

Monika Bakošová  
Miroslav Fikar  
Ľuboš Čirka

# **Základy automatizácie**

Laboratórne cvičenia zo základov automatizácie

STU v Bratislava, 2003

Online verzia: 15. apríla 2014

© doc. Ing. Monika Bakošová, CSc., doc. Dr.-Ing. Miroslav Fikar, Ing. Ľuboš Čirka

Lektori: prof. Ing. I. Taufer, DrSc.  
doc. Ing. B. Rohaľ-Ilkiv, CSc.

Publikácia neprešla redakčnou úpravou

Schválilo vedenie FCHPT STU v Bratislave - č. 6/2002

ISBN 80-227-1831-9

LCZA na Internete

<http://www.kirp.chtf.stuba.sk/lcza>

Hypertext PDF verzia: 15. apríla 2014



# Obsah

Predhovor . . . . .	9
<b>1 Úvod do MATLABu a Simulinku . . . . .</b>	<b>11</b>
1.1 Pracovný adresár . . . . .	11
1.1.1 Vytvorenie pracovného adresára . . . . .	11
1.1.2 Otvorenie MATLABu a nastavenie sa do pracovného adresára . . . . .	12
1.2 Základy MATLABu . . . . .	13
1.2.1 Úlohy z MATLABu . . . . .	15
1.3 Základy Simulinku . . . . .	16
1.3.1 Otvorenie simulinkovej schémy . . . . .	17
1.3.2 Nastavenie parametrov blokov v schéme . . . . .	17
1.3.3 Spustenie a zastavenie simulácie . . . . .	17
1.3.4 Úlohy zo Simulinku . . . . .	18
<b>2 Riešenie diferenciálnych rovníc pomocou Laplaceovej transformácie . . . . .</b>	<b>21</b>
2.1 Prehľad pojmov . . . . .	21
2.2 Algoritmus riešenia diferenciálnych rovníc . . . . .	22
2.3 Spätná Laplaceova transformácia . . . . .	22
2.3.1 Spätná Laplaceova transformácia pre rôzne reálne korene polynómu $A(s)$ . . . . .	22
2.3.2 Spätná Laplaceova transformácia pre násobné reálne korene polynómu $A(s)$ . . . . .	25
2.3.3 Spätná Laplaceova transformácia pre komplexne združené korene polynómu $A(s)$ s nulovými reálnymi časťami . . . . .	27
2.3.4 Spätná Laplaceova transformácia pre komplexne združené korene polynómu $A(s)$ s nenulovými reálnymi časťami . . . . .	28
2.4 Neriešené príklady . . . . .	31
2.5 MATLAB: príkazy k problematike . . . . .	32
<b>3 Prenos a algebra prenosových funkcií . . . . .</b>	<b>33</b>
3.1 Prehľad pojmov . . . . .	33
3.2 Vytvorenie prenosu $G(s)$ z diferenciálnej rovnice . . . . .	33
3.3 Vytvorenie diferenciálnej rovnice z prenosu $G(s)$ . . . . .	34
3.4 Algebra prenosových funkcií . . . . .	35
3.4.1 Sériové zapojenie . . . . .	35
3.4.2 Paralelné zapojenie . . . . .	37
3.4.3 Spätnoväzbové zapojenie so zápornou spätnou väzbou . . . . .	39
3.4.4 Spätnoväzbové zapojenie s kladnou spätnou väzbou . . . . .	39
3.5 Úlohy . . . . .	43

3.6	Neriešené príklady	46
3.7	MATLAB: príkazy k problematike	46
3.8	Overenie výsledkov úloh pomocou MILABu	47
<b>4</b>	<b>Prechodové charakteristiky systémov</b>	<b>49</b>
4.1	Prehľad pojmov	49
4.2	Riešené príklady	50
4.3	Úlohy	54
4.4	Neriešené príklady	57
4.5	MATLAB: príkazy k problematike	58
4.6	Overenie výsledkov úloh pomocou MILABu	58
<b>5</b>	<b>Póly a nuly prenosových funkcií systémov</b>	<b>61</b>
5.1	Prehľad pojmov	61
5.2	Súvislosti medzi prechodovými charakteristikami a umiestnením pólov a núl	62
5.3	Riešené príklady	63
5.4	Úlohy	69
5.5	Neriešené príklady	70
5.6	MATLAB: príkazy k problematike	73
5.7	MILAB: príkazy k problematike	73
<b>6</b>	<b>Modelovanie procesov</b>	<b>75</b>
6.1	Prehľad pojmov	75
6.1.1	Linearizácia	76
6.2	Riešené príklady	78
6.3	Úlohy	87
6.3.1	Dva zásobníky kvapaliny	87
6.3.2	Výmenníky tepla zapojené sériovo	90
6.4	Neriešené príklady	92
6.5	Simulácie pomocou MILABu	94
6.5.1	Dva zásobníky kvapaliny	95
6.5.2	Výmenníky tepla zapojené sériovo	96
<b>7</b>	<b>Spätnoväzbové riadenie procesov, stabilita uzavretých regulačných obvodov</b>	<b>97</b>
7.1	Prehľad pojmov	97
7.1.1	Prenosy PID regulátora	97
7.1.2	Regulačná odchýlka a trvalá regulačná odchýlka	98
7.1.3	Prenosy uzavretého regulačného obvodu	98
7.1.4	Stabilita uzavretého regulačného obvodu	99
7.2	Riešené príklady	99
7.3	Neriešené príklady	105
7.4	Overenie výsledkov príkladov pomocou MILABu	109
<b>8</b>	<b>Vlastnosti regulátorov pri spätnoväzbovom riadení procesov</b>	<b>111</b>
8.1	Prehľad pojmov	111
8.1.1	Prenosy uzavretého regulačného obvodu	111
8.1.2	Úloha sledovania a úloha regulácie	111
8.1.3	Ukazovatele kvality riadenia	112
8.2	Riešené príklady	113

8.2.1	Úloha sledovania pre systém 1. rádu a P regulátor	113
8.2.2	Úloha regulácie pre systém 1. rádu a P regulátor	114
8.2.3	Úloha sledovania pre systém 1. rádu a PI regulátor	115
8.2.4	Úloha regulácie pre systém 1. rádu a PI regulátor	116
8.3	Úlohy	116
8.3.1	Úloha sledovania pre proces 3. rádu a P regulátor	117
8.3.2	Úloha sledovania pre proces 3. rádu a PI regulátor	117
8.3.3	Úloha sledovania pre proces 3. rádu a PD regulátor	118
8.3.4	Úloha sledovania pre proces 3. rádu a PID regulátor	118
8.3.5	Úloha regulácie pre proces 3. rádu s P, PD, PI a PID regulátorom	119
8.4	Simulácie v MATLABe	119
8.5	Simulácie v MILABe	120
<b>9</b>	<b>Riadenie zásobníkov kvapaliny</b>	<b>123</b>
9.1	Prehľad pojmov	123
9.2	Naslinova metóda syntézy regulátora	123
9.3	Syntéza regulátora metódou umiestnenia pólov	125
9.4	Zieglerova–Nicholsova metóda syntézy regulátora s výpočtom kritického zosilnenia	130
9.5	Úlohy	131
9.6	Simulácie v MATLABe	132
9.7	Simulácie v MILABe	133
<b>10</b>	<b>Riadenie výmenníkov tepla</b>	<b>135</b>
10.1	Prehľad pojmov	135
10.1.1	Spracovanie prechodovej charakteristiky	135
10.2	Strejcova metóda identifikácie systémov	136
10.3	Zieglerova–Nicholsova metóda syntézy regulátora s využitím PCH	137
10.4	Strejcova metóda syntézy regulátora	139
10.5	Úlohy	139
10.6	Simulácie v MATLABe	140
10.7	Simulácie v MILABe	141
	<b>Literatúra</b>	<b>145</b>
<b>A</b>	<b>LCZA na Internete</b>	<b>147</b>
A.1	Kde sa to nachádza?	147
A.2	Ako to presne pracuje?	148
A.2.1	Vstupný HTML formulár	148
A.2.2	Formátovanie vstupných údajov	149
A.3	Základné operácie	150
A.3.1	Matematické operácie s polynómami (súčet, rozdiel, súčin, podiel)	151
A.3.2	Riešenie systému lineárnych rovníc	151
A.3.3	Výpočet koreňov polynómov	151
A.3.4	Prechodové a impulzné charakteristiky	152
A.3.5	Graf pólov a núl	152
A.3.6	Transformácia ZP2TF	152
A.3.7	Transformácia TF2ZP	152
A.3.8	Algebra prenosov	152
A.3.9	Minimálna realizácia prenosu	153



## Predhovor

Publikácia „Laboratórne cvičenia zo základov automatizácie“ je určená hlavne poslucháčom III. ročníka študujúcim na Fakulte chemickej a potravinárskej technológie STU v Bratislave. Je zameraná na úvod do modelovania a riadenia procesov chemických a potravinárskych technológií, návrh jednoduchých regulačných obvodov ako aj na možnosti simulácie dynamiky procesov a ich riadenia.

Obsah publikácie je rozdelený do desiatich kapitol, z ktorých každá tvorí základ minimálne jedného laboratórneho cvičenia. Prvá kapitola sa venuje úvodu do výpočtového systému MATLAB, ktorý sa na laboratórnych cvičeniach intenzívne využíva. Ďalšie kapitoly sú venované trom väčším tematickým celkom.

V prvej časti je rozpracovaný matematický aparát potrebný k základom automatizácie. Vysvetľované sú Laplaceova transformácia, riešenie diferenciálnych rovníc, prenosové funkcie a základy ich algebry, prechodové charakteristiky a vzťah dynamiky procesov s pólmí a nulami prenosovej funkcie.

Druhá časť sa zaoberá modelovaním vybraných procesov chemických a potravinárskych technológií a simuláciou ich dynamiky na počítači v prostredí MATLABu a jeho podporného systému na modelovanie a simuláciu na báze blokových diagramov – Simulinku.

Tretia časť je venovaná problematike riadenia procesov. Vychádza z uzavretého regulačného obvodu a princípů spätnej väzby. Analyzuje stabilitu obvodov a vysvetľuje niektoré postupy identifikácie procesov a návrhu jednoduchých regulátorov.

Kvôli bezproblémovému zvládnutiu preberanej témy sú príklady v skriptách rozdelené na riešené príklady, ktoré názorne objasňujú teóriu, neriešené príklady na samostatné precvičenie učiva a úlohy, ktoré sú náplňou práce na cvičeniach.

Dodatok sa zaoberá sa možnosťou riešenia úloh laboratórnych cvičení pomocou Internetu prostredníctvom MILABu (MATLABu cez Internet). Celé skriptá a všetky úlohy sú on-line prístupné na internetovej stránke Katedry informatizácie a riadenia procesov FCHPT STU (<http://www.kirp.cht.f.stuba.sk>). Predmet „Laboratórne cvičenia zo základov automatizácie“ je jedným z prvých na FCHPT, ktorý poskytuje túto možnosť, a veríme, že sa stane zdrojom inšpirácie pre pedagógov a obohatí možnosti vzdelávania študentov. Na konci skoro každej kapitoly možno nájsť tak príkazy a funkcie MATLABu, týkajúce sa danej problematiky, ako aj opis postupu riešenia úlohy cez Internet. Prakticky je teda možné riešiť úlohy laboratórnych cvičení bez fyzickej prítomnosti v počítačových učebniach, či bez nutnosti inštalácie MATLABu na počítač. Týmto spôsobom je možné overiť si pred cvičením správnosť doma vypracovanej prípravy, či nechať si vypočítat niektoré čiastkové kroky riešenia.

Autori ďakujú prof. Ing. I. Tauferovi, DrSc. a doc. Ing. B. Rohaľovi-Ilkivovi, CSc. za cenné pripomienky, ktoré pomohli odstrániť mnohé nedostatky rukopisu. Vďaka tiež patrí kolektívu pracovníkov Katedry informatizácie a riadenia procesov a zvlášť Ing. M. Ondrovičovej a Ing. M. Kvasnicovi, ktorých návrhy a pripomienky pomohli pri vytvorení konečnej podoby rukopisu.





# Kapitola 1

## Úvod do MATLABu a Simulinku

Cieľom cvičenia je vytvorenie pracovných adresárov a oboznámenie sa s výpočtovým systémom MATLAB – Simulink tak, aby ho bolo možné používať v laboratórnych cvičeniach zo základov automatizácie.

### 1.1 Pracovný adresár

#### 1.1.1 Vytvorenie pracovného adresára

Vytvorte vlastný pracovný adresár `ddhh`, kde `ddhh` = deň a hodina cvičenia, keď cesta do neho je `d:\user\za\ddhh`.

##### Postup

Na vytvorenie pracovného adresára použijeme ikonu TENTO POČÍTAČ na pracovnej ploche displeja. Otvoríme ju E2K (E2K = dvojitým kliknutím ľavým tlačidlom myši) na ikone. (Kto je zvyknutý používať PRIESKUMNÍK, môže ho použiť rovnakým spôsobom.) V otvorenom okne nájdeme diskovú jednotku D, opäť ju otvoríme E2K, nájdeme adresár USER, E2K, nájdeme adresár ZA, E2K. Okno, ktoré máme teraz otvorené je buď prázdne alebo sú tam už vytvorené adresáre niektorých skupín. Vytvoríme si ten svoj. V menu okna EK (EK = jedným kliknutím ľavým tlačidlom myši) otvoríme ponuku SÚBOR. V nej sa kurzorom myši nastavíme na možnosť NOVÝ OBJEKT a EK vyberieme PRIEČINOK (ZLOŽKA). V tejto chvíli sa v okne objaví žltá ikona s názvom NOVÝ PRIEČINOK (NOVÁ ZLOŽKA), ktorá je orámovaná a vysvietená namodro. Bez akéhokoľvek ďalšieho stlačenia tlačidla myši alebo klávesov jednoducho začneme písať názov nášho pracovného adresára vo forme `ddhh` (krúžok, ktorý začína cvičenie v pondelok o 7h napíše `po07`, krúžok, ktorý začína cvičenie v utorok o 13h, napíše `ut13` a pod.). Po vložení názvu stlačíme kláves ENTER.

##### Upozornenia

- Doporučujeme do názvu adresára nevkladať žiadne iné znaky ani medzery (nie všetky znaky akceptovateľné pre názvy adresárov v rámci operačného systému sú použiteľné v MATLABe).

- Adresár, ktorý bol takto vytvorený, sa bude používať celý semester, preto si treba cestu do pracovného adresára zapamätať.

### 1.1.2 Otvorenie MATLABu a nastavenie sa do pracovného adresára

Pre prácu s MATLABom a Simulinkom treba vždy na začiatku cvičenia MATLAB otvoriť. To znamená, že na pracovnej ploche displeja nájdeme ikonu MATLAB a otvoríme ju E2K. Pri otváraní MATLABu musíme byť trpezliví, lebo pri viacnásobnom E2K sa nám otvorí MATLAB viackrát. Preto vždy po otvorení pracovného okna MATLABu skontrolujeme hlavný panel (lišta v dolnej časti displeja), či na ňom máme len jedno tlačidlo MATLABu. Ak ich tam vidíme dve alebo viac, zbytočne otvorené programy zatvoríme. Po správnom otvorení MATLABu vidíme na hlavnom paneli len jedno tlačidlo MATLABu a v pracovnom okne MATLABu zas cestu do aktuálneho pracovného adresára v podobe buď

```
ans =  
D:\USER  
>>
```

alebo

```
ans =  
D:\USER\ZA  
>>
```

To znamená, že po otvorení MATLABu je ešte potrebné nastaviť sa do vlastného pracovného adresára `ddhh`. Urobí sa to napísaním príkazu

```
>>cd za\ddhh
```

ak sa MATLAB nastavil do adresára `USER`, alebo napísaním príkazu

```
>> cd ddhh
```

ak sa MATLAB nastavil do adresára `ZA`. Vykonanie príkazu sa zabezpečí stlačením ENTER. V prípade, že je všetko v poriadku, odozva MATLABu má len tvar

```
>>
```

s blikajúcim kurzorom za šípkami. Ak sme urobili nejakú chybu, MATLAB ju signalizuje výpisom chybového hlásenia. Overenie správnosti nastavenia do vlastného pracovného adresára sa urobí príkazom

```
>> pwd
```

na ktorý MATLAB odpovie

```
>> ans =  
D:\USER\ZA\ddhh  
>>
```

Teraz už možno začať pracovať s MATLABom.

## 1.2. ZÁKLADY MATLABU

---

### Upozornenie

Postup nastavenia do vlastného pracovného adresára sa opakuje po každom novom spustení MATLABu, preto si ho treba zapamätať.

## 1.2 Základy MATLABu

Na laboratórnych cvičeniach zo základov automatizácie v MATLABe potrebujeme vedieť:

1. priradiť číselnú hodnotu premennej, napr. priradenie číselných hodnôt do premenných  $a_1$ ,  $b_1$ :

```
>> a1=2;
>> b1=3-2i
b1 =
    3.0000 - 2.0000i
```

2. načítať maticu alebo vektor, napr. načítanie matice  $m_1$  s 2 riadkami a 3 stĺpcami:

```
>> m1=[1 2 3;4 5 6]
m1 =
     1     2     3
     4     5     6
```

3. načítať koeficienty polynómu, napr. načítanie koeficientov polynómu  $p_1 = 7s^4 + 6s^3 + s - 5$  vo vektorovom tvare:

```
>> p1=[7 6 0 1 -5]
p1 =
     7     6     0     1    -5
```

alebo v polynomickej tvare<sup>1</sup>

```
>> p1=7*s^4+6*s^3+s-5
p1 =
p1 = -5 + s + 6*s^3 + 7*s^4
```

4. urobiť základné aritmetické operácie súčet (+), rozdiel (-), súčin (\*), podiel (/), mocninu (^) s číslami, maticami a vektormi, urobiť transpozíciu matice alebo vektora (') ('= apostrof), napr. transponovaná matica k matici  $m_1$ :

```
>> m1'
ans =
     1     4
     2     5
     3     6
```

5. zapísať aritmetické výrazy, pričom treba mať na pamäti, že pri vyhodnocovaní výrazu MATLAB postupuje zľava doprava a priorita operácií klesá v poradí ( ), ^, \*, / (sú rovnocenné), + - (sú rovnocenné)

---

<sup>1</sup>s nainštalovaným Polynomickým toolboxom

6. vypísať číselnú hodnotu premennej na obrazovku, a to jednoduchým napísaním jej názvu do príkazového riadku a stlačením ENTER.

V MATLABe potrebujeme poznať základné funkcie pre výpočet:

1. odmocniny čísla (`sqrt(a)`)
2. exponenciálnej funkcie (`exp(a)`)
3. absolútnej hodnoty (`abs(a)`)
4. goniometrických funkcií v radiánoch (napr. `sin(a)`, `cos(a)`, `tan(a)`)
5. inverzie matice (`inv(m)`), determinantu matice (`det(m)`)
6. koreňov polynómu (`roots(p)`)
7. polynómu z jeho daných koreňov (`poly(k)`)
8. súčinu polynómov (`conv(p1, p2)`) – ak sa používajú polynómy vo vektorovom tvare, napr. `[3 1 2]`, alebo `p1*p2` – ak sa používajú polynómy v polynomickom tvare, napr. `3*s^2+s+2`)
9. podielu polynómov (`deconv(p1, p2)`) – ak sa používa tvar `[3 1 2]`, alebo `p1/p2` – ak sa používa tvar `3*s^2+s+2` a polynómy sú deliteľné bez zvyšku).

Ďalšie užitočné príkazy pre prácu s MATLABom:

1. Na získanie informácie o definovaných premenných slúži príkaz `who`, napr.:

```
>> who
Your variables are:

a1      ans      m1      p1
a2      b1      m2
```

alebo príkaz `whos`, napr.:

```
>> whos

Name      Size      Bytes      Class
a1         1x1         8      double array
a2         1x1         8      double array
ans        1x3         6      char array
b1         1x1        16      double array (complex)
m1         3x3        72      double array
m2         2x5        80      double array
p1         1x6        48      double array
```

```
Grand total is 31 elements using 238 bytes
```

2. Na vypísanie matlabovských súborov (s rozšírením `.m`) a simulinkových schém (s rozšírením `.mdl`) nachádzajúcich sa v pracovnom adresári slúži príkaz `what`, napr.:

## 1.2. ZÁKLADY MATLABU

---

```
>> what

M-files in the current directory

reak

MDL-files in the current directory

reaktor      schema
```

3. Na získanie pomoci v MATLABe sa používa príkaz **help**.

### Upozornenia

- V predošlom texte ale i v ďalších kapitolách kvôli názornosti uvádzame nielen samotný príkaz, ktorý píše užívateľ, ale i odozvu MATLABu. Všetko, čo nasleduje medzi značkami `>>` a koncom riadku, je príkaz, ktorý píše užívateľ. MATLAB o vykonaní príkazu alebo neinformuje (v prípade, že posledný zadaný znak príkazu bola bodkočiarka), alebo vypíše informáciu o vykonaní príkazu (ak príkaz nekončil bodkočiarkou) alebo vypíše chybové hlásenie (ak sa v príkaze vyskytla chyba). Po odozve MATLABu sa na novom riadku vždy objavia znaky `>>`, za ktoré sa píše nový príkaz.
- MATLAB používa desatinnú bodku.
- MATLAB pracuje aj s komplexnými číslami.
- MATLAB rozlišuje malé a veľké písmená v názvoch premenných. To znamená, že premenná `a` je iná ako premenná `A`.
- V prípade, že v MATLABe vykonáte nejakú aritmetickú operáciu a nepriradíte ju do konkrétnej premennej, MATLAB jej výsledok automaticky uloží do premennej `ans`.
- Pri sčítovaní polynómov načítaných pomocou koeficientov v hranatých zátvorkách treba polynóm nižšieho stupňa doplniť nulami tak, aby počet koeficientov sčítovaných polynómov bol rovnaký.

### 1.2.1 Úlohy z MATLABu

1. Priradte premenným  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ , postupne číselné hodnoty 5; 0,5;  $-20,05$ .
2. Priradte premenným  $b_1$ ,  $b_2$  číselné hodnoty  $2 + i$ ,  $-2 - 5i$ .
3. Uložte do premenných  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  nasledovné matice a vektor a presvedčte sa výpisom ich hodnôt na obrazovku, že ste ich načítali správne.

$$\begin{pmatrix} -2 & 0,5 & 16 \\ -4 & 25,1 & 2 \\ 8 & 19,6 & -5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0,54 & -123 & 0 & 12 \\ -23 & 123,7 & 1 & -9,01 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

4. Uložte do premenných  $p_1, p_2$  koeficienty nasledovných polynómov.

$$\frac{s^5 + 4s^4 + 12s^3 + 6s^2 + 49s + 4}{4s^4 + 2s^2 + s - 8}$$

5. Sčítajte premenné  $a_1, a_2$ . Výsledok priradte do premennej  $c_1$ .  
 6. Odčítajte od premennej  $a_3$  premennú  $a_2$ . Výsledok priradte do premennej  $c_2$ .  
 7. Vynásobte premenné  $b_1, b_2$ . Výsledok priradte do premennej  $c_3$ .  
 8. Vydeľte premennú  $a_1$  premennou  $a_2$ . Výsledok priradte do premennej  $c_4$ .  
 9. Vypočítajte číselnú hodnotu výrazu

$$\frac{a_1^3 + a_2(a_3 - a_1)}{a_1 + a_2}.$$

10. Vypočítajte číselnú hodnotu výrazu  $5(1 - e^{-0,2})$ .  
 11. Do premennej  $n_1$  priradte transponovaný vektor  $m_3$ .  
 12. Vynásobte vektor  $m_3$  sprava vektorom  $n_1$ . Výsledok priradte do premennej  $n_2$ .  
 13. Vynásobte vektor  $n_1$  sprava vektorom  $m_3$ . Výsledok priradte do premennej  $n_3$ .  
 14. Sčítajte matice  $m_1$  a  $n_2$ . Výsledok priradte do premennej  $n_4$ .  
 15. Vypočítajte inverznú maticu k matici  $n_4$ . Výsledok priradte do premennej  $n_5$ .  
 16. Vypočítajte determinant matice  $n_2$ . Výsledok priradte do premennej  $d_1$ .  
 17. Vypočítajte korene polynómov  $p_1, p_2$ . Výsledky postupne priradte do premenných  $k_1, k_2$ .  
 18. Z koreňov uložených do premennej  $k_1$  určite polynóm, ktorému tieto korene patria. Výsledok vložte do premennej  $p_3$ .  
 19. Porovnajzte polynómy  $p_1, p_3$  ich výpisom na obrazovku.  
 20. Určite polynóm, ktorého korene sú  $-2, -4 + 2i, -4 - 2i$ . Priradte ho do premennej  $p_4$ .  
 21. Sčítajte polynómy  $p_1, p_2$ .  
 22. Vypočítajte súčin polynómov  $p_1, p_2, p_4$ . (Ak použijete funkciu `conv()`, potom to treba robiť na dvakrát, pretože jej argumentom môžu byť len 2 polynómy.)

## 1.3 Základy Simulinku

Simulink sa bude v rámci predmetu laboratórne cvičenia zo základov automatizácie používať na simuláciu dynamických vlastností systémov len užívateľsky. To znamená, že blokové schémy budú pripravené a požiadavky na ich použitie sú nasledovné:

1. vedieť otvoriť konkrétnu simulinkovú schému,
2. vedieť nastaviť parametre blokov,
3. vedieť spustiť a zastaviť simuláciu,
4. vedieť prezrieť a spracovať grafické a numerické výsledky.

## 1.3. ZÁKLADY SIMULINKU

---

### 1.3.1 Otvorenie simulinkovej schémy

Simulinková schéma sa otvorí napísaním jej mena do príkazového riadku okna MATLABu a následným stlačením ENTER. Meno schémy sa píše bez rozšírenia `.mdl`, napr.:

```
>> schema
```

### 1.3.2 Nastavenie parametrov blokov v schéme

Pre nastavenie parametrov príslušného bloku je potrebné tento blok najskôr otvoriť Ľ2K. V otvorenom bloku už vidno riadky, do ktorých sa vpíše jedna z nasledovných možností

1. konkrétne čísla, matice, vektory alebo polynómy, pričom treba dodržať formát zápisu,
2. mená príslušných premenných. V tomto prípade treba pred spustením simulácie použité premenné definovať v okne MATLABu.

Pre dobrú orientáciu je nad každým riadkom (a prípadne i v ňom) v otvorenom bloku napísané, aké premenné treba doňho vložiť. Takisto si treba všímať mená jednotlivých blokov v schéme, uľahčí to orientáciu v nej. V prípade, že je simulácia príliš pomalá, rýchla, dlhá alebo krátka, máme možnosť urobiť zmeny v rýchlosti simulácie zmenou veľkosti integračného kroku numerickej integračnej metódy (**Fixed step size** pri použití metódy s konštantným integračným krokom alebo **Max step size** pri použití metódy s premenným integračným krokom) a zmeny v trvaní simulácie zmenou konečného času simulácie (**Stop time**). Robí sa to v ponuke **Simulation** v menu okna simulačnej schémy a v nej v ponuke **Parameters**.

### 1.3.3 Spustenie a zastavenie simulácie

Simulácia sa spustí vybratím ponuky **Simulation – Start** v menu okna simulačnej schémy, stlačením čiernej šípky smerujúcej doprava na paneli nástrojov alebo stlačením kombinácie klávesov CTRL+T. Simulácia sa korektne ukončí vybratím ponuky **Simulation – Stop**, alebo stlačením kombinácie klávesov CTRL+T, alebo stlačením príslušného tlačidla na paneli nástrojov.

#### Upozornenia

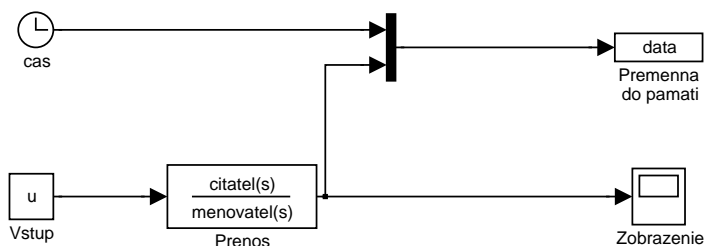
- V schémach je použité grafické zobrazenie s automatickým nastavením vertikálnej osi. Po skončení simulácie sa automaticky upraví rozsahy osí stlačením tlačidla „ďalekohľad“ na paneli nástrojov grafu.
- Keby sa po spustení simulácie neobjavilo grafické znázornenie simulácie na obrazovke, otvoríme si ho Ľ2K na ikone **Zobrazenie** v schéme.
- Nenastavujú sa parametre blokov **Cas**, **Mux**, **Demux**, **Sum**.
- Pri simuláciách na laboratórnych cvičeniach zo základov automatizácie je vhodné kvôli spracovaniu výsledkov použiť pri nastavovaní parametrov simulácie metódu s konštantným integračným krokom.



### 1.3.4 Úlohy zo Simulinku

#### Príklad 1.3.1:

Sledujte pomocou simulinkového programu `schema` (obr. 1.1) dynamické vlastnosti systému opísaného prenosom.



Obr. 1.1 Schéma na sledovanie dynamických vlastností systému opísaného prenosom - `schema.mdl`

#### Poznámka

Pojem prenos sa preberie na prednáškach v 2. týždni. Pre objasnenie uvádzame jeho definíciu: prenos je definovaný ako podiel Laplaceovho obrazu výstupnej veličiny a Laplaceovho obrazu vstupnej veličiny pri nulových začiatočných podmienkach. Po odvodení má tvar zlomku s polynómom v čitateli i menovateli, pričom u fyzikálne realizovateľných systémov stupeň polynómu v čitateli je menší alebo rovný stupňu polynómu v menovateli.

#### Postup

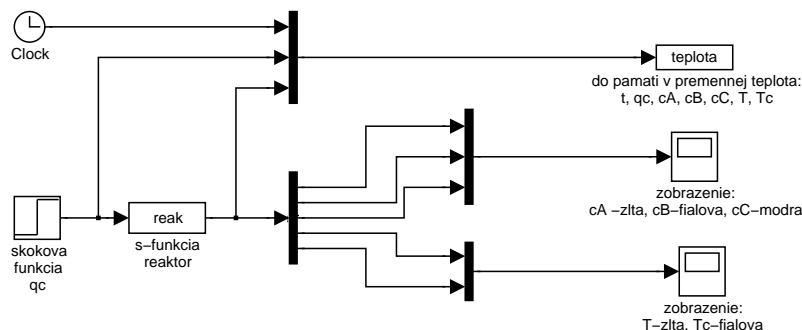
1. Otvorte program `schema`.
2. Definujte parametre blokov `Vstup` a `Prenos`. V bloku `Vstup` to znamená priradiť číselnú hodnotu premennej `u` (napr. 2), v bloku `Prenos` treba definovať premennú `citatel` (napr.  $2s + 1$ ) a premennú `menovatel` (napr.  $4s^3 + 3s^2 + 6s + 2$ ) vo vektorovom tvare. Ostatné bloky sú definované.
3. Spustite simuláciu.
4. Pozrite si grafické výsledky simulácie (blok `Zobrazenie`).
5. Pozrite si numerické výsledky simulácie vypísaním obsahu premennej `data` na obrazovku.
6. Vyskúšajte si simuláciu s iným vstupom a prípadne i iným prenosom.
7. Zmeňte čas simulácie a prípadne i krok integračnej metódy a simuláciu znova spustite.

#### Príklad 1.3.2:

Sledujte pomocou simulinkovej schémy `reaktor` (obr. 1.2) dynamické vlastnosti chemického reaktora najskôr v ustálenom stave a potom po skokovej zmene vstupnej veličiny, ktorou je prietok chladiaceho média `qc` vstupujúceho do plášťa reaktora. Na

### 1.3. ZÁKLADY SIMULINKU

výstupe z reaktora sa sledujú koncentrácie reagujúcich zložiek A (reaktant), B (hlavný produkt), C (vedľajší produkt), teplota reakčnej zmesi T a teplota v plášti reaktora  $T_c$ .



Obr. 1.2 Schéma na sledovanie dynamických vlastností reaktora - `reaktor.mdl`

#### Postup

1. Otvorte program `reaktor`.
2. Spustíte simuláciu s hodnotou `Initial value` aj `Final value` v bloku `skokova funkcia` rovnou 0,004.
3. Pozrite si grafické výsledky simulácie.
4. Pozrite si numerické výsledky simulácie vypísaním obsahu premennej `teplota` na obrazovku.
5. Realizujte v čase 10 min (položka `Step time` v bloku `skokova funkcia` sa nastaví na hodnotu 10) skokovú zmenu prietoku chladiaceho média z hodnoty 0,004 na hodnotu  $0,008 \text{ m}^3 \text{ min}^{-1}$  (položka `Final value` v bloku `skokova funkcia` sa nastaví na hodnotu 0,008).
6. Pozrite si opäť grafické a numerické výsledky simulácie.
7. Ďalšími simuláciami sledujte vplyv prietoku chladiaceho média na sledované veličiny v chemickom reaktore.



## Kapitola 2

# Riešenie diferenciálnych rovníc pomocou Laplaceovej transformácie

Cieľom cvičenia je zvládnuť riešenie diferenciálnych rovníc pomocou Laplaceovej transformácie, keď charakteristická rovnica má rôzne reálne korene, viacnásobné reálne korene, komplexne združené korene a korene, ktoré sú kombináciou predošlých možností.

### 2.1 Prehľad pojmov

**Definícia Laplaceovej transformácie**

$$\mathcal{L}\{f(t)\} \triangleq F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (2.1)$$

kde  $\mathcal{L}\{\}$  je Laplaceov operátor,  $f(t)$  je nejaká funkcia času, ktorá sa nazýva originál,  $F(s)$  sa nazýva obraz a  $s$  je argument Laplaceovej transformácie (je to komplexná premenná).

**Skoková funkcia** – je definovaná nasledovne

$$u(t) = \begin{cases} k & \text{pre } t \geq 0 \\ 0 & \text{pre } t < 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

Kvôli zjednodušeniu budeme používať jej zápis v tvare  $u(t) = k$ .

**Upozornenia**

- Argument Laplaceovej transformácie na rozdiel od literatúry [Mészáros a kol. \(1997\)](#) a [Mikleš a kol. \(1994\)](#) budeme označovať  $s$ . Takéto označenie sa používa vo svetovej literatúre, používa ho MATLAB aj Simulink a je použité aj v literatúre [Mikleš a Fikar \(1999\)](#).
- Pri Laplaceovej transformácii a spätnej Laplaceovej transformácii názvy funkcií zachováme. Originál od obrazu rozlíšime tak, že originál budeme písať malým písaným písmenom (napr.  $f$ ,  $y$ ,  $u$ ,  $z$ ) a obraz veľkým tlačným písmenom s vyznačením, že ide o funkciu argumentu  $s$  (napr.  $F(s)$ ,  $Y(s)$ ,  $U(s)$ ,  $Z(s)$ ).

## 2.2 Algoritmus riešenia diferenciálnych rovníc

Diferenciálne rovnice predstavujú matematický opis dynamických systémov. Riešením diferenciálnych rovníc sa získava časový priebeh výstupných veličín dynamických systémov pri definovaných vstupných veličinách a začiatočných podmienkach. Jednou z možností riešenia diferenciálnych rovníc je použitie Laplaceovej transformácie. Riešenie diferenciálnych rovníc pomocou Laplaceovej transformácie možno rozdeliť do 3 krokov:

1. Urobí sa Laplaceova transformácia diferenciálnej rovnice. Znamená to, že sa k originálom, ktoré v rovnici vystupujú, nájdú obrazy. Rovnica, ktorú po transformácii dostaneme, je algebraická rovnica a neznámou v nej je obraz riešenia diferenciálnej rovnice.
2. Vyrieši sa algebraická rovnica. Riešením algebraickej rovnice sa nájde obraz riešenia diferenciálnej rovnice, ktorý má zvyčajne tvar racionálnej funkcie (zlomku).
3. Urobí sa spätná Laplaceova transformácia obrazu riešenia po jeho rozklade na parciálne zlomky. Spätnou Laplaceovou transformáciou sa získa originál k obrazu riešenia diferenciálnej rovnice, a teda riešenie diferenciálnej rovnice v časovej oblasti.

Pri riešení diferenciálnych rovníc pomocou Laplaceovej transformácie sa budú využívať vlastnosti Laplaceovej transformácie a slovník Laplaceových obrazov z uvedenej literatúry.

## 2.3 Spätná Laplaceova transformácia

Predpokladáme, že chceme urobiť spätnú Laplaceovu transformáciu obrazu v tvare racionálnej funkcie

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (2.3)$$

kde  $B(s)$  je polynóm stupňa  $m$  a  $A(s)$  je polynóm stupňa  $n$ . Pre fyzikálne realizovateľné systémy platí podmienka  $m \leq n$ .

### 2.3.1 Spätná Laplaceova transformácia pre rôzne reálne korene polynómu $A(s)$

Predpokladáme, že polynóm  $A(s)$  má rôzne reálne korene  $s_1, s_2, \dots, s_n$ . Potom platí

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{B(s)}{a_n(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_n)} = \frac{B(s)/a_n}{(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_n)} \\ &= \frac{K_1}{s-s_1} + \frac{K_2}{s-s_2} + \dots + \frac{K_n}{s-s_n} \end{aligned}$$

Konštanty  $K_1, K_2, \dots, K_n$  nájdeme metódou porovnania koeficientov.

Originál  $f(t)$  má v tomto prípade tvar

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K_1}{s-s_1} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K_2}{s-s_2} \right\} + \dots + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K_n}{s-s_n} \right\} \quad (2.4)$$

alebo

$$f(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} + \dots + K_n e^{s_n t} \quad (2.5)$$

## 2.3. SPÄTNÁ LAPLACEOVA TRANSFORMÁCIA

---

### Upozornenie

Ak korene polynómu  $A(s)$  sú rôzne reálne, konštanty  $K_1, K_2, \dots, K_n$  možno vypočítať pre  $j = 1, \dots, n$  aj pomocou nasledovného vzťahu

$$K_j = \lim_{s \rightarrow s_j} \frac{\frac{B(s)}{a_n}}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (s - s_i)} \quad (2.6)$$

**Príklad 2.3.1:** *Diferenciálna rovnica s rôznymi reálnymi koreňmi charakteristickej rovnice*

Riešte diferenciálnu rovnicu

$$3y'''(t) + 21y''(t) + 42y'(t) + 24y(t) = 3u(t) \quad (2.7)$$

s nulovými začiatočnými podmienkami  $y''(0) = y'(0) = y(0) = 0$ , kde  $u(t) = 2$ .

**Riešenie:**

1. Urobí sa Laplaceova transformácia diferenciálnej rovnice pomocou slovníka Laplaceových obrazov a definícií vlastností Laplaceovej transformácie.

