Riešenie lineárnej diferenciálnej rovnice druhého rádu s využitím Laplaceovej transformácie

Martin Dodek

9. decembra 2020

1 Diferenciálna rovnica

Majme diferenciálnu rovnicu druhého rádu s konštantnými koeficientami (rovnaká ako na minulom cvičení):

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = 0 \tag{1}$$

Riešenie diferenciálnej rovnice spočíva v nájdení *funkcie* $f(t)$ popisujúcej vývoj premennej y v čase.

$$y(t) = f(t)$$

Počiatočné podmienky (hodnoty premenných a ich derivácii v čase $t = 0$) nech sú dané ako y_0 a $\dot{y}_0$.

Laplaceovu transformáciu je možné použiť iba pre riešenie lineárnych diferenciálnych rovníc (tento prípad).

2 Laplaceova transformácia

Laplaceova transformácia je integrálnou transformáciou definovanou ako:

$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \tag{2}$$

Interpretovať ju môžeme ako integrál vlastných kmitov, respektíve ako koreláciu signálu $f(t)$ (v časovej oblasti) s komplexnou exponenciálou e^{-st} (v s oblasti).

Kde s je komplexná premenná a je označovaná aj ako Laplaceov operátor.

2.1 Vzťah Laplaceovej transformácie a derivácie

Z pohľadu kybernetiky je najdôležitejšou vlastnosťou jej vzťah k derivácii signálu $f(t)$. Zjednodušene povedané, operátor s reprezentuje operáciu časovej derivácie. Presnejšie:

$$\mathcal{L}\left\{\dot{f}(t)\right\} = s\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} - f(0) \tag{3}$$

Kde $f(0)$ je počiatočná podmienka - hodnota signálu v čase 0.
Pre vyššie derivácie signálu potom platí reťazové pravidlo.
Druhá derivácia:

$$\mathcal{L}\left\{\ddot{f}(t)\right\} = s\left(s\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} - f(0)\right) - \dot{f}(0) \tag{4}$$

Teda po úprave:

$$\mathcal{L}\left\{\ddot{f}(t)\right\} = s^2\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} - sf(0) - \dot{f}(0) \tag{5}$$

Kde $f(0)$ je počiatočná hodnota signálu a $\dot{f}(0)$ je počiatočná hodnota jeho prvej derivácie.

Všeobecný vzťah pre obraz derivácie vyššieho stupňa n

$$\mathcal{L}\left\{f^n(t)\right\} = s^n\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} - s^{(n-1)}f(0)\ldots - f^{(n-1)}(0) \tag{6}$$

2.2 Laplaceova transformácia exponenciálnej funkcie

Pre účely riešenia diferenciálnych rovníc a teda aj analýzu lineárnych systémov je zvlášť dôležitý Laplaceov obraz exponenciálnej funkcie.

Jej obraz bude:

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}dt$$

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\} = \int_0^\infty e^{(a-s)t}dt$$

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\} = \frac{1}{a-s}\left[e^{(a-s)t}\right]_0^\infty$$

Čo vo výsledku je:

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\} = \frac{1}{s-a} \tag{7}$$

3 Riešenie diferenciálnej rovnice

Diferenciálnu rovnicu (1) môžeme s využitím obrazu Laplaceovej transformácie derivácie signálu $y(t)$ aj jeho vyšších derivácii (5) formulovať ako:

$$Y(s)\left(s^2 + a_1 s + a_0\right) = sy_0 + \dot{y}_0 + a_1 y_0 \tag{8}$$

Vyjadrením obrazu signálu $Y(s)$ získavame racionálnu funkciu:

$$Y(s) = \frac{sy_0 + \dot{y}_0 + a_1 y_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \tag{9}$$

Pre účely riešenia diferenciálnej rovnice (získanie časovej funkcie $y(t)$) musíme túto funkciu rozložiť na parciálne zlomky:

$$Y(s) = \frac{sy_0 + \dot{y}_0 + a_1 y_0}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)} = \frac{A}{s-\lambda_1} + \frac{B}{s-\lambda_2} \tag{10}$$

Je preto nutné nájsť korene menovateľa racionálnej funkcie : λ_1 a λ_2. Zostavíme teda charakteristikcú rovnicu (kvadratickú rovnicu):

$$s^2 + a_1 s + a_0 = 0 \tag{11}$$

Riešením charakteristickej rovnice sú korene λ_1 a λ_2 (všeobecne komplexné):

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2} \tag{12}$$

Pre určenie koeficentov A a B si pravú stranu rovnice (10) upravíme na spoločného menovateľa:

$$Y(s) = \frac{sy_0 + \dot{y}_0 + a_1 y_0}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)} = \frac{A(s-\lambda_2) + B(s-\lambda_1)}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)} \tag{13}$$

Zavedieme rovnosť polynómov:

$$sy_0 + \dot{y}_0 + a_1 y_0 = (A+B)s - (A\lambda_2 + B\lambda_1)$$

Koeficienty A a B potom určíme ako riešenie vzniknutej sústavy lineárnych rovníc.

