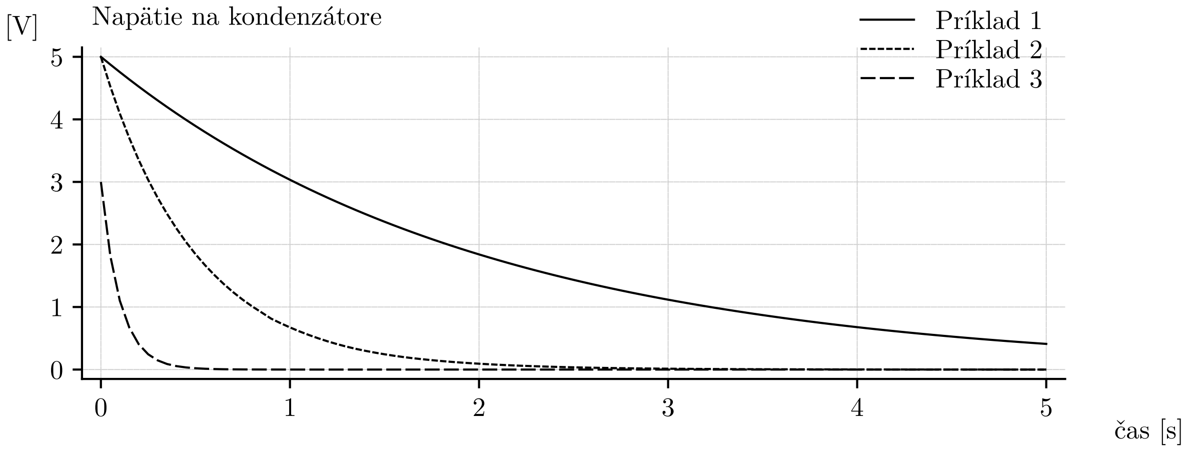
Výsledný priebeh napätia je zobrazený na obr. 4.

2.2.3 Príklady pre rôzne parametre R a C

Pre zaujímavosť, ukážme priebeh napätia pre rôzne parametre R a C. Príklady sú sumarizované v tabuľke 1. Graficky znázornené časové priebehy na obr. 5.

Tabuľka 1: Príklady rôznych parametrov

	C [F]	R [Ω]	u_0 [V]
Príklad 1	$2 \cdot 10^{-6}$	10^6	5
Príklad 2	$\frac{1}{2} \cdot 10^{-6}$	10^6	5
Príklad 3	10^{-6}	$\frac{1}{10} \cdot 10^6$	3



Obr. 5: Časový priebeh napätia na kondenzátore