Ak má diferenciálna rovnica pred najvyššou deriváciou iný koeficient ako 1, je vhodné týmto koeficientom celú rovnicu vydeliť ešte pred Laplaceovou transformáciou. Vyvarujeme sa tak niektorých chýb pri ďalšom riešení. Pre rovnicu (2.7) dostaneme

$$y'''(t) + 7y''(t) + 14y'(t) + 8y(t) = u(t)$$

Na transformáciu členov na ľavej strane diferenciálnej rovnice použijeme definíciu obrazu funkcie, definície obrazov derivácií funkcie a definíciu násobenia funkcie konštantou. Na transformáciu člena na pravej strane diferenciálnej rovnice použijeme definíciu skokovej funkcie. Dostaneme

$$s^3 Y(s) + 7s^2 Y(s) + 14s Y(s) + 8Y(s) = \frac{2}{s}$$

2. Vyrieši sa algebraická rovnica.

Z predošlej rovnice vyjadríme obraz riešenia  $Y(s)$ . Postup je nasledovný

$$Y(s)(s^3 + 7s^2 + 14s + 8) = \frac{2}{s}$$

$$Y(s) = \frac{2}{s(s^3 + 7s^2 + 14s + 8)}$$

3. Urobí sa spätná Laplaceova transformácia.

Menovateľ obrazu  $Y(s)$  je polynóm 4. stupňa a z obrazu  $Y(s)$  je zrejmé, že jeho jeden koreň je  $s_1 = 0$ . Treba ešte nájsť korene rovnice  $s^3 + 7s^2 + 14s + 8 = 0$ , ktorá je charakteristickou rovnicou diferenciálnej rovnice. Jej korene nájdeme napr. pomocou MATLABu:

```
>> roots([1 7 14 8])
ans =
-4.0000
-2.0000
-1.0000
```

## KAPITOLA 2. RIEŠENIE DIFERENCIÁLNYCH ROVNÍČ POMOCOU LAPLACEOVEJ TRANSFORMÁCIE

Charakteristická rovnica má teda 3 rôzne reálne korene  $s_2 = -4$ ,  $s_3 = -2$ ,  $s_4 = -1$  a rozklad na parciálne zlomky sa urobí nasledovne:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{2}{s(s^3 + 7s^2 + 14s + 8)} = \frac{2}{s(s+4)(s+2)(s+1)} = \\ &= \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+4} + \frac{K_3}{s+2} + \frac{K_4}{s+1} \end{aligned}$$

Po vynásobení rovnice

$$\frac{2}{s(s^3 + 7s^2 + 14s + 8)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+4} + \frac{K_3}{s+2} + \frac{K_4}{s+1}$$

menovateľom  $s(s^3 + 7s^2 + 14s + 8)$  dostaneme:

$$\begin{aligned} 2 &= K_1(s+4)(s+2)(s+1) + K_2s(s+2)(s+1) + K_3s(s+4)(s+1) \\ &\quad + K_4s(s+4)(s+2) \\ 2 &= K_1(s^3 + 7s^2 + 14s + 8) + K_2(s^3 + 3s^2 + 2s) \\ &\quad + K_3(s^3 + 5s^2 + 4s) + K_4(s^3 + 6s^2 + 8s) \\ 2 &= s^3(K_1 + K_2 + K_3 + K_4) + s^2(7K_1 + 3K_2 + 5K_3 + 6K_4) \\ &\quad + s(14K_1 + 2K_2 + 4K_3 + 8K_4) + 8K_1 \end{aligned}$$

Na určenie koeficientov  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$ ,  $K_4$  použijeme metódu porovnania koeficientov. Porovnaním koeficientov polynómov na pravej a ľavej strane ostatnej rovnice dostaneme sústavu 4 algebraických rovníc o 4 neznámych v tvare

$$\begin{aligned} s^3: \quad 0 &= K_1 + K_2 + K_3 + K_4 \\ s^2: \quad 0 &= 7K_1 + 3K_2 + 5K_3 + 6K_4 \\ s^1: \quad 0 &= 14K_1 + 2K_2 + 4K_3 + 8K_4 \\ s^0: \quad 2 &= 8K_1 \end{aligned}$$

ktorú opäť môžeme riešiť pomocou MATLABu, keď ju zapíšeme v tvare

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & 5 & 6 \\ 14 & 2 & 4 & 8 \\ 8 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ K_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

V MATLABe načítame maticu koeficientov, vektor pravých strán a jednoducho dostaneme riešenie:

```
>> A=[1 1 1 1;7 3 5 6;14 2 4 8;8 0 0 0]; B=[0;0;0;2]; k=inv(A)*B
k =
    0.2500
   -0.0833
    0.5000
   -0.6667
```

Z toho vyplýva, že  $K_1 = 0,25$ ;  $K_2 = -0,0833$ ;  $K_3 = 0,5$ ;  $K_4 = -0,6667$ . (Namiesto príkazu  $k=\text{inv}(A)*B$  možno použiť i príkaz  $k=A \setminus B$ . Riešenie je možné urobiť aj ručne.)

Na výpočet koeficientov sa dá použiť aj vzorec (2.6), napr.:

$$K_1 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2}{(s+4)(s+2)(s+1)} = \frac{2}{8} = 0,25$$

## 2.3. SPÄTNÁ LAPLACEOVA TRANSFORMÁCIA

---

Pre obraz  $Y(s)$  teda dostaneme

$$Y(s) = \frac{0,25}{s} - \frac{0,0833}{s+4} + \frac{0,5}{s+2} - \frac{0,6667}{s+1}$$

a máme ho v takom tvare, že pomocou slovníka už jednoducho urobíme spätnú Laplaceovu transformáciu. Originál k obrazu  $Y(s)$  a zároveň riešenie diferenciálnej rovnice má tvar

$$y(t) = 0,25 - 0,0833e^{-4t} + 0,5e^{-2t} - 0,6667e^{-t}$$

### 2.3.2 Spätná Laplaceova transformácia pre násobné reálne korene polynómu $A(s)$

Predpokladáme, že polynóm  $A(s)$  má  $n$ -násobný reálny koreň  $s_1$ . Potom platí

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{B(s)}{a_n(s-s_1)^n} = \frac{B(s)/a_n}{(s-s_1)^n} \quad (2.8)$$

a rozklad na parciálne zlomky má tvar

$$F(s) = \frac{K_1}{s-s_1} + \frac{K_2}{(s-s_1)^2} + \cdots + \frac{K_n}{(s-s_1)^n} \quad (2.9)$$

Konštanty  $K_1, K_2, \dots, K_n$  nájdeme metódou porovnania koeficientov. Originál  $f(t)$  má v tomto prípade tvar

$$f(t) = K_1 e^{s_1 t} + \frac{K_2}{1!} t e^{s_1 t} + \cdots + \frac{K_n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{s_1 t} \quad (2.10)$$

**Príklad 2.3.2:** Diferenciálna rovnica s násobnými reálnymi koreňmi charakteristickej rovnice

Riešte diferenciálnu rovnicu

$$2y'''(t) + 24y''(t) + 96y'(t) + 128y(t) = 2u(t) \quad (2.11)$$

s nulovými začiatočnými podmienkami  $y''(0) = y'(0) = y(0) = 0$ , kde  $u(t) = 2,5$ .

**Riešenie:**

1. Urobí sa Laplaceova transformácia diferenciálnej rovnice pomocou slovníka Laplaceových obrazov a definícií vlastností Laplaceovej transformácie, keď predtým ešte rovnicu vydelíme koeficientom pred  $y'''(t)$ .

Po vydelení rovnice koeficientom 2 a po jej Laplaceovej transformácii dostaneme

$$s^3 Y(s) + 12s^2 Y(s) + 48s Y(s) + 64 Y(s) = \frac{2,5}{s}$$

2. Vyrieši sa algebraická rovnica.

Z predchošej rovnice vyjadríme obraz riešenia  $Y(s)$  v tvare

$$Y(s) = \frac{2,5}{s(s^3 + 12s^2 + 48s + 64)}$$



## KAPITOLA 2. RIEŠENIE DIFERENCIÁLNYCH ROVNÍC POMOCOU LAPLACEOVEJ TRANSFORMÁCIE

3. Urobí sa spätná Laplaceova transformácia.

Menovateľ  $Y(s)$  je polynóm 4. stupňa a z obrazu  $Y(s)$  je zrejmé, že jeho jeden koreň je  $s_1 = 0$ . Treba ešte nájsť korene rovnice  $s^3 + 12s^2 + 48s + 64 = 0$ , ktorá je charakteristickou rovnicou diferenciálnej rovnice. Jej korene nájdeme napr. pomocou MATLABu:

```
>> p=[1 12 48 64]; roots(p)
ans =
    -4.0000
   -4.0000 + 0.0000i
   -4.0000 - 0.0000i
```

Charakteristická rovnica má teda jeden trojnásobný reálny koreň  $s_2 = -4$  a rozklad na parciálne zlomky je nasledovný

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{2,5}{s(s^3 + 12s^2 + 48s + 64)} = \frac{2,5}{s(s+4)^3} \\ &= \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+4} + \frac{K_3}{(s+4)^2} + \frac{K_4}{(s+4)^3} \end{aligned}$$

Po vynásobení rovnice

$$\frac{2,5}{s(s^3 + 12s^2 + 48s + 64)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+4} + \frac{K_3}{(s+4)^2} + \frac{K_4}{(s+4)^3}$$

menovateľom  $s(s^3 + 12s^2 + 48s + 64)$  a postupnými úpravami dostaneme

$$2,5 = s^3(K_1 + K_2) + s^2(12K_1 + 8K_2 + K_3) + s(48K_1 + 16K_2 + 4K_3 + K_4) + 64K_1$$

Porovnaním koeficientov polynómov na pravej a ľavej strane ostatnej rovnice dostaneme sústavu 4 algebraických rovníc o 4 neznámych v tvare

$$\begin{aligned} 0 &= K_1 + K_2 \\ 0 &= 12K_1 + 8K_2 + K_3 \\ 0 &= 48K_1 + 16K_2 + 4K_3 + K_4 \\ 2,5 &= 64K_1 \end{aligned}$$

ktorú opäť môžeme riešiť pomocou MATLABu a po použití nasledovných príkazov jednoducho dostaneme riešenie:

```
>> A=[1 1 0 0;12 8 1 0;48 16 4 1;64 0 0 0]; B=[0;0;0;2.5]; k=A\B
k =
    0.0391
   -0.0391
   -0.1563
   -0.6250
```

Z toho vyplýva, že  $K_1 = 0,0391$ ;  $K_2 = -0,0391$ ;  $K_3 = -0,1563$ ;  $K_4 = -0,6250$ . Pre obraz  $Y(s)$  dostaneme

$$Y(s) = \frac{0,0391}{s} - \frac{0,0391}{s+4} - \frac{0,1563}{(s+4)^2} - \frac{0,6250}{(s+4)^3}$$

a máme ho v takom tvare, že pomocou slovníka už jednoducho urobíme spätnú Laplaceovu transformáciu. Originál k obrazu  $Y(s)$  a zároveň riešenie diferenciálnej rovnice má tvar

$$\begin{aligned} y(t) &= 0,0391 - 0,0391e^{-4t} - \frac{0,1563}{1!}te^{-4t} - \frac{0,6250}{2!}t^2e^{-4t} \\ &= 0,0391 - 0,0391e^{-4t} - 0,1563te^{-4t} - 0,3125t^2e^{-4t} \end{aligned}$$

## 2.3. SPÄTNÁ LAPLACEOVA TRANSFORMÁCIA

### 2.3.3 Spätná Laplaceova transformácia pre komplexne združené korene polynómu $A(s)$ s nulovými reálnymi časťami

Predpokladáme, že polynóm  $A(s)$  má  $n/2$  dvojíc komplexne združených koreňov  $\pm i\omega_1, \pm i\omega_2, \dots, \pm i\omega_{n/2}$ . Pre obraz  $F(s)$  platí

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{B(s)}{a_n(s^2 + \omega_1^2)(s^2 + \omega_2^2) \dots (s^2 + \omega_{n/2}^2)} \\ &= \frac{B(s)/a_n}{(s^2 + \omega_1^2)(s^2 + \omega_2^2) \dots (s^2 + \omega_{n/2}^2)} \end{aligned}$$

a rozklad na parciálne zlomky má tvar

$$F(s) = \frac{K_1 s + L_1}{s^2 + \omega_1^2} + \frac{K_2 s + L_2}{s^2 + \omega_2^2} + \dots + \frac{K_{n/2} s + L_{n/2}}{s^2 + \omega_{n/2}^2} \quad (2.12)$$

Konštanty  $K_1, K_2, \dots, K_{n/2}, L_1, L_2, \dots, L_{n/2}$  nájdeme metódou porovnania koeficientov.

Originál  $f(t)$  má v tomto prípade tvar

$$f(t) = K_1 \cos(\omega_1 t) + \frac{L_1}{\omega_1} \sin(\omega_1 t) + \dots + K_{n/2} \cos(\omega_{n/2} t) + \frac{L_{n/2}}{\omega_{n/2}} \sin(\omega_{n/2} t) \quad (2.13)$$

**Príklad 2.3.3:** *Diferenciálna rovnica s komplexne združenými koreňmi charakteristickej rovnice, ktoré majú nulovú reálnu časť*

Riešte diferenciálnu rovnicu

$$y''(t) + 4y(t) = u(t) \quad (2.14)$$

so začiatočnými podmienkami  $y(0) = 1, y'(0) = 3$ , kde  $u(t) = \cos(3t)$ .

**Riešenie:**

1. Urobí sa Laplaceova transformácia diferenciálnej rovnice pomocou slovníka Laplaceových obrazov a definícií vlastností Laplaceovej transformácie.  
Po Laplaceovej transformácii diferenciálnej rovnice dostaneme

$$[s^2 Y(s) - 1s - 3] + 4Y(s) = \frac{s}{s^2 + 9}$$

2. Vyrieši sa algebraická rovnica.  
Z predošlej rovnice vyjadríme obraz riešenia  $Y(s)$  v tvare

$$Y(s) = \frac{s^3 + 3s^2 + 10s + 27}{(s^2 + 9)(s^2 + 4)}$$

3. Urobí sa spätná Laplaceova transformácia.  
Menovateľ  $Y(s)$  je polynóm 4. stupňa a z obrazu  $Y(s)$  je zrejmé, že jedna dvojica komplexne združených koreňov je  $\pm 3i$  a druhá  $\pm 2i$ . Rozklad na parciálne zlomky sa potom urobí nasledovne

$$Y(s) = \frac{s^3 + 3s^2 + 10s + 27}{(s^2 + 9)(s^2 + 4)} = \frac{K_1 s + L_1}{s^2 + 9} + \frac{K_2 s + L_2}{s^2 + 4}$$

## KAPITOLA 2. RIEŠENIE DIFERENCIÁLNYCH ROVNÍC POMOCOU LAPLACEOVEJ TRANSFORMÁCIE

Po vynásobení ostatnej rovnice menovateľom  $(s^2 + 9)(s^2 + 4)$  a postupnými úpravami dostaneme

$$s^3 + 3s^2 + 10s + 27 = s^3(K_1 + K_2) + s^2(L_1 + L_2) + s(4K_1 + 9K_2) + (4L_1 + 9L_2)$$

Porovnaním koeficientov polynómov na pravej a ľavej strane rovnice dostaneme 2 systémy 2 algebraických rovníc o 2 neznámych v tvare

$$\begin{aligned} 1 &= K_1 + K_2 \\ 10 &= 4K_1 + 9K_2 \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} 3 &= L_1 + L_2 \\ 27 &= 4L_1 + 9L_2 \end{aligned}$$

Ich riešením dostaneme číselné hodnoty koeficientov  $K_1 = -0,2$ ;  $K_2 = 1,2$ ;  $L_1 = 0$ ;  $L_2 = 3$ .

Obraz  $Y(s)$  má tvar

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{-0,2s}{s^2 + 3^2} + \frac{1,2s + 3}{s^2 + 2^2} \\ &= -0,2 \frac{s}{s^2 + 3^2} + 1,2 \frac{s}{s^2 + 2^2} + \frac{3}{2} \frac{2}{s^2 + 2^2} \end{aligned}$$

a pomocou slovníka už jednoducho urobíme spätnú Laplaceovu transformáciu. Originál k obrazu  $Y(s)$  a zároveň riešenie diferenciálnej rovnice má tvar

$$y(t) = -0,2 \cos(3t) + 1,2 \cos(2t) + 1,5 \sin(2t)$$

### 2.3.4 Spätná Laplaceova transformácia pre komplexne združené korene polynómu $A(s)$ s nenulovými reálnymi časťami

Nech polynóm  $A(s)$  je polynóm 2. stupňa v tvare  $A(s) = a_2s^2 + a_1s + a_0$  a má 1 dvojicu komplexne združených koreňov  $\gamma \pm i\omega$ . Vtedy ďalej predpokladáme, že polynóm  $B(s)$  je polynóm 1. stupňa v tvare  $B(s) = b_1s + b_0$ . Potom platí

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_1s + b_0}{a_2 \left( s^2 + \frac{a_1}{a_2}s + \frac{a_0}{a_2} \right)} = \frac{\frac{b_1}{a_2}s + \frac{b_0}{a_2}}{s^2 + \frac{a_1}{a_2}s + \frac{a_0}{a_2}} = \frac{\tilde{b}_1s + \tilde{b}_0}{s^2 + \tilde{a}_1s + \tilde{a}_0} \quad (2.15)$$

Ďalej treba zlomok matematicky upraviť do tvaru takých obrazov, aby sa za pomoci tabuľky obrazov dali jednoducho spätne transformovať. Obrazy, ktoré vyhovujú našej požiadavke sú obrazy funkcií  $e^{-at} \cos(\omega t)$  a  $e^{-at} \sin(\omega t)$ , ktoré majú tvar  $\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$  a  $\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$ . Takže najprv upravíme menovateľa zlomku a dostaneme

$$F(s) = \frac{\tilde{b}_1s + \tilde{b}_0}{s^2 + 2\frac{\tilde{a}_1}{2}s + \left(\frac{\tilde{a}_1}{2}\right)^2 + \tilde{a}_0 - \left(\frac{\tilde{a}_1}{2}\right)^2} = \frac{\tilde{b}_1s + \tilde{b}_0}{\left(s + \frac{\tilde{a}_1}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{\tilde{a}_0 - \left(\frac{\tilde{a}_1}{2}\right)^2}\right)^2} \quad (2.16)$$

Po označení  $\omega = \sqrt{\tilde{a}_0 - \left(\frac{\tilde{a}_1}{2}\right)^2}$ ,  $a = \frac{\tilde{a}_1}{2}$  môžeme písať

$$F(s) = \frac{\tilde{b}_1s + \tilde{b}_0}{(s+a)^2 + \omega^2} \quad (2.17)$$

### 2.3. SPÄTNÁ LAPLACEOVA TRANSFORMÁCIA

---

Teraz treba upraviť ešte čitateľa obrazu.

$$F(s) = \frac{\tilde{b}_1 s + \tilde{b}_0}{(s+a)^2 + \omega^2} = \tilde{b}_1 \frac{s + \frac{\tilde{b}_0}{\tilde{b}_1}}{(s+a)^2 + \omega^2} = \tilde{b}_1 \frac{s + a + \frac{\tilde{b}_0}{\tilde{b}_1} - a}{(s+a)^2 + \omega^2} \quad (2.18)$$

Po zavedení  $b = \frac{\tilde{b}_0}{\tilde{b}_1} - a$  platí

$$F(s) = \tilde{b}_1 \frac{s + a + b}{(s+a)^2 + \omega^2} = \tilde{b}_1 \frac{s + a}{(s+a)^2 + \omega^2} + \frac{\tilde{b}_1 b}{\omega} \frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2} \quad (2.19)$$

Originál  $f(t)$  má v tomto prípade tvar

$$f(t) = \tilde{b}_1 e^{-at} \cos(\omega t) + \frac{\tilde{b}_1 b}{\omega} e^{-at} \sin(\omega t) \quad (2.20)$$

**Príklad 2.3.4:** Diferenciálna rovnica s komplexne združenými koreňmi charakteristickej rovnice, ktoré majú nenulové reálne časti

Riešte diferenciálnu rovnicu

$$y'''(t) + 10y''(t) + 36y'(t) + 40y(t) = u(t) \quad (2.21)$$

s nulovými začiatočnými podmienkami  $y''(0) = y'(0) = y(0) = 0$ , kde  $u(t) = 2$ .

**Riešenie:**

1. Urobí sa Laplaceova transformácia diferenciálnej rovnice pomocou slovníka Laplaceových obrazov a definícií vlastností Laplaceovej transformácie.  
Po Laplaceovej transformácii diferenciálnej rovnice dostaneme

$$s^3 Y(s) + s^2 10Y(s) + 36sY(s) + 40Y(s) = \frac{2}{s}$$

2. Vyrieši sa algebraická rovnica.  
Z predošlej rovnice vyjadríme obraz riešenia  $Y(s)$  v tvare

$$Y(s) = \frac{2}{s(s^3 + 10s^2 + 36s + 40)}$$

3. Urobí sa spätná Laplaceova transformácia.  
Menovateľ obrazu  $Y(s)$  je polynóm 4. stupňa a z obrazu  $Y(s)$  je zrejmé, že jeho jeden koreň je  $s_1 = 0$ . Treba ešte nájsť korene rovnice  $s^3 + 10s^2 + 36s + 40 = 0$ , ktorá je charakteristickou rovnicou diferenciálnej rovnice. Jej korene nájdeme napr. pomocou MATLABu:

```
>> roots([1 10 36 40])  
ans =  
-4.0000 + 2.0000i  
-4.0000 - 2.0000i  
-2.0000
```

Charakteristická rovnica má teda 3 korene, z toho jeden reálny  $s_2 = -2$  a jednu dvojicu komplexne združených koreňov  $\gamma \pm \omega i = -4 \pm 2i$ . Polynóm, ktorý má túto dvojicu komplexne združených koreňov, nájdeme buď vydelením polynómu  $s^3 + 10s^2 + 36s + 40$  polynómom  $s + 2$  pomocou MATLABu napr. príkazom

## KAPITOLA 2. RIEŠENIE DIFERENCIÁLNYCH ROVNÍC POMOCOU LAPLACEOVEJ TRANSFORMÁCIE

---

```
>> p1=[1 10 36 40]; p2=[1 2]; p3=deconv(p1,p2)
p3 =
    1    8   20
```

alebo priradením polynómu dvojici komplexne združených koreňov  $-4 \pm 2i$  príkazom

```
>> poly([-4+2i, -4-2i])
ans =
    1    8   20
```

Pre obraz  $Y(s)$  potom platí

$$Y(s) = \frac{2}{s(s^3 + 10s^2 + 36s + 40)} = \frac{2}{s(s+2)(s^2 + 8s + 20)}$$

a rozklad na parciálne zlomky sa urobí nasledovne:

$$\frac{2}{s(s+2)(s^2 + 8s + 20)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+2} + \frac{K_3s + L_3}{s^2 + 8s + 20}$$

Po vynásobení ostatnej rovnice menovateľom  $s(s+2)(s^2 + 8s + 20)$  dostaneme

$$\begin{aligned} 2 &= K_1(s^3 + 10s^2 + 36s + 40) + K_2(s^3 + 8s^2 + 20s) + (K_3s + L_3)(s^2 + 2s) \\ 2 &= s^3(K_1 + K_2 + K_3) + s^2(10K_1 + 8K_2 + 2K_3 + L_3) \\ &\quad + s(36K_1 + 20K_2 + 2L_3) + 40K_1 \end{aligned}$$

Porovnaním koeficientov polynómov na pravej a ľavej strane rovnice dostaneme sústavu 4 algebraických rovníc o 4 neznámych v tvare

$$\begin{aligned} 0 &= K_1 + K_2 + K_3 \\ 0 &= 10K_1 + 8K_2 + 2K_3 + L_3 \\ 0 &= 36K_1 + 20K_2 + 2L_3 \\ 2 &= 40K_1 \end{aligned}$$

Jej riešením dostaneme  $K_1 = 0,05$ ;  $K_2 = -0,125$ ;  $K_3 = 0,075$ ;  $L_3 = 0,35$ .

Pre obraz  $Y(s)$  teda platí

$$Y(s) = \frac{0,05}{s} - \frac{0,125}{s+2} + \frac{0,075s + 0,35}{s^2 + 8s + 20}$$

Prvé dva zlomky v obraze riešenia sú v takom tvare, že spätná Laplaceova transformácia sa dá urobiť veľmi jednoducho. Upraviť treba ešte posledný zlomok. Preto pokračujeme v úpravách a dostaneme

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{0,05}{s} - 0,125 \frac{1}{s+2} + 0,075 \frac{s+4 + \frac{0,35}{0,075} - 4}{(s+4)^2 + 4} \\ &= \frac{0,05}{s} - 0,125 \frac{1}{s+2} + 0,075 \frac{s+4 + 0,6667}{(s+4)^2 + 2^2} \\ &= \frac{0,05}{s} - 0,125 \frac{1}{s+2} + 0,075 \frac{s+4}{(s+4)^2 + 2^2} + \frac{0,075 \cdot 0,6667}{2} \frac{2}{(s+4)^2 + 2^2} \\ &= \frac{0,05}{s} - 0,125 \frac{1}{s+2} + 0,075 \frac{s+4}{(s+4)^2 + 2^2} + 0,025 \frac{2}{(s+4)^2 + 2^2} \end{aligned}$$

Teraz už obraz riešenia máme v takom tvare, že pomocou slovníka jednoducho urobíme spätnú Laplaceovu transformáciu. Originál k obrazu  $Y(s)$  a zároveň riešenie diferenciálnej rovnice má tvar

$$y(t) = 0,05 - 0,125e^{-2t} + 0,075e^{-4t} \cos(2t) + 0,025e^{-4t} \sin(2t)$$

## 2.4. NERIEŠENÉ PRÍKLADY

---

### Upozornenie

- Pri rozklade na parciálne zlomky si treba uvedomiť, že ak je v parciálnom zlomku v menovateli polynóm, ktorý má reálny koreň (jednoduchý alebo viacnásobný), tak v čitateli je konštanta a ak je v menovateli parciálneho zlomku polynóm s dvojicou komplexne združených koreňov, tak v čitateli je polynóm 1. stupňa.

## 2.4 Neriešené príklady

### Príklad 2.4.1:

Riešte diferenciálnu rovnicu  $2y''(t) + 6y'(t) + 4y(t) = 2u(t)$  so začiatočnými podmienkami  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 2$ , kde  $u(t) = t$ .

#### Riešenie:

$$y(t) = -0,75 + 5e^{-t} - 3,25e^{-2t} + 0,5t.$$

### Príklad 2.4.2:

Riešte diferenciálnu rovnicu  $3y''(t) + 18y'(t) + 27y(t) = 3u(t)$  so začiatočnými podmienkami  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ , kde  $u(t) = 3\sin(2t)$ .

#### Riešenie:

$$y(t) = 0,213e^{-3t} + 1,4615te^{-3t} - 0,213\cos(2t) + 0,0888\sin(2t).$$

### Príklad 2.4.3:

Riešte diferenciálnu rovnicu  $4y''(t) + 16y'(t) + 16y(t) = 4u(t)$  s nulovými začiatočnými podmienkami  $y'(0) = y(0) = 0$ , kde  $u(t) = te^{-3t}$ .

#### Riešenie:

$$y(t) = -2e^{-2t} + te^{-2t} + 2e^{-3t} + te^{-3t}.$$

### Príklad 2.4.4:

Riešte diferenciálnu rovnicu  $2y'''(t) + 22y''(t) + 72y'(t) + 72y(t) = 2u(t)$  s nulovými začiatočnými podmienkami  $y''(0) = y'(0) = y(0) = 0$ , kde  $u(t) = 3$ . Jeden koreň charakteristickej rovnice  $= -2$ .

#### Riešenie:

$$y(t) = 0,0833 - 0,0417e^{-6t} + 0,3333e^{-3t} - 0,375e^{-2t}.$$

### Príklad 2.4.5:

Riešte diferenciálnu rovnicu  $3y'''(t) + 15y''(t) + 24y'(t) + 12y(t) = 3u(t)$  s nulovými začiatočnými podmienkami  $y''(0) = y'(0) = y(0) = 0$ , kde  $u(t) = 4$ . Jeden koreň charakteristickej rovnice  $= -1$ .

#### Riešenie:

$$y(t) = 1 + 2te^{-2t} + 3e^{-2t} - 4e^{-t}.$$

### Príklad 2.4.6:

Riešte diferenciálnu rovnicu  $0,5y'''(t) + y''(t) + 8y'(t) + 16y(t) = 0,5u(t)$  s nulovými začiatočnými podmienkami  $y''(0) = y'(0) = y(0) = 0$ , kde  $u(t) = 5$ . Jeden koreň charakteristickej rovnice  $= -2$ .

#### Riešenie:

$$y(t) = 0,1563 - 0,0313\cos(4t) - 0,0625\sin(4t) - 0,125e^{-2t}.$$

**Príklad 2.4.7:**

Riešte diferenciálnu rovnicu  $0,5y'''(t) + 6y''(t) + 24y'(t) + 32y(t) = 0,5u(t)$  s nulovými začiatočnými podmienkami  $y''(0) = y'(0) = y(0) = 0$ , kde  $u(t)=2,5$ . Jeden koreň charakteristickej rovnice  $= -4$ .

**Riešenie:**

$$y(t) = 0,0391 - 0,3125t^2e^{-4t} - 0,1563te^{-4t} - 0,0391e^{-4t}.$$

**Príklad 2.4.8:**

Riešte diferenciálnu rovnicu  $2y'''(t) + 12y''(t) + 74y'(t) + 116y(t) = 2u(t)$  s nulovými začiatočnými podmienkami  $y''(0) = y'(0) = y(0) = 0$ , kde  $u(t) = 3$ . Jeden koreň charakteristickej rovnice  $= -2$ .

**Riešenie:**

$$y(t) = 0,0517 - 0,06e^{-2t} + 0,0083e^{-2t} \cos(5t) - 0,0207e^{-2t} \sin(5t).$$

## 2.5 MATLAB: príkazy k problematike

výpočet koreňov polynómu `p` `roots(p)`

výpočet koeficientov polynómu pre jeho zadané korene `k1, k2` `poly([k1 k2])`

delenie polynómov `p1, p2` `deconv(p1,p2)`

výpočet inverznej matice k matici `A` `inv(A)`

rozklad na parciálne zlomky `[r,p,k]=residue(citateľ,menovateľ)`, kde `r` je vektor koeficientov čitateľov, `p` je vektor zodpovedajúcich pólov a `k` je absolútny člen. Táto funkcia je veľmi dobre použiteľná, ak má Laplaceov obraz v menovateli iba reálne korene. V prípade komplexných koreňov menovateľa treba tieto ešte sčítať.

## Kapitola 3

# Prenos a algebra prenosových funkcií

Cieľom cvičenia je zvládnuť vytvorenie prenosu dynamického systému z diferenciálnej rovnice, ktorá ho opisuje, zvládnuť vytvorenie diferenciálnej rovnice z prenosu dynamického systému, zvládnuť vytvorenie výsledného prenosu systému zloženého z viacerých rôzne zapojených systémov, ktoré sú opísané vlastnými prenosmi.

### 3.1 Prehľad pojmov

**Prenos** - prenos  $G(s)$  dynamického systému je definovaný ako podiel Laplaceovho obrazu výstupnej veličiny a Laplaceovho obrazu vstupnej veličiny pri nulových začiatočných podmienkach:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad (3.1)$$

kde  $s$  je argument Laplaceovej transformácie,  $Y(s)$  je Laplaceov obraz výstupnej veličiny a  $U(s)$  je Laplaceov obraz vstupnej veličiny.

**Minimálna realizácia prenosu** - prenos, ktorý nemá rovnaké korene v čitateli a v menovateli. Stupne polynómov čitateľa a menovateľa sú teda minimálne.

### 3.2 Vytvorenie prenosu $G(s)$ z diferenciálnej rovnice

Predpokladáme, že dynamický systém je opísaný diferenciálnou rovnicou v tvare

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1} u^{(m-1)}(t) + \dots + b_1 u'(t) + b_0 u(t) \quad (3.2)$$

s nulovými začiatočnými podmienkami

$$y^{(n-1)}(0) = \dots = y'(0) = y(0) = 0.$$

Prenos takéhoto systému sa urobí nasledovne:



1. Urobíme Laplaceovu transformáciu diferenciálnej rovnice a dostaneme:

$$\begin{aligned} a_n s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \dots + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) = \\ b_m s^m U(s) + b_{m-1} s^{m-1} U(s) + \dots + b_1 s U(s) + b_0 U(s) \end{aligned} \quad (3.3)$$

2. Z algebraickej rovnice, ktorú sme transformáciou dostali, vyjadríme podiel obrazu výstupnej veličiny  $Y(s)$  a obrazu vstupnej veličiny  $U(s)$  a tým dostaneme prenos  $G(s)$ .

Takže pokračujeme úpravou:

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0) Y(s) = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0) U(s) \quad (3.4)$$

a výsledný prenos má tvar:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{B(s)}{A(s)} \quad (3.5)$$

**Príklad 3.2.1:** *Vytvorenie prenosu z diferenciálnej rovnice*

Nájdite prenos dynamického systému, ktorý je opísaný diferenciálnou rovnicou

$$y'''(t) + 7y''(t) + 14y'(t) + 8y(t) = 8u''(t) + u(t)$$

s nulovými začiatočnými podmienkami

$$y''(0) = y'(0) = y(0) = 0.$$

**Riešenie:**

1. Urobí sa Laplaceova transformácia diferenciálnej rovnice a dostaneme:

$$s^3 Y(s) + 7s^2 Y(s) + 14s Y(s) + 8Y(s) = 8s^2 U(s) + U(s)$$

2. Vyjadríme prenos  $G(s)$ . Postup je nasledovný:

$$\begin{aligned} (s^3 + 7s^2 + 14s + 8) Y(s) &= (8s^2 + 1) U(s) \\ G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{8s^2 + 1}{s^3 + 7s^2 + 14s + 8} \end{aligned}$$

### 3.3 Vytvorenie diferenciálnej rovnice z prenosu $G(s)$

Predpokladáme, že dynamický systém je opísaný prenosom v tvare

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{B(s)}{A(s)} \quad (3.6)$$

Diferenciálnu rovnicu k tomuto prenosu nájdeme nasledovne:

1. Z prenosu vytvoríme algebraickú rovnicu v tvare:

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0) Y(s) = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0) U(s) \quad (3.7)$$

a upravíme ju do tvaru:

$$\begin{aligned} a_n s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \dots + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) = \\ b_m s^m U(s) + b_{m-1} s^{m-1} U(s) + \dots + b_1 s U(s) + b_0 U(s) \end{aligned} \quad (3.8)$$

### 3.4. ALGEBRA PRENOSOVÝCH FUNKCIÍ

---

2. Urobíme spätnú Laplaceovu transformáciu algebraickej rovnice a dostaneme hľadanú diferenciálnu rovnicu, ktorá opisuje dynamický systém v časovej oblasti:

$$\begin{aligned} a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = \\ b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1} u^{(m-1)}(t) + \dots + b_1 u'(t) + b_0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Začiatkové podmienky riešenia tejto diferenciálnej rovnice sú nulové  $y^{(n-1)}(0) = \dots = y'(0) = y(0) = 0$ , pretože prenos je definovaný pri nulových začiatkových podmienkach.

**Príklad 3.3.1:** *Vytvorenie diferenciálnej rovnice z prenosu*

Nájdite diferenciálnu rovnicu, ktorá opisuje dynamický systém, keď jeho prenos má tvar

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2s + 1}{s^3 + 4s^2 + s}$$

**Riešenie:**

1. Z prenosu vytvoríme algebraickú rovnicu:

$$(s^3 + 4s^2 + s)Y(s) = (2s + 1)U(s)$$

a upravíme ju do tvaru:

$$s^3 Y(s) + 4s^2 Y(s) + s Y(s) = 2s U(s) + U(s)$$

2. Urobíme spätnú Laplaceovu transformáciu algebraickej rovnice a dostaneme hľadanú diferenciálnu rovnicu, ktorá opisuje dynamický systém v časovej oblasti:

$$y'''(t) + 4y''(t) + y'(t) = 2u'(t) + u(t)$$

Začiatkové podmienky riešenia tejto diferenciálnej rovnice sú nulové  $y''(0) = y'(0) = y(0) = 0$ , pretože prenos je definovaný pri nulových začiatkových podmienkach.

**Upozornenie**

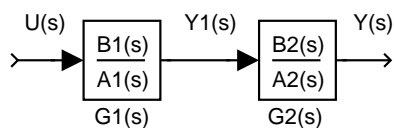
Pri vytváraní prenosu je  $u(t)$  neznáma funkcia a nedosadzujeme za ňu žiadnu konkrétnu funkciu, t. j. ani jednotkovú skokovú funkciu. Transformujeme ju ako funkciu  $u(t)$  a jej obraz je  $U(s)$ .

## 3.4 Algebra prenosových funkcií

### 3.4.1 Sériové zapojenie

Výsledný prenos pre 2 sériovo zapojené systémy (obr. 3.1):

$$G(s) = G_1(s)G_2(s) = \frac{B_1(s)B_2(s)}{A_1(s)A_2(s)} \quad (3.10)$$



Obr. 3.1 Sériové zapojenie 2 systémov

Výsledný prenos pre  $n$  sériovo zapojených systémov:

$$G(s) = \prod_{i=1}^n G_i(s) \quad (3.11)$$

**Príklad 3.4.1:**

Nájdite výsledný prenos  $G(s)$  dynamického systému, ktorý sa skladá z troch sériovo zapojených systémov. Prenosy týchto systémov sú nasledovné:

$$G_1(s) = \frac{2}{2s+1}, \quad G_2(s) = 4, \quad G_3(s) = \frac{3s+2}{s^2+5s+6}$$

Správnosť určenia výsledného prenosu overte pomocou Simulinku programom `ap3s`. V programe `ap3s` pomocou prechodovej charakteristiky porovnajte pôvodný systém zložený z troch sériovo zapojených systémov so systémom, ktorý je opísaný nájdеным výsledným prenosom.

**Poznámka**

Pojem prechodová charakteristika sa preberá na prednáškach vo 4. týždni. Pre objasnenie resp. zopakovanie uvádzame jej definíciu. Prechodová charakteristika systému je definovaná ako grafické znázornenie prechodovej funkcie systému. Prechodová funkcia systému je definovaná ako odozva systému na jednotkovú skokovú zmenu vstupnej veličiny pri nulových začiatkových podmienkach.

**Riešenie:**

Výsledný prenos určíme pomocou vzťahu (3.11) a má tvar:

$$G(s) = G_1(s)G_2(s)G_3(s) = \frac{B_1(s)B_2(s)B_3(s)}{A_1(s)A_2(s)A_3(s)} = \frac{B(s)}{A(s)}$$

Výsledný prenos  $G(s)$  (polynóm v čitateli  $B(s)$  a polynóm v menovateli  $A(s)$ ) môžeme určiť pomocou MATLABu. V MATLABe najskôr načítame polynómy  $B_1(s)$ ,  $A_1(s)$ ,  $B_2(s)$ ,  $A_2(s)$ ,  $B_3(s)$ ,  $A_3(s)$ . Potom použitím funkcie `tf()`, ktorá slúži na definovanie prenosu pre tzv. LTI (lineárne časovoinvariantné) dynamické modely, definujeme prenosy  $G_1(s)$ ,  $G_2(s)$ ,  $G_3(s)$ . Nakoniec vypočítame súčin prenosov  $G_1(s)$ ,  $G_2(s)$  a  $G_3(s)$ .

Zápis príslušných príkazov aj s odozvou MATLABu môže vyzeráť nasledovne:

```
>> B1=2;A1=[2 1];B2=4;A2=1;B3=[3 2];A3=[1 5 6];
>> G1=tf(B1,A1)
```

### 3.4. ALGEBRA PRENOSOVÝCH FUNKCIÍ

---

Transfer function:

$$\frac{2}{2s + 1}$$

```
>> G2=tf(B2,A2)
```

Transfer function:

4

```
>> G3=tf(B3,A3)
```

Transfer function:

$$\frac{3s + 2}{s^2 + 5s + 6}$$

```
>> G=G1*G2*G3
```

Transfer function:

$$\frac{24s + 16}{2s^3 + 11s^2 + 17s + 6}$$

Výsledný prenos má teda tvar

$$G(s) = \frac{24s + 16}{2s^3 + 11s^2 + 17s + 6}$$

Po použití predošlých príkazov MATLAB pozná premenné  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$ ,  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$  a  $G$ .