Pre formuláciu všeobecného riešenia diferenciálnej rovnice využijeme znalosť Laplaceovho obrazu exponenciálnej funkcie (7).

Realizujeme tak vlastne spätnú Laplaceovu transformáciu rovnice (10).

$$y(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} \tag{14}$$

4 Príklad

Majme konkrétnu diferenciálnu rovnicu (rovnaká ako na minulom cvičení):

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 0$$

Počiatočné podmienky nech sú dané:

$$y_0 = 4 \quad \dot{y}_0 = 3$$

Realizujeme Laplaceovu transformáciu tejto rovnice v zmysle (8)

$$Y(s)\left(s^2 + 3s + 2\right) = 4s + 3 + 3 \times 4$$

Získavame racionálnu funkciu, podobne ako vo všeobecnom riešení (9)

$$Y(s) = \frac{4s + 15}{s^2 + 3s + 2}$$

Charakteristická rovnica bude zostavená v tvare:

$$s^2 + 3s + 2 = 0$$

Riešenie charakteristickej rovnice (12)

$$\lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2}$$

Korene teda budú reálne:

$$\lambda_2 = -1 \qquad \lambda_1 = -2$$

Racionálnu funkciu rozložíme na parciálne zlomky rovnako ako v (10)

$$Y(s) = \frac{4s + 15}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}$$

Úpravou na spoločného menovateľa (13)

$$Y(s) = \frac{4s + 15}{(s+1)(s+2)} = \frac{A(s+2) + B(s+1)}{(s+1)(s+2)}$$

Zo zavedenej rovnosti polynómov vyplýva:

$$(A + B)s + (2A + B) = 4s + 15$$

Získame sústavu lineárnych rovníc:

$$\begin{aligned} A + B &= 4 \\ 2A + B &= 15 \end{aligned}$$

Jej riešenie bude:

$$A = 11 \quad B = -7$$

Využijeme znalosť Laplaceovho obrazu exponenciálnej funkcie (7). Ak realizujeme spätnú Laplaceovu transformáciu potom riešenie bude v zmysle (14)

$$y(t) = 11e^{-t} - 7e^{-2t}$$

5 Príklad

Majme konkrétnu nehomogénnu diferenciálnu rovnicu (obsahuje vstup $u(t)$):

$$\ddot{y} + 5\dot{y} + 6y = u(t)$$

Počiatočné podmienky nech sú nulové:

$$y_0 = 0 \quad \dot{y}_0 = 0$$

Vstupný signál $u(t)$ nech je daný ako konštantný skok

$$u(t) = 5$$

Nájdeme Laplaceov obraz vstupného signálu $u(t)$

$$U(s) = \frac{5}{s}$$

Realizujeme Laplaceovu transformáciu diferenciálnej rovnice v zmysle (8)

$$Y(s)\left(s^2 + 5s + 6\right) = U(s)$$

Pre tento systém môžeme definovať jeho prenosovú funkciu:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + 5s + 6}$$

Po dosadení obrazu vstupného signálu $U(s)$ získavame racionálnu funkciu:

$$Y(s) = \frac{5}{(s^2 + 5s + 6)\, s}$$

Charakteristická rovnica bude zostavená v tvare:

$$\left(s^2 + 5s + 6\right) s = 0$$

Riešenie charakteristickej rovnice (nenulové korene)

$$\lambda_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2}$$

Korene teda budú reálne (z toho jeden nulový):

$$\lambda_0 = 0 \qquad \lambda_1 = -2 \qquad \lambda_2 = -3$$

Racionálnu funkciu rozložíme na parciálne zlomky:

$$Y(s) = \frac{5}{s(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+3}$$

Úpravou na spoločného menovateľa:

$$Y(s) = \frac{5}{(s+2)(s+3)s} = \frac{A(s+2)(s+3) + B(s+3)s + C(s+2)s}{(s+2)(s+3)s}$$

Zo zavedenej rovnosti polynómov vyplýva:

$$(A + B + C)\, s^2 + (5A + 3B + 2C)\, s + 6A = 5$$

Získame sústavu lineárnych rovníc:

$$\begin{gathered} A + B + C = 0 \\ 5A + 3B + 2C = 0 \\ 6A = 5 \end{gathered}$$

Jej riešenie bude:

$$A = \frac{5}{6} \quad B = -2.5 \quad C = \frac{5}{3}$$

Využijeme znalosť Laplaceovho obrazu exponenciálnej funkcie (7). Ak realizujeme spätnú Laplaceovu transformáciu potom riešenie bude:

$$y(t) = \frac{5}{6} - 2.5e^{-2t} + \frac{5}{3}e^{-3t}$$