V prípade, že v simulačnej schéme, ktorá nepoužíva LTI objekty, treba definovať prenosy pomocou vektorového zápisu čitateľa a menovateľa, je možné získať takéhoto čitateľa a menovateľa výsledného prenosu  $G(s)$  pomocou príkazu

```
>> [B,A]=tfdata(G,'v')
```

B =

0      0      24      16

A =

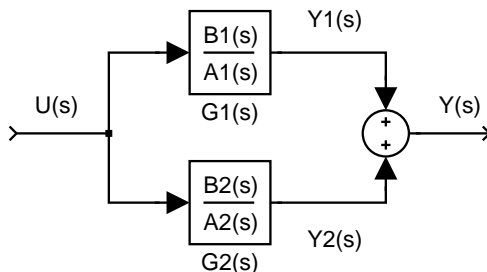
2      11      17      6

Takže teraz už len stačí spustiť simuláciu v programe **ap3s**. Ak v grafe, ktorý sa zjaví na obrazovke, vidíme len jednu čiaru, znamená to, že odozva aj 3 sériovo zapojených systémov aj výsledného systému na jednotkovú skokovú zmenu vstupnej veličiny je rovnaká, takže výsledný prenos bol určený správne. V prípade, že sa v grafe zjavia po simulácii dve čiary, výsledný prenos bol určený nesprávne.

#### 3.4.2 Paralelné zapojenie

Výsledný prenos pre 2 paralelne zapojené systémy (obr. 3.2):

$$G(s) = G_1(s) + G_2(s) = \frac{B_1(s)A_2(s) + B_2(s)A_1(s)}{A_1(s)A_2(s)} \quad (3.12)$$



Obr. 3.2 Paralelné zapojenie 2 systémov

Výsledný prenos pre  $n$  paralelne zapojených systémov:

$$G(s) = \sum_{i=1}^n G_i(s) \quad (3.13)$$

**Príklad 3.4.2:**

Nájdite výsledný prenos  $G(s)$  dynamického systému, ktorý sa skladá z troch paralelne zapojených systémov. Prenosy týchto systémov sú nasledovné:

$$G_1(s) = \frac{2}{2s+1}, \quad G_2(s) = 4, \quad G_3(s) = \frac{3s+2}{s^2+5s+6}.$$

Pomocou prechodovej charakteristiky porovnajte pôvodný systém zložený z troch paralelne zapojených systémov so systémom, ktorý je opísaný nájdeným výsledným prenosom. Porovnanie urobte pomocou Simulinku programom ap3p.

**Riešenie:**

Výsledný prenos určíme pomocou vzťahu (3.13) a bude mať tvar:

$$G(s) = G_1(s) + G_2(s) + G_3(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$$

Výsledný prenos  $G(s)$  môžeme určiť opäť pomocou MATLABu. V MATLABe najskôr načítame polynómy  $B_1(s)$ ,  $A_1(s)$ ,  $B_2(s)$ ,  $A_2(s)$ ,  $B_3(s)$ ,  $A_3(s)$ . Potom použitím funkcie `tf()` definujeme prenosy  $G_1(s)$ ,  $G_2(s)$ ,  $G_3(s)$  a nakoniec vypočítame súčet prenosov  $G_1(s)$ ,  $G_2(s)$  a  $G_3(s)$ . Zápis príslušných príkazov aj s odozvou MATLABu môže vyzeráť nasledovne:

```
>> B1=2;A1=[2 1];B2=4;A2=1;B3=[3 2];A3=[1 5 6];
>> G1=tf(B1,A1);G2=tf(B2,A2);G3=tf(B3,A3);
>> G=G1+G2+G3
```

```
Transfer function:
8 s^3 + 52 s^2 + 85 s + 38
-----
2 s^3 + 11 s^2 + 17 s + 6
```

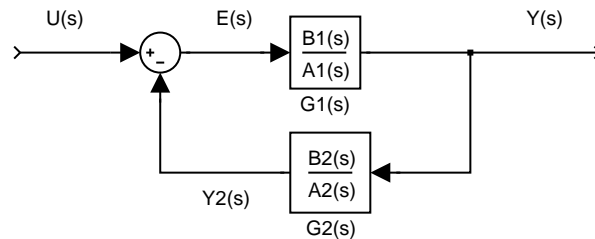
Výsledný prenos má teda tvar

$$G(s) = \frac{8s^3 + 52s^2 + 85s + 38}{2s^3 + 11s^2 + 17s + 6}$$

### 3.4. ALGEBRA PRENOSOVÝCH FUNKCIÍ

Riešenie overíme simulačne pomocou programu **ap3p**. Ak v grafe, ktorý sa zjaví na obrazovke vidíme len jednu čiaru, znamená to, že odozva 3 paralelne zapojených systémov aj výsledného systému na jednotkovú skokovú zmenu vstupnej veličiny je rovnaká a výsledný prenos bol určený správne.

#### 3.4.3 Spätnoväzbové zapojenie so zápornou spätnou väzbou

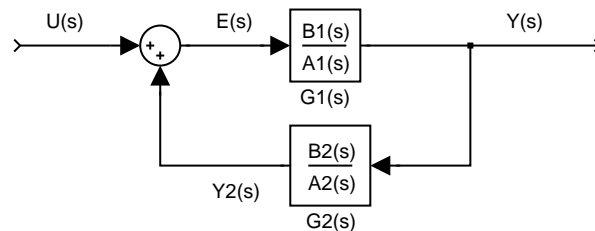


Obr. 3.3 Spätnoväzbové zapojenie so zápornou spätnou väzbou

Výsledný prenos pre spätnoväzbové zapojenie so zápornou spätnou väzbou (obr. 3.3):

$$G(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} = \frac{B_1(s)A_2(s)}{A_1(s)A_2(s) + B_1(s)B_2(s)} \quad (3.14)$$

#### 3.4.4 Spätnoväzbové zapojenie s kladnou spätnou väzbou



Obr. 3.4 Spätnoväzbové zapojenie s kladnou spätnou väzbou

Výsledný prenos pre spätnoväzbové zapojenie s kladnou spätnou väzbou (obr. 3.4):

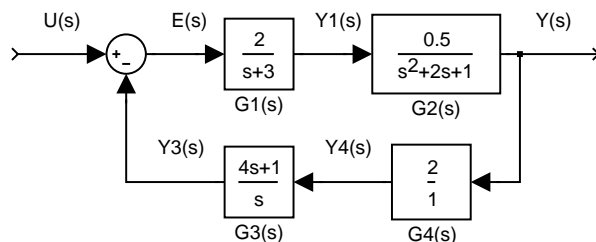
$$G(s) = \frac{G_1(s)}{1 - G_1(s)G_2(s)} = \frac{B_1(s)A_2(s)}{A_1(s)A_2(s) - B_1(s)B_2(s)} \quad (3.15)$$

#### Príklad 3.4.3:

Nájdite výsledný prenos dynamického systému, ktorého bloková schéma je na obr. 3.5. Pomocou prechodovej charakteristiky porovnajte pôvodný systém so systémom, ktorý je opísaný nájdeným výsledným prenosom. Porovnanie urobte pomocou Simulinku programom **ap4sz**.

#### Riešenie:

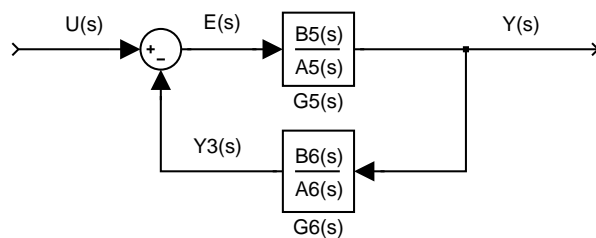
Pri hľadaní výsledných prenosov zložitejších systémov môžeme postupovať dvoma spôsobmi:



Obr. 3.5 Spätnoväzbové zapojenie 4 systémov so zápornou spätnou väzbou

1. Schému zjednodušíme pomocou pravidiel o sériovom, paralelnom a spätnoväzbovom zapojení, nájdeme tak v schéme nejaké pomocné prenosy a potom opäť aplikujeme pravidlá o sériovom, paralelnom a spätnoväzbovom zapojení.
2. Výsledný prenos odvodíme pomocou pravidla, že každý obraz výstupného signálu sa dá vyjadriť pomocou súčinu prenosu systému, z ktorého táto veličina priamo vystupuje a obrazu jeho vstupného signálu. Takže nájdeme v schéme výstupnú veličinu výsledného systému, ktorého prenos hľadáme, vyjadríme ju ako súčin prenosu systému, z ktorého vystupuje a obrazu vstupného signálu do tohto prenosu. Potom postupujeme v schéme proti smeru šírenia signálov a vyjadrujeme postupne všetky obrazy výstupných veličín, až kým sa nedostaneme po vstupné veličiny a tú výstupnú veličinu, pri ktorej sme začali. Úpravou rovnice, ktorú takto získame, dostaneme výsledný prenos.

#### Riešenie 1. spôsobom



Obr. 3.6 Zjednodušená schéma spätnoväzbového zapojenia 4 systémov

Blokovú schému najskôr zjednodušíme tak, ako vidíme na obr. 3.6. Prenosy  $G_5(s)$ ,  $G_6(s)$  určíme podľa r. (3.11) nasledovne:

$$G_5(s) = G_1(s)G_2(s)$$

$$G_6(s) = G_3(s)G_4(s)$$

Výsledný prenos  $G(s)$  dostaneme podľa vzťahu (3.14) v tvare

$$G(s) = \frac{G_5(s)}{1 + G_5(s)G_6(s)}$$

a teda po zapísaní príslušných príkazov v MATLABe

### 3.4. ALGEBRA PRENOSOVÝCH FUNKCIÍ

---

```
>> B1=2;A1=[1 3];B2=0.5;A2=[1 2 1];B3=[4 1];A3=[1 0];B4=2;A4=1;
>> G1=tf(B1,A1);G2=tf(B2,A2);G3=tf(B3,A3);G4=tf(B4,A4);
>> G5=G1*G2;G6=G3*G4;
>> G=G5/(1+G5*G6)
```

Transfer function:

```
          s^4 + 5 s^3 + 7 s^2 + 3 s
-----
s^7 + 10 s^6 + 39 s^5 + 84 s^4 + 121 s^3 + 108 s^2 + 47 s + 6
```

máme výsledný prenos v tvare

$$G(s) = \frac{s^4 + 5s^3 + 7s^2 + 3s}{s^7 + 10s^6 + 39s^5 + 84s^4 + 121s^3 + 108s^2 + 47s + 6}$$

Ak polynómy v čitateli prenosu a v menovateli prenosu majú niektoré korene zhodné, je možné získať po ich vykrátení tzv. minimálnu realizáciu prenosu, čo v MATLABe vykoná príkaz

```
>> G=minreal(G)
Transfer function:
          s
-----
s^4 + 5 s^3 + 7 s^2 + 11 s + 2
```

Dostaneme tak výsledný prenos s minimálnym stupňom polynómu v čitateli aj menovateli.

#### Riešenie 2. spôsobom

Máme určiť prenos  $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ . Takže výstupný signál  $Y(s)$  vyjadríme postupne proti smeru šírenia signálov podľa pôvodnej schémy na obr. 3.5 ako:

$$\begin{aligned} Y(s) &= G_2(s)Y_1(s) = G_2(s)G_1(s)E(s) = G_2(s)G_1(s)(U(s) - Y_3(s)) \\ &= G_2(s)G_1(s)U(s) - G_2(s)G_1(s)Y_3(s) \\ &= G_2(s)G_1(s)U(s) - G_2(s)G_1(s)G_3(s)Y_4(s) \\ &= G_2(s)G_1(s)U(s) - G_2(s)G_1(s)G_3(s)G_4(s)Y(s) \end{aligned}$$

Vyjadrovanie sme ukončili, keďže  $U(s)$  ako obraz vstupnej veličiny a  $Y(s)$  ako obraz výstupnej veličiny, od ktorej sme začali, už ďalej vyjadriť nemôžeme. Potom už len z rovnice

$$Y(s) = G_2(s)G_1(s)U(s) - G_2(s)G_1(s)G_3(s)G_4(s)Y(s)$$

vypočítame hľadaný prenos, keď najprv ešte urobíme nasledovné úpravy

$$\begin{aligned} Y(s) + G_2(s)G_1(s)G_3(s)G_4(s)Y(s) &= G_2(s)G_1(s)U(s) \\ Y(s)[1 + G_2(s)G_1(s)G_3(s)G_4(s)] &= G_2(s)G_1(s)U(s) \end{aligned}$$

Výsledný prenos má tvar

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)}$$

Po načítaní polynómov a definovaní prenosov výsledný prenos môžeme v MATLABe vypočítať pomocou príkazu



### KAPITOLA 3. PRENOS A ALGEBRA PRENOSOVÝCH FUNKCIÍ

```
>> G=G1*G2/(1+G1*G2*G3*G4)
```

Transfer function:

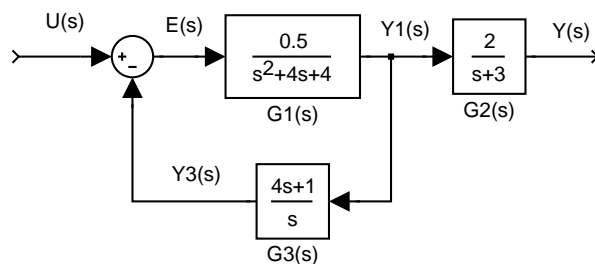
$$\frac{s^4 + 5s^3 + 7s^2 + 3s}{s^7 + 10s^6 + 39s^5 + 84s^4 + 121s^3 + 108s^2 + 47s + 6}$$

-----

$$s^7 + 10s^6 + 39s^5 + 84s^4 + 121s^3 + 108s^2 + 47s + 6$$

Po vypočítaní výsledného prenosu (jeho minimálnej realizácie) v MATLABe spustíme simuláciu v programe `ap4sz`. Ak v grafe, ktorý sa zjaví na obrazovke vidíme len jednu čiaru, znamená to, že výsledný prenos bol určený správne.

**Príklad 3.4.4:**



Obr. 3.7 Spätnoväzbové zapojenie 3 systémov so zápornou spätnou väzbou

Nájdite výsledný prenos dynamického systému, ktorého bloková schéma je na obr. 3.7. Pomocou prechodovej charakteristiky porovnajte pôvodný systém so systémom, ktorý je opísaný nájdeným výsledným prenosom. Porovnanie urobte pomocou Simulinku programom `aprvs`.

**Riešenie:**

Príklad môžeme riešiť nasledovne. Zo schémy je zrejmé, že výstup hľadaného výsledného prenosu je  $Y(s)$ . Vyjadríme ho:

$$Y(s) = G_2(s)Y_1(s) \quad (3.16)$$

Lenže signál  $Y_1(s)$  sa vetví a tak ďalej budeme pokračovať vyjadrovaním tohto signálu a postupne dostaneme:

$$\begin{aligned} Y_1(s) &= G_1(s)E(s) = G_1(s)(U(s) - Y_3(s)) \\ &= G_1(s)U(s) - G_1(s)Y_3(s) = G_1(s)U(s) - G_1(s)G_3(s)Y_1(s) \end{aligned}$$

Vyjadrovanie  $Y_1(s)$  sme ukončili, keďže  $U(s)$  ako obraz vstupnej veličiny a  $Y_1(s)$  ako obraz výstupnej veličiny, od ktorej sme začali, už ďalej vyjadriť nemôžeme. Potom už len z rovnice

$$Y_1(s) = G_1(s)U(s) - G_1(s)G_3(s)Y_1(s)$$

vypočítame pomocný prenos  $G_4(s)$ , ktorý má tvar

$$G_4(s) = \frac{Y_1(s)}{U(s)} = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_3(s)}$$

Pomocou neho vyjadríme  $Y_1(s)$  ako

$$Y_1(s) = G_4(s)U(s)$$

### 3.5. ÚLOHY

a dosadíme do r. (3.16). Takže pre výstup  $Y(s)$  platí

$$Y(s) = G_2(s)G_4(s)U(s)$$

a hľadaný výsledný prenos má tvar

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = G_2(s)G_4(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_3(s)}$$

Riešením v MATLABe dostaneme:

$$G(s) = \frac{s^3 + 4s^2 + 4s}{s^6 + 11s^5 + 50s^4 + 118.5s^3 + 147.5s^2 + 80s + 6}$$

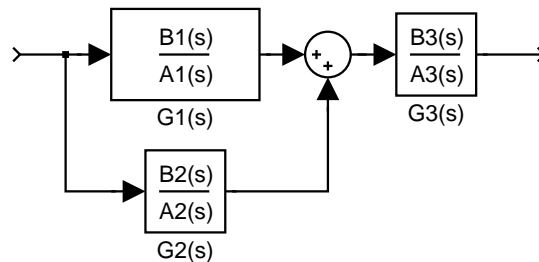
Simuláciou pomocou programu `aprvs` sa presvedčíme, či bol výsledný prenos určený správne.

#### Upozornenie

Pri definovaní polynómov v MATLABe je možné použiť aj vektorový aj polynomický zápis. Pri použití MATLABu cez Internet (použitie tzv. MILABu), je potrebné definovať polynómy vo vektorovom tvare.

## 3.5 Úlohy

#### Príklad 3.5.1:



Obr. 3.8 Schéma k príkladu 3.5.1

Nájdite výsledný prenos systému z obr. 3.8, kde

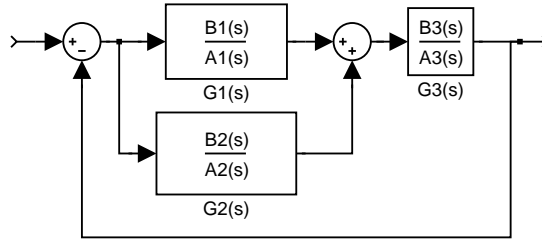
1.  $G_1(s) = \frac{0,5}{s^2 + 8s + 8}$ ,  $G_2(s) = \frac{4}{2s + 1}$ ,  $G_3(s) = \frac{2}{s + 3}$
2.  $G_1(s) = \frac{5}{0,7s + 1}$ ,  $G_2(s) = \frac{0,1}{s^2 + 4s + 4}$ ,  $G_3(s) = \frac{0,8}{s^2 + 1}$

Správnosť výpočtu výsledného prenosu overte pomocou programu `app1`.

#### Príklad 3.5.2:

Nájdite výsledný prenos systému z obr. 3.9, kde

1.  $G_1(s) = \frac{2}{3s + 1}$ ,  $G_2(s) = \frac{10}{4s}$ ,  $G_3(s) = \frac{2}{s + 3}$

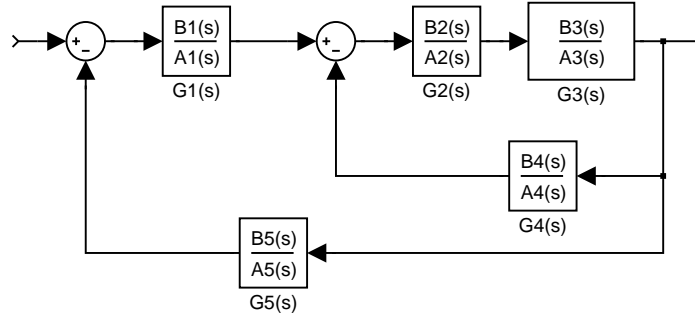


Obr. 3.9 Schéma k příkladu 3.5.2

$$2. \quad G_1(s) = \frac{2s+3}{s^2+3s}, \quad G_2(s) = \frac{10}{4s+1}, \quad G_3(s) = \frac{2}{4s+1}$$

Správnost výpočtu výsledného přenosu ověrite pomocí programu app2.

**Příklad 3.5.3:**



Obr. 3.10 Schéma k příkladu 3.5.3

Nájdite výsledný přenos systému z obr. 3.10, kde

$$1. \quad G_1(s) = 50, \quad G_2(s) = \frac{10}{s+1}, \quad G_3(s) = \frac{1}{2s+0,5},$$

$$G_4(s) = 0,1, \quad G_5(s) = 2$$

$$2. \quad G_1(s) = 5, \quad G_2(s) = \frac{10s+1}{s^2+s+1}, \quad G_3(s) = \frac{1}{2s+0,5},$$

$$G_4(s) = \frac{1}{2s+1}, \quad G_5(s) = 0,5$$

Správnost výpočtu výsledného přenosu ověrite pomocí programu app3.

**Příklad 3.5.4:**

Nájdite výsledný přenos systému z obr. 3.11, kde

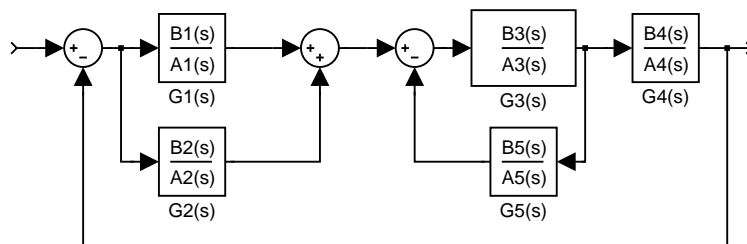
$$1. \quad G_1(s) = 50, \quad G_2(s) = \frac{10}{s+1}, \quad G_3(s) = \frac{1}{2s+0,5},$$

$$G_4(s) = 0,1, \quad G_5(s) = 2$$

$$2. \quad G_1(s) = 5, \quad G_2(s) = \frac{10s+1}{s^2+s+1}, \quad G_3(s) = \frac{1}{2s+0,5},$$

$$G_4(s) = \frac{1}{2s+1}, \quad G_5(s) = 0,5$$

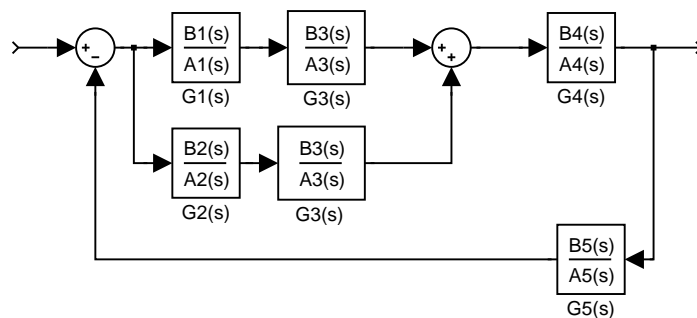
### 3.5. ÚLOHY



Obr. 3.11 Schéma k příkladu 3.5.4

Správnost výpočtu výsledného přenosu overte pomocí programu app4.

**Příklad 3.5.5:**



Obr. 3.12 Schéma k příkladu 3.5.5

Nájdite výsledný přenos systému z obr. 3.12, kde

1.  $G_1(s) = 50$ ,  $G_2(s) = \frac{10}{s+1}$ ,  $G_3(s) = \frac{1}{2s+0,5}$ ,  
 $G_4(s) = 0,1$ ,  $G_5(s) = 2$
2.  $G_1(s) = 5$ ,  $G_2(s) = \frac{10s+1}{s^2+s+1}$ ,  $G_3(s) = \frac{1}{2s+0,5}$ ,  
 $G_4(s) = \frac{1}{2s+1}$ ,  $G_5(s) = 0,5$

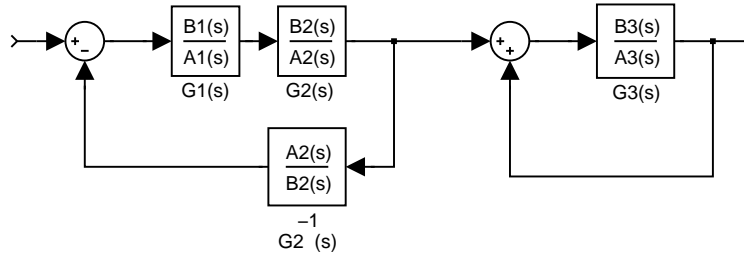
Správnost výpočtu výsledného přenosu overte pomocí programu app5.

**Příklad 3.5.6:**

Nájdite výsledný přenos systému z obr. 3.13, kde

1.  $G_1(s) = \frac{2}{3s+1}$ ,  $G_2(s) = \frac{10s+1}{4s+1}$ ,  $G_3(s) = \frac{2}{s+3}$
2.  $G_1(s) = \frac{2s+3}{s^2+3s}$ ,  $G_2(s) = \frac{10s+5}{4s+1}$ ,  $G_3(s) = \frac{2}{s+4}$

Správnost výpočtu výsledného přenosu overte pomocí programu app6.



Obr. 3.13 Schéma k príkladu 3.5.6

### 3.6 Neriešené príklady

#### Príklad 3.6.1:

Nájdite prenosy dynamických systémov, ktoré sú opísané nasledovnými diferenciálnymi rovnicami. Všetky diferenciálne rovnice majú nulové začiatkové podmienky.

1.  $y'''(t) + 11y''(t) + 36y'(t) + 36y(t) = 8u''(t) + 7u'(t) + u(t)$
2.  $7y^{(5)}(t) + 24y^{(4)}(t) + y'''(t) + 5y''(t) = 8u^{(4)}(t) + 5u''(t) + u(t)$
3.  $y'''(t) - 16y'(t) + 32y(t) = u(t)$
4.  $12y^{(6)}(t) - 24y^{(4)}(t) - 6y'''(t) - 8y'(t) + 4y(t) = 5u'''(t) - 6u'(t) + u(t)$
5.  $58y^{(6)}(t) + y'''(t) + 6y''(t) + 37y'(t) = 2u''(t) + u'(t)$

#### Príklad 3.6.2:

Nájdite diferenciálne rovnice, ktoré opisujú dynamické systémy, ak sú dané ich prenosy.

1.  $G_1(s) = \frac{4s^4 + 2s + 1}{7s^6 + 6s^5 + 5s^4 + 3s^3 + 2s^2 + 6s}$
2.  $G_2(s) = s$
3.  $G_3(s) = \frac{s + 3}{s^3 + 1,4s^2 + 1,44s + 1,04}$
4.  $G_4(s) = \frac{-2s^2 + 1}{s^6 + 6s^4 + s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$
5.  $G_5(s) = \frac{6s^3 + 4s^2 + 2s + 1}{s^3 + 4s^2 + 1s}$

### 3.7 MATLAB: príkazy k problematike

Označenie: premenné `nula`, `pol` sú vektory, premenné `citatel`, `menovatel` sú polynómy.

**vytvorenie prenosovej funkcie** `g=tf(citatel, menovatel)` – pomocou čitateľa a menovateľa vo vektorovom alebo polynomicom tvare, `g=zpk(nula, pol, k)` – pomocou pólov (koreňov menovateľa), núl (koreňov čitateľa) a zosilnenia  $k$ ,

### 3.8. OVERENIE VÝSLEDKOV ÚLOH POMOCOU MILABU

---

minimálna realizácia prenosovej funkcie  $g = \text{minreal}(g)$ ,

získanie polynómov čitateľa a menovateľa z prenosovej funkcie

`[citatel,menovatel]=tfdata(g,'v')`,

**algebra prenosov** operátory  $+$ ,  $-$ ,  $*$ ,  $/$  sú použité aj pre prácu s prenosovými funkciami:

$+$ ,  $-$  znamená paralelné zapojenie (funkcia `parallel`), násobenie  $*$  sériové zapojenie (funkcia `series`) a delenie  $/$  sa využíva pri zapojení so spätnou väzbou (funkcia `feedback`).

Ďalšie príkazy a operátory sú prípustné, ak sa používa Polynomický toolbox pre MATLAB<sup>1</sup>. Vtedy je zadefinovaná premenná  $s$  ako argument Laplaceovej transformácie a je možné vytvárať polynómy priamym zápisom (napr.  $2*s+1$ ). Viac informácií sa dá získať pomocou príkazu `help polynomial`.

### 3.8 Overenie výsledkov úloh pomocou MILABu

Na hlavnej stránke LCZA (<http://www.kirp.chnik.stuba.sk/lcza>) sa nachádzajú HTML resp. PHP skripty programov `app1` – `app6`, vytvorené v MILABe (viď strana 147), ktoré možno použiť na overenie správnosti riešenia príkladov 3.5.1 – 3.5.6. Správnosť výpočtu výsledného prenosu sa dá overiť nasledujúcim spôsobom:

#### Vo vstupnom formulári

- zadajte čitatele a menovatele prenosov  $G_1(s)$ ,  $G_2(s)$  až  $G_n(s)$  ( $n$  závisí od čísla príkladu)
- zadajte čitateľ a menovateľ výsledného prenosu
- kliknite na ikonu „Spracovať“

#### MILAB zobrazí výsledok, ktorý pozostáva z

- výpisu jednotlivých prenosov
- blokovej schémy
- prechodových charakteristík (vypočítanej a správnej)
- vyhlásenia o (ne)správnosti riešenia

**Poznámka:** Správnosť riešenia je vo všetkých príkladoch kontrolovaná na základe rozdielu prechodovej charakteristiky (PCH) vypočítaného a správneho výsledného prenosu systému.

**Príklad:** Nájdite výsledný prenos systému z obr. 3.8, kde

$$G_1(s) = \frac{B_1(s)}{A_1(s)} = \frac{2s+4}{3s+1}, \quad G_2(s) = \frac{B_2(s)}{A_2(s)} = \frac{1}{2s+1}, \quad G_3(s) = \frac{B_3(s)}{A_3(s)} = \frac{4}{4s+1}$$

Minimálna realizácia výsledného prenosu  $G(s)$  je

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{16s^2 + 52s + 20}{24s^3 + 26s^2 + 9s + 1}$$

---

<sup>1</sup>[www.polyx.com](http://www.polyx.com)

### KAPITOLA 3. PRENOS A ALGEBRA PRENOSOVÝCH FUNKCÍ

---

**Zápis v MILABe:** HTML/PHP skript programu `app1`.

Čítatel' prenosu  $G_1(s)$ :  $B_1(s) = [2, 4]$

Menovatel' prenosu  $G_1(s)$ :  $A_1(s) = [3, 1]$

Čítatel' prenosu  $G_2(s)$ :  $B_2(s) = 1$

Menovatel' prenosu  $G_2(s)$ :  $A_2(s) = [2, 1]$

Čítatel' prenosu  $G_3(s)$ :  $B_3(s) = [4]$

Menovatel' prenosu  $G_3(s)$ :  $A_3(s) = [4, 1]$

Čítatel' výsledného prenosu  $G(s)$ :  $B(s) = [16, 52, 20]$

Menovatel' výsledného prenosu  $G(s)$ :  $A(s) = [24, 26, 9, 1]$

## Kapitola 4

# Prechodové charakteristiky systémov

Cieľom cvičenia je zvládnuť výpočet prechodových funkcií a zoznámiť sa s priebehom prechodových charakteristík systému 1. rádu, systémov 2. rádu (2 rôzne reálne korene, jeden 2-násobný koreň, komplexne združené korene s nenulovou reálnou časťou) a systémov  $n$ -tého rádu.

### 4.1 Prehľad pojmov

**Jednotková skoková funkcia** - je definovaná nasledovne:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

Laplaceov obraz jednotkovej skokovej funkcie (4.1) (zjednodušene 1) je

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s} \quad (4.2)$$

**Skoková funkcia** - je definovaná nasledovne:

$$u(t) = \begin{cases} k, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

Laplaceov obraz skokovej funkcie (4.3) (zjednodušene  $k$ ) je

$$\mathcal{L}\{k\} = \frac{k}{s} \quad (4.4)$$

**Prechodová funkcia (PF)** - odozva systému na jednotkovú skokovú funkciu (4.1) pri nulových začiatočných podmienkach. Jej výpočet sa vykonáva spätnou Laplaceovou transformáciou obrazu výstupnej veličiny zo systému pri obraze vstupu  $1/s$ .

**Prechodová charakteristika (PCH)** - grafické znázornenie prechodovej funkcie.



**Konečná hodnota funkcie** - asymptotickú hodnotu funkcie  $f(t)$  pre čas  $t \rightarrow \infty$ , ak existuje  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ , môžeme vypočítať podľa vzťahu

$$f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} [sF(s)] \quad (4.5)$$

Poznámka: konečnú hodnotu funkcie môžeme na základe limity určiť len vtedy, ak je systém stabilný. V opačnom prípade neplatí predpoklad existencie limity  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ .

**Začiatková hodnota funkcie** - dá sa vypočítať podľa vzťahu

$$f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s)] \quad (4.6)$$

## 4.2 Riešené príklady

**Príklad 4.2.1:** *PF a PCH systému prvého rádu*

Majme dynamický systém opísaný diferenciálnou rovnicou prvého rádu

$$3y'(t) + 2y(t) = 5u(t) \quad (4.7)$$

s nulovou začiatkovou podmienkou, t.j.  $y(0) = 0$ .

Úlohou je určiť zosilnenie  $Z$ , časovú konštantu  $T$  a prenos dynamického systému opísaného rovnicou (4.7). Ďalej treba vypočítať prechodovú funkciu systému, čiže nájsť riešenie diferenciálnej rovnice  $y(t)$  pre  $t \geq 0$  ak  $u(t) = 1$ . Na základe obrazu prechodovej funkcie systému treba ešte určiť hodnotu  $y(\infty)$ .

**Riešenie:**

Zosilnenie  $Z$  a časovú konštantu  $T$  získame, ak upravíme diferenciálnu rovnicu (4.7) tak, aby pri nederivovanej výstupnej veličine  $y(t)$  bola jednotka. Potom člen pri 1. derivácii výstupnej veličiny  $y'(t)$  je časová konštanta a koeficient pri vstupnej veličine  $u(t)$  je zosilnenie:

$$\frac{3}{2}y'(t) + y(t) = \frac{5}{2}u(t) \quad (4.8)$$

To znamená, že zosilnenie je  $Z = 2,5$  a časová konštanta  $T = 1,5$ . Zosilnenie dynamického systému je rovné hodnote výstupu v nekonečne, ak je na jeho vstupe jednotkový skok a začiatková podmienka diferenciálnej rovnice, ktorá dynamický systém opisuje, je nulová. Časová konštanta udáva, ako rýchlo sa po skokovej zmene vstupnej veličiny výstup ustáli na novej hodnote. Pre systém prvého rádu napr. platí, že v čase rovnajúcom časovej konštante  $T$  sa výstup dostane na 63% svojej novej ustálenej hodnoty.

Po Laplaceovej transformácii diferenciálnej rovnice (4.7) dostaneme

$$(1,5s + 1)Y(s) = 2,5U(s) \quad (4.9)$$

a prenos dynamického systému opísaného (4.7) je

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2,5}{1,5s + 1} = \frac{Z}{Ts + 1} \quad (4.10)$$

## 4.2. RIEŠENÉ PRÍKLADY

Po dosadení za  $U(s) = 1/s$  získame obraz prechodovej funkcie

$$Y(s) = \frac{2,5}{s(1,5s + 1)} \quad (4.11)$$

Pre výpočet hodnoty  $y(\infty)$  použijeme vzťah (4.5):

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} [sY(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2,5}{1,5s + 1} = 2,5 \quad (4.12)$$

Vidíme, že hodnota výstupu v nekonečne je rovná hodnote zosilnenia.

Pre výpočet prechodovej charakteristiky rozdelíme  $Y(s)$  na parciálne zlomky. Korene menovateľa sú reálne a navzájom rôzne, preto

$$\frac{2,5}{s(1,5s + 1)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{1,5s + 1} \quad (4.13)$$

$K_1$  a  $K_2$  vypočítame z rovníc

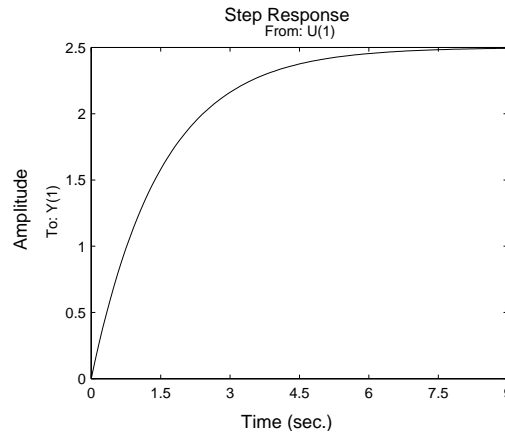
$$\left. \begin{array}{l} s^1 : 1,5K_1 + K_2 = 0 \\ s^0 : K_1 = 2,5 \end{array} \right\} K_1 = 5/2, K_2 = -15/4 \quad (4.14)$$

Rovnicu prechodovej funkcie získame spätnou Laplaceovou transformáciou

$$y(t) = 2,5 \left( 1 - e^{-\frac{2}{3}t} \right) = Z \left( 1 - e^{-\frac{1}{T}t} \right) \quad (4.15)$$

Pre overenie koncovej hodnoty  $y(\infty)$  môžeme dosadiť do tohoto vzťahu  $t = \infty$  a vidíme, že naozaj  $y(\infty) = 2,5$ .

Prechodová charakteristika dynamického systému (4.7) je znázornená na obr. 4.1. Vidíme, že nová ustálená hodnota výstupu je  $Z$ . Pomocou prechodovej charakteristiky taktiež môžeme overiť, že v čase  $t = T = 1,5$  dosiahne výstup 63% svojej novej ustálenej hodnoty  $Z$ , čo je 1,58.



Obr. 4.1 Prechodová charakteristika k príkladu 4.2.1

### Príklad 4.2.2: PF a PCH systému druhého rádu

Majme dynamický systém opísaný diferenciálnou rovnicou druhého rádu

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2u(t) \quad (4.16)$$

s nulovými začiatočnými podmienkami, t.j.  $y(0) = y'(0) = 0$

Úlohou je nájsť prechodovú funkciu systému, čiže riešenie diferenciálnej rovnice  $y(t)$  pre  $t \geq 0$  ak  $u(t) = 1$ . Ďalej je potrebné na základe obrazu prechodovej funkcie systému určiť hodnotu  $y(\infty)$ .

**Riešenie:**

Po urobení Laplaceovej transformácie diferenciálnej rovnice (4.16) dostaneme

$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) = 2U(s) \quad (4.17)$$

a prenos je daný ako

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2}{s^2 + 3s + 2} \quad (4.18)$$

Po dosadení za  $U(s) = 1/s$  získame obraz prechodovej funkcie

$$Y(s) = \frac{2}{s(s^2 + 3s + 2)} \quad (4.19)$$

$$= \frac{2}{s(s+1)(s+2)} \quad (4.20)$$

Pre výpočet hodnoty  $y(\infty)$  použijeme vzťah (4.5):

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} [sY(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2}{(s+1)(s+2)} = 1 \quad (4.21)$$

Podobne, ak by sme potrebovali vypočítať napríklad hodnotu  $y'(\infty)$ , urobíme najprv Laplaceovu transformáciu  $y'(t)$  a dostaneme funkciu  $F(s) = sY(s)$ . Opäť použijeme vzťah (4.5):

$$y'(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} [s^2Y(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2s}{(s+1)(s+2)} = 0 \quad (4.22)$$

Pre výpočet prechodovej funkcie rozdelíme  $Y(s)$  na parciálne zlomky. Korene menovateľa sú reálne a navzájom rôzne, preto

$$\frac{2}{s(s+1)(s+2)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+1} + \frac{K_3}{s+2} \quad (4.23)$$

$K_1$ ,  $K_2$  a  $K_3$  vypočítame z rovníc

$$\left. \begin{array}{l} s^2 : K_1 + K_2 + K_3 = 0 \\ s^1 : 3K_1 + 2K_2 + K_3 = 0 \\ s^0 : 2K_1 = 2 \end{array} \right\} K_1 = 1, K_2 = -2, K_3 = 1 \quad (4.24)$$

Ďalšou možnosťou, ako získať  $K_1$ ,  $K_2$  a  $K_3$  bez nutnosti riešenia systému rovníc je nasledovný postup: Rovnicu (4.23) postupne násobíme jednotlivými menovateľmi parciálnych zlomkov. Dostaneme

$$\frac{2}{(s+1)(s+2)} = K_1 + \frac{K_2}{s+1} + \frac{K_3}{s+2}, \quad \text{pre } s = 0 \quad (4.25)$$

$$\frac{2}{s(s+2)} = \frac{K_1}{s} + K_2 + \frac{K_3}{s+2}, \quad \text{pre } s = -1 \quad (4.26)$$

$$\frac{2}{s(s+1)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+1} + K_3, \quad \text{pre } s = -2 \quad (4.27)$$

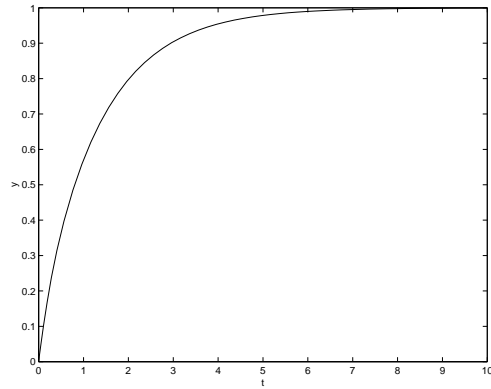
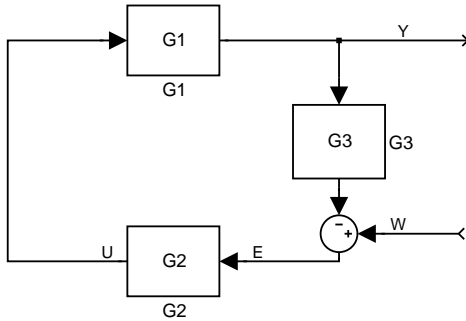
## 4.2. RIEŠENÉ PRÍKLADY

Po dosadení za  $s$  získame z každej rovnice priamo zodpovedajúce hodnoty  $K_i$ . Tento postup je použiteľný v prípade, ak sú všetky korene reálne a rôzne, v prípade reálnych násobných koreňov sa tak dajú vypočítať iba koeficienty pri najvyšších mocninách menovateľa.

Spätnou Laplaceovou transformáciou  $Y(s)$  získame prechodovú funkciu v tvare

$$y(t) = 1 - 2e^{-t} + e^{-2t} \quad (4.28)$$

Pre overenie koncovkej hodnoty  $y(\infty)$  môžeme dosadiť do tohoto vzťahu  $t = \infty$  a vidíme, že naozaj  $y(\infty) = 1$ . Podobne, po zderivovaní rovnice (4.28) a dosadení získame  $y'(\infty) = 0$ , z čoho vyplýva, že výstup je ustálený.



Obr. 4.2 Bloková schéma k príkladu 4.2.3

Obr. 4.3 Prechodová charakteristika z príkladu 4.2.3

### Príklad 4.2.3:

Dynamický systém znázornený na obr. 4.2 sa skladá z čiastkových systémov s prenosmi v tvare

$$G_1 = \frac{1}{s+4}, \quad G_2 = \frac{3+s}{s}, \quad G_3 = \frac{10}{s+10} \quad (4.29)$$

1. Určte prechodovú funkciu celého systému – odozvu výstupnej veličiny  $y$  na jednotkovú skokovú zmenu vstupu  $w$ .
2. Určte hodnotu výstupu v nekonečne.

### Riešenie:

Prvým krokom je určenie prenosu medzi výstupom  $y$  a vstupom  $w$ . Budeme postupovať od výstupu proti smeru šírenia signálov. Na základe blokovej schémy môžeme písať

$$Y(s) = G_1(s)U(s) = G_1(s)G_2(s)E(s) = G_1(s)G_2(s)(W(s) - G_3(s)Y(s)) \quad (4.30)$$

a potom

$$G(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2 G_3} \quad (4.31)$$

Obraz prechodovej funkcie dynamického systému z obr. 4.2 je

$$Y(s) = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2 G_3} W(s) = \frac{s^2 + 13s + 30}{s^3 + 14s^2 + 50s + 30} \frac{1}{s} \quad (4.32)$$

Korene menovateľa  $Y(s)$  sú reálne a rôzne:  $-8,5800$ ;  $-4,6715$ ;  $-0,7485$ ;  $0$ . Rozložením na parciálne zlomky získame

$$Y(s) = \frac{0,0302}{s + 8,5800} - \frac{0,1243}{s + 4,6715} - \frac{0,9058}{s + 0,7485} + \frac{1}{s} \quad (4.33)$$

a spätnou transformáciou

$$y(t) = 0,0302e^{-8,5800t} - 0,1243e^{-4,6715t} - 0,9058e^{-0,7485t} + 1 \quad (4.34)$$

Limitná hodnota výstupu v nekonečne sa dá získať z rovnice (4.32). Platí

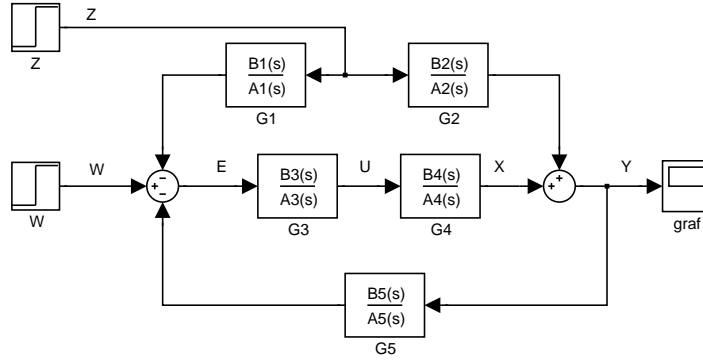
$$y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = 1 \quad (4.35)$$

Priebeh prechodovej charakteristiky je znázornený na obr. 4.3.

### 4.3 Úlohy

#### Príklad 4.3.1:

Majme dynamický systém reprezentovaný blokovou schémou znázornenou na obr. 4.4.



Obr. 4.4 Bloková schéma pre úlohy 4.3.1, 4.3.2

1. Odvoďte obraz  $Y(s)$  ako funkciu  $W(s)$  a  $Z(s)$  na základe obr. 4.4.
2. Viete, že  $w(t) = 1$ ,  $z(t) = 0$ . Určte minimálnu realizáciu prenosu  $G_W(s) = Y(s)/W(s)$  (v MATLABe použitím funkcie `minreal`).
3. Výpočet výsledného prenosu  $G_w(s) = Y(s)/W(s)$  overte simulačne. Použite simulinkový program `pch4tw`, kde zdefinujete prenosy `G1` – `G5`, vložíte čitateľ a menovateľ vypočítaného prenosu do bloku výsledného prenosu `GW` (nie je znázornený na obr. 4.4), do bloku `W` zadáte jednotkový skok a do bloku `Z` zadáte nulu. Simuláciou získate prechodovú charakteristiku aj pôvodného systému aj systému opísaného výsledným prenosom. Ak v grafe vidíte len jednu čiaru (obe PCH sú totožné), je prenos určený správne.

### 4.3. ÚLOHY

4. Za predpokladu, že  $w(t) = 1$ ,  $z(t) = 0$ , vyjadrite Laplaceov obraz prechodovej funkcie dynamického systému z obr. 4.4 a z neho vypočítajte hodnotu  $y(\infty)$ .
5. Spätnou Laplaceovou transformáciou vypočítajte prechodovú funkciu  $y(t)$ .
6. Výpočet prechodovej funkcie overte dosadením niekoľkých časov do prechodovej funkcie a porovnaním príslušných hodnôt výstupu s výsledkami simulácie.

		$G_1(s)$	$G_2(s)$	$G_3(s)$	$G_4(s)$	$G_5(s)$
Príklady zadání	1	$\frac{1}{4s+1}$	$\frac{2}{3s+1}$	$\frac{4s+1}{3s+1}$	$\frac{1}{4s+1}$	0
	2	$\frac{1}{4s+1}$	$\frac{4}{5s+1}$	$\frac{4s+1}{3s+1}$	$\frac{4}{5s+1}$	0
	3	$\frac{1}{4s+1}$	$\frac{4}{5s+1}$	$\frac{4s+1}{3s+1}$	$\frac{4}{5s+1}$	1

#### Príklad 4.3.2:

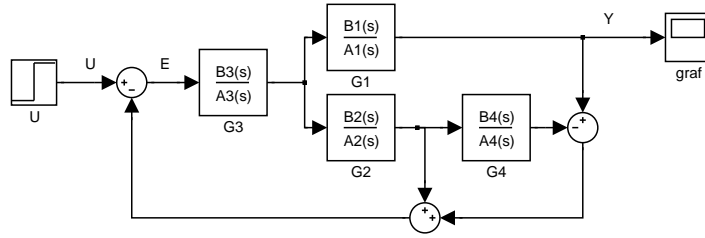
Majme dynamický systém reprezentovaný blokovou schémou znázornenou na obr. 4.4.

1. Odvoďte obraz  $Y(s)$  ako funkciu  $W(s)$  a  $Z(s)$  na základe obr. 4.4.
2. Viete, že  $w(t) = 0$ ,  $z(t) = 1$ . Určte minimálnu realizáciu prenosu  $G_Z(s) = Y(s)/Z(s)$  (v MATLABe použitím funkcie `minreal`).
3. Výpočet výsledného prenosu  $G_Z(s) = Y(s)/Z(s)$  overte simulačne. Použite simulinkový program `pch4tz`, kde zadefinujete prenosy **G1** – **G5**, vložíte čitateľ a menovateľ vypočítaného prenosu do bloku výsledného prenosu **GZ** (nie je znázornený na obr. 4.4), pričom do bloku **Z** zadáte jednotkový skok a do bloku **W** zadáte nulu. Simuláciou získate prechodovú charakteristiku aj pôvodného systému aj systému opísaného výsledným prenosom. Ak v grafe vidíte len jednu čiaru (obe PCH sú totožné), je prenos určený správne.
4. Za predpokladu, že  $w(t) = 0$ ,  $z(t) = 1$ , vyjadrite Laplaceov obraz prechodovej funkcie dynamického systému z obr. 4.4 a z neho hodnotu vypočítajte  $y(\infty)$ .
5. Spätnou Laplaceovou transformáciou vypočítajte prechodovú funkciu  $y(t)$ .
6. Výpočet prechodovej funkcie overte dosadením niekoľkých časov do prechodovej funkcie a porovnaním príslušných hodnôt výstupu s výsledkami simulácie.

		$G_1(s)$	$G_2(s)$	$G_3(s)$	$G_4(s)$	$G_5(s)$
Príklady zadání	1	$\frac{1}{4s+1}$	$\frac{2}{3s+1}$	$\frac{4s+1}{3s+1}$	$\frac{1}{4s+1}$	0
	2	$\frac{1}{4s+1}$	$\frac{4}{5s+1}$	$\frac{4s+1}{3s+1}$	$\frac{4}{5s+1}$	0
	3	$\frac{1}{4s+1}$	$\frac{4}{5s+1}$	$\frac{4s+1}{3s+1}$	$\frac{4}{5s+1}$	1

#### Príklad 4.3.3:

Majme dynamický systém reprezentovaný blokovou schémou znázornenou na obr. 4.5.



Obr. 4.5 Bloková schéma pre úlohu 4.3.3.

1. Odvodte prenosy

$$\frac{E(s)}{U(s)}, \quad \frac{Y(s)}{E(s)}, \quad \frac{Y(s)}{U(s)} \quad (4.36)$$

2. Na simulačné overenie správnosti výsledného prenosu  $G(s) = Y(s)/U(s)$  použite simulinkový program pch2t, kde zadefinujete prenosy G1 – G4, vložíte čitateľ a menovateľ vypočítaného prenosu do bloku výsledného prenosu G (nie je znázornený na obr. 4.5). Simuláciou získate prechodovú charakteristiku aj pôvodného systému aj systému opísaného výsledným prenosom. Ak v grafe vidíte len jednu čiaru (obe PCH sú totožné), je prenos určený správne.
3. Určte z Laplaceovho obrazu prechodovej funkcie  $Y(s)$  hodnoty  $y(0)$ ,  $y(\infty)$  (vstupný signál je  $u(t) = 1$ ).
4. Vypočítajte prechodovú funkciu  $y(t)$ , ak vstupný signál je  $u(t) = 1$ .
5. Výpočet prechodovej funkcie overte dosadením niekoľkých časov do prechodovej funkcie a porovnaním príslušných hodnôt výstupu s výsledkami simulácie.

#### Príklady zadání

	$G_1(s)$	$G_2(s)$	$G_3(s)$	$G_4(s)$
1	$\frac{s+2}{s^2+3s+1}$	$\frac{1}{s^2+3s+1}$	4	2
2	$\frac{3s+4}{2s^2+2s+1}$	$\frac{1}{2s^2+2s+1}$	10	4
3	$\frac{-s+1}{s^2+2s+1}$	$\frac{1}{s^2+2s+1}$	1	3

#### Príklad 4.3.4:

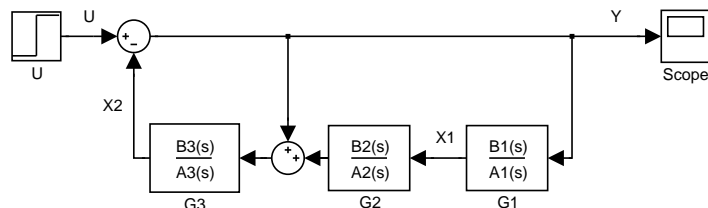
Majme dynamický systém reprezentovaný blokovou schémou znázornenou na obr. 4.6.

1. Odvodte prenosy

$$\frac{X_1(s)}{U(s)}, \quad \frac{X_2(s)}{U(s)}, \quad \frac{Y(s)}{U(s)} \quad (4.37)$$

2. Na simulačné overenie správnosti výsledného prenosu  $G(s) = Y(s)/U(s)$  použite simulinkový program pch3t, kde zadefinujete prenosy G1 – G3, vložíte čitateľ a

#### 4.4. NERIEŠENÉ PRÍKLADY



Obr. 4.6 Bloková schéma pre úlohu 4.3.4.

menovateľ vypočítaného prenosu do bloku výsledného prenosu  $G$  (nie je znázorňovaný na obr. 4.6). Simuláciou získate prechodovú charakteristiku aj pôvodného systému aj systému opísaného výsledným prenosom. Ak v grafe vidíte len jednu čiaru (obe PCH sú totožné), je prenos určený správne.

- Určte z Laplaceovho obrazu prechodovej funkcie  $Y(s)$  hodnoty  $y(0)$ ,  $y(\infty)$  (vstupný signál je  $u(t) = 1$ ).
- Vypočítajte prechodovú funkciu  $y(t)$ , ak vstupný signál je  $u(t) = 1$ .
- Výpočet prechodovej funkcie overte dosadením niekoľkých časov do prechodovej funkcie a porovnaním príslušných hodnôt výstupu s výsledkami simulácie.

Príklady zadání

	$G_1(s)$	$G_2(s)$	$G_3(s)$
1	$\frac{s+2}{3s+1}$	$\frac{3}{4s+1}$	$\frac{4}{5s+1}$
2	$\frac{s-2}{2s+1}$	$\frac{2}{5s+1}$	$\frac{3}{4s+1}$
3	$\frac{s-1}{s+1}$	$\frac{4}{2s+1}$	$\frac{2}{3s+1}$

#### 4.4 Neriešené príklady

##### Príklad 4.4.1:

Vypočítajte prechodovú funkciu pre systém opísaný diferenciálnou rovnicou:

- $y'(t) + 3y(t) = u(t)$
- $y''(t) + y(t) = -2u(t)$
- $y''(t) + y'(t) + y(t) = 2u(t)$
- $y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = -u(t)$
- $y''(t) + 2y'(t) - 3y(t) = 4u(t)$

Riešenie:

- $y(t) = 1/3 - 1/3 e^{-3t}$
- $y(t) = -2 + 2 \cos(t)$



3.  $y(t) = 2 - 2e^{-t/2} \cos(\sqrt{3}t/2) - 2/3 \sqrt{3}e^{-t/2} \sin(\sqrt{3}t/2)$
4.  $y(t) = -1/2(1 - e^{-t} \sin(t) - e^{-t} \cos(t))$
5.  $y(t) = -4/3 + e^t + 1/3 e^{-3t}$

**Príklad 4.4.2:**

Vypočítajte prechodovú funkciu pre systém daný prenosom:

1.  $G(s) = \frac{(s+1)(s+2)}{(s+3)^2}$
2.  $G(s) = \frac{s-1}{s+1}$
3.  $G(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s+2)}$

**Riešenie:**

1.  $y(t) = -2/3 te^{-3t} + 7/9 e^{-3t} + 2/9$
2.  $y(t) = 2e^{-t} - 1$
3.  $y(t) = 1/2 - 2/5 \cos(t) - 1/5 \sin(t) - 1/10 e^{-2t}$

## 4.5 MATLAB: príkazy k problematike

Označenie: premenné `nula`, `pol` sú vektory, premenné `citatel`, `menovatel` sú polynómy.

**vytvorenie prenosovej funkcie** `g=tf(citatel, menovatel)`,

**prechodová charakteristika** `step(citatel, menovatel)`,

**rozklad na parciálne zlomky** `[r,p,k]=residue(citatel,menovatel)`, kde `r` je vektor koeficientov čitateľov, `p` je vektor zodpovedajúcich pólov a `k` je absolútny člen.

Táto funkcia je veľmi dobre použiteľná, ak má Laplaceov obraz v menovateli iba reálne korene. V prípade komplexných koreňov menovateľa treba tieto ešte sčítať.

**minimálna realizácia prenosovej funkcie** `g = minreal(g)`,

**získanie polynómov čitateľa a menovateľa z prenosovej funkcie**

`[citatel,menovatel]=tfdata(g,'v')`.

## 4.6 Overenie výsledkov úloh pomocou MILABu

Na hlavnej stránke LCZA (<http://www.kirp.chnik.stuba.sk/lcza>) sa nachádzajú HTML resp. PHP skripty programov, vytvorené v MILABe, ktoré možno použiť na overenie správnosti riešenia príkladov 4.3.1 – 4.3.4. Výsledný prenos sa dá overiť nasledujúcim spôsobom:

**Vo vstupnom formulári**

- zadajte čitateľa a menovateľa prenosov  $G_1(s)$ ,  $G_2(s)$  až  $G_n(s)$  ( $n$  závisí od čísla príkladu)
- zadajte čitateľ a menovateľ výsledného prenosu
- kliknite na ikonu „Spracovať“

MILAB zobrazí výsledok, ktorý pozostáva z

- výpisu jednotlivých prenosov
- blokovej schémy
- prechodových charakteristík (vypočítanej a správnej)
- vyhlásenia o (ne)správnosti riešenia

**Poznámka:** Správnosť riešenia je vo všetkých príkladoch kontrolovaná na základe rozdielu PCH vypočítaného a správneho výsledného prenosu systému.

**Príklad:** Majme blokovú schému znázornenú na obr. 4.6, kde

$$G_1(s) = \frac{b_1 s + b_0}{a_1 s + 1} \quad G_2(s) = \frac{b_2}{a_2 s + 1} \quad G_3(s) = \frac{b_3}{a_3 s + 1}$$

kde

$$b_1 = 2, b_0 = 3, a_1 = 1, b_2 = 2, a_2 = 3, b_3 = 2, a_3 = 1$$

Pre dané parametre je vypočítaná minimálna realizácia prenosu  $G(s)$  v tvare:

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{s^3 + 2,3333s^2 + 1,6667s + 0,3333}{s^3 + 4,3333s^2 + 7s + 5}$$

**Zápis v MILABe:** HTML/PHP skript programu pch3t.

**Parametre prenosu  $G_1(s)$ :**  $b_1 = 2$   
 $b_0 = 3$   
 $a_1 = 1$

**Parametre prenosu  $G_2(s)$ :**  $b_2 = 2$   
 $a_2 = 3$

**Parametre prenosu  $G_3(s)$ :**  $b_3 = 2$   
 $a_3 = 1$

**Čitateľ výsledného prenosu  $G(s):B(s) = [1, 2.3333, 1.6667, 0.3333]$**   
**Menovateľ výsledného prenosu  $G(s):A(s) = [1, 4.3333, 7, 5]$**



## Kapitola 5

# Póly a nuly prenosových funkcií systémov

Cieľom cvičenia je zoznámiť sa s vplyvom pólov a núl na dynamiku systémov.

### 5.1 Prehľad pojmov

**Póly** – korene menovateľa prenosu.

**Nuly** – korene čitateľa prenosu.

**Rád dynamického systému** – stupeň polynómu v menovateli prenosu.

**Stabilita** – dynamický systém je stabilný, ak všetky jeho póly majú zápornú reálnu časť.

Systém je na hranici stability, ak má alebo jeden reálny pól nulový alebo dvojicu komplexných pólov s nulovou reálnou časťou (a ostatné póly so zápornou reálnou časťou). Systém je nestabilný, ak má aspoň jeden pól s kladnou reálnou časťou.

**Stabilná nula (pól)** – nula (pól) so zápornou reálnou časťou.

**Fázovosť** – systém je minimálne fázový, ak všetky jeho nuly majú zápornú reálnu časť.

V opačnom prípade je neminimálne fázový. Ak je v čitateli prenosu len konštanta, potom je dynamický systém minimálne fázový.

**Periodicita** – systém je periodický (kmitavý), ak má komplexné póly. Ak má systém len reálne póly, potom je aperiodický (nekmitavý).

**Prenos** – všeobecný tvar prenosu systému s 1 vstupom a 1 výstupom je

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_ms^m + \dots + b_1s + b_0}{a_ns^n + \dots + a_1s + a_0} \quad (5.1)$$

**Statické zosilnenie** – je definované ako  $b_0/a_0$  (počíta sa pre stabilné systémy).

**Prenos v tvare pólov a núl** – je opísaný nasledovne

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = k \frac{(s - s_{c1})(s - s_{c2}) \dots (s - s_{cm})}{(s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n)} \quad (5.2)$$

kde  $s_1, \dots, s_n$  sú póly a  $s_{c1}, \dots, s_{cm}$  sú nuly.

**Charakteristická rovnica** – je to rovnica  $A(s) = 0$ .

**Jednotkový impulz** – impulz nekonečnej výšky a nulovej šírky s jednotkovou plochou.

**Impulzná funkcia** – odozva systému na jednotkový impulz. Impulzná funkcia je deriváciou prechodovej funkcie.

**Impulzná charakteristika** – graf impulznej funkcie. Impulzná charakteristika je deriváciou prechodovej charakteristiky.

### 5.2 Súvislosti medzi prechodovými charakteristikami a umiestnením pólov a núl

Na základe analýzy dynamických vlastností systémov môžeme vysloviť nasledovné tvrdenia:

- Ak sa prechodová charakteristika ušľahuje na nejakej nenulovej hodnote  $Z$ , systém je stabilný (všetky póly majú zápornú reálnu časť) a jeho zosilnenie je  $Z$ . V opačnom prípade je systém na hranici stability alebo nestabilný a niektoré póly majú nulovú alebo kladnú reálnu časť.
- Zosilnenie systému sa dá vypočítať z prenosu, ak dosadíme za argument Laplaceovej transformácie  $s = 0$ .
- Ak sa prechodová charakteristika ušľahuje na nulovej hodnote, systém obsahuje v čitateli aspoň jednu nulu  $s_c = 0$ , má derivačné vlastnosti.
- Ak prechodová charakteristika kmitá, systém obsahuje aj komplexne združené póly. Opačné tvrdenie však nemusí platiť.
- Ak sa prechodová charakteristika najprv vychýli na opačnú stranu, ako sa nakoniec ustáli, v čitateli prenosu systému sa vyskytuje nestabilná nula  $s_c > 0$ . V prípade, že prechodová charakteristika sa vychýli viackrát na opačnú stranu, počet vychýlení udáva počet nestabilných núl.
- Ak potrebujeme priradiť viacerým prechodovým charakteristikám prenosy, tak si všimame tieto vlastnosti: stabilná–nestabilná, minimálne–neminimálne fázová, aperiódická (nekmitavá)–periódická (kmitavá). To isté aplikujeme na prenosy. Takto sa nám výrazne zjednoduší ich následné priradenie.
- Polynóm prvého a druhého rádu má záporné korene (je stabilný), ak má iba kladné koeficienty. Ak má polynóm vyššieho rádu niektoré koeficienty záporné, potom má aj kladné korene (je nestabilný).
- Pre výpočet začiatočných alebo konečných hodnôt výstupu dynamického systému, prípadne jeho derivácií používame vety o začiatočnej a konečnej hodnote na základe obrazu výstupu  $Y(s)$ . Pri výpočte konečnej hodnoty musí byť dynamický systém stabilný.

## 5.3 Riešené príklady

### Príklad 5.3.1:

Majme dynamický systém opísaný prenosom

$$G(s) = \frac{s-1}{s^2+3s+2}$$

1. Určte jeho póly a nuly a posúďte stabilitu, periodicitu a fázovosť.
2. Vypočítajte limitné hodnoty výstupu zo systému  $y(0)$ ,  $y'(0)$ ,  $y(\infty)$ ,  $y'(\infty)$ , ak je na jeho vstupe jednotkový skok.
3. Vykreslite na počítači prechodovú charakteristiku a porovnajte jej limitné hodnoty s vypočítanými.

### Riešenie:

1. Póly:  $s_1 = -2$ ,  $s_2 = -1$ , nuly  $s_{c1} = 1$ . Systém je stabilný, aperiodický (nekmitavý) a neminimálne fázový.
2. Limitné hodnoty pri jednotkovom skoku vstupnej veličiny  $U(s) = 1/s$ :

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{s-1}{s^2+3s+2} \frac{1}{s}$$

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0} y(t) &= \lim_{s \rightarrow \infty} sY(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s-1}{s^2+3s+2} \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1/s - 1/s^2}{1 + 3/s + 2/s^2} = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0} y'(t) &= \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 Y(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} sG(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2 - s}{s^2 + 3s + 2} \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1 - 1/s}{1 + 3/s + 2/s^2} = 1\end{aligned}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s-1}{s^2+3s+2} = -0,5$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y'(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 Y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = 0$$

Z vypočítaných hodnôt môžeme dedukovať, že PCH začína v nule stúpajúc (hodnota derivácie v nule je kladná) a končí na hodnote  $-0,5$ . V nekonečne je ustálená, pretože hodnota derivácie výstupu je nulová.

3. Overenie správnosti riešenia na počítači:

Póly: `roots([1 3 2])`,

Graf pólov a núl: `pzmap([1 -1], [1 3 2])`,

Prechodová charakteristika: `step([1 -1], [1 3 2])`.

Výsledky získané pomocou MATLABu sú znázornené na obr. 5.1.

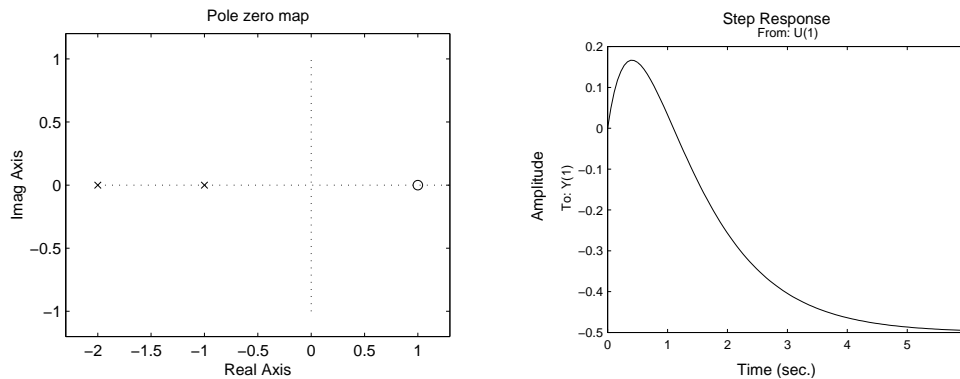
### Príklad 5.3.2:

Majme dynamický systém opísaný prenosom

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

1. Určte póly a nuly.
2. Určte stabilitu, fázovosť a kmitavosť systému.

## KAPITOLA 5. PÓLY A NULY PRENOSOVÝCH FUNKCIÍ SYSTÉMOV



Obr. 5.1 Poloha pólov a núl (vľavo), prechodová charakteristika (vpravo) pre príklad 5.3.1. Póly sú označené x a nuly o.

3. Nakreslite približnú prechodovú charakteristiku. Na počítači ju skontrolujte a zároveň vykreslite aj impulznú charakteristiku.

### Riešenie:

1. Póly:  $s_1 = -1$ , nuly nie sú.
2. Systém je stabilný, pretože má pól so zápornou reálnou časťou. Je nekmitavý, pretože pól je reálny a je minimálne fázový, pretože nemá žiadne nuly.
3. Keďže je systém stabilný, na približné určenie jeho PCH použijeme vetu o počiatkovej a koncovkej hodnote výstupu  $Y(s)$ , ak do systému vchádza vstup  $U(s) = 1/s$ . Platí:

$$\begin{aligned}
 Y(s) &= G(s)U(s) = \frac{1}{s(s+1)} \\
 \lim_{t \rightarrow 0} y(t) &= \lim_{s \rightarrow \infty} sY(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = 0 \\
 \lim_{t \rightarrow 0} y'(t) &= \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 Y(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} sG(s) = 1 \\
 \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = 1 \\
 \lim_{t \rightarrow \infty} y'(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} s^2 Y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = 0
 \end{aligned}$$

Z vypočítaných hodnôt môžeme dedukovať, že PCH začína v nule so stúpaním (smernicou 1) a v čase  $t \rightarrow \infty$  sa ušľahuje (je konštantná) na hodnote 1. Keďže systém má iba záporný reálny pól, je PCH aperiodická. Keďže je systém prvého rádu, nemá PCH inflexný bod.

Ak by ani tieto údaje nestačili na konštrukciu PCH, potom je potrebné spätnou Laplaceovou transformáciou  $Y(s)$  získať časový priebeh  $y(t)$ . Pre náš prípad by výsledok bol

$$y(t) = 1 - e^{-t}$$

Do tohto vzťahu môžeme dosadiť rôzne hodnoty  $t$  a získať tak hodnoty výstupu v príslušných časoch.

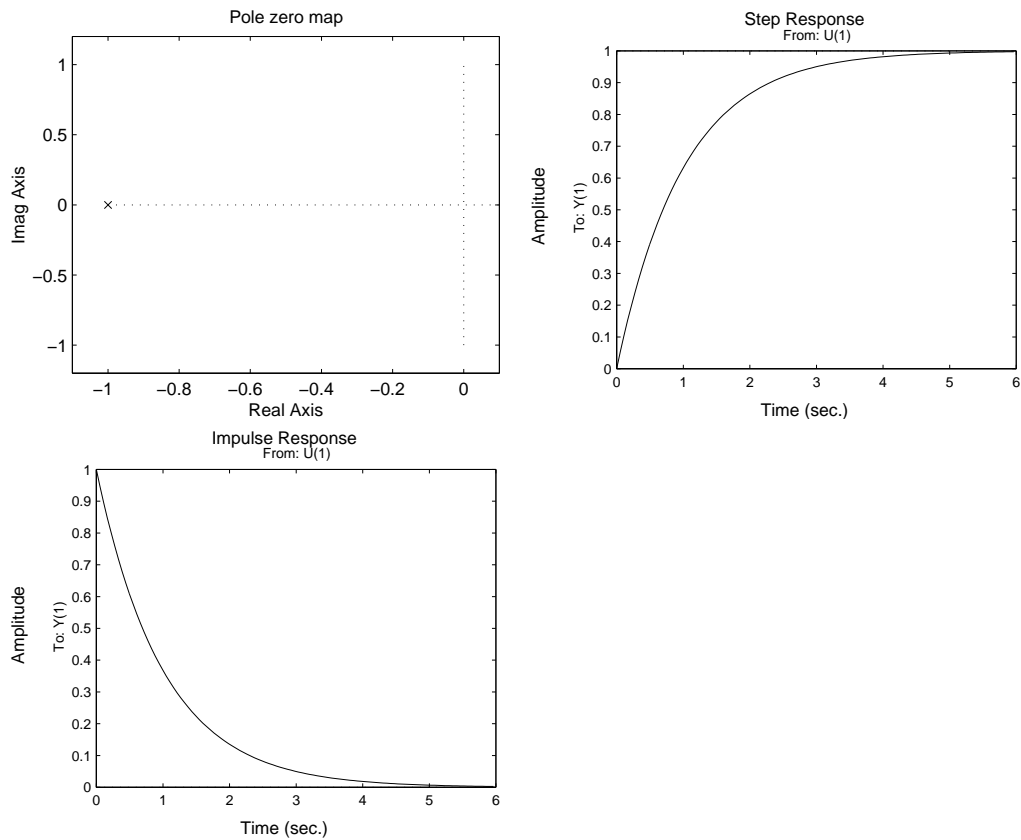
Overenie správnosti na počítači:

Póly: `roots([1 1])`,

### 5.3. RIEŠENÉ PRÍKLADY

Graf pólov a núl: `pzmap([1], [1 1])`,  
Prechodová charakteristika: `step([1], [1 1])`,  
Impulzná charakteristika: `impulse([1], [1 1])`.

Výsledky sú znázornené na obr. 5.2.



Obr. 5.2 Poloha pólov a núl (vľavo hore), prechodová charakteristika (vpravo hore) a impulzná charakteristika (dole) pre príklad 5.3.2. Póly sú označené x a nuly o.

#### Príklad 5.3.3:

Majme systém s prenosom

$$G(s) = \frac{s-1}{s+2}$$

1. Určte póly a nuly.
2. Určte limitné hodnoty výstupu zo systému  $y(0)$ ,  $y'(0)$ ,  $y(\infty)$ ,  $y'(\infty)$ , ak je na vstupe jednotkový skok.
3. Vykreslite na počítači prechodovú a impulznú charakteristiku a porovnajte limitné hodnoty s vypočítanými.

#### Riešenie:

1. Póly:  $s_1 = -2$ , nuly  $s_{c1} = 1$ . Systém je stabilný, aperiodický (nekmitavý) a neminimálne fázový.



## KAPITOLA 5. PÓLY A NULY PRENOSOVÝCH FUNKCIÍ SYSTÉMOV

2. Limitné hodnoty pri jednotkovom skoku  $U(s) = 1/s$ :

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s)U(s) = \frac{s-1}{s+2} \frac{1}{s} \\ \lim_{t \rightarrow 0} y(t) &= \lim_{s \rightarrow \infty} sY(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s-1}{s+2} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1-1/s}{1+2/s} = 1 \\ \lim_{t \rightarrow 0} y'(t) &= \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 Y(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} sG(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2-s}{s+2} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1-1/s}{1/s+2/s^2} = \infty \\ \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s-1}{s+2} = -0,5 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} y'(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} s^2 Y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = 0 \end{aligned}$$

Z vypočítaných hodnôt môžeme dedukovať, že PCH začína v jednotke a končí na hodnote  $-0,5$ . V nekonečne je ustálená, pretože hodnota derivácie výstupu je nulová. Hodnoty derivované charakterizujú impulznú charakteristiku, ktorá by mala začínať v nekonečne a ustalať sa na nule.

3. Overenie správnosti na počítači:

Póly: `roots([1 2])`,  
 Graf pólov a núl: `pzmap([1 -1], [1 2])`,  
 Prechodová charakteristika: `step([1 -1], [1 2])`.  
 Impulzná charakteristika: `impulse([1 -1], [1 2])`.

Výsledky sú znázornené na obr. 5.3. Z impulznej charakteristiky vidíme, že je určitý rozpor medzi vypočítanou a simulovanou hodnotou derivácie v čase nula. Dôvodom je skutočnosť, že výstupná veličina  $y(t)$  v čase  $t = 0$  nie je spojitá. Do času nula bola jej hodnota na základe definície Laplaceovej transformácie nulová a v čase nula sa skokovo zmenila na hodnotu 1. Preto je derivácia nespojitá, t.j. iná zľava a iná sprava. Hodnotu derivácie zľava  $y'(0_-)$  vypočítame z vety o počiatočnej hodnote  $y'(0)$ . Hodnotu derivácie sprava  $y'(0_+)$  získame tak, že vypočítame prechodovú funkciu, zderivujeme ju a dosadíme  $t = 0$ .

To, že graf prechodovej charakteristiky bude nespojitý v čase nula, zistíme na základe tvaru prenosu, v ktorom je *stupeň čitateľa rovný stupňu menovateľa*.

### Príklad 5.3.4:

Majme systém s prenosom  $G(s)$  so vstupom  $U(s)$  a výstupom  $Y(s)$  u ktorého poznáme umiestnenie pólov a núl (obr. 5.4 vľavo) a jeho prechodovú charakteristiku (obr. 5.4 vpravo). Na základe týchto informácií určite:

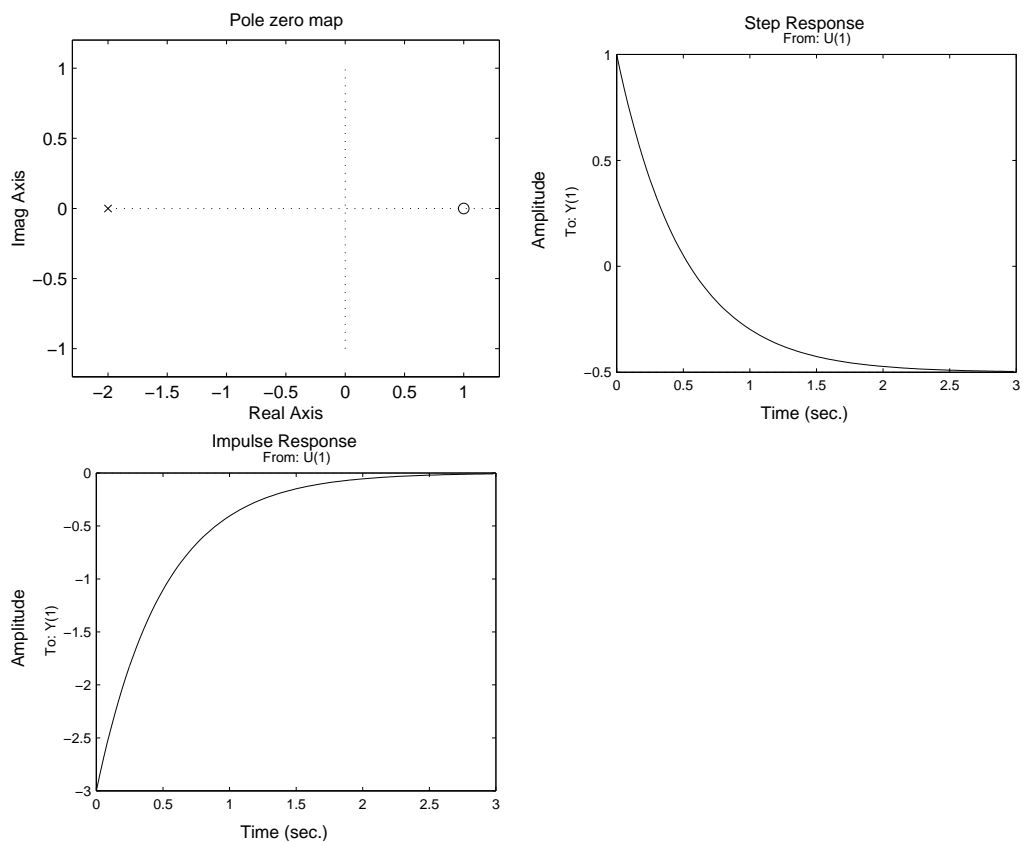
1. stabilitu systému, fázovosť,
2. prenos  $G(s)$ ,
3. hodnotu  $y'(0)$  na prechodovej charakteristike.

### Riešenie:

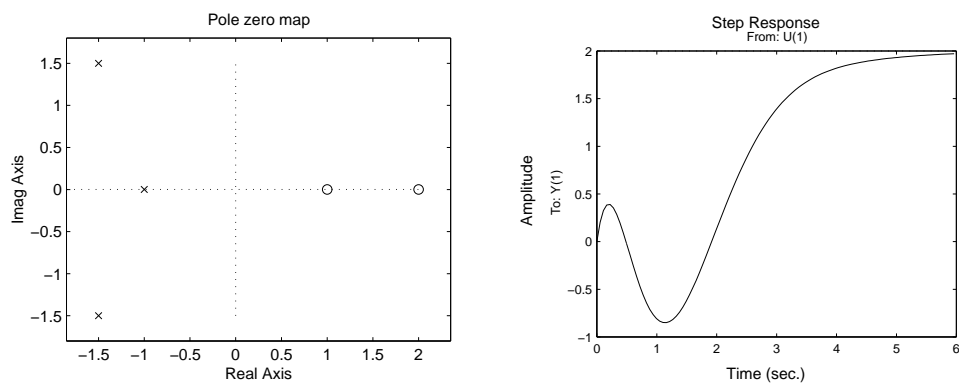
Z grafu pólov a núl zistíme póly  $s_1 = -1$ ,  $s_{2,3} = -1,5 \pm 1,5i$  a nuly  $s_{c1} = 1$ ,  $s_{c2} = 2$ .

1. Keďže všetky póly majú zápornú reálnu časť, systém je stabilný. Tomu nasvedčovala aj prechodová charakteristika, ktorá sa ustáľuje na hodnote  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 2$ . Keďže má systém dve nestabilné nuly, je neminimálne fázový, čo vidíme aj z prechodovej charakteristiky. Táto sa prvýkrát vychýli do kladných hodnôt a druhýkrát do záporných, aby sa nakoniec ustálila na kladnej hodnote 2.

### 5.3. RIEŠENÉ PRÍKLADY



Obr. 5.3 Poloha pólov a núl (vľavo hore), prechodová charakteristika (vpravo hore) a impulzná charakteristika (dole) pre príklad 5.3.3.



Obr. 5.4 Systém opísaný polohou pólov a núl (vľavo) a prechodovou charakteristikou (vpravo)

## KAPITOLA 5. PÓLY A NULY PRENOSOVÝCH FUNKCIÍ SYSTÉMOV

2. Prenos zapísaný pomocou pólov a núl je podľa rovnice (5.2):

$$G(s) = k \frac{(s-1)(s-2)}{(s+1)(s+1,5+1,5i)(s+1,5-1,5i)} = k \frac{(s-1)(s-2)}{(s+1)(s^2+3s+4,5)}$$

pre výpočet  $k$  použijeme graf prechodovej charakteristiky a  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ . Platí

$$Y(s) = G(s)U(s) = G(s)\frac{1}{s}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = k \frac{(-1)(-2)}{4,5} = 2 \Rightarrow k = 4,5$$

Hľadaný prenos má tvar

$$G(s) = \frac{4,5s^2 - 13,5s + 9}{s^3 + 4s^2 + 7,5s + 4,5}$$

Výsledok si môžeme overiť na počítači príkazmi:

```
cit=[4.5 -13.5 9]
men=[1 4 7.5 4.5]
pzmap(cit, men)
step(cit, men)
```

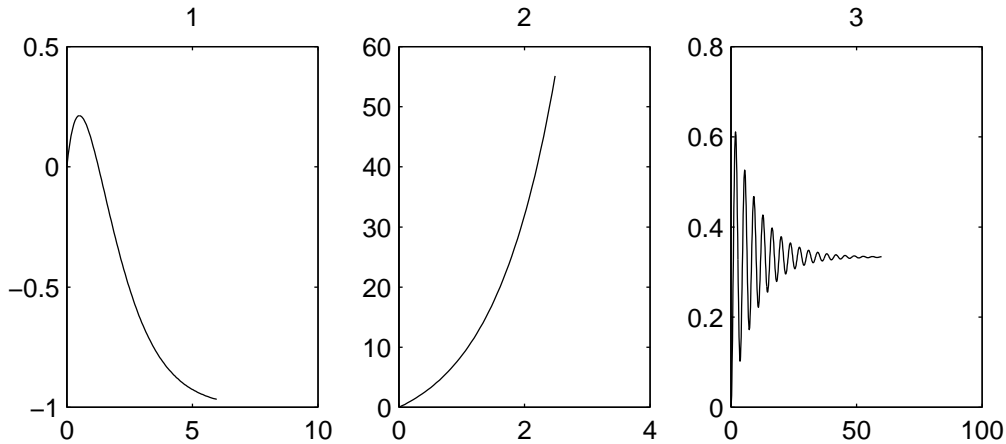
3. Hodnotu derivácie prechodovej charakteristiky v počiatku vypočítame na základe vety o počiatočnej hodnote

$$\lim_{t \rightarrow 0} y'(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 Y(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} sG(s) = 4,5$$

Z tejto hodnoty môžeme aj bez znalosti tvaru PCH určiť, že v čase  $t = 0$  PCH stúpa.

### Príklad 5.3.5:

Priradte prechodovým charakteristikám na obr. 5.5 prenosy. Vysvetlite svoje závery.



Obr. 5.5 Prechodové charakteristiky pre príklad 5.3.5.

**Návod:** Pre každú PCH posúďte, či je stabilná, na hranici stability alebo nestabilná; či je minimálne alebo neminimálne fázová; či je kmitavá alebo nie. Potom

## 5.4. ÚLOHY

odhadnite limitné hodnoty  $y(\infty)$  z grafu a porovnajajte s limitnými hodnotami vypočítanými pomocou prenosov.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & G(s) = \frac{1}{s+1}, & \text{b)} & G(s) = \frac{s-1}{s^2+2s+1}, & \text{c)} & G(s) = \frac{10}{s^2+6s+4}, \\ \text{d)} & G(s) = \frac{s}{s^2+1}, & \text{e)} & G(s) = \frac{5}{s-1}, & \text{f)} & G(s) = \frac{1}{s^2+1}, \\ \text{g)} & G(s) = \frac{1}{s(s^2+1)}, & \text{h)} & G(s) = \frac{1}{s^2+0,2s+3}. \end{array}$$

### Riešenie:

Na základe PCH môžeme o dynamických systémoch tvrdiť nasledovné:

	vlastnosti	$y(\infty)$
1	stabilný, aperiodický, neminimálne fázový	-1
2	nestabilný, aperiodický	$\infty$
3	stabilný, kmitavý	$\approx 0,33$

Z prenosov určíme nasledovné vlastnosti. Komplexné korene majú prenosy d), f), g) a h), ale d), f), g) sú na hranici stability, pretože reálne časti koreňov sú nulové. To by viedlo k nestabilným PCH. Z toho vyplýva, že prenosu h) patrí PCH v grafe 3. Neminimálne fázový je prenos b) a d). Výstup  $y(\infty)$  prenosu d) sa ale ustáľuje na nule, takže prenosu b) patrí PCH v grafe 1. Nestabilné, alebo na hranici stability sú prenosy d), e), f) a g). Keďže d), f), g) majú komplexné korene, mali by kmitavý priebeh. Prenosu e) teda patrí PCH v grafe 2.

Výpočet limitných hodnôt  $y(\infty)$  u nájdených prenosov iba potvrdí naše zistenia.

## 5.4 Úlohy

Oboznámte sa so vzťahom medzi pólmi a nulami, prenosmi a prechodovými charakteristikami základných typov dynamických systémov:

- systém prvého rádu:

$$G(s) = \frac{Z}{Ts+1} \quad (5.3)$$

- systém druhého rádu:

$$G(s) = \frac{Z}{T^2s^2 + 2\zeta Ts + 1} \quad (5.4)$$

pre prípady:  $\zeta = 1,5$ ;  $\zeta = 1$ ;  $\zeta = 0,4$ ;  $\zeta = 0$ ;  $\zeta = -0,4$ ;  $\zeta = -1,5$ .

- systém s integračnými vlastnosťami:

$$G(s) = \frac{1}{Ts} \quad (5.5)$$

- neminimálne fázový systém (nestabilná nula):

$$G(s) = \frac{-b_1s+1}{T^2s^2+2Ts+1}, \quad b_1 > 0 \quad (5.6)$$

## KAPITOLA 5. PÓLY A NULY PRENOSOVÝCH FUNKCIÍ SYSTÉMOV

Pre všetky všeobecne uvedené prenosy a pre zadané hodnoty parametrov:  $Z$ ,  $T$ ,  $b_1$  zostavte tabuľku obsahujúcu:

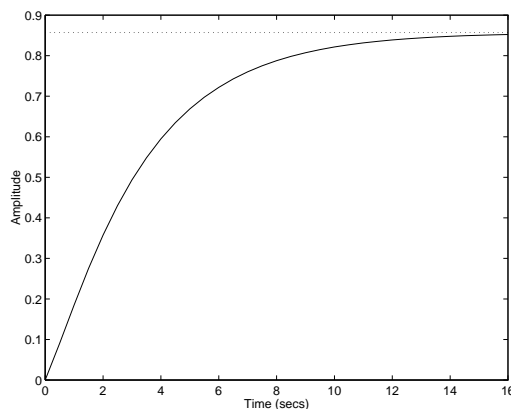
1. konkrétne prenosy,
2. číselné hodnoty pólov a núl pre dané prenosy,
3. určenie stability, periodicity a fázovosti dynamických systémov opísaných danými prenosmi,
4. limitné hodnoty výstupov  $y(\infty)$  za predpokladu jednotkových skokových funkcií na vstupoch dynamických systémov,
5. približný tvar prechodovej charakteristiky každého dynamického systému.

### 5.5 Neriešené príklady

#### Príklad 5.5.1:

Prenos systému s prechodovou charakteristikou na obrázku 5.6 je

1.  $G(s) = \frac{3s + 6}{18s^2 + 27s + 7}$
2.  $G(s) = \frac{3s - 6}{18s^2 + 27s + 7}$
3.  $G(s) = \frac{3s + 7}{18s^2 + 27s + 6}$
4.  $G(s) = \frac{3s - 7}{18s^2 + 27s + 6}$
5. žiadna z predošlých odpovedí nie je správna



Obr. 5.6 Prechodová charakteristika pre príklad 5.5.1.

**Riešenie:**

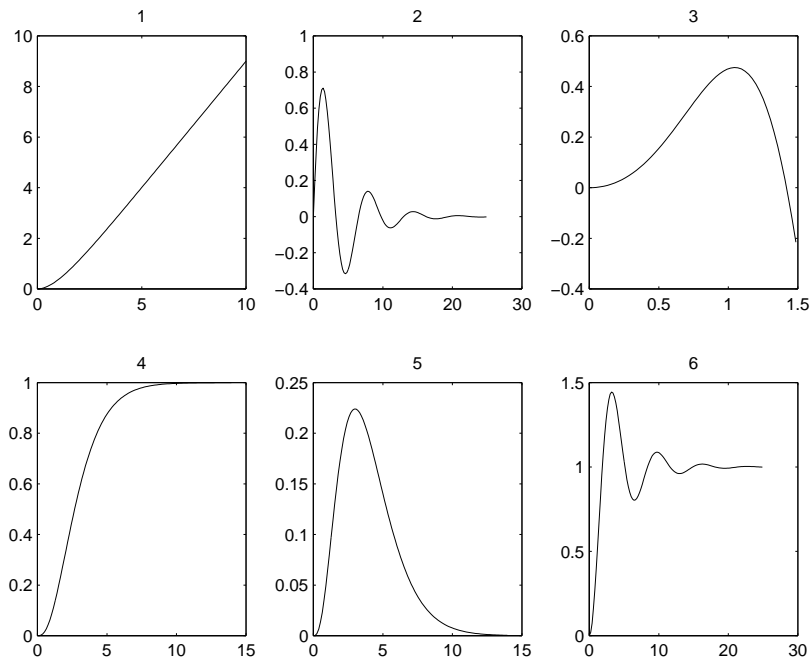
1

#### Príklad 5.5.2:

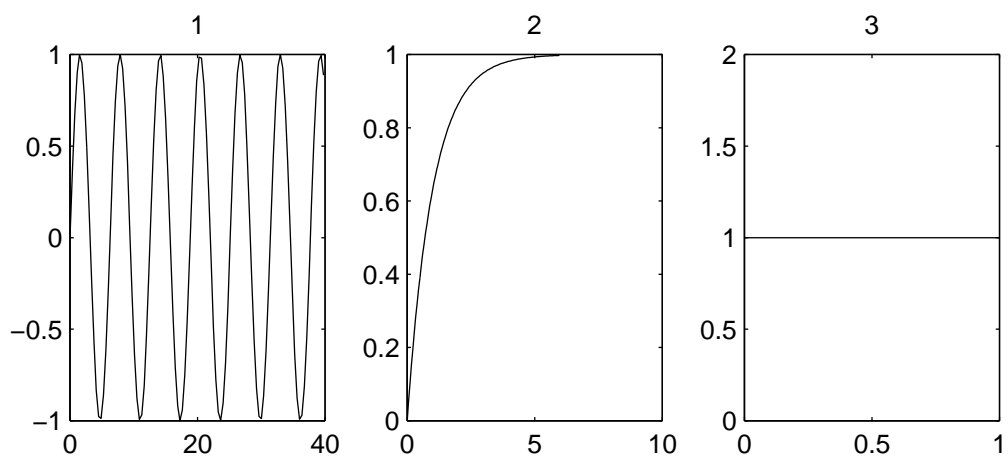
Prenos systému s prechodovou charakteristikou na obrázku 5.7 je

---

## KAPITOLA 5. PÓLY A NULY PRENOSOVÝCH FUNKCIÍ SYSTÉMŮV



Obr. 5.8 Prechodové charakteristiky pre príklad 5.5.3.



Obr. 5.9 Prechodové charakteristiky pre príklad 5.5.4.

### 5.6 MATLAB: príkazy k problematike

Označenie: premenné *nula*, *pol* sú vektory, premenné *p*, *citatel*, *menovatel* sú polynómy.

**korene polynómu** `roots(p)`,

**graf pólov a núl** - `pzmap(citatel, menovatel)`, póly v grafe sú označené x a nuly o,

**prechodová charakteristika** `step(citatel, menovatel)`,

**impulzná charakteristika** `impulse(citatel, menovatel)`,

**transformácia prenosu** `[cit,men]=zp2tf(nula,pol,k)` - z tvaru pólov a núl do polynómov  $B(s)$ ,  $A(s)$  (viď (5.2)), `[nula,pol,k]=tf2zp(cit,men)` - naopak.

V MATLABe 5 sa na základe vytvorenia systému (prenosu) konštrukciami `tf`, `zpk` zjednodušujú ostatné príkazy.

**vytvorenie systému (prenosu)** `sys=tf(num,den)` – pomocou čitateľa a menovateľa,  
`sys=zpk(nula,pol,k)` – pomocou pólov a núl,

**graf pólov a núl** `pzmap(sys)`,

**prechodová charakteristika** `step(sys)`,

**impulzná charakteristika** `impulse(sys)`.

### 5.7 MILAB: príkazy k problematike

Operácie MILABu k problematike tejto kapitoly sú súčasťou základných operácií (viď kapitola A.3):

- výpočet koreňov polynómov,
- prechodové a impulzné charakteristiky,
- graf pólov a núl,
- transformácia prenosu ZP2TF a TF2ZP.





## Kapitola 6

# Modelovanie procesov

Cieľom cvičení z modelovania je zvládnuť základy vytvárania matematických modelov dynamických systémov a ich použitia pre simuláciu dynamických vlastností riadených procesov a v ďalšom i pre syntézu regulátorov.

### 6.1 Prehľad pojmov

Teoretické (matematické) modely sa zostavujú na základe materiálových a energetických bilancií. Na získanie dynamických matematických modelov sa využívajú bilancie v neustálenom stave, pričom materiálová bilancia môže byť robená ako celková alebo ako bilancia zložiek, ako bilancia hmotnosti alebo látkového množstva. Matematické modely dynamiky procesov majú tvar diferenciálnych rovníc.

Na získanie modelu procesu, ktorý je v ustálenom stave (jeho veličiny sa v čase nemenia), použijeme buď materiálovú bilanciu sformulovanú napr. pre hmotnosti:

$$(\text{súčet hmotností vstupov}) = (\text{súčet hmotností výstupov})$$

alebo energetickú bilanciu:

$$(\text{súčet energií na vstupe}) + (\text{dodané teplo}) = (\text{súčet energií na výstupe}) + (\text{vykonaná práca})$$

Za dosť rozsiahlych zjednodušujúcich predpokladov (sústava nekoná prácu, zanedbateľné málo významné druhy energie, ...) sa energetická bilancia nazýva entalpickou.

V prietokovej sústave (ustálený nepretržitý vstup i výstup) treba namiesto hmotností, látkových množstiev, energií, tepiel bilancovať hmotnostné toky, mólové toky, tepelné toky.

Existujú rozličné spôsoby, ako vyjadriť teplo a tepelný tok. Najčastejšie je to:

- Teplo obsiahnuté v nejakom množstve látky o hmotnosti  $m$ , hmotnostnej tepelnej kapacite pri stálom tlaku (ďalej len hmotnostná tepelná kapacita)  $c_p$  a teplote  $\vartheta$ . Ak budeme uvažovať rovnakú referenčnú teplotu pre všetky objekty, potom  $Q = mc_p\vartheta$ .
- Tepelný tok prechádzajúci cez stenu o ploche  $F$  s definovaným koeficientom prechodu tepla  $\alpha$ , keď na teplejšej strane je teplota  $\vartheta_p$  a na chladnejšej teplota  $\vartheta$ . Tepelný tok je daný vzťahom  $\dot{Q} = F\alpha(\vartheta_p - \vartheta)$ .

- Reakčné teplo. Ak predpokladáme objem reakčnej zmesi  $V$ , rýchlosť reakcie na jednotku objemu reagujúcej zmesi  $\xi_V$  a reakčnú entalpiu ( $\Delta_r H$ ), potom  $Q_r = V(\Delta_r H)\xi_V$ .

V prípade, že sa veličiny procesu v čase menia, t.j. proces je v dynamickom stave, materiálové a energetické bilancie musia zohľadniť skutočnosť, že v systéme dochádza k akumulácii hmoty alebo energie.

Na získanie modelu dynamického procesu (jeho veličiny sa v čase menia), použijeme buď materiálovú bilanciu sformulovanú napr. pre hmotnosti:

$$(\text{súčet hmotnostných tokov na vstupe}) = (\text{súčet hmotnostných tokov na výstupe}) + (\text{rýchlosť akumulácie hmotnosti v systéme})$$

alebo energetickú bilanciu:

$$(\text{súčet tokov energie na vstupe}) + (\text{teplo dodané za jednotku času}) = (\text{súčet tokov energie na výstupe}) + (\text{práca vykonaná za jednotku času}) + (\text{rýchlosť akumulácie energie v systéme})$$

V prípade systémov s chemickou reakciou nesmieme zabudnúť, že nejaké množstvo látky i tepla môže vzniknúť (resp. zaniknúť) chemickou reakciou.

Člen, ktorý opisuje rýchlosť akumulácie hmotnosti v systéme (tzv. akumulačný člen), je daný na základe celkovej hmotnosti v systéme  $m$  vzťahom  $dm/dt$  (v prípade bilancie látkového množstva je to  $dn/dt$ ). Podobne, v prípade entalpickej bilancie je akumulačný člen daný vzťahom  $dQ/dt$ , kde  $Q$  je teplo obsiahnuté v systéme.

Pri zostavovaní modelu treba najskôr urobiť materiálovú alebo energetickú (entalpickú) bilanciu. Potom treba určiť známe konštanty alebo parametre, ktoré sú nemenné. Ich nemennosť môže vyplývať z rozmerov zariadenia, z konštantných fyzikálnych vlastností, atď. V ďalšom kroku treba definovať veličiny, ktoré sa budú získavať riešením diferenciálnych a algebraických rovníc modelu (stavové veličiny, prípadne výstupné veličiny). Nakoniec treba definovať veličiny, ktorých časový priebeh je daný okolím procesu (vstupné veličiny riadiace alebo vstupné veličiny poruchové). Model bude riešiteľný vtedy, ak sa počet rovníc, ktoré ho tvoria, bude rovnať počtu neznámych veličín, ktoré v ňom vystupujú.

### 6.1.1 Linearizácia

Všeobecne môžeme povedať, že funkcia je lineárna vzhľadom na nejakú premennú, ak derivácia tejto funkcie podľa danej premennej je konštantná. Inak je funkcia nelineárna.

Uvedieme niekoľko príkladov lineárnych a nelineárnych funkcií. Uvažujme funkciu jednej premennej  $f(x)$ . Napríklad  $f(x) = 2x + 5$  je lineárna vzhľadom na  $x$ , pretože sa pri ňom nachádza iba konštanta 2 a derivácia tejto funkcie podľa  $x$  je rovná 2. Funkcia  $f(x) = 4x^3$  už vzhľadom na  $x$  lineárna nie je, lebo obsahuje kubický člen. Podobne nie sú lineárne ani  $f(x) = 4\sqrt{x}$ ,  $f(x) = 4/x$ .

Ak uvažujeme funkciu dvoch premenných  $f(x, y)$ , potom  $f(x, y) = 2y + 3x^2$  je lineárna vzhľadom na  $y$  a nelineárna vzhľadom na  $x$ ,  $f(x, y) = 2x + 4y + 3b^2$ , kde  $b$  je nejaký parameter, je lineárna vzhľadom na  $x$  aj  $y$ . Ako príklad ďalších nelineárnych funkcií môžeme uvažovať  $f(x, y) = xy$ , ktorá je nelineárna vzhľadom aj na  $x$  aj na  $y$ , pretože ani jedna z premenných nie je násobená iba konštantou.

Linearizácia je založená na tom, že ľubovoľnú nelineárnu funkciu možno v okolí nejakého (pracovného) bodu aproximovať lineárnou závislosťou. V tom spočíva význam

## 6.1. PREHĽAD POJMOV

---

linearizácie, pretože na základe nej môžeme prepísať pôvodne zložitý nelineárny model chemickotechnologického procesu na jednoduchší lineárny, ktorý je vhodnejší pre účely riadenia.

Všeobecný postup pri linearizácii procesu opísaného diferenciálnou rovnicou pozostáva z viacerých krokov.

1. Napíšeme si nelineárny matematický model procesu v neustálenom stave.
2. Odčítame od neho model procesu v ustálenom stave.
3. Definujeme odchýlkové veličiny. Odchýlková veličina je definovaná ako rozdiel veličiny v neustálenom a ustálenom stave a predstavuje zmenu veličiny vzhľadom na ustálený stav. Obvykle budeme označovať odchýlkové vstupné riadiace veličiny ako  $u$ , odchýlkové vstupné poruchové veličiny ako  $r$  a odchýlkové stavové veličiny ako  $x$ . Veličiny v ustálenom stave, ktoré sú konštantné, budeme označovať názvom a horným indexom  $s$ , napr.  $x^s$ ,  $h^s$ .
4. Nelineárne členy aproximujeme Taylorovým rozvojom do prvého rádu (lineárnym), ktorý pre funkciu 1 premennej  $f(x)$  má tvar

$$f(x) = f(x^s) + \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x^s} (x - x^s) \quad (6.1)$$

a pre funkciu 2 premenných  $f(x, y)$ :

$$f(x, y) = f(x^s, y^s) + \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{x=x^s, y=y^s} (x - x^s) + \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{x=x^s, y=y^s} (y - y^s) \quad (6.2)$$

5. Dosadíme odchýlkové veličiny.

### Príklad 6.1.1: Linearizácia

Linearizujte nelineárny dynamický matematický model systému opísaného diferenciálnou rovnicou

$$\frac{dh(t)}{dt} = -h(t) + h(t)q(t) + q(t), \quad h(0) = h^s = 2 \quad (6.3)$$

Od rovnice (6.3) odčítame model toho istého systému v ustálenom stave, ktorý má tvar

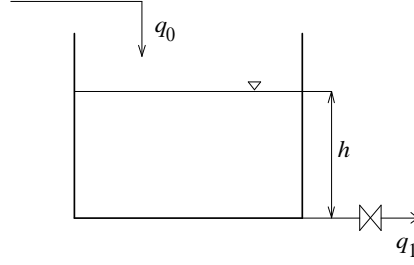
$$\frac{dh^s}{dt} = -h^s + h^s q^s + q^s \quad (6.4)$$

kde člen  $\frac{dh^s}{dt}$  na ľavej strane rovnice (6.4) je rovný nule, pretože ak  $h^s$  predstavuje veličinu  $h$  v ustálenom stave, potom derivácia  $h^s$  ako konštanty podľa času je nulová, čo je len matematickým vyjadrením skutočnosti, že v systéme nedochádza k akumulácii.

Výsledkom odčítania je

$$\frac{d(h(t) - h^s)}{dt} = -(h(t) - h^s) + h(t)q(t) - h^s q^s + (q(t) - q^s) \quad (6.5)$$

Vidíme, že je vhodné definovať odchýlkové veličiny  $x(t) = h(t) - h^s$ ,  $u(t) = q(t) - q^s$  a tiež vidíme, že v rovnici (6.5) ostal nelineárny člen  $h(t)q(t)$  (člen  $h^s q^s$  nie je nelineárny,



Obr. 6.1 Zásobník kvapaliny.

lebo je to konštanta). Tento linearizujeme pomocou Taylorovho rozvoja:

$$\begin{aligned}
 h(t)q(t) &= h^s q^s + \left. \frac{\partial(hq)}{\partial h} \right|_{h=h^s, q=q^s} (h(t) - h^s) + \left. \frac{\partial(hq)}{\partial q} \right|_{h=h^s, q=q^s} (q(t) - q^s) \\
 &= h^s q^s + q|_{h=h^s, q=q^s} (h(t) - h^s) + h|_{h=h^s, q=q^s} (q(t) - q^s) \\
 &= h^s q^s + q^s (h(t) - h^s) + h^s (q(t) - q^s)
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

Ostatná rovnica je lineárna, pretože  $q^s$ ,  $h^s$  sú konštanty. Jej dosadením do (6.5) sa nám členy  $h^s q^s$  rušia a dostaneme

$$\begin{aligned}
 \frac{d(h(t) - h^s)}{dt} &= -(h(t) - h^s) + q^s (h(t) - h^s) + h^s (q(t) - q^s) + (q(t) - q^s) \\
 \frac{dx(t)}{dt} &= -x(t) + q^s x(t) + h^s u(t) + u(t), \quad x(0) = 0
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

Začiatočná podmienka linearizovaného modelu  $x(0) = 0$ , lebo podľa definície odchýl-  
kovej veličiny platí  $x(0) = h(0) - h^s = 0$ .

## 6.2 Riešené príklady

### Príklad 6.2.1: Zásobník kvapaliny

Zásobník kvapaliny je znázornený na obr. 6.1. Do zásobníka vteká kvapalina s hustotou  $\rho \text{ kg m}^{-3}$ , s objemovým prietokom  $q_0 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$  a vyteká s objemovým prietokom  $q_1 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ . Plocha prierezu zásobníka je  $F \text{ m}^2$  a výška hladiny je  $h \text{ m}$ . Predpokladáme, že na začiatku bol zásobník v ustálenom stave a výška hladiny v ňom  $h^s \text{ m}$ .

Vytvorte dynamický matematický model zásobníka kvapaliny, matematický model zásobníka v ustálenom stave a uveďte vzťah pre výpočet výšky hladiny v ustálenom stave v závislosti od vstupného objemového prietoku kvapaliny. Vytvorte linearizovaný odchýlkový model.

#### Riešenie:

Predpokladáme, že teplota kvapaliny je konštantná (údaje o nej sa v zadaní nevyskytujú), a preto dynamický matematický model získame len materiálou bilanciou, pre ktorú poznáme:

- hmotnostný tok na vstupe:  $\rho q_0$ ,
- hmotnostný tok na výstupe:  $\rho q_1$ ,
- hmotnosť kvapaliny v zásobníku:  $\rho V = \rho F h$ .

## 6.2. RIEŠENÉ PRÍKLADY

---

Materiálová bilancia zásobníka kvapaliny v dynamickom stave bude mať tvar

$$q_0\rho = q_1\rho + \frac{d(Fh\rho)}{dt}, \quad h(0) = h^s \quad (6.8)$$

Predpokladajme, že hustota kvapaliny a plocha prierezu zásobníka sú konštantné, takže môžeme napísať

$$q_0 = q_1 + F \frac{dh}{dt} \quad (6.9)$$

V tejto rovnici vystupuje jedna konštanta  $F$  a tri časovopremenné veličiny  $q_0$ ,  $q_1$ ,  $h$  (kvôli zjednodušeniu zápisu nebudeme používať označenie  $q_0(t)$ ,  $q_1(t)$ ,  $h(t)$ ). Na to, aby rovnica mala riešenie, potrebujeme dve z nich určiť. Prietok  $q_0$  nezávisí od toho, čo sa deje v zásobníku, je to vstupná veličina (riadiaca) a budeme predpokladať, že ho poznáme. Na základe Bernouliho rovnice vieme, že prietok  $q_1$  je funkciou výšky hladiny v zásobníku a závisí od nej podľa vzťahu

$$q_1 = \mu_1 f_1 \sqrt{2gh} \quad (6.10)$$

kde  $\mu_1$  je konštanta,  $f_1$  je plocha prierezu výtokového otvoru a  $g$  je gravitačné zrýchlenie. Spojením konštánt dostaneme

$$q_1 = k_{11} \sqrt{h} \quad (6.11)$$

Dosadením  $q_1$  z rovnice (6.11) do rovnice (6.9) dostaneme

$$q_0 = k_{11} \sqrt{h} + F \frac{dh}{dt} \quad (6.12)$$

Výška hladiny (je to stavová veličina) je teda neznámou premennou.

V ustálenom stave (ak vstupný prietok je dlhodobo konštantný), je výška hladiny kvapaliny v zásobníku ustálená a jej derivácia podľa času je nulová. Matematicky to možno vyjadriť

$$\frac{dh^s}{dt} = 0 \quad (6.13)$$

a model zásobníka v ustálenom stave má tvar

$$q_0^s = q_1^s \quad (6.14)$$

alebo

$$q_0^s = k_{11} \sqrt{h^s} \quad (6.15)$$

alebo

$$q_0^s = k_{11} \sqrt{h^s} + F \frac{dh^s}{dt} \quad (6.16)$$

Nech je daný vstupný objemový prietok do zásobníka  $q_0^s$  v ustálenom stave. Z rovnice (6.15) vypočítame výšku hladiny v ustálenom stave

$$h^s = \left( \frac{q_0^s}{k_{11}} \right)^2 \quad (6.17)$$

Kvôli linearizácii analyzujeme dynamický model zásobníka (6.12). Vidíme, že v ňom vystupujú dve časovopremenné veličiny:  $q_0$ ,  $h$  a poznáme ustálený stav  $q_0^s$ ,  $h^s$ . Rovnica (6.12) je nelineárna vzhľadom na  $h$ , pretože obsahuje odmocninu  $h$ .

Odčítaním (6.16) od (6.12) dostaneme

$$q_0 - q_0^s = k_{11}\sqrt{h} - k_{11}\sqrt{h^s} + F \frac{d(h - h^s)}{dt} \quad (6.18)$$

Teraz vidíme, že je vhodné definovať odchýlkové veličiny  $x(t) = h(t) - h^s$ ,  $u(t) = q_0(t) - q_0^s$ . Nelineárny člen  $\sqrt{h}$  rozvineme do Taylorovho rozvoja

$$\begin{aligned} \sqrt{h} &= \sqrt{h^s} + \left. \frac{d\sqrt{h}}{dh} \right|_{h^s} (h - h^s) \\ &= \sqrt{h^s} + \frac{1}{2\sqrt{h^s}}(h - h^s) \end{aligned} \quad (6.19)$$

a dosadením do rovnice (6.18) získame

$$q_0 - q_0^s = k_{11}\sqrt{h^s} + k_{11} \frac{1}{2\sqrt{h^s}}(h - h^s) - k_{11}\sqrt{h^s} + F \frac{d(h - h^s)}{dt} \quad (6.20)$$

Ďalej definujeme konštantu  $k_1 = \frac{k_{11}}{2\sqrt{h^s}}$ . Potom linearizovaný odchýlkový dynamický model zásobníka má tvar

$$\begin{aligned} u &= k_1 x + F \frac{dx}{dt}, \quad x(0) = 0 \\ \frac{F}{k_1} \frac{dx}{dt} + x &= \frac{1}{k_1} u, \quad x(0) = 0 \end{aligned} \quad (6.21)$$

Konštanta  $F/k_1$  má jednotku času a nazýva sa časová konštanta ( $T$ ), konštanta  $1/k_1$  sa nazýva zosilnenie ( $Z$ ).

Vo všeobecnosti kvôli získaniu časovej konštanty a zosilnenia model upravíme tak, aby pred nederivovanou stavovou veličinou (členom  $x$ ) bola len konštanta 1. Potom časová konštanta je člen pri derivácii a zosilnenie člen pri vstupnej veličine.

#### Príklad 6.2.2: Ortuťový teplomer

Ortuťový teplomer ukazuje teplotu  $\vartheta$  °C. Teplota okolia je  $\vartheta_0$  °C. Konštantné parametre teplomera sú: povrch  $F$  m<sup>2</sup>, hmotnostná tepelná kapacita ortuti  $c_p$  Jkg<sup>-1</sup>K<sup>-1</sup>, hmotnosť ortuti  $m$  kg a koeficient prechodu tepla  $\alpha$  Wm<sup>-2</sup>K<sup>-1</sup>.

Vytvorte dynamický matematický model teplomera a vypočítajte teplotu, ktorú teplomer ukazuje v ustálenom stave. Vytvorte odchýlkový model, t.j. model, v ktorom vystupujú odchýlkové veličiny a má nulové začiatkové podmienky.

#### Riešenie:

Dynamický matematický model teplomera vytvoríme len entalpickou bilanciou, pretože v teplomeri nedochádza k prestupu látky. Pre entalpickú bilanciu poznáme:

- tepelný tok prechádzajúci do teplomera cez stenu z okolia teplomera:  $F\alpha(\vartheta_0 - \vartheta)$ ,
- teplo v teplomeri:  $mc_p\vartheta$ .

Entalpická bilancia má tvar

$$F\alpha(\vartheta_0 - \vartheta) = \frac{d(mc_p\vartheta)}{dt} \quad (6.22)$$

## 6.2. RIEŠENÉ PRÍKLADY

Ak predpokladáme, že hmotnostná tepelná kapacita ortuti v danom intervale meraných teplôt a hmotnosť ortuti v teplomeri sú konštantné, potom

$$F\alpha(\vartheta_0 - \vartheta) = mc_p \frac{d\vartheta}{dt} \quad (6.23)$$

V ustálenom stave platí

$$F\alpha(\vartheta_0^s - \vartheta^s) = mc_p \frac{d\vartheta^s}{dt} = 0 \quad (6.24)$$

a teda teplota, ktorú ukazuje teplomer v ustálenom stave je

$$\vartheta^s = \vartheta_0^s \quad (6.25)$$

Dynamický model teplomera opísaný rovnicou (6.23) je lineárny, a preto ho nemusíme linearizovať. Kvôli vytvoreniu odchýlkového modelu (t.j. modelu s nulovými začiatočnými podmienkami) ďalej analyzujeme rovnicu (6.23). Vidíme, že konštantné veličiny nie sú  $\vartheta_0$ ,  $\vartheta$ . Odčítame model ustáleného stavu od dynamického modelu:

$$F\alpha[(\vartheta_0 - \vartheta_0^s) - (\vartheta - \vartheta^s)] = mc_p \frac{d(\vartheta - \vartheta^s)}{dt} \quad (6.26)$$

Ostatná rovnica je opäť lineárna, ale je zrejmé, že môžeme definovať odchýlkové veličiny:  $u(t) = \vartheta_0(t) - \vartheta_0^s$ ,  $x(t) = \vartheta(t) - \vartheta^s$  a dostaneme

$$\begin{aligned} F\alpha(u - x) &= mc_p \frac{dx}{dt} \\ \frac{mc_p}{F\alpha} \frac{dx}{dt} + x &= u \end{aligned} \quad (6.27)$$

Konštanta  $(mc_p)/(F\alpha)$  má jednotku času a nazýva sa časová konštanta, člen pri  $u(t)$  sa nazýva zosilnenie a v tomto prípade je zosilnenie jednotkové.

### Príklad 6.2.3: Miešanie dvoch kvapalín

Do nádrže, v ktorej je  $m$  kg roztoku soli, pričom predpokladáme, že  $m$  je konštantné a hmotnostný zlomok roztoku soli v nádrži je  $w$  a mení sa, privádzame dva prúdy kvapaliny. Prvý s hmotnostným tokom  $\dot{m}_1$  kg s<sup>-1</sup> a hmotnostným zlomkom soli  $w_1$  a druhý s hmotnostným tokom  $\dot{m}_2$  kg s<sup>-1</sup> obsahujúci čistú vodu. Hmotnostný tok prúdu odtekajúcej kvapaliny je  $\dot{m}_3$  kg s<sup>-1</sup> a jej zloženie je rovnaké ako zloženie kvapaliny v nádrži. Vytvorte dynamický matematický model procesu, určite zloženie roztoku v nádrži v ustálenom stave a vytvorte linearizovaný odchýlkový model (t.j. lineárny model s nulovými začiatočnými podmienkami).

#### Riešenie:

Dynamický model získame materiálovou bilanciou, pre ktorú poznáme

- hmotnostný tok soli v 1. vstupnom prúde:  $\dot{m}_1 w_1$ ,
- hmotnostný tok soli v 2. vstupnom prúde:  $\dot{m}_2 w_2 = 0$ ,
- hmotnosť soli v nádrži:  $mw$ .
- hmotnostný tok soli vo výstupnom prúde:  $\dot{m}_3 w$ .

Materiálová bilancia soli pre opísaný proces má tvar

$$\dot{m}_1 w_1 = \dot{m}_3 w + \frac{d(mw)}{dt} \quad (6.28)$$



Ak má byť splnený predpoklad, že hmotnosť roztoku v nádrži  $m$  je konštantná, musí platiť, že hmotnostný tok výstupného prúdu sa rovná súčtu hmotnostných tokov vstupných prúdov. To vyplýva z celkovej materiálovej bilancie nádrže

$$\dot{m}_1 + \dot{m}_2 = \dot{m}_3 + \frac{dm}{dt} \quad (6.29)$$

kde  $\frac{dm}{dt} = 0$ . Po dosadení (6.29) s podmienkou  $\frac{dm}{dt} = 0$  do (6.28) dostaneme

$$\dot{m}_1 w_1 = (\dot{m}_1 + \dot{m}_2)w + m \frac{dw}{dt} \quad (6.30)$$

a získali sme tak dynamický matematický model.

V ustálenom stave potom platí

$$\dot{m}_1^s w_1^s = (\dot{m}_1^s + \dot{m}_2^s)w^s + m \frac{dw^s}{dt} \quad (6.31)$$

$$\dot{m}_1^s w_1^s = (\dot{m}_1^s + \dot{m}_2^s)w^s \quad (6.32)$$

$$w^s = \frac{\dot{m}_1^s w_1^s}{\dot{m}_1^s + \dot{m}_2^s} \quad (6.33)$$

Kvôli vytvoreniu linearizovaného odchýlkového modelu analyzujeme rovnicu (6.30). Časovopremenné veličiny v modeli sú  $\dot{m}_1$ ,  $\dot{m}_2$ ,  $w_1$ ,  $w$ .

Ak budeme ďalej predpokladať, že toky  $\dot{m}_1$ ,  $\dot{m}_2$  sú konštantné, potom je rovnica vzhľadom na  $w_1$ ,  $w$  lineárna a linearizáciu robiť netreba. V tom prípade si definujeme odchýlkové veličiny  $u(t) = w_1(t) - w_1^s$ ,  $x(t) = w(t) - w^s$  a lineárny odchýlkový model má tvar

$$\begin{aligned} \dot{m}_1 u &= (\dot{m}_1 + \dot{m}_2)x + m \frac{dx}{dt} \\ \frac{\dot{m}_1}{\dot{m}_1 + \dot{m}_2} u &= x + \frac{m}{\dot{m}_1 + \dot{m}_2} \frac{dx}{dt} \end{aligned} \quad (6.34)$$

V prípade, že aj toky  $\dot{m}_1$ ,  $\dot{m}_2$  sú časovopremenné, je model (6.30) nelineárny, lebo obsahuje súčiny časovopremenných veličín. Tento model budeme linearizovať.

Odcítaním modelu ustáleného stavu od dynamického modelu dostaneme

$$\dot{m}_1 w_1 - \dot{m}_1^s w_1^s = \dot{m}_1 w - \dot{m}_1^s w^s + \dot{m}_2 w - \dot{m}_2^s w^s + m \frac{d(w - w^s)}{dt} \quad (6.35)$$

Rozvojom troch nelineárnych členov, z ktorých každý je funkciu 2 premenných, do Taylorovho rozvoja dostaneme

$$\dot{m}_1 w_1 = \dot{m}_1^s w_1^s + \dot{m}_1^s (w_1 - w_1^s) + w_1^s (\dot{m}_1 - \dot{m}_1^s) \quad (6.36)$$

$$\dot{m}_1 w = \dot{m}_1^s w^s + \dot{m}_1^s (w - w^s) + w^s (\dot{m}_1 - \dot{m}_1^s) \quad (6.37)$$

$$\dot{m}_2 w = \dot{m}_2^s w^s + \dot{m}_2^s (w - w^s) + w^s (\dot{m}_2 - \dot{m}_2^s) \quad (6.38)$$

a teda linearizovaný model po definovaní odchýlkových veličín  $u_1 = \dot{m}_1 - \dot{m}_1^s$ ,  $u_2 = \dot{m}_2 - \dot{m}_2^s$ ,  $u_3 = w_1 - w_1^s$ ,  $x = w - w^s$  má tvar

$$\begin{aligned} m \frac{dx}{dt} + \dot{m}_2^s x + w^s u_2 + \dot{m}_1^s x + w^s u_1 &= \dot{m}_1^s u_3 + w_1^s u_1 \\ m \frac{dx}{dt} + (\dot{m}_1^s + \dot{m}_2^s) x &= (w_1^s - w^s) u_1 - w^s u_2 + \dot{m}_1^s u_3 \\ \frac{m}{\dot{m}_1^s + \dot{m}_2^s} \frac{dx}{dt} + x &= \frac{w_1^s - w^s}{\dot{m}_1^s + \dot{m}_2^s} u_1 - \frac{w^s}{\dot{m}_1^s + \dot{m}_2^s} u_2 \\ &\quad + \frac{\dot{m}_1^s}{\dot{m}_1^s + \dot{m}_2^s} u_3 \end{aligned} \quad (6.39)$$

## 6.2. RIEŠENÉ PRÍKLADY

### Príklad 6.2.4: Systém nádrží

Uvažujme, že 2 nádrže s konštantnými objemami  $V_1, V_2 \text{ m}^3$  sú zapojené za sebou. Do prvej nádrže vteká prúd roztoku kyseliny s konštantným hmotnostným tokom  $\dot{m} \text{ kg s}^{-1}$  a hmotnostným zlomkom  $w_0$ . S rovnakým hmotnostným tokom vyteká z nádrže výstupný prúd roztoku a vteká do druhej nádrže, z ktorej vyteká výstupný prúd opäť s rovnakým hmotnostným tokom.

1. Vytvorte matematický model procesu opisujúci závislosť hmotnostných zlomkov kyseliny v prvej ( $w_1$ ) a druhej ( $w_2$ ) nádrži od hmotnostného zlomku vstupného prúdu do prvého zásobníka ( $w_0$ ), vypočítajte hodnoty hmotnostných zlomkov vo výstupných prúdoch z nádrží, ak predpokladáme, že nádrže sú dokonale miešané, zloženie výstupných prúdov je rovnaké ako zloženie roztokov v nádržiach a že roztoky kyseliny v nádržiach majú konštantnú hustotu  $\rho \text{ kg m}^{-3}$ .
2. Vypočítajte Laplaceov obraz výstupných odchýlkových veličín.
3. Predpokladajme, že proces je v ustálenom stave a že sa skokovo zmení hmotnostný zlomok kyseliny na vstupe o hodnotu  $k$ . Vypočítajte časový priebeh výstupných veličín.

### Riešenie:

Dynamický matematický model nádrží získame materiálovými bilanciami oboch nádrží. Pre materiálovú bilanciu 1. nádrže poznáme:

- hmotnostný tok kyseliny vo vstupnom prúde:  $\dot{m}w_0$ ,
- hmotnosť kyseliny v nádrži:  $V_1\rho w_1$ ,
- hmotnostný tok kyseliny vo výstupnom prúde:  $\dot{m}w_1$ .

Pre materiálovú bilanciu 2. nádrže poznáme:

- hmotnostný tok kyseliny vo vstupnom prúde:  $\dot{m}w_1$ ,
- hmotnosť kyseliny v nádrži:  $V_2\rho w_2$ ,
- hmotnostný tok kyseliny vo výstupnom prúde:  $\dot{m}w_2$ .

Materiálové bilancie kyseliny pre obe nádrže majú tvar

$$\dot{m}w_0 = \dot{m}w_1 + V_1\rho \frac{dw_1}{dt} \quad (6.40)$$

$$\dot{m}w_1 = \dot{m}w_2 + V_2\rho \frac{dw_2}{dt} \quad (6.41)$$

a dynamický model nádrží je teda lineárny.

V ustálenom stave platí

$$\dot{m}w_0^s = \dot{m}w_1^s \quad (6.42)$$

$$\dot{m}w_1^s = \dot{m}w_2^s \quad (6.43)$$

Ak je zloženie vstupného prúdu do 1. nádrže dané hmotnostným zlomkom  $w_0^s$  nemenné dostatočne dlho, koncentrácie v oboch nádržiach sú rovnaké a hmotnostné zlomky roztokov v nich sú rovné  $w_0^s$ .

Kvôli získaniu odchýlkového modelu s nulovými začiatočnými podmienkami odčítame model ustáleného stavu od dynamického modelu a definujeme odchýlkové veličiny  $u(t) = w_0(t) - w_0^s$ ,  $x_1(t) = w_1(t) - w_1^s$ ,  $x_2(t) = w_2(t) - w_2^s$ . Získame tak lineárny odchýlkový model s nulovými začiatočnými podmienkami v tvare:

$$\dot{m}u = \dot{m}x_1 + V_1\rho \frac{dx_1}{dt}, \quad x_1(0) = 0 \quad (6.44)$$

$$\dot{m}x_1 = \dot{m}x_2 + V_2\rho \frac{dx_2}{dt}, \quad x_2(0) = 0 \quad (6.45)$$

Lineárny odchýlkový model s nulovými začiatočnými podmienkami zvyčajne potrebujeme kvôli určeniu prenosu. V tomto príklade ho použijeme na výpočet Laplaceových obrazov odchýlkových výstupných veličín. Kvôli výpočtu Laplaceových obrazov odchýlkových výstupných veličín najskôr urobíme Laplaceovu transformáciu rovníc, ktoré reprezentujú lineárny odchýlkový model a dostaneme

$$U(s) = X_1(s) + \frac{V_1\rho}{\dot{m}}sX_1(s), \quad (6.46)$$

$$X_1(s) = X_2(s) + \frac{V_2\rho}{\dot{m}}sX_2(s) \quad (6.47)$$

Časové konštanty v rovniciach označíme  $T_1 = \frac{V_1\rho}{\dot{m}}$ ,  $T_2 = \frac{V_2\rho}{\dot{m}}$ . Potom platí

$$X_1(s) = \frac{1}{T_1s + 1}U(s) = G_1(s)U(s) \quad (6.48)$$

$$X_2(s) = \frac{1}{T_2s + 1}X_1(s) = G_2X_1(s) = G_1(s)G_2(s)U(s) \quad (6.49)$$

a dostali sme Laplaceove obrazy odchýlkových výstupných veličín (sú to zároveň aj obrazy odchýlkových stavových veličín) z oboch nádrží.

Teraz budeme počítať odozvu nádrží (časový priebeh výstupných veličín) na skokovú zmenu vstupnej veličiny. Ak bolo na začiatku zloženie vstupného prúdu dané hmotnostným zlomkom  $w_0^s$  a ten sa zmenil skokom na hodnotu  $w_0^s + k$ , potom odchýlková vstupná veličina je daná  $u(t) = (w_0^s + k) - w_0^s = k$ . Jej obraz po Laplaceovej transformácii je  $U(s) = k/s$ . Obrazy výstupných veličín už vyjadrené máme, takže po dosadení za  $U(s)$  a spätnou Laplaceovou transformáciou dostaneme

$$X_1(s) = \frac{k}{s(T_1s + 1)} \quad (6.50)$$

$$x_1(t) = k \left( 1 - e^{-t/T_1} \right) \quad (6.51)$$

$$X_2(s) = \frac{k}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)} \quad (6.52)$$

$$x_2(t) = k \left( 1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \right) \quad (6.53)$$

Pre výpočet zloženia výstupných prúdov nesmieme zabudnúť na to, že zatiaľ sme vypočítali len časový priebeh odchýlkových výstupných veličín. Pre hmotnostné zlomky kyseliny vo výstupných prúdoch z definície odchýlkových veličín dostaneme:

$$w_1(t) = x_1(t) + w_1^s \quad (6.54)$$

$$w_2(t) = x_2(t) + w_2^s \quad (6.55)$$

#### Príklad 6.2.5: Výmenník tepla

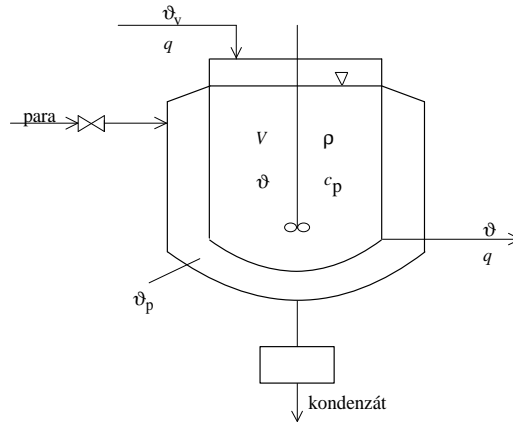
Uvažujme plášťový výmenník, ktorý je znázornený na obr. 6.2. Jeho vstupné veličiny sú teplota vstupného prúdu ohrievanej kvapaliny  $\vartheta_v$  °C a teplota ohrevnej pary  $\vartheta_p$  °C. Stavová veličina je teplota ohrievanej kvapaliny vo výmenníku  $\vartheta$  °C. Konštantné parametre procesu sú objemový prietok vstupného a výstupného prúdu ohrievanej kvapaliny  $q$  m<sup>3</sup> s<sup>-1</sup>, hustota kvapaliny  $\rho$  kg m<sup>-3</sup>, objem kvapaliny vo výmenníku  $V$  m<sup>3</sup>, hmotnostná tepelná kapacita kvapaliny  $c_p$  J kg<sup>-1</sup> K<sup>-1</sup>, plocha prestupu tepla  $F$  m<sup>2</sup> a koeficient prechodu tepla  $\alpha$  W m<sup>-2</sup> K<sup>-1</sup>.

Ďalej budeme predpokladať, že akumulčná schopnosť stien výmenníka oproti akumuláčnej schopnosti ohrievanej kvapaliny je zanedbateľná, teplota vo vnútri výmenníka je v každom objemovom elemente kvapaliny rovnaká, čo sa dá zabezpečiť miešaním, teplota výstupného prúdu je rovnaká ako teplota kvapaliny vo výmenníku.

## 6.2. RIEŠENÉ PRÍKLADY

Úlohy:

- vytvorte matematický model procesu,
- vypočítajte teplotu vo výmenníku v ustálenom stave,
- vytvorte odchýlkový matematický model,
- určite všetky možné prenosy, ak výstupnou veličinou je teplota výstupného prúdu z výmenníka,
- vypočítajte odozvu výmenníka (časový priebeh teploty výstupného prúdu) na skokovú zmenu teploty pary.



Obr. 6.2 Schéma plášťového výmenníka ohrievaného parou.

**Riešenie:**

Dynamický matematický model výmenníka získame (po prijatí zjednodušujúcich predpokladov) len entalpickou bilanciu. Materiálovú bilanciu robiť nemusíme, pretože sme predpokladali, že prietoky vstupného a výstupného prúdu a objem kvapaliny vo výmenníku sú konštantné. Pre entalpickú bilanciu poznáme:

- tepelný tok vstupujúci do výmenníka vo vstupnom prúde:  $\dot{Q}_1 = q\rho c_p \vartheta_v$ ,
- tepelný tok vystupujúci z výmenníka vo výstupnom prúde:  $\dot{Q}_2 = q\rho c_p \vartheta$ ,
- tepelný tok, ktorý prechádza do vnútra výmenníka z ohrevnej pary stenou výmenníka:  $\dot{Q} = F\alpha(\vartheta_p - \vartheta)$ ,
- teplo v kvapaline vo vnútri výmenníka:  $Q = V\rho c_p \vartheta$ .

Entalpická bilancia výmenníka má tvar

$$q\rho c_p \vartheta_v + \alpha F(\vartheta_p - \vartheta) = q\rho c_p \vartheta + V\rho c_p \frac{d\vartheta}{dt} \quad (6.56)$$

Rovnicu (6.56) môžeme upraviť

$$\frac{V\rho c_p}{q\rho c_p + \alpha F} \frac{d\vartheta}{dt} = -\vartheta + \frac{\alpha F}{q\rho c_p + \alpha F} \vartheta_p + \frac{q\rho c_p}{q\rho c_p + \alpha F} \vartheta_v \quad (6.57)$$

alebo

$$T_1 \frac{d\vartheta}{dt} = -\vartheta + Z_1 \vartheta_p + Z_2 \vartheta_v \quad (6.58)$$

kde časová konštanta  $T_1$  a zosilnenia  $Z_1, Z_2$  sú dané vzťahmi

$$T_1 = \frac{V\rho c_p}{q\rho c_p + \alpha F}, \quad Z_1 = \frac{\alpha F}{q\rho c_p + \alpha F}, \quad Z_2 = \frac{q\rho c_p}{q\rho c_p + \alpha F} \quad (6.59)$$

Začiatočná podmienka môže byť ľubovoľná:

$$\vartheta(0) = \vartheta_0 \quad (6.60)$$

Dynamický matematický model výmenníka tepla (6.58) je lineárny, takže ho netreba linearizovať.

Výmenník tepla bude v ustálenom stave, ak v ňom nedochádza k akumulácii tepla, t.j.

$$\frac{d\vartheta}{dt} = 0 \quad (6.61)$$

Nech sú dané ustálené teploty  $\vartheta_p^s$  a  $\vartheta_v^s$ . Pomocou rovníc (6.57) a (6.61) vypočítame teplotu vo výmenníku tepla v ustálenom stave

$$\vartheta^s = \frac{\alpha F}{q\rho c_p + \alpha F} \vartheta_p^s + \frac{q\rho c_p}{q\rho c_p + \alpha F} \vartheta_v^s \quad (6.62)$$

Táto teplota je zároveň aj teplotou výstupného prúdu z výmenníka v ustálenom stave.

Kvôli vytvoreniu lineárneho odchýlkového modelu zavedieme odchýlkové veličiny

$$x(t) = \vartheta(t) - \vartheta^s \quad (6.63)$$

$$u(t) = \vartheta_p(t) - \vartheta_p^s \quad (6.64)$$

$$r(t) = \vartheta_v(t) - \vartheta_v^s \quad (6.65)$$

kde odchýlkovú vstupnú veličinu, ktorú považujeme za poruchovú, označíme písmenom  $r$ . Rovnica opisujúca dynamiku výmenníka má potom tvar

$$T \frac{dx(t)}{dt} = -x(t) + Z_1 u(t) + Z_2 r(t), \quad x(0) = 0 \quad (6.66)$$

Ak výstupnou veličinou, ktorú meriame, je teplota  $\vartheta$ , vzťah medzi odchýlkovou výstupnou a odchýlkovou stavovou veličinou opisuje rovnica

$$y(t) = x(t) \quad (6.67)$$

a preto dynamický odchýlkový model výmenníka opisujúci vzťah medzi odchýlkovou vstupnou a odchýlkovou výstupnou veličinou je

$$T \frac{dy(t)}{dt} = -y(t) + Z_1 u(t) + Z_2 r(t), \quad y(0) = 0 \quad (6.68)$$

Pri odvodení prenosov si musíme uvedomiť, že vstupné veličiny v odchýlkovom modeli výmenníka sú  $u, r$  a výstupnou veličinou je  $y$ . V ďalšom urobíme Laplaceovu transformáciu rovnice (6.68)

$$TsY(s) = -Y(s) + Z_1 U(s) + Z_2 R(s) \quad (6.69)$$

Vidíme, že máme systém s dvoma vstupmi a jedným výstupom. Budú teda existovať dva prenosy:  $G_{yu}$  medzi výstupom a vstupom  $u$  a  $G_{yr}$  medzi výstupom a vstupom  $r$ .

### 6.3. ÚLOHY

---

Dostaneme ich tak, že pri odvodení prenosu ten vstup, ktorý nepotrebujeme, položíme rovný nule (čo v prípade odchýlkových veličín znamená, že príslušná vstupná veličina je konštantná). Dostaneme

$$G_{yu} = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Z_1}{Ts + 1} \quad (6.70)$$

$$G_{yr} = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{Z_2}{Ts + 1} \quad (6.71)$$

Ešte chceme vypočítať odozvu výmenníka tepla na skokovú zmenu teploty ohrevnej pary. Predpokladajme, že výmenník tepla je do času, ktorý označíme  $t = 0$ , t.j. pre  $t < 0$  v ustálenom stave, takže

$$y(t) = 0, u(t) = 0, r(t) = 0 \quad \text{pre } t < 0 \quad (6.72)$$

Chceme zistiť, ako sa bude správať výmenník, ak v čase  $t = 0$  sa veličina  $u(t)$  zmení skokovo na hodnotu  $u(t) = k$  (to znamená, že teplota pary sa zmení z hodnoty  $\vartheta_p^s$  na  $\vartheta_p^s + k$ ) a veličina  $r$  ostane nulová (čiže  $\vartheta_v$  bude konštantná – viď rovnicu (6.65)). Zaujímá nás, ako sa bude meniť  $y(t)$  v čase  $t \geq 0$ . Z čisto matematického hľadiska ide o riešenie diferenciálnej rovnice

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Z_1 k \quad (6.73)$$

so začiatočnou podmienkou  $y(0) = 0$ . Prvým bodom riešenia je Laplaceova transformácia diferenciálnej rovnice. Transformovaná rovnica je

$$TsY(s) + Y(s) = Z_1 k \frac{1}{s} \quad (6.74)$$

Riešenie tejto rovnice pre  $Y(s)$  je

$$Y(s) = \frac{Z_1 k}{s(Ts + 1)} \quad (6.75)$$

Pravú stranu rovnice rozložíme na parciálne zlomky

$$Y(s) = \frac{K_1}{Ts + 1} + \frac{K_2}{s} = Z_1 k \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{T}} \right) \quad (6.76)$$

Po spätnej Laplaceovej transformácii s využitím slovníka Laplaceovej transformácie riešenie diferenciálnej rovnice (6.73) je

$$y(t) = Z_1 k \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \quad (6.77)$$

Teplotu výstupného prúdu z výmenníka vypočítame pomocou definície odchýlkovej veličiny (6.63) a rovnice (6.67) ako

$$\vartheta(t) = Z_1 k \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) + \vartheta^s \quad (6.78)$$

## 6.3 Úlohy

### 6.3.1 Dva zásobníky kvapaliny

Majme systém dvoch zásobníkov kvapaliny v zapojení podľa zadania.

1. Pomocou materiálových bilancií zásobníkov vytvorte nelineárny matematický model systému.
2. Vypočítajte výšky hladín v zásobníkoch v pôvodnom ustálenom stave, keď je daný objemový prietok vstupného prúdu do prvého zásobníka  $q_0^s$ .
3. Vytvorte linearizovaný odchýlkový model zásobníkov. Za pracovný bod pre linearizáciu považujte ustálený stav zásobníkov charakterizovaný výškami hladín v pôvodnom ustálenom stave. Odvodte prenos medzi odchýlkou výšky hladiny v druhom zásobníku od ustáleného stavu a odchýlkou vstupného prietoku od ustáleného stavu.
4. Vypočítajte časový priebeh výšky hladiny v druhom zásobníku, ak sa v čase  $t = 0$  skokovo zmení vstupný objemový prietok  $q_0$  do prvého zásobníka z hodnoty  $q_0^s$  na hodnotu o +10% väčšiu.
5. Určte nové ustálené výšky hladín v zásobníkoch, ktoré sa dosiahnu po zmene objemového prietoku  $q_0$ . Na výpočet použite nelineárny i linearizovaný model.

**Zadania** Dané sú parametre zásobníkov: plochy prierezov  $F_1$ ,  $F_2$ , konštanty ventilov  $k_{11}$ ,  $k_{22}$  a hodnota objemového prietoku vstupného prúdu do prvého zásobníka v pôvodnom ustálenom stave  $q_0^s$ . Možnosti zapojenia:

1. dva zásobníky zapojené za sebou s interakciou (obr. 6.3),
2. dva zásobníky zapojené pod sebou bez interakcie (obr. 6.4).

Poznámka: konštanty  $k_{11}$ ,  $k_{22}$  majú rovnaký význam ako konštanta  $k_{11}$  v rovnici (6.11).

### Simulácia dynamiky zásobníkov v MATLABe

V učebni alebo na Internete sa nachádzajú simulačné schémy vytvorené v simulačnom jazyku MATLAB/Simulink, ktoré možno použiť na riešenie úlohy alebo overenie správnosti riešenia. Simulácie je možné robiť na počítačoch s nainštalovaným MATLABom/Simulinkom alebo priamo cez Internet. Postup opísaný ďalej predpokladá, že MATLAB/Simulink je k dispozícii. Internetový postup je analogický.

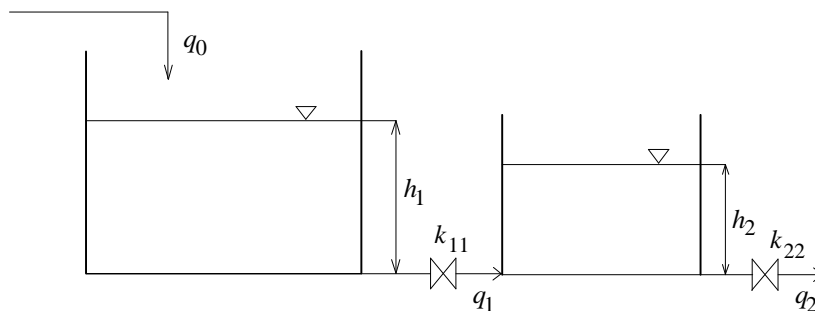
Simulácia riešenia sa robí pomocou simulačnej schémy, ktorá je znázornená na obr. 6.5. Aby sme ju mohli spustiť, musíme mať k dispozícii súbory: `hs2sanim.mdl`, `hs2.m`, `tanksnew.m`. (V prípade potreby je možné nahráť ich z Internetu do počítača.) Do otvorenej schémy (otvoríme ju tak, že napíšeme jej názov `hs2sanim` v matlabovskom okne a stlačíme ENTER) zadáme potrebné údaje.

Ako konštanty zadefinujeme bloky Ustálený vstupný prietok  $q_0^s$  a Ustálená výška hladiny v druhom zásobníku  $h_2^s$ .

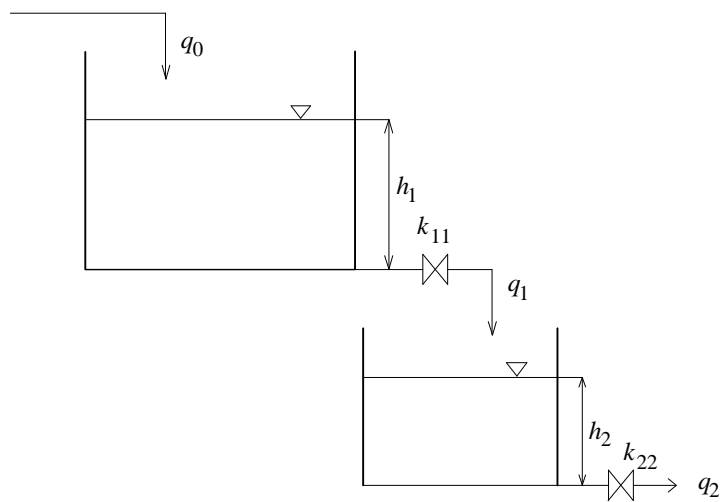
Do bloku Vstupný prietok, ktorý reprezentuje skokovú funkciu, zadáme len začiatkovú hodnotu vstupného objemového prietoku  $q_0^s$  (t.j. jeho hodnotu pred skokovou zmenou) a konečnú hodnotu vstupného objemového prietoku  $q_0$  (t.j. jeho hodnotu po skokovej zmene). Čas skokovej zmeny (Step time) aj perióda vzorkovania (Sample time) zostávajú nastavené na 0.

Do bloku Nelinearný model je potrebné zadať konštanty ventilov, plochy prierezov nádrží a ustálené výšky hladín v oboch zásobníkoch, ako aj prepínač, či ide o systém s interakciou alebo bez interakcie (premennej `cislo` priradíme číselnú hodnotu 1 pre systém s interakciou alebo 0 pre systém bez interakcie). Posledný parameter `Animacia`

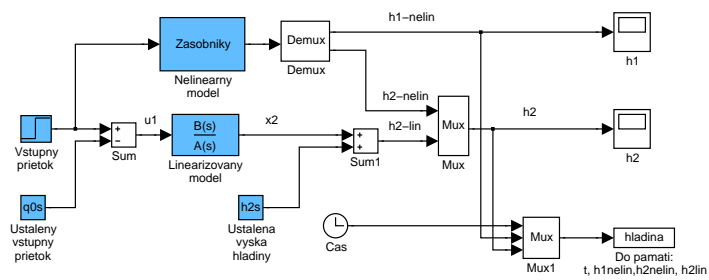
### 6.3. ÚLOHY



Obr. 6.3 Dva zásobníky kvapaliny s interakciou.

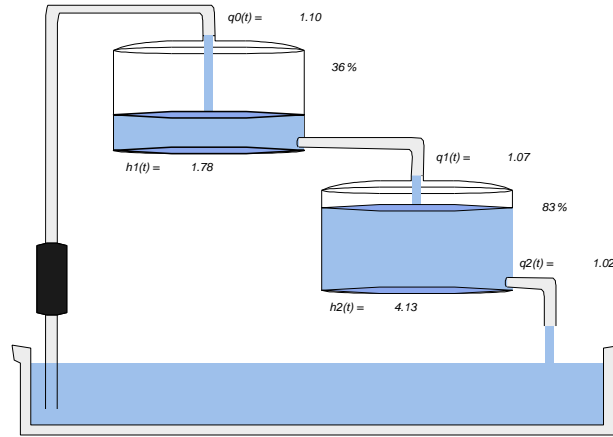


Obr. 6.4 Dva zásobníky kvapaliny bez interakcie.



Obr. 6.5 Bloková schéma v Simulinku. (súbor hs2sanim.mdl)





Obr. 6.6 Simulácia zásobníkov kvapaliny pomocou virtuálnej reality

určuje, či sa má spustiť animačné okno ukazujúce zásobníky pomocou virtuálnej reality (viď obr. 6.6), alebo nie.

V bloku **Linearizovaný model** je potrebné definovať čitateľ a menovateľ vypočítaného prenosu ako polynómy vo vektorovom tvare (čitateľ – premenná **B**, menovateľ – premenná **A**).

Správnosť výpočtu výšok hladín v ustálenom stave skontrolujeme tak, že simuláciu spustíme aj s konečnou hodnotou vstupného prietoku  $q_0$  nastavenou v bloku **Vstupný prietok** na hodnotu  $q_0^s$ . Ak sú výšky hladín v ustálenom stave vypočítané správne, výšky hladín v zásobníkoch pri simulácii sa nemenia, v grafoch vidíme rovné čiary.

Simuláciou možno skontrolovať aj nové ustálené výšky hladín získané pomocou nelineárneho modelu (5. úloha zadania). V bloku **Vstupný prietok** nastavíme novú hodnotu vstupného prietoku  $q_0$ . Spustíme simuláciu a odčítame hodnoty výšok hladín po ustálení. Číselné hodnoty výšky hladiny  $h_1$  a hladiny  $h_2$  získanej aj z nelineárneho modelu aj z linearizovaného modelu sa ukladajú do premennej **hladina**.

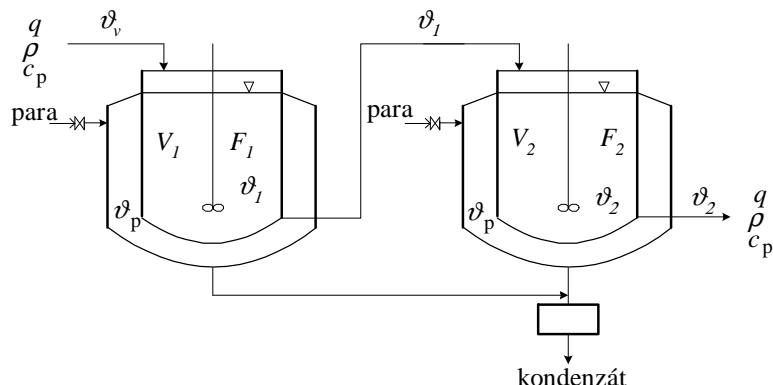
Pre linearizovaný model môžeme hodnoty časového priebehu výšky hladiny v druhom zásobníku pri skokovej zmene vstupného prietoku priamo porovnať s vypočítanými, a to priamo z grafu alebo z číselných údajov uložených po simulácii v premennej **hladina** obsahujúcej stĺpce: čas,  $h_{1,nelin}(t)$ ,  $h_{2,nelin}(t)$ ,  $h_{2,lin}(t)$ .

### 6.3.2 Výmenníky tepla zapojené sériovo

Majme systém 2 výmenníkov v zapojení podľa obr. 6.7 s parametrami podľa zadania.

1. Pomocou entalpických bilancií vytvorte dynamický model systému.
2. Vypočítajte teploty v jednotlivých výmenníkoch v pôvodnom ustálenom stave.
3. Predpokladajte, že teplota vstupného prúdu do 1. výmenníka  $\vartheta_v$  je konštantná a sústava výmenníkov je v pôvodnom ustálenom stave. Vypočítajte veľkosť skokovej zmeny teploty ohrevnej pary  $\vartheta_p$ , ktorú treba urobiť, aby sa teplota výstupného

### 6.3. ÚLOHY



Obr. 6.7 Dva výmenníky tepla v sérii

prúdu z druhého výmenníka ustálila na hodnote o +20% vyššej, než bola jej hodnota v pôvodnom ustálenom stave.

4. Predpokladajte, že teplota ohrevnej pary  $\vartheta_p$  je konštantná a sústava výmenníkov je v pôvodnom ustálenom stave. Vypočítajte veľkosť skokovej zmeny teploty vstupného prúdu do 1. výmenníka  $\vartheta_v$ , ktorú treba urobiť, aby sa teplota výstupného prúdu z druhého výmenníka ustálila na hodnote o +5% vyššej, než bola jej hodnota v pôvodnom ustálenom stave.
5. Predpokladajte, že výmenníky sú do času  $t = 0$  v pôvodnom ustálenom stave. V čase  $t = 0$  sa teplota ohrevnej pary skokovo zmení o +10% a teplota vstupného prúdu do 1. výmenníka  $\vartheta_v$  ostane konštantná.
  - (a) Vypočítajte časový priebeh teploty  $\vartheta_2$  na výstupe z druhého výmenníka.
  - (b) Vypočítajte nové ustálené teploty v jednotlivých výmenníkoch.

**Zadania** Dané sú parametre výmenníkov: objemy  $V_1$ ,  $V_2$ , plochy prestupu tepla  $F_1$ ,  $F_2$ , koeficienty prechodu tepla  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ; ohrievaného média: objemový prietok  $q$ , hustota  $\rho$ , hmotnostná tepelná kapacita  $c_p$ ; teploty vstupných prúdov do výmenníkov v pôvodnom ustálenom stave: teplota ohrevnej pary  $\vartheta_p^s$  a teplota vstupného prúdu ohrievaného média  $\vartheta_v^s$ .

#### Simulácia dynamiky výmenníkov tepla v MATLABe

V učebni alebo na Internete sa nachádzajú simulačné schémy vytvorené v simulačnom jazyku MATLAB/Simulink, ktoré možno použiť na riešenie úlohy alebo overenie správnosti riešenia. Simulácie je možné robiť na počítačoch s nainštalovaným MATLABom/Simulinkom alebo priamo cez Internet. Postup opísaný ďalej predpokladá, že MATLAB/Simulink je k dispozícii. Internetový postup je analogický.

Simulácia riešení úloh, týkajúcich sa výpočtov v ustálenom stave, sa robí pomocou simulačnej schémy, ktorá je znázornená na obr. 6.8. Aby sme ju mohli spustiť, musíme mať k dispozícii 2 súbory: `vyms2.mdl`, `vym.m`. Simulácia riešení úloh, týkajúcich sa sledovania dynamických vlastností, sa robí pomocou simulačnej schémy, ktorá je znázornená na obr. 6.9. Aby sme ju mohli spustiť, musíme mať k dispozícii 2 súbory: `vymtps2.mdl` a už spomínaný súbor `vym.m`. (V prípade potreby je možné všetky súbory nahráť z Internetu

do počítača.) Do príslušnej otvorenej schémy (napíšeme jej názov `vyms2` alebo `vymtps2` v matlabovskom okne a stlačíme ENTER) zadáme potrebné údaje.

V schémach treba zadať údaje do blokov označených modrou farbou. Vždy je potrebné zadať parametre výmenníkov a ostatné konštanty do bloku **Vymenniky**: objemy  $V_1$ ,  $V_2$ , plochy  $F_1$ ,  $F_2$ , parametre  $q$ ,  $\rho$ ,  $c_p$ ,  $\alpha$  a pôvodné ustálené hodnoty teplôt na výstupe z jednotlivých výmenníkov  $\vartheta_1^s$ ,  $\vartheta_2^s$ .

Pri overovaní hodnôt teplôt v ustálených stavoch (2., 3., 4. úloha) podľa obr. 6.8 (program `vyms2`) zadáme skokové zmeny teplôt do blokov **Theta\_v** a **Theta\_p** z pôvodnej ustálenej na novú vstupnú teplotu. To znamená, že je potrebné zadať čas skokovej zmeny, aká je hodnota teploty pred skokom (**thetavs** alebo **thetaps**) a aká je jej hodnota po skokovej zmene (**thetav** alebo **thetap**). V prípade, že niektorá teplota má byť konštantná, uvedieme rovnakú hodnotu teploty aj pred aj po skokovej zmene.

Riešenie 2. úlohy sa dá skontrolovať tak, že vstupy do výmenníkov ( $\vartheta_v$ ,  $\vartheta_p$ ) budú konštantné (rovnaké aj pred skokovou zmenou aj po nej). Teploty vo výmenníkoch tepla v pôvodnom ustálenom stave sú vypočítané správne, ak simuláciou získané hodnoty výstupných teplôt výmenníkov budú konštantné.

V 3. úlohe použijeme opäť schému na obr. 6.8. Nastavíme skokovú zmenu teploty pary na vypočítanú hodnotu, teplotu vstupného prúdu ohrievanej kvapaliny ponecháme konštantnú a skúmame, či sa teplota na výstupe z druhého výmenníka ustáli na požadovanej hodnote.

Podobne vo 4. úlohe (použijeme schému na obr. 6.8) nastavíme skokovú zmenu teploty vstupného prúdu ohrievanej kvapaliny na vypočítanú hodnotu, teplotu pary ponecháme konštantnú a skúmame, či sa teplota na výstupe z druhého výmenníka ustáli na požadovanej hodnote.

Riešenie 5. úlohy sa kontroluje ponechaním konštantnej hodnoty vstupnej teploty  $\vartheta_v$  a zadáním skokovej zmeny teploty pary  $\vartheta_p$  o 10% simuláciou podľa obr. 6.9 (program `vymtps2`). Zároveň overíme aj správnosť určenia prenosu. V schéme zadefinujeme premenné bloku **Prenos Gy2u1**, ktorý predstavuje prenos medzi  $\vartheta_2$  a  $\vartheta_p$ . Sú to čitateľ prenosu **Bp** a menovateľ prenosu **A**. Ďalej sa zadajú parametre do blokov **Theta\_p-s** ( $\vartheta_p^s$ ), **Theta\_2-s** ( $\vartheta_2^s$ ). Ak je prenos vypočítaný správne, sú priebehy teploty určenej z modelu (**theta2-m**) a z prenosu (**theta2-p**) v grafe **theta2** zhodné.

Pre lepšie porovnanie výsledkov simulácie s výpočtami sa ukladajú simulačné výsledky do premennej **teplota**, ktorá má nasledovné stĺpce: čas,  $\vartheta_v$ ,  $\vartheta_p$ ,  $\vartheta_1$ ,  $\vartheta_{2m}$ ,  $\vartheta_{2p}$ . Premennú **teplota** je možné vypísať v MATLabe.

## 6.4 Neriešené príklady

### Príklad 6.4.1: Linearizácia

Dynamický systém má nelineárny matematický model v tvare  $y'(t) + 0.5y^2(t) + y(t) = v(t)$  a jeho ustálený stav je charakterizovaný hodnotami  $v^s$ ,  $y^s$ . Určte linearizovaný odchýlkový model procesu. Odchýlkové veličiny definujte ako  $x(t) = y(t) - y^s$ ,  $u(t) = v(t) - v^s$ .

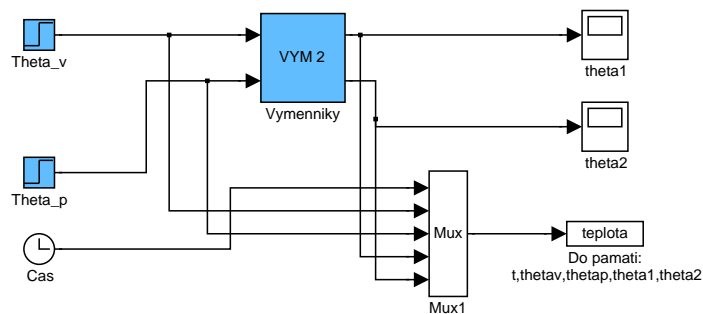
**Riešenie:**

$$x'(t) + x(t)(y^s + 1) = u(t)$$

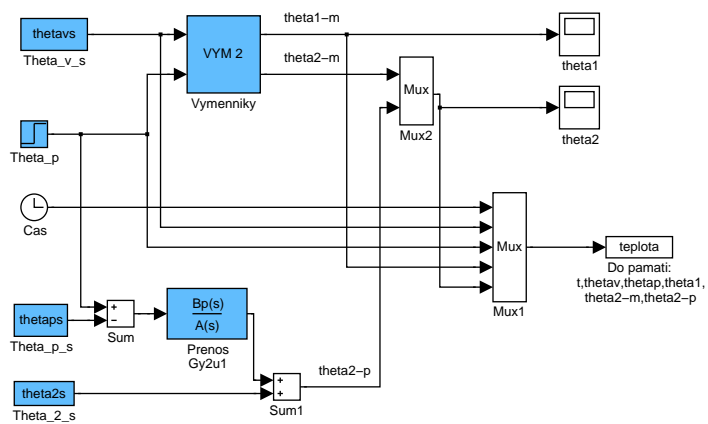
### Príklad 6.4.2: Systém nádrží

Uvažujme príklad 6.2.4 s tromi nádržami, kde kyselina z druhej nádrže vteká do tretej. Zistíte, ako sa menia výpočty pre prvé dve nádrže a vypočítajte všetky úlohy aj pre

## 6.4. NERIEŠENÉ PRÍKLADY



Obr. 6.8 Bloková schéma pre overenie ustálených stavov v Simulinku. (súbor vyms2.mdl)



Obr. 6.9 Bloková schéma pre overenie dynamických vlastností po skokovej zmene  $\vartheta_p$  v Simulinku. (súbor vymtps2.mdl)

tretiu nádrž.

**Riešenie:**

Výpočty pre prvé dve nádrže sa nezmenia. Pre tretiu nádrž dostaneme: materiálovú bilanciu

$$\dot{m}w_2(t) = \dot{m}w_3(t) + V_3\rho\frac{dw_3(t)}{dt} \quad (6.79)$$

Laplaceovu transformáciu

$$X_3(s) = \frac{1}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)(T_3s + 1)}U_1(s) \quad (6.80)$$

časová závislosť

$$\begin{aligned} w_3(t) = w_3^s + k \left( 1 - \frac{T_1^2}{(T_1 - T_2)(T_1 - T_3)} e^{-t/T_1} \right) \\ + k \left( \frac{T_2^2}{(T_2 - T_3)(T_1 - T_2)} e^{-t/T_2} - \frac{T_2^2}{(T_2 - T_3)(T_1 - T_3)} e^{-t/T_3} \right) \end{aligned} \quad (6.81)$$

**Príklad 6.4.3:** *Plná nádrž*

Uvažujme nádrž v tvare hranola s prierezom  $F$ , ktorá je plná vody (hladina je vo výške  $h_0$ ) a má na dne kohútik. Nádrž nemá žiadny prítok. V nejakom čase otvoríme kohútik a voda začne vytekať.

Vytvorte matematický model procesu.

**Riešenie:**

Matematický model procesu je opísaný diferenciálnou rovnicou

$$\frac{dh(t)}{dt} = -\frac{k_{11}}{F}\sqrt{h(t)}, \quad h(0) = h_0 \quad (6.82)$$

kde  $k_{11}$  je konštanta výtokového otvoru.

**Príklad 6.4.4:** *Prázdna nádrž*

Uvažujme nádrž v tvare hranola s prierezom  $F$  a výškou  $H$ , ktorá nemá odtok a je prázdna. V nejakom čase začne do nádrže pritekať kvapalina s hustotou  $\rho$  o hmotnostnom toku  $\dot{m}$ .

Vytvorte matematický model procesu a určte, kedy začne nádrž pretekať.

**Riešenie:**

Matematický model procesu je opísaný diferenciálnou rovnicou

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{\dot{m}}{F\rho}, \quad h(0) = 0 \quad (6.83)$$

Pretekať začne v čase  $t = FH\rho/\dot{m}$ .

## 6.5 Simulácie pomocou MILABu

Na hlavnej stránke LCZA (<http://www.kirp.chnikf.stuba.sk/lcza>) sa nachádzajú HTML resp. PHP skripty programov **hs2s** (zásobníky) a **vymtps2** (výmenníky), vytvorené v MILABe, ktoré možno použiť na riešenie úlohy alebo overenie správnosti riešenia. Simulácia riešenia sa dá vykonať nasledujúcim spôsobom:

### 6.5.1 Dva zásobníky kvapaliny

Vo vstupnom formulári

- zadajte plochy prierezov nádrží  $F_1, F_2$
- zadajte konštanty ventilov  $k_{11}, k_{22}$
- zadajte informáciu, či ide o systém s interakciou alebo bez interakcie
- zadajte ustálený vstupný objemový prietok  $q_0^s$  (t.j. jeho hodnotu pred skokovou zmenou)
- zadajte konečný vstupný objemový prietok  $q_0$  (t.j. jeho hodnotu po skokovej zmene)
- zadajte ustálenú výšku hladiny v prvom zásobníku  $h_1^s$
- zadajte ustálenú výšku hladiny v druhom zásobníku  $h_2^s$
- zadajte čitateľ a menovateľ vypočítaného prenosu ako polynómy vo vektorovom tvare
- kliknite na ikonu „Spracovať“

MILAB zobrazí výsledok, ktorý pozostáva z

- výpisu parametrov procesu
- prenosu linearizovaného matematického modelu (MM)
- blokovej schémy
- prechodovej charakteristiky

**Príklad:** Nájdite prenos linearizovaného MM. Dané sú parametre zásobníkov:  $q_0^s = 1 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ ,  $q_0 = 1,1 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ ,  $F_1 = F_2 = 0,8 \text{ m}^2$ ,  $k_{11} = 0,8 \text{ m}^{2,5} \text{ h}^{-1}$ ,  $k_{22} = 0,5 \text{ m}^{2,5} \text{ h}^{-1}$ , bez interakcie, pre ktoré prenos linearizovaného MM je v tvare

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{8}{16s^2 + 8,9s + 1}$$

a ustálené výšky hladín sú  $h_1^s = 1,5625 \text{ m}$  a  $h_2^s = 4 \text{ m}$ .

**Zápis v MILABe:** HTML/PHP skript programu **hs2s**.

<b>Ustálený vstupný prietok</b> $[\text{m}^3 \text{ s}^{-1}]$ :	$q_0^s =$	1
<b>Vstupný prietok</b> $[\text{m}^3 \text{ s}^{-1}]$ :	$q_0 =$	1.1
<b>Ustálená výška hladiny</b> $[\text{m}]$ :	$h_1^s =$	1.5625
<b>Ustálená výška hladiny</b> $[\text{m}]$ :	$h_2^s =$	4
<b>Odpor</b> $[\text{m}^{2,5} \text{ h}^{-1}]$ :	$k_{11} =$	0.8
<b>Odpor</b> $[\text{m}^{2,5} \text{ h}^{-1}]$ :	$k_{22} =$	0.5
<b>Prierez</b> $[\text{m}^2]$ :	$F_1 =$	0.8
<b>Prierez</b> $[\text{m}^2]$ :	$F_2 =$	0.8
<b>Interakcia:</b>		bez interakcie

<b>Čitateľ prenosu</b> $G(s)$ :	$B(s) =$	8
<b>Menovateľ prenosu</b> $G(s)$ :	$A(s) =$	[16, 8.9, 1]

### 6.5.2 Výmenníky tepla zapojené sériovo

Vo vstupnom formulári

- zadajte objemy  $V_1, V_2$
- zadajte plochy prestupu tepla  $F_1, F_2$
- zadajte koeficient prechodu tepla  $\alpha$
- zadajte objemový prietok  $q$ , hustotu  $\rho$ , hmotnostnú tepelnú kapacitu  $c_p$
- zadajte teplotu ohrevnej pary  $\vartheta_p^s$  a teplotu vstupného prúdu ohrievaného média  $\vartheta_v^s$
- zadajte ustálené teploty  $\vartheta_1^s$  a  $\vartheta_2^s$  na výstupe 1. a 2. výmenníka
- zadajte čitateľ a menovateľ vypočítaného prenosu ako polynómy vo vektorovom tvare
- kliknite na ikonu „Spracovať“

MILAB zobrazí výsledok, ktorý pozostáva z

- výpisu parametrov procesu
- prenosu lineárneho MM
- blokovej schémy
- prechodovej charakteristiky

**Príklad:** Nájdite prenos lineárneho MM. Dané sú parametre výmenníkov:  $V_1 = V_2 = 5 \text{ m}^3$ ,  $F_1 = F_2 = 16 \text{ m}^2$ ,  $q = 1 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ ,  $\rho = 900 \text{ kg m}^{-3}$ ,  $c_p = 3,84 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ,  $\alpha = 72 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$ ,  $\vartheta_v^s = 293 \text{ K}$ ,  $\vartheta_p^s = 373 \text{ K}$ , pre ktoré prenos lineárneho MM je v tvare

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{7,5s + 3}{3s^3 + 7s^2 + 5s + 1}$$

a ustálené teploty na výstupe jednotlivých výmenníkov sú  $\vartheta_1^s = 313 \text{ K}$  a  $\vartheta_2^s = 328 \text{ K}$ .

**Zápis v MILABe:** HTML/PHP skript programu `vymtps2`.

Ustálená teplota na vstupe [K]:	$\vartheta_v^s =$	293
Ustálená teplota pary [K]:	$\vartheta_p^s =$	373
Teplota pary [K]:	$\vartheta_p =$	410.3
Ustálená teplota [K]:	$\vartheta_1^s =$	313
Ustálená teplota [K]:	$\vartheta_2^s =$	328
Koeficient prechodu tepla [ $\text{W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$ ]:	$\alpha =$	72
Hmotnostná tepelná kapacita [ $\text{J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ]:	$c_p =$	3.84
Hustota [ $\text{kg m}^{-3}$ ]:	$\rho =$	900
Prietok [ $\text{m}^3 \text{ s}^{-1}$ ]:	$q =$	1
Objem [ $\text{m}^3$ ]:	$V_1 =$	5
Objem [ $\text{m}^3$ ]:	$V_2 =$	5
Plocha prestupu tepla [ $\text{m}^2$ ]:	$F_1 =$	16
Plocha prestupu tepla [ $\text{m}^2$ ]:	$F_2 =$	16
Čitateľ prenosu $G(s)$ :	$B(s) =$	[7.5 3]
Menovateľ prenosu $G(s)$ :	$A(s) =$	[3, 7, 5, 1]

## Kapitola 7

# Spätnoväzbové riadenie procesov, stabilita uzavretých regulačných obvodov

Cieľom cvičenia je zoznámiť sa s prenosmi PID regulátorov, prenosmi uzavretého regulačného obvodu, charakteristickou rovnicou uzavretého regulačného obvodu, zvládnuť určenie stability uzavretého regulačného obvodu, naučiť sa použiť Routhovo – Schurovo kritérium stability.

### 7.1 Prehľad pojmov

#### 7.1.1 Prenosy PID regulátora

**Prenos PID regulátora** (použitý v obr. 7.1), ktorý je zložený z 3 zložiek, a to zložky proporcionálnej, integračnej a derivačnej, môže byť (štruktúra bez interakcie)

$$G_R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = Z_R \left( 1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) \quad (7.1)$$

alebo (paralelná štruktúra)

$$G_R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = k_R + \frac{1}{k_I s} + k_D s \quad (7.2)$$

kde  $Z_R$  je zosilnenie regulátora,  $T_I$  je integračná časová konštanta,  $T_D$  je derivačná časová konštanta,  $k_R = Z_R$ ,  $k_I = \frac{T_I}{Z_R}$ ,  $k_D = Z_R T_D$ ,  $U(s)$  je obraz riadiacej veličiny  $u(t)$ ,  $E(s)$  je obraz regulačnej odchýlky  $e(t)$ .

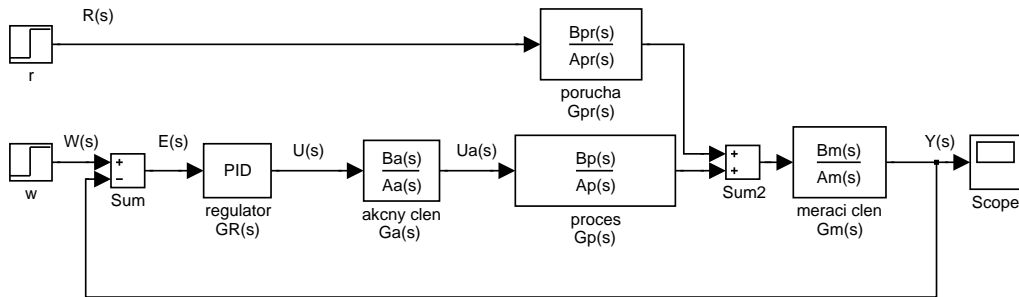
**Prenos PID regulátora v MATLABe**

$$G_R(s) = P + \frac{I}{s} + Ds \quad (7.3)$$

kde  $P = Z_R$ ,  $I = \frac{Z_R}{T_I}$ ,  $D = Z_R T_D$ .



## KAPITOLA 7. SPÄTNOVÄZBOVÉ RIADENIE PROCESOV, STABILITA UZAVRETÝCH REGULAČNÝCH OBVODOV



Obr. 7.1 Bloková schéma uzavretého regulačného obvodu (súbor uro1.mdl)

### 7.1.2 Regulačná odchýlka a trvalá regulačná odchýlka

Regulačná odchýlka  $e(t)$ :

$$e(t) = w(t) - y(t) \quad (7.4)$$

Trvalá regulačná odchýlka (TRO)  $e(\infty)$ :

$$e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} (w(t) - y(t)) = w(\infty) - y(\infty) \quad (7.5)$$

kde  $w(t)$  je žiadaná veličina a  $y(t)$  je riadená veličina.

### 7.1.3 Prenosy uzavretého regulačného obvodu

Prenos žiadanej veličiny (prenos riadenia) (URO na obr. 7.1):

$$G_{yw}(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G_m(s)G_p(s)G_a(s)G_R(s)}{1 + G_m(s)G_p(s)G_a(s)G_R(s)} = \frac{G_S(s)G_R(s)}{1 + G_S(s)G_R(s)} \quad (7.6)$$

kde

$$G_S(s) = G_m(s)G_p(s)G_a(s) \quad (7.7)$$

Prenos poruchy (URO na obr. 7.1):

$$G_{yr}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_m(s)G_{pr}(s)}{1 + G_m(s)G_p(s)G_a(s)G_R(s)} = \frac{G_m(s)G_{pr}(s)}{1 + G_S(s)G_R(s)} \quad (7.8)$$

Charakteristická rovnica URO na (obr. 7.1):

$$1 + G_m(s)G_p(s)G_a(s)G_R(s) = 0 \quad (7.9)$$

alebo

$$1 + G_S(s)G_R(s) = 0 \quad (7.10)$$

## 7.2. RIEŠENÉ PRÍKLADY

### 7.1.4 Stabilita uzavretého regulačného obvodu

**Systém je BIBO stabilný** (z angl. bounded input – bounded output), ak ohraňčený vstup dáva ohraňčený výstup.

**Nutná a postačujúca podmienka stability** – korene charakteristickej rovnice (póly) majú záporné reálne časti, t.j. ležia v ľavej polrovine komplexnej roviny čísel.

**Kritériá stability** sa používajú na určenie stability inak ako vyčíslením koreňov charakteristickej rovnice. Poznáme napr. Hurwitzovo kritérium stability alebo Routhovo – Schurovo kritérium stability. Slúžia na posúdenie stability pomocou koeficientov charakteristickej rovnice.

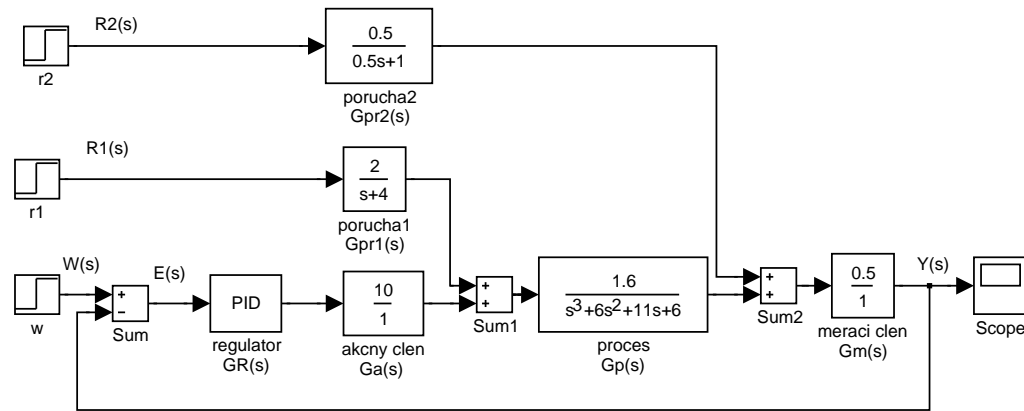
**Routhovo – Schurovo kritérium stability** – systém je stabilný, ak sú všetky koeficienty charakteristickej rovnice kladné a ak sa v Routhovom – Schurovom algoritme nevyskytne koeficient rovný nule ani záporný koeficient.

Podmienka kladnosti koeficientov charakteristickej rovnice je nutnou ale nie postačujúcou podmienkou stability pre systém n-tého rádu.

Podmienka kladnosti koeficientov charakteristickej rovnice je nutnou a aj postačujúcou podmienkou stability pre systém 2. a 1. rádu.

**Kritické hodnoty parametrov regulátora** – hodnoty parametrov  $Z_R$ ,  $T_I$  alebo  $T_D$  regulátora, pri ktorých je URO na hranici stability.

## 7.2 Riešené príklady



Obr. 7.2 Bloková schéma uzavretého regulačného obvodu k riešeným príkladom (súbor uro2.mdl)

Na obr. 7.2 je schéma uzavretého regulačného obvodu (URO), kde

$$\begin{aligned} G_a(s) &= 10; & G_p(s) &= \frac{1,6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}; & G_m(s) &= 0,5 \\ G_{pr2}(s) &= \frac{0,5}{0,5s + 1}; & G_{pr1}(s) &= \frac{2}{s + 4} \end{aligned} \quad (7.11)$$

## KAPITOLA 7. SPÄTNOVÄZBOVÉ RIADENIE PROCESOV, STABILITA UZAVRETÝCH REGULAČNÝCH OBVODOV

### Príklad 7.2.1: Prenosy URO

Nájdite nasledovné prenosy URO z obr. 7.2:

$$G_{yw}(s) = \frac{Y(s)}{W(s)}, \quad G_{yr1}(s) = \frac{Y(s)}{R_1(s)}, \quad G_{yr2}(s) = \frac{Y(s)}{R_2(s)}. \quad (7.12)$$

#### Riešenie:

Odvoďenie prenosov:

$$Y(s) = G_m(s) \{G_{pr2}(s)R_2(s) + G_p(s)(G_{pr1}(s)R_1(s) + G_a(s)G_R(s)(W(s) - Y(s)))\} \quad (7.13)$$

Za predpokladu  $R_1(s) = 0$ ,  $R_2(s) = 0$  dostaneme

$$(1 + G_m(s)G_p(s)G_a(s)G_R(s))Y(s) = G_m(s)G_p(s)G_a(s)G_R(s)W(s) \quad (7.14)$$

$$G_{yw}(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G_m(s)G_p(s)G_a(s)G_R(s)}{1 + G_m(s)G_p(s)G_a(s)G_R(s)} = \frac{G_S(s)G_R(s)}{1 + G_S(s)G_R(s)} \quad (7.15)$$

Za predpokladu  $W(s) = 0$ ,  $R_2(s) = 0$  dostaneme

$$(1 + G_m(s)G_p(s)G_a(s)G_R(s))Y(s) = G_m(s)G_p(s)G_{pr1}(s)R_1(s) \quad (7.16)$$

$$G_{yr1}(s) = \frac{Y(s)}{R_1(s)} = \frac{G_m(s)G_p(s)G_{pr1}(s)}{1 + G_m(s)G_p(s)G_a(s)G_R(s)} = \frac{G_m(s)G_p(s)G_{pr1}(s)}{1 + G_S(s)G_R(s)} \quad (7.17)$$

Za predpokladu  $R_1(s) = 0$ ,  $W(s) = 0$  dostaneme

$$(1 + G_m(s)G_p(s)G_a(s)G_R(s))Y(s) = G_m(s)G_{pr2}(s)R_2(s) \quad (7.18)$$

$$G_{yr2}(s) = \frac{Y(s)}{R_2(s)} = \frac{G_m(s)G_{pr2}(s)}{1 + G_m(s)G_p(s)G_a(s)G_R(s)} = \frac{G_m(s)G_{pr2}(s)}{1 + G_S(s)G_R(s)} \quad (7.19)$$

### Príklad 7.2.2: Určenie typu regulátora

Prenos regulátora v URO na obr. 7.2 má tvar

$$G_R(s) = Z_R \left(1 + \frac{1}{T_I s}\right) \quad (7.20)$$

Určite o aký typ regulátora ide.

#### Riešenie:

Regulátor (7.20) je PI (proporcionálno-integračný) regulátor so zosilnením  $Z_R$  a integračnou časovou konštantou  $T_I$ .

### Príklad 7.2.3: Určenie charakteristickej rovnice

Určite charakteristickú rovnicu URO na obr. 7.2 s použitím regulátora opísaného r. (7.20).

#### Riešenie:

Charakteristická rovnica uzavretého regulačného obvodu z obr. 7.2 má tvar (viď. menovatele prenosov (7.15), (7.17), (7.19))

$$1 + G_S(s)G_R(s) = 0 \quad (7.21)$$

alebo

$$1 + G_m(s)G_p(s)G_a(s)G_R(s) = 0 \quad (7.22)$$

## 7.2. RIEŠENÉ PRÍKLADY

Po dosadení konkrétnych prenosov (7.11) do r. (7.7) dostaneme

$$G_S(s) = \frac{8}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} \quad (7.23)$$

a charakteristická rovnica s použitím PI regulátora (7.20) má tvar

$$1 + \frac{8}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} Z_R \left( 1 + \frac{1}{T_I s} \right) = 0 \quad (7.24)$$

Ešte ju treba upraviť do tvaru polynóm = 0, a preto pokračujeme v úpravách. Celú rovnicu vynásobíme  $s(s^3 + 6s^2 + 11s + 6)$  a dostaneme

$$s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 6s + 8Z_R(s + \frac{1}{T_I}) = 0 \quad (7.25)$$

Charakteristická rovnica má teda tvar

$$s^4 + 6s^3 + 11s^2 + (6 + 8Z_R)s + \frac{8Z_R}{T_I} = 0 \quad (7.26)$$

### Príklad 7.2.4: Určenie stability URO

Zistite, či je URO (obr. 7.2) stabilný, ak v r. (7.20)  $Z_R = 4$ ,  $T_I = 20$ .

#### Riešenie:

Po dosadení  $Z_R = 4$ ,  $T_I = 20$  má charakteristická rovnica (7.26) tvar:

$$s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 38s + 1,6 = 0 \quad (7.27)$$

Charakteristická rovnica má všetky koeficienty kladné, nutná podmienka stability je splnená.

Routhov – Schurov algoritmus:

1	<u>6</u>	11	<u>38</u>	1,6	$k_1 = \frac{1}{6}$	I
$-6\frac{1}{6}$		$-38\frac{1}{6}$				II
	6	<u><math>\frac{28}{6}</math></u>	38	<u>1,6</u>	$k_2 = \frac{6}{\frac{28}{6}} = \frac{36}{28}$	III
	$-\frac{28}{6}\frac{36}{28}$		$-1,6\frac{36}{28}$			IV
		<u><math>\frac{28}{6}</math></u>	<u><math>\frac{1258}{35}</math></u>	1,6		V

Ak sa v algoritme pri redukcii počtu koeficientov získajú všetky koeficienty kladné, v úpravách pokračujeme, až kým nemáme v riadku 3 koeficienty. Odpovedá to systému 2. rádu, kde kladné koeficienty sú nutnou aj postačujúcou podmienkou stability. Pre kontrolu stability v našom prípade sú dôležité riadky I, III a V. Vo všetkých týchto riadkoch sú všetky koeficienty kladné, nevyskytla sa v nich ani 0 ani záporný koeficient, takže URO z obr. 7.2 s PI regulátorom (7.20), kde  $Z_R = 4$ ,  $T_I = 20$ , je stabilný.

## KAPITOLA 7. SPÄTNOVÄZBOVÉ RIADENIE PROCESOV, STABILITA UZAVRETÝCH REGULAČNÝCH OBVODOV

Tvrdenie môžeme overiť výpočtom koreňov charakteristickej rovnice URO (napr. pomocou MATLABu). Číselné hodnoty koreňov charakteristickej rovnice sú:  $-5,2700$ ;  $-0,3437 + 2,6468i$ ;  $-0,3437 - 2,6468i$ ;  $-0,0426$ . Reálne časti všetkých štyroch pólov sú záporné, čiže URO je stabilný.

O stabilite URO sa môžeme presvedčiť aj simuláciami pomocou programu `uro2`. Stačí, keď v MATLABe definujeme konštanty  $Z_R$ ,  $T_I$  potrebné pre blok regulátor a v MATLABe definujeme  $w = 1$  a  $r_1 = 0$ ,  $r_2 = 0$  (alebo  $w = 0$ ,  $r_1 = 1$ ,  $r_2 = 0$  alebo  $w = 0$ ,  $r_1 = 0$ ,  $r_2 = 1$ ). Potom už stačí spustiť simuláciu. V MATLABe sú jednotlivé premenné označené **ZR**, **TI**, **w1**, **r1**, **r2**. V blokoch v schéme sú jednotlivé prenosy (7.11) už definované a blok PID regulátor je nastavený ako PI regulátor (7.20).

### Príklad 7.2.5: Určenie stability URO

Zistite, či je URO (obr. 7.2) stabilný, ak v r. (7.20)  $Z_R = 8$ ,  $T_I = 20$ .

#### Riešenie:

Po dosadení  $Z_R = 8$ ,  $T_I = 20$  má charakteristická rovnica (7.26) tvar:

$$s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 70s + 3,2 = 0 \quad (7.28)$$

Charakteristická rovnica má všetky koeficienty kladné, nutná podmienka stability je splnená.

Routhov – Schurov algoritmus:

1	<u>6</u>	11	<u>70</u>	3,2	$k_1 = \frac{1}{6}$	I
$-6\frac{1}{6}$		$-70\frac{1}{6}$				II
<hr/>						
	6	$-\frac{4}{6}$	70	3,2		III

V úprave ďalej pokračovať nemusíme, jeden z koeficientov v riadku III je záporný, takže URO (obr. 7.2) s PI regulátorom (7.20), kde  $Z_R = 8$ ,  $T_I = 20$ , je nestabilný.

Tvrdenie môžeme overiť výpočtom koreňov charakteristickej rovnice (pomocou MATLABu). Korene sú:  $-6,0725$ ;  $0,0593 + 3,3827i$ ;  $0,0593 - 3,3827i$ ;  $-0,0460$ . Reálne časti dvoch pólov sú kladné, čiže systém je nestabilný.

O nestabilite URO sa dá presvedčiť simuláciami pomocou programu `uro2`, ktorý spustíme ako pri riešení úlohy 7.2.4.

### Príklad 7.2.6: Výpočet $Z_R$ regulátora

Vypočítajte pre aké hodnoty  $Z_R$  je URO (obr. 7.2) stabilný, ak v r. (7.20)  $T_I = 20$ .

#### Riešenie:

Charakteristická rovnica (7.26) má pre  $T_I = 20$  a neznáme  $Z_R$  tvar:

$$s^4 + 6s^3 + 11s^2 + (6 + 8Z_R)s + 8\frac{Z_R}{20} = 0 \quad (7.29)$$

Routhov – Schurov algoritmus:

## 7.2. RIEŠENÉ PRÍKLADY

1	<u>6</u>	11	<u><math>6 + 8Z_R</math></u>	$\frac{8Z_R}{20}$	$k_1 = \frac{1}{6}$	I
$-6\frac{1}{6}$		$-(6 + 8Z_R)\frac{1}{6}$				II
6	$\frac{60 - 8Z_R}{6}$	$6 + 8Z_R$	$\frac{8Z_R}{20}$	$k_2 = \frac{36}{60 - 8Z_R}$		III
$-\frac{60 - 8Z_R}{6}k_2$		$-\frac{8Z_R}{20}k_2$				IV
	$\frac{60 - 8Z_R}{6}$	$6 + 8Z_R - \frac{8Z_R}{20}k_2$	$\frac{8Z_R}{20}$			V

Ak má byť systém stabilný, potom všetky koeficienty v schéme (v riadkoch I, III, V) musia byť väčšie ako 0. Takže zároveň musia platiť tieto nerovnosti:

$$6 + 8Z_R > 0 \wedge \frac{8Z_R}{20} > 0 \wedge \frac{60 - 8Z_R}{6} > 0 \wedge 6 + 8Z_R - \frac{8Z_R}{20} \frac{36}{60 - 8Z_R} > 0$$

Riešením 1. nerovnosti je interval  $Z_R \in (-0,75; \infty)$ , 2. nerovnosti interval  $Z_R \in (0, \infty)$ , 3. nerovnosti interval  $Z_R \in (-\infty; 7,5)$  a 4. nerovnosti interval  $Z_R \in (-0,771; 7,296)$ . Výsledný interval je prienikom všetkých intervalov, takže URO je stabilný pre  $Z_R \in (0; 7,296)$ .

### Príklad 7.2.7: Výpočet kritického $Z_R$ regulátora

Zistite, pre aké  $Z_R$  je URO (obr. 7.2) na hranici stability, ak v r. (7.20)  $T_I = 20$ .

#### Riešenie:

Riešenie tejto úlohy je zrejmé z riešenia príkladu 7.2.6. Zvyšovaním zosilnenia  $Z_R$  regulátora sa póly charakteristickej rovnice URO posúvajú v rovine komplexných čísel doprava (k hranici stability a ďalej do oblasti nestability), takže zosilnenie regulátora je ohraničené zhora jeho kritickou hodnotou a tou je v tomto prípade  $Z_{R,\text{krit}} = 7,296$ .

Úlohu možno riešiť aj nasledovným spôsobom. Charakteristická rovnica a Routhov – Schurov algoritmus majú tvar ako pri riešení úlohy 7.2.6. Systém je na hranici stability, ak sa v Routhovom – Schurovom algoritme objaví koeficient 0 na mieste koeficienta  $a_0$  alebo ak pri redukcii v niektorej rovnici párneho stupňa (riadok s nepárnym počtom koeficientov) sú všetky koeficienty s nepárnym indexom (teda 2., 4., 6., ... koeficient) rovné 0. Rovnici párneho stupňa odpovedajú riadky I (4. stupeň) a V (2. stupeň) v tabuľke. V riadku I je však nenulový koeficient  $a_3 = 6$ , takže z tohto riadku sa kritické zosilnenie určiť nedá. Ak by v riadku V bol koeficient  $a_1$  rovný 0 a koeficienty  $a_2$  a  $a_0$  by boli nenulové, URO by bol na hranici stability. Takže vyriešime rovnicu

$$6 + 8Z_R - \frac{8Z_R}{20} \frac{36}{60 - 8Z_R} = 0 \quad (7.30)$$

a dostaneme  $Z_R = 7,296$ . Pre toto  $Z_R$  koeficient  $a_2 = (60 - 8Z_R)/6 = 0,272 > 0$  a koeficient  $a_0 = 8Z_R/20 = 2,9184 > 0$ . Kritické zosilnenie regulátora má teda hodnotu  $Z_{R,\text{krit}} = 7,296$ .

Výsledok sa dá overiť simulačne pomocou programu uro2, ktorý spustíme ako pri riešení príkladu 7.2.4.

## KAPITOLA 7. SPÄTNOVÄZBOVÉ RIADENIE PROCESOV, STABILITA UZAVRETÝCH REGULAČNÝCH OBVODOV

**Príklad 7.2.8:** Výpočet konečnej hodnoty výstupnej veličiny URO pri zmene žiadanej veličiny

Vypočítajte výstup  $y(t)$  pre  $t \rightarrow \infty$  z URO (obr. 7.2), keď poruchy sú nulové,  $w(t) = 2$  a v r. (7.20)  $Z_R = 4$ ,  $T_I = 5$ .

**Riešenie:**

$$\begin{aligned} y(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sG_{yw}(s)W(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{G_S(s)G_R(s)}{1 + G_S(s)G_R(s)} W(s) = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\frac{8}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} 4 \left(1 + \frac{1}{5s}\right)}{1 + \frac{8}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} 4 \left(1 + \frac{1}{5s}\right)} \frac{2}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{32s + \frac{32}{5}}{s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 38s + \frac{32}{5}} 2 = 2 \end{aligned}$$

Výsledok overíme simulačne pomocou programu `uro2`, ktorý spustíme, keď nastavíme číselné hodnoty parametrov regulátora,  $w = 2$ ,  $r_1 = 0$  a  $r_2 = 0$ .

**Príklad 7.2.9:** Výpočet konečnej hodnoty výstupnej veličiny URO pri zmene poruchy  
Vypočítajte výstup  $y(t)$  pre  $t \rightarrow \infty$  z URO (obr. 7.2), keď porucha  $r_1(t)$  a žiadaná veličina sú nulové, porucha  $r_2(t) = 2$  a v r. (7.20)  $Z_R = 4$ ,  $T_I = 5$ .

**Riešenie:**

$$\begin{aligned} y(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sG_{yr2}(s)R_2(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{G_{pr2}(s)G_m(s)}{1 + G_S(s)G_R(s)} R_2(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\frac{0,5}{0,5s + 1} 0,5}{1 + \frac{8}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} 4 \left(1 + \frac{1}{5s}\right)} \frac{2}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{0,25s(s^3 + 6s^2 + 11s + 6)}{\left(s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 38s + \frac{32}{5}\right) (0,5s + 1)} 2 = 0 \end{aligned}$$

Výsledok overíme simulačne pomocou programu `uro2`, ktorý spustíme, keď nastavíme číselné hodnoty parametrov regulátora,  $w = 0$ ,  $r_1 = 0$  a  $r_2 = 2$ .

**Príklad 7.2.10:** Výpočet trvalej regulačnej odchýlky

Vypočítajte trvalú regulačnú odchýlku, ktorú zanechá v URO (obr. 7.2) P regulátor so zosilnením  $Z_R = 5$ . Poruchy sú nulové,  $w(t) = 4$ .

**Riešenie:**

Trvalú regulačnú odchýlku (TRO) počítame podľa r. (7.5), kde najprv určíme

$$\begin{aligned} y(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sG_{yw}(s)W(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{G_S(s)G_R(s)}{1 + G_S(s)G_R(s)} W(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\frac{8}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} 5}{1 + \frac{8}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} 5} \frac{4}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{40}{s^3 + 6s^2 + 11s + 46} 4 = 3,4782 \end{aligned}$$

TRO potom je

$$e(\infty) = w(\infty) - y(\infty) = 4 - 3,4782 = 0,5218$$

### 7.3. NERIEŠENÉ PRÍKLADY

---

Výsledok overíme simulačne pomocou programu uro2 ktorý spustíme, keď nastavíme číselné hodnoty parametrov regulátora (v bloku PID regulátor:  $P = 5$ ,  $I = 0$ ,  $D = 0$ ),  $w = 4$ ,  $r_1 = 0$  a  $r_2 = 0$ .

**Príklad 7.2.11:** *Hranica aperiodicity*

Proporcionálny regulátor je pripojený k riadenému systému s prenosom  $G_s(s) = \frac{5}{s^2 + 10s + 2}$ . Prenos  $G_s(s)$  zahŕňa prenosy riadeného procesu, meracieho i akčného člena. Nájdite také zosilnenie proporcionálneho regulátora, aby URO bol stabilný a na hranici aperiodicity.

**Riešenie:**

Najskôr zistíme, pre aké  $Z_R$  je URO stabilný. Charakteristická rovnica URO má tvar

$$1 + G_s(s)G_R(s) = 0$$

Po dosadení za  $G_s(s)$  a  $G_R(s)$  a úprave dostaneme

$$s^2 + 10s + 2 + 5Z_R = 0$$

Keďže ide o systém 2. rádu, nutnou i postačujúcou podmienkou stability je kladnosť všetkých koeficientov charakteristickej rovnice. Z tejto podmienky vyplýva, že URO je stabilný ak  $Z_R > -\frac{2}{5}$ .

Ďalej platí, že URO je na hranici aperiodicity, ak má jeden viacnásobný koreň. V našom príklade to znamená, že charakteristická rovnica, ktorá je kvadratická, musí mať jeden dvojnásobný koreň. Kvadratická rovnica má dvojnásobný koreň vtedy, ak jej diskriminant je rovný 0. Takže aby bol URO na hranici aperiodicity, musí platiť

$$10^2 - 4(2 + 5Z_R) = 0$$

Riešením ostatnej rovnice dostaneme, že  $Z_R = 4,6$ . Teraz ešte skontrolujeme, či vypočítané  $Z_R$  patrí do oblasti hodnôt  $Z_R$ , pre ktoré je URO stabilný. Táto podmienka je splnená a dá sa skonštatovať, že URO je stabilný a na hranici aperiodicity pre  $Z_R = 4,6$ .

**Upozornenie**

- MATLAB používa PID regulátor v tvare  $P + I/s + Ds$ . Takže pred spustením simulácie je treba z PID regulátora (7.1) alebo (7.2) vypočítať konštanty  $P$ ,  $I$ ,  $D$  a až potom je možné simuláciu spustiť. Ak je regulátor typu P, konštanty  $I$  a  $D$  sú rovné 0, ak je regulátor typu PI, konštanta  $D$  je rovná 0.

## 7.3 Neriešené príklady

**Príklad 7.3.1:**

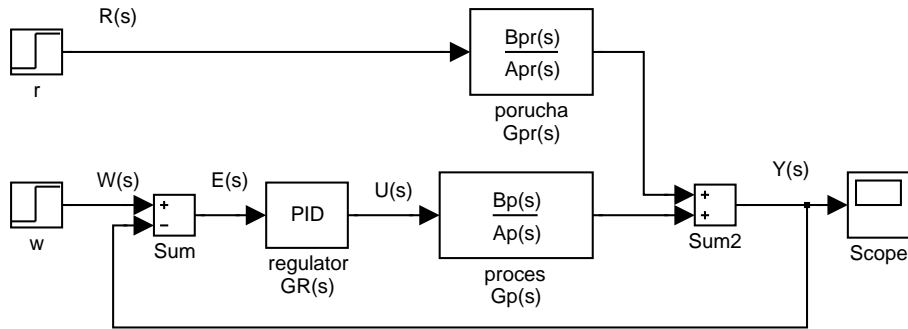
Zistíte, či je stabilný URO na obr. 7.3, kde riadený proces je opísaný diferenciálnou rovnicou

$$0,5y^{(4)}(t) + 6y'''(t) + 27,5y''(t) + 30y'(t) + 2y(t) = 3u(t)$$

Pre odvodenie prenosu riadeného procesu predpokladajte nulové začiatkové podmienky  $y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$ . Proporcionálno – integračno – derivačný



## KAPITOLA 7. SPÄTNOVÄZBOVÉ RIADENIE PROCESOV, STABILITA UZAVRETÝCH REGULAČNÝCH OBVODOV



Obr. 7.3 Bloková schéma URO k neriešeným príkladom 7.3.1–7.3.9 (súbor uro3.mdl)

regulátor má  $Z_R = 20$ ,  $T_I = 160$  a  $T_D = 0,5$ . Vypočítajte aj výstup z uzavretého regulačného obvodu  $y(t)$  pre  $t \rightarrow \infty$ , keď žiadaná veličina sa v čase  $t = 0$  mení skokom z hodnoty 0 na hodnotu 4 a porucha je nulová.

Výsledok sa dá simulačne overiť pomocou programu `uro3`. Do schémy zadajte prenos poruchy v tvare 0/1.

### Príklad 7.3.2:

Zistite, či je stabilný URO na obr. 7.3, kde riadený proces je opísaný diferenciálnou rovnicou

$$0,2y^{(4)}(t) + 2y'''(t) + 7,6y''(t) + 13,6y'(t) + 4,2y(t) = 7,2u(t)$$

Pre odvodenie prenosu riadeného procesu predpokladajte nulové začiatkové podmienky  $y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$ . Proporcionálno-integračný regulátor má  $Z_R = 1$  a  $T_I = 2$ . Vypočítajte aj výstup  $y(t)$  pre  $t \rightarrow \infty$  z uzavretého regulačného obvodu, keď žiadaná veličina je rovná 0 a porucha s prenosom  $G_{pr}(s) = 2$  sa v čase  $t = 0$  mení skokom z hodnoty 0 na hodnotu 4.

Výsledok sa dá simulačne overiť pomocou programu `uro3`.

### Príklad 7.3.3:

Nájdite kritickú hodnotu derivačnej časovej konštanty proporcionálno-derivačného regulátora, ktorý je v URO (obr. 7.3) pripojený k riadenému procesu opísanému diferenciálnou rovnicou

$$2y^{(4)}(t) + 12y'''(t) + 26y''(t) + 4y'(t) + 2y(t) = 5u(t)$$

Pre odvodenie prenosu procesu predpokladajte nulové začiatkové podmienky  $y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$ . Zosilnenie regulátora je 1,2.

Výsledok sa dá overiť výpočtom koreňov charakteristickej rovnice pre vypočítané kritické  $T_D$  alebo simulačne pomocou programu `uro3`. Pri simulácii však treba použiť veľmi malý konštantný integračný krok, napr. 0,001. Do schémy zadajte prenos poruchy v tvare 0/1,  $w(t) = 1$  a  $r(t) = 0$ .

### Príklad 7.3.4:

Vypočítajte, ako sa zmení trvalá regulačná odchýlka na výstupe z URO (obr. 7.3), keď sa zosilnenie proporcionálneho regulátora zmení z hodnoty 1 na hodnotu 10. Riadený proces je opísaný diferenciálnou rovnicou

$$2y'''(t) + 5y''(t) + 4y'(t) + 2y(t) = 0,5u(t)$$

### 7.3. NERIEŠENÉ PRÍKLADY

---

Pre odvodenie prenosu procesu predpokladajte nulové začiatkové podmienky  $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$ . Žiadaná veličina je nulová a poruchová veličina s prenosom  $G_{pr}(s) = 1/(s^2 + 2s + 1)$  sa v čase  $t = 0$  mení skokom z hodnoty 0 na hodnotu 3.

Výsledok sa dá simulačne overiť pomocou programu `uro3`.

#### Príklad 7.3.5:

Navrhnete zosilnenie proporcionálno-integračného regulátora s  $T_I = 0,28$  pre riadenie procesu, ktorý je opísaný diferenciálnou rovnicou  $0,2y'(t) + 6y(t) = 50u(t)$  tak, aby URO (obr. 7.3) bol stabilný a na hranici aperiodicity. Pre odvodenie prenosu procesu predpokladajte nulovú začiatkovú podmienku  $y(0) = 0$ . Vypočítajte aj  $y(t)$  pre  $t \rightarrow \infty$  výstupnej veličiny URO, keď žiadaná veličina je nulová a porucha sa v čase  $t = 0$ mení skokom z hodnoty 0 na hodnotu 4. Prenos poruchy je  $G_{pr}(s) = 1/(0,2s + 1)$ .

Výsledok sa dá simulačne overiť pomocou programu `uro3`.

#### Príklad 7.3.6:

URO (obr. 7.3) sa skladá z riadeného procesu opísaného diferenciálnou rovnicou

$$2y''(t) + 5y'(t) + 3y(t) = 3u(t)$$

a z proporcionálno-derivačného regulátora s derivačnou konštantou 0,2. Pre odvodenie prenosu procesu predpokladajte nulové začiatkové podmienky  $y(0) = y'(0) = 0$ . Poruchová veličina je nulová a žiadaná veličina sa v čase  $t = 0$ mení skokom z hodnoty 0 na hodnotu 5. Nájdite oblasť hodnôt zosilnení regulátora, pre ktoré je URO stabilný a trvalá regulačná odchýlka je menšia než 20% žiadanej veličiny.

Výsledok sa dá simulačne overiť pomocou programu `uro3`. Do schémy dosadzte prenos poruchy v tvare 0/1.

#### Príklad 7.3.7:

URO (obr. 7.3) sa skladá z proporcionálno-derivačného regulátora a z riadeného procesu, ktorý je opísaný diferenciálnou rovnicou v tvare

$$y^{(4)}(t) + 2y'''(t) + 4y''(t) + 5y'(t) + y(t) = 2u(t)$$

Pre odvodenie prenosu riadeného procesu predpokladajte nulové začiatkové podmienky  $y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$ . Zistite, či bude URO stabilný, ak zvolíte konštanty regulátora nasledovne:  $Z_R = 5$ ,  $T_D = 0,2$ . Určite hodnotu výstupnej veličiny  $y(t)$  pre  $t \rightarrow \infty$  a trvalú regulačnú odchýlku, keď viete, že porucha sa v spätnoväzbovom obvode riadenia nevyskytuje, žiadaná veličina je  $2(t)$  a konštanty regulátora sa zmenili na hodnoty  $Z_R = 1$ ,  $T_D = 0,2$ .

Výsledok sa dá simulačne overiť pomocou programu `uro3`. Do schémy dosadzte prenos poruchy v tvare 0/1.

#### Príklad 7.3.8:

V URO (obr. 7.3) je riadený proces vytvorený z dvoch sériovo zapojených procesov, ktoré sú opísané diferenciálnymi rovnicami

$$4y_1''(t) + 2y_1'(t) + 4y_1(t) = 0,5u(t)$$

$$8y_2''(t) + 2y_2'(t) + 5y_2(t) = 12y_1(t)$$

Pre odvodenie prenosov predpokladajte nulové začiatkové podmienky. Nájdite oblasť hodnôt proporcionálneho regulátora, pre ktoré bude URO stabilný. Akú najmenšiu trvalú regulačnú odchýlku dokážete zabezpečiť proporcionálnym regulátorom v tomto URO, keď porucha je nulová a žiadaná veličina je 5 ?

## KAPITOLA 7. SPÄTNOVÄZBOVÉ RIADENIE PROCESOV, STABILITA UZAVRETÝCH REGULAČNÝCH OBVODOV

Výsledok sa dá simulačne overiť pomocou programu `uro3`. Do schémy dosadíte prenos poruchy v tvare  $0/1$ .

### Príklad 7.3.9:

URO (obr. 7.3) sa skladá z riadeného procesu opísaného prenosom

$$G_p(s) = \frac{2}{(2s + 1)^3}$$

a regulátora opísaného v časovej oblasti rovnicou

$$u(t) = Z_R \left( e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(t) dt \right)$$

Pre  $Z_R = 3$  nájdite  $T_I$  regulátora tak, aby URO bol stabilný. Určite kritické  $T_I$  a odhadnite a približne nakreslite prechodovú charakteristiku URO pre  $Z_R = 3$  a pre  $T_{I,krit}$ . Porucha sa v URO nevyskytuje, žiadaná veličina je 2.

Výsledok sa dá simulačne overiť pomocou programu `uro3`. Do schémy dosadíte prenos poruchy v tvare  $0/1$ .

### Príklad 7.3.10:

Výpočtom určite akú trvalú regulačnú odchýlku zanechá v URO (obr. 7.1) regulátor opísaný v časovej oblasti rovnicou

$$u(t) = Z_R \left( e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(t) dt \right)$$

kde  $Z_R = 2$  a  $T_I = 0,5$ . Merací člen má prenos  $G_m(s) = 5$ , proces má prenos

$$G_p(s) = \frac{2}{s^2 + 5s + 6}$$

akčný člen má prenos

$$G_a(s) = \frac{1}{0,2s + 1}$$

a porucha má prenos

$$G_{pr}(s) = \frac{0,25}{s + 0,25}$$

Porucha je nulová a žiadaná veličina sa v čase  $t = 0$  mení skokom z hodnoty 0 na hodnotu 5. Zmení sa TRO, ak bude nulová žiadaná veličina a porucha sa v čase  $t = 0$  zmení skokom z hodnoty 0 na hodnotu 5?

Výsledok sa dá simulačne overiť pomocou programu `uro1`.

### Príklad 7.3.11:

Výpočtom určite, či je stabilný URO (obr. 7.1) s regulátorom, ktorý je v časovej oblasti opísaný rovnicou  $u(t) = Z_R(e(t) + T_D e'(t))$ , kde  $Z_R = 2$  a  $T_D = 0,25$ . Ďalej vypočítajte akú trvalú regulačnú odchýlku zanechá v URO tento regulátor, keď  $Z_R = 0,5$  a  $T_D = 0,25$ . Merací člen má prenos  $G_m(s) = 2$ , proces a akčný člen majú prenosi

$$G_p(s) = \frac{2}{s^3 + 3s^2 + 3s + 6}, \quad G_a(s) = \frac{1}{0,2s + 1}$$

## 7.4. OVERENIE VÝSLEDKOV PRÍKLADOV POMOCOU MILABU

---

a porucha má prenos  $G_{pr}(s) = 0,4$ . Žiadaná veličina je nulová a porucha sa v čase  $t = 0$  mení skokom z hodnoty 0 na hodnotu 2.

Výsledok sa dá simulačne overiť pomocou programu `uro1`.

### Príklad 7.3.12:

V URO (obr. 7.1) je riadený proces opísaný diferenciálnou rovnicou v tvare

$$y''(t) + 2y'(t) + 4y(t) = 0,5u(t)$$

akčný a merací člen majú prenos

$$G_a(s) = \frac{3}{2s+1}, \quad G_m(s) = 1$$

a regulátor je PI regulátor. Pre odvodenie prenosu procesu predpokladajte nulové začiatkové podmienky  $y(0) = y'(0) = 0$ . Určite oblasť hodnôt  $Z_R$ , pre ktoré bude URO stabilný, keď  $T_I = 0,2$ . Vypočítajte hodnotu výstupnej veličiny  $y(t)$  pre  $t \rightarrow \infty$ , keď viete, že porucha sa v URO nevyskytuje, žiadaná veličina je  $w = 2$ ,  $Z_R = 1$  a  $T_I = 0,2$ .

Výsledok sa dá simulačne overiť pomocou programu `uro1`. Do schémy dosadíte prenos poruchy v tvare 0/1.

## 7.4 Overenie výsledkov príkladov pomocou MILABu

Na hlavnej stránke LCZA (<http://www.kirp.chnik.stuba.sk/lcza>) sa nachádzajú HTML resp. PHP skripty programov `uro1` – `uro3`, vytvorené v MILABe, ktoré možno použiť na overenie správnosti riešenia príkladov 7.2.1 – 7.2.10 a 7.3.1 – 7.3.12. Výsledky sa dajú simulačne overiť nasledujúcim spôsobom:

### Vo vstupnom formulári

- zadajte veľkosť skokovej zmeny žiadanej hodnoty  $w$  ( $w(0) = 0$ )
- zadajte veľkosť skokových zmien porúch  $r_i$  ( $r_i(0) = 0$ ,  $i = 1, 2$ )
- zadajte čitatele a menovatele všetkých prenosov
- zadajte parametre PID regulátora, ktorý je v tvare 7.1. Ak používate P alebo PI regulátor, t.j. nie je definovaný niektorý z parametrov  $T_D$  alebo  $T_I$ , musíte ich zadať ako nulové ( $T_D = 0$  alebo  $T_I = 0$ ), pretože musia byť vyplnené všetky položky formulára.
- kliknite na ikonu „Spracovať“

### MILAB zobrazí výsledok, ktorý pozostáva z

- výpisu jednotlivých prenosov a vstupov
- blokovej schémy
- prechodovej charakteristiky

**Príklad:** Overte simulačne výsledok príkladu 7.2.7 (obr. 7.2).

## KAPITOLA 7. SPÄTNOVÄZBOVÉ RIADENIE PROCESOV, STABILITA UZAVRETÝCH REGULAČNÝCH OBVODOV

---

**Zápis v MILABe:** HTML/PHP skript programu uro2.

**Žiadaná hodnota:**  $w = 1$

**Porucha:**  $r_1 = 0$

**Porucha:**  $r_2 = 0$

**Čitateľ prenosu poruchy  $G_{pr2}$ :**  $B_{pr2}(s) = 0.5$   
**Menovateľ prenosu poruchy  $G_{pr2}$ :**  $A_{pr2}(s) = [0.5 \ 1]$

**Čitateľ prenosu poruchy  $G_{pr1}$ :**  $B_{pr1}(s) = 2$   
**Menovateľ prenosu poruchy  $G_{pr1}$ :**  $A_{pr1}(s) = [1 \ 4]$

**Čitateľ prenosu akčného člena  $G_a$ :**  $B_a(s) = 10$   
**Menovateľ prenosu akčného člena  $G_a$ :**  $A_a(s) = 1$

**Čitateľ prenosu procesu  $G_p$ :**  $B_p(p) = 1.6$   
**Menovateľ prenosu procesu  $G_p$ :**  $A_p(p) = [1, \ 6, \ 11, \ 6]$

**Čitateľ prenosu meracieho člena  $G_m$ :**  $B_m(s) = 0.5$   
**Menovateľ prenosu meracieho člena  $G_m$ :**  $A_m(s) = 1$

**Zosilnenie PID regulátora:**  $Z_R = 7.296$   
**Integračná časová konštanta PID regulátora:**  $T_I = 20$   
**Derivačná časová konštanta PID regulátora:**  $T_D = 0$

## Kapitola 8

# Vlastnosti regulátorov pri spätnoväzbovom riadení procesov

Cieľom cvičenia je sledovať vplyv P, I a D zložky PID regulátora na dynamické vlastnosti uzavretého regulačného obvodu (URO).

### 8.1 Prehľad pojmov

#### 8.1.1 Prenosy uzavretého regulačného obvodu

Prenos žiadanej veličiny (prenos riadenia) URO (obr. 8.1):

$$G_{yw}(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G_p(s)G_R(s)}{1 + G_p(s)G_R(s)} \quad (8.1)$$

Prenos poruchy URO (obr. 8.1):

$$G_{yr}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_{pr}(s)}{1 + G_p(s)G_R(s)} \quad (8.2)$$

#### 8.1.2 Úloha sledovania a úloha regulácie

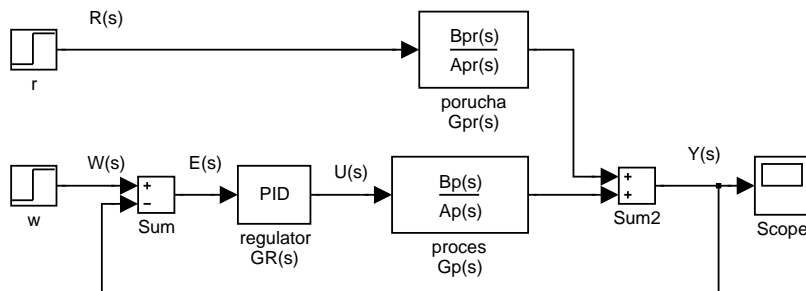
**Úlohou sledovania** je pomocou spätnoväzbového regulátora zaistiť pri nulovej poruche konvergenciu výstupnej veličiny URO (riadenej veličiny) k meniacej sa žiadanej veličine. Obraz výstupu URO v tejto úlohe je daný vzťahom

$$Y(s) = G_{yw}(s)W(s) \quad (8.3)$$

**Úlohou regulácie** je pomocou spätnoväzbového regulátora eliminovať vplyv porúch na výstupnú veličinu URO (riadenú veličinu) a zaistiť pritom jej konvergenciu k nemeniacej sa žiadanej veličine. Obraz výstupu URO v tejto úlohe je daný vzťahom

$$Y(s) = G_{yr}(s)R(s) \quad (8.4)$$

## KAPITOLA 8. VLASTNOSTI REGULÁTOROV PRI SPÄTNOVÄZBOVOM RIADENÍ PROCESOV



Obr. 8.1 Bloková schéma uzavretého regulačného obvodu

### 8.1.3 Ukazovatele kvality riadenia

Typická odozva URO na skokovú zmenu žiadanej veličiny je na obr. 8.2. Niektoré ukazovatele kvality riadenia v časovej oblasti sú definované nasledovne.

**Trvalá regulačná odchýlka (TRO)**

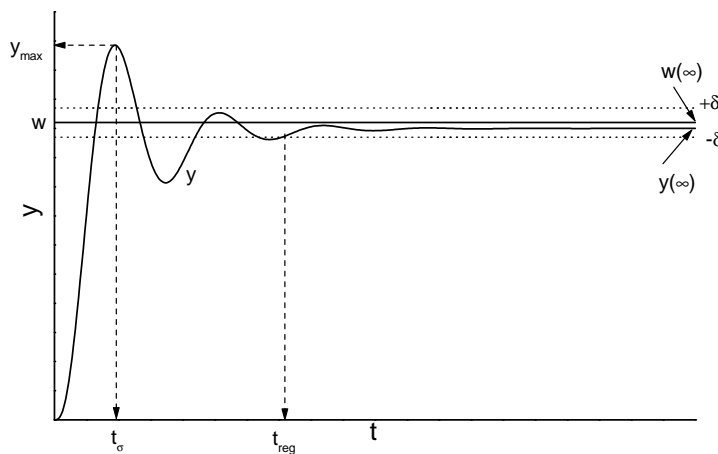
$$e(\infty) = w(\infty) - y(\infty) \quad (8.5)$$

**Maximálne preregulovanie  $\sigma_{max}$**

$$\sigma_{max} = \frac{y_{max} - y(\infty)}{y(\infty)} \cdot 100\% \quad (8.6)$$

**Čas regulácie  $t_{reg}$**  – čas, od ktorého sa riadená veličina dostane natrvalo do  $\delta$ -okolía žiadanej veličiny.

**Čas maximálneho preregulovania  $t_{\sigma}$**  – čas, v ktorom nastane maximálne preregulovanie.



Obr. 8.2 Prechodová charakteristika URO

## 8.2 Riešené príklady

### 8.2.1 Úloha sledovania pre systém 1. rádu a P regulátor

Riadený proces (môže to byť napr. plášťový výmenník tepla) je opísaný prenosom

$$G_p(s) = \frac{Z}{Ts + 1} \quad (8.7)$$

kde  $Z = 2$ ,  $T = 5$  a máme ho riadiť regulátorom s prenosom

$$G_R(s) = Z_R \quad (8.8)$$

so zosilnením  $Z_R = 10$  na žiadanú veličinu, ktorá sa v čase 0 zmení skokom z hodnoty 0 na hodnotu 1. Porucha sa nevyskytuje ( $r(t) = 0$ ).

**Príklad 8.2.1:** *Výpočet priebehu výstupnej veličiny z URO pri zmene žiadanej veličiny*  
Vypočítajte priebeh výstupnej veličiny z URO pri zmene žiadanej veličiny.

**Riešenie:**

Keďže ide o riešenie úlohy sledovania, na výpočet  $y(t)$  použijeme r. (8.3) a prenos URO (8.1). Pre obraz výstupu z URO (pre obraz riadenej veličiny) dostaneme

$$Y(s) = \frac{G_p(s)G_R(s)}{1 + G_p(s)G_R(s)}W(s) = \frac{ZZ_R}{Ts + 1 + ZZ_R} \frac{1}{s} = \frac{20}{5s + 21} \frac{1}{s} \quad (8.9)$$

Koreň charakteristickej rovnice URO je  $s_1 = -4,2$  a URO je stabilný. Obraz žiadanej veličiny má pól  $s_2 = 0$ .

Po rozklade na parciálne zlomky

$$Y(s) = \frac{ZZ_R}{1 + ZZ_R} \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1 + ZZ_R}{T}} \right) = \frac{20}{21} \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s + 4,2} \right) \quad (8.10)$$

a po spätnej Laplaceovej transformácii dostaneme funkciu opisujúcu priebeh riadenej veličiny v časovej oblasti (v tomto prípade prechodovú funkciu uzavretého regulačného obvodu)

$$y(t) = \frac{ZZ_R}{1 + ZZ_R} \left( 1 - e^{-\frac{1 + ZZ_R}{T}t} \right) = 0,9524 (1 - e^{-4,2t}) \quad (8.11)$$

**Príklad 8.2.2:** *Výpočet trvalej regulačnej odchýlky*

Vypočítajte TRO, ktorá zostane pri riešení úlohy sledovania v URO (obr. 8.1) s procesom (8.7) a P regulátorom (8.8).

**Riešenie:**

Kvôli výpočtu TRO najskôr vypočítame  $y(\infty)$  buď pomocou vzťahu  $y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s)$  alebo dosadením  $t = \infty$  do (8.11). Dostaneme

$$y(\infty) = \frac{ZZ_R}{1 + ZZ_R} = 0,9524 \quad (8.12)$$



a potom TRO (8.5)

$$e(\infty) = w(\infty) - y(\infty) = 1 - \frac{ZZ_R}{1 + ZZ_R} = \frac{1}{1 + ZZ_R} = 0,0476 \quad (8.13)$$

TRO existuje a znižuje sa so zvyšovaním  $Z_R$ , čo je zrejmé zo vzťahu (8.13).

Výsledok sa dá simulačne overiť pomocou programu **reg**. Simulačná schéma tohoto programu je na obr. 8.3. Prenos poruchy do schémy zadajte v tvare  $G_{pr}(s) = 0/1$ .

### 8.2.2 Úloha regulácie pre systém 1. rádu a P regulátor

Riadený proces je opísaný prenosom (8.7) s tými istými konštantami ako v úlohe sledovania a máme ho riadiť regulátorom s prenosom (8.8) s rovnakým zosilnením ako v úlohe sledovania na žiadanú veličinu  $w(t) = 0$ , t.j. nemeniacu sa žiadanú veličinu. V URO sa však vyskytuje porucha, ktorá sa v čase  $t = 0$  zmení skokom z hodnoty 0 na hodnotu 1. Prenos poruchy je

$$G_{pr}(s) = Z_{pr} = 2 \quad (8.14)$$

**Príklad 8.2.3:** Výpočet priebehu výstupnej veličiny z URO pri zmene poruchy

Vypočítajte priebeh výstupnej veličiny z URO pri zmene poruchovej veličiny.

**Riešenie:**

Vypočítame výstup  $y(t)$ . Použijeme na to r. (8.4) a prenos URO r. (8.2). Pre obraz výstupu z URO (pre obraz riadenej veličiny) dostaneme

$$Y(s) = \frac{G_{pr}(s)}{1 + G_p(s)G_R(s)} R(s) = \frac{Z_{pr}(Ts + 1)}{Ts + 1 + ZZ_R} \frac{1}{s} = \frac{10s + 2}{5s + 21} \frac{1}{s} \quad (8.15)$$

Po rozklade na parciálne zlomky

$$Y(s) = \frac{Z_{pr}}{1 + ZZ_R} \left( \frac{1}{s} + ZZ_R \frac{1}{s + \frac{1 + ZZ_R}{T}} \right) = \frac{2}{21} \left( \frac{1}{s} + 20 \frac{1}{s + 4,2} \right) \quad (8.16)$$

Po spätnej Laplaceovej transformácii

$$y(t) = \frac{Z_{pr}}{1 + ZZ_R} \left( 1 + ZZ_R e^{-\frac{1 + ZZ_R}{T}t} \right) = 0,0952 (1 + 20e^{-4,2t}) \quad (8.17)$$

**Príklad 8.2.4:** Výpočet trvalej regulačnej odchýlky

Vypočítajte TRO, ktorá zostane pri riešení úlohy regulácie v URO (obr. 8.1) s procesom (8.7) a P regulátorom (8.8).

**Riešenie:**

Najskôr vypočítame  $y(\infty)$  podobne ako v príklade 8.2.2. Dostaneme

$$y(\infty) = \frac{Z_{pr}}{1 + ZZ_R} = 0,0952 \quad (8.18)$$

## 8.2. RIEŠENÉ PRÍKLADY

Potom vypočítame TRO (8.5)

$$e(\infty) = w(\infty) - y(\infty) = 0 - \frac{Z_{pr}}{1 + ZZ_R} = -0,0952 \quad (8.19)$$

TRO existuje a približuje sa k 0 (k žiadanej veličine) so zvyšovaním  $Z_R$ , čo je zrejmé zo vzťahu (8.19).

Výsledok sa dá simulačne overiť pomocou programu **reg**.

### 8.2.3 Úloha sledovania pre systém 1. rádu a PI regulátor

Riadený proces je opísaný prenosom (8.7), kde  $Z = 2$ ,  $T = 5$ . Máme ho riadiť PI regulátorom s prenosom

$$G_R(s) = Z_R \left( 1 + \frac{1}{T_I s} \right) \quad (8.20)$$

so zosilnením  $Z_R = 5$  a integračnou časovou konštantou  $T_I = 2,5$  na žiadanú veličinu, ktorá sa v čase 0 zmení skokom z hodnoty 0 na hodnotu 1. Porucha sa nevyskytuje ( $r(t) = 0$ ).

**Príklad 8.2.5:** *Výpočet priebehu výstupnej veličiny z URO pri zmene žiadanej veličiny*

Vypočítajte priebeh výstupnej veličiny z URO pri zmene žiadanej veličiny.

**Riešenie:**

Vypočítame výstup  $y(t)$ . Použijeme na to r. (8.3) a prenos URO r. (8.1). Pre obraz výstupu z URO (pre obraz riadenej veličiny) dostaneme

$$Y(s) = \frac{G_p(s)G_R(s)}{1 + G_p(s)G_R(s)}W(s) = \frac{ZZ_Rs + \frac{ZZ_R}{T_I}}{Ts^2 + (1 + ZZ_R)s + \frac{ZZ_R}{T_I}} \frac{1}{s} = \frac{10s + 4}{5s^2 + 11s + 4} \frac{1}{s} \quad (8.21)$$

Korene charakteristickej rovnice (póly) URO sú:  $s_1 = -1,7403$ ,  $s_2 = -0,4597$ , a preto je URO stabilný.

Výstup  $y(t)$  z URO vieme vypočítať po rozklade posledného člena r. (8.21) na parciálne zlomky a po následnej spätnej Laplaceovej transformácii.

**Príklad 8.2.6:** *Výpočet trvalej regulačnej odchýlky*

Vypočítajte TRO, ktorá zostane pri riešení úlohy sledovania v URO (obr. 8.1) s procesom (8.7) a PI regulátorom (8.20).

**Riešenie:**

Kvôli výpočtu TRO najskôr počítame  $y(\infty)$  ako v príklade 8.2.2.

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{ZZ_Rs + \frac{ZZ_R}{T_I}}{Ts^2 + (1 + ZZ_R)s + \frac{ZZ_R}{T_I}} \frac{1}{s} = \frac{\frac{ZZ_R}{T_I}}{\frac{ZZ_R}{T_I}} = 1 \quad (8.22)$$

a potom TRO

$$e(\infty) = w(\infty) - y(\infty) = 1 - 1 = 0 \quad (8.23)$$

TRO v prípade použitia PI regulátora je nulová.

Výsledok sa dá simulačne overiť pomocou programu **reg**. Prenos poruchy do schémy zadajte v tvare  $G_{pr}(s) = 0/1$ .

### 8.2.4 Úloha regulácie pre systém 1. rádu a PI regulátor

Riadený proces je opísaný prenosom (8.7) s tými istými konštantami ako v úlohe sledovania a máme ho riadiť regulátorom s prenosom (8.20) s rovnakým zosilnením a integračnou časovou konštantou ako v úlohe sledovania na žiadanú veličinu  $w(t) = 0$ , t.j. nemeniacu sa žiadanú veličinu. V URO sa však vyskytuje porucha, ktorá sa v čase  $t = 0$  zmení skokom z hodnoty 0 na hodnotu 1. Prenos poruchy je (8.14).

**Príklad 8.2.7:** *Výpočet priebehu výstupnej veličiny z URO pri zmene poruchy*

Vypočítajte priebeh výstupnej veličiny z URO pri zmene poruchovej veličiny.

**Riešenie:**

Vypočítame výstup  $y(t)$ . Použijeme na to (8.4) a pre prenos URO (8.2). Pre obraz výstupu z URO (pre obraz riadenej veličiny) dostaneme

$$Y(s) = \frac{G_{pr}(s)}{1 + G_p(s)G_R(s)} R(s) = \frac{Z_{pr}(Ts + 1)s}{Ts^2 + (1 + ZZ_R)s + \frac{ZZ_R}{T_I}} \frac{1}{s} = \frac{10s^2 + 2s}{5s^2 + 11s + 4} \frac{1}{s} \quad (8.24)$$

Korene charakteristickej rovnice (póly) URO sú:  $s_1 = -1,7403$ ,  $s_2 = -0,4597$ .

Výstup  $y(t)$  z URO vieme vypočítať po rozklade posledného člena r. (8.24) na parciálne zlomky a po následnej spätnej Laplaceovej transformácii.

**Príklad 8.2.8:** *Výpočet trvalej regulačnej odchýlky*

Vypočítajte TRO, ktorá zostane pri riešení úlohy regulácie v URO (obr. 8.1) s procesom (8.7) a PI regulátorom (8.20).

**Riešenie:**

Kvôli výpočtu TRO najskôr počítame  $y(\infty)$  ako v príklade 8.2.2.

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{Z_{pr}(Ts + 1)s}{Ts^2 + (1 + ZZ_R)s + \frac{ZZ_R}{T_I}} \frac{1}{s} = \frac{0}{\frac{ZZ_R}{T_I}} = 0 \quad (8.25)$$

a potom TRO

$$e(\infty) = w(\infty) - y(\infty) = 0 - 0 = 0 \quad (8.26)$$

TRO v prípade použitia PI regulátora je nulová aj v úlohe regulácie.

Výsledok sa dá simulačne overiť pomocou programu **reg**.

## 8.3 Úlohy

Simuláciami overte typické vlastnosti P, PI, PD a PID regulátora v úlohe sledovania a v úlohe regulácie pre riadený proces (môžu to byť tri za sebou zapojené výmenníky tepla) s prenosom

$$G_p(s) = \frac{b_0}{(s + a_0)^3} \quad (8.27)$$

### 8.3. ÚLOHY

---

Porucha má prenos

$$G_{pr}(s) = \frac{Z_{pr}}{s + a_0} \quad (8.28)$$

#### 8.3.1 Úloha sledovania pre proces 3. rádu a P regulátor

Simuláciami overte typické vlastnosti P regulátora (8.8) pre riadený proces s prenosom (8.27). Žiadaná veličina sa v čase 0 zmení skokom z hodnoty 0 na hodnotu  $w(t)$ . Poruchová veličina  $r(t) = 0$ .

Zadané sú hodnoty  $b_0$ ,  $a_0$  pre prenos (8.27) a žiadaná veličina  $w(t)$ .

1. Pre zadané  $b_0$ ,  $a_0$  vypočítajte oblasť hodnôt zosilnenia regulátora s prenosom (8.8) a neznámym  $Z_R$ , pre ktoré je URO (obr. 8.1) stabilný. Určite aj kritickú hodnotu zosilnenia regulátora.
2. Zvoľte dve rôzne (výrazne rôzne) hodnoty z oblasti stabilných  $Z_R$  a vypočítajte TRO, ktorú zanechajú pri riadení procesu (8.27) P regulátory so zvolenými zosilneniami.
3. Pomocou simulácii (program **reg**) sa oboznámte s vplyvom  $Z_R$  na riadenú veličinu pri skokovej zmene žiadanej veličiny a overte správnosť výpočtu TRO. Simulácie vykonajte s dvoma zvolenými hodnotami z oblasti stabilných  $Z_R$ .
4. Výsledky spracujte do tabuľky, do ktorej k dvom zvoleným P regulátorom (ich zvoleným zosilneniam) vyhodnotíte stabilitu URO, periodicitu riadenej veličiny, TRO, čas regulácie  $t_{reg}$  ( $\delta = 15\%$  hodnoty žiadanej veličiny  $w$ ), maximálne preregulovanie  $\sigma_{max}$ , čas maximálneho preregulovania  $t_\sigma$ .
5. Simulácie vykonajte aj s kritickým zosilnením regulátora  $Z_{R,krit}$  a s jedným zvoleným  $Z_R$  väčším ako  $Z_{R,krit}$ , v týchto prípadoch však v tabuľke vyhodnoťte len stabilitu URO a periodicitu riadenej veličiny.
6. Zhodnoťte vplyv  $Z_R$  na priebeh priebeh riadenej veličiny.

#### 8.3.2 Úloha sledovania pre proces 3. rádu a PI regulátor

Simuláciami overte typické vlastnosti PI regulátora a jeho I zložky pre riadený proces s prenosom (8.27). Žiadaná veličina sa v čase 0 zmení skokom z hodnoty 0 na hodnotu  $w(t)$ . Poruchová veličina  $r(t) = 0$ . Prenos regulátora použite v tvare (8.20).

Zadané sú hodnoty  $b_0$ ,  $a_0$  pre prenos (8.27),  $w(t)$  a  $Z_R$ .

1. Pre zadané  $b_0$ ,  $a_0$ ,  $Z_R$  vypočítajte oblasť hodnôt  $T_I$  regulátora, pre ktoré je URO (obr. 8.1) stabilný. Určite aj kritickú hodnotu integračnej časovej konštanty  $T_{I,krit}$ .
2. Zvoľte dve rôzne hodnoty (výrazne rôzne) z oblasti stabilných  $T_I$  a vypočítajte TRO, ktorú zanechajú PI regulátory s týmito  $T_I$ .
3. Pomocou simulácii (program **reg**) sa oboznámte s vplyvom  $T_I$  na výstup riadeného procesu (na riadenú veličinu) pri skokovej zmene žiadanej veličiny a overte správnosť výpočtu TRO. Simulácie vykonajte s dvoma zvolenými hodnotami z oblasti stabilných  $T_I$ .

4. Výsledky spracujte do tabuľky, do ktorej k dvom zvoleným regulátorom (so zadaným  $Z_R$  a zvolenými  $T_I$ ) vyhodnotíte stabilitu URO, periodicitu riadenej výstupnej veličiny, TRO, čas regulácie  $t_{reg}$  ( $\delta = 15\%$  hodnoty žiadanej veličiny  $w$ ), maximálne preregulovanie  $\sigma_{max}$ , čas maximálneho preregulovania  $t_\sigma$ .
5. Simulácie vykonajte aj s kritickou integračnou časovou konštantou  $T_{I,krit}$  a s  $T_I$  menším ako kritickým, v týchto prípadoch však v tabuľke vyhodnoťte len stabilitu URO a periodicitu riadenej výstupnej veličiny.
6. Zhodnoťte vplyv  $T_I$  na priebeh riadenej veličiny.

### 8.3.3 Úloha sledovania pre proces 3. rádu a PD regulátor

Simuláciami overte typické vlastnosti PD regulátora a jeho D zložky pre riadený proces s prenosom (8.27). Žiadaná veličina sa v čase 0 zmení skokom z hodnoty 0 na hodnotu  $w(t)$ . Poruchová veličina  $r(t) = 0$ . Prenos regulátora použite v tvare

$$G_R(s) = Z_R (1 + T_D s) \quad (8.29)$$

Zadané sú hodnoty  $b_0$ ,  $a_0$  pre prenos (8.27),  $w(t)$  a  $Z_R$ .

1. Pre zadané  $b_0$ ,  $a_0$ ,  $Z_R$  vypočítajte oblasť hodnôt  $T_D$  regulátora, pre ktoré je URO (obr. 8.1) stabilný.
2. Zvoľte dve rôzne (výrazne rôzne) hodnoty z oblasti stabilných  $T_D$  a vypočítajte TRO, ktorú zanechajú pri riadení procesu (8.27) PD regulátory so zvolenými  $T_D$ .
3. Pomocou simulácií (program **reg**) sa oboznámte s vplyvom  $T_D$  na výstup riadeného procesu (na riadenú veličinu) pri skokovej zmene žiadanej veličiny a overte správnosť výpočtu TRO. Simulácie vykonajte s dvoma zvolenými hodnotami z oblasti stabilných  $T_D$ .
4. Výsledky spracujte do tabuľky, do ktorej k dvom zvoleným regulátorom (so zadaným  $Z_R$  a zvolenými  $T_D$ ) vyhodnotíte stabilitu URO, periodicitu riadenej výstupnej veličiny, TRO, čas regulácie  $t_{reg}$  ( $\delta = 15\%$  hodnoty žiadanej veličiny  $w$ ), maximálne preregulovanie  $\sigma_{max}$ , čas maximálneho preregulovania  $t_\sigma$ .
5. Zhodnoťte vplyv  $T_D$  na priebeh riadenej veličiny.

### 8.3.4 Úloha sledovania pre proces 3. rádu a PID regulátor

Simuláciami overte typické vlastnosti PID regulátora a jeho D zložky pre riadený proces s prenosom (8.27). Žiadaná veličina sa v čase 0 zmení skokom z hodnoty 0 na hodnotu  $w(t)$ . Poruchová veličina  $r(t) = 0$ . Prenos regulátora použite v tvare

$$G_R(s) = Z_R \left( 1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) \quad (8.30)$$

Zadané sú hodnoty  $b_0$ ,  $a_0$  pre prenos (8.27),  $w(t)$ ,  $Z_R$ ,  $T_I$ .

1. Pre zadané  $b_0$ ,  $a_0$ ,  $Z_R$ ,  $T_I$  vypočítajte oblasť hodnôt  $T_D$  regulátora, pre ktoré je URO (obr. 8.1) stabilný. Určite aj kritickú hodnotu  $T_D$ .
2. Zvoľte dve rôzne hodnoty z oblasti stabilných  $T_D$  a vypočítajte TRO, ktorú zanechajú pri riadení procesu (8.27) PID regulátory so zvolenými  $T_D$ .

## 8.4. SIMULÁCIE V MATLABE

---

3. Pomocou simulácii (program `reg`) sa oboznámte s vplyvom  $T_D$  PID regulátora na výstup riadeného procesu (na riadenú veličinu) pri skokovej zmene žiadanej veličiny a overte správnosť výpočtu TRO. Simulácie vykonajte s dvoma zvolenými hodnotami z oblasti stabilných  $T_D$ .
4. Výsledky spracujte do tabuľky, do ktorej k dvom zvoleným regulátorom (so zadánym  $Z_R$  a  $T_I$  a zvolenými  $T_D$ ) vyhodnotíte stabilitu URO, periodicitu riadenej výstupnej veličiny, TRO, čas regulácie  $t_{reg}$  ( $\delta = 15\%$  hodnoty žiadanej veličiny  $w$ ), maximálne preregulovanie  $\sigma_{max}$ , čas maximálneho preregulovania  $t_\sigma$ .
5. Zhodnoťte vplyv  $T_D$  na priebeh riadenej veličiny pri použití PID regulátora.

### 8.3.5 Úloha regulácie pre proces 3. rádu s P, PD, PI a PID regulátorom

Simuláciami overte typické vlastnosti P, PI, PD a PID regulátora pre riadený proces s prenosom (8.27) a poruchu s prenosom (8.28). Žiadaná veličina  $w(t) = 0$ , t.j. nemení sa, a porucha sa v čase 0 zmení skokom z hodnoty 0 na hodnotu  $r(t)$ .

Zadané sú hodnoty  $b_0$ ,  $a_0$  pre prenos (8.27),  $r(t)$ ,  $Z_{pr}$ .

1. Vyberte po jednom P, PI, PD a PID regulátore (alebo aspoň jeden bez I zložky a jeden s I zložkou), ktoré boli použité v predošlých úlohách sledovania a pre ktoré bol URO stabilný.
2. Vypočítajte TRO, ktorú zanechajú tieto regulátory pri riešení úloh regulácie v URO s procesom (8.27).
3. Pomocou simulácii (program `reg`) overte činnosť zvolených regulátorov pri riešení úlohy regulácie v URO s procesom (8.27). Všímajte si hlavne schopnosť regulátora odstrániť trvalú regulačnú odchýlku.
4. Výsledky spracujte do tabuľky, do ktorej ku každému zvolenému regulátoru vyhodnotíte TRO, čas regulácie  $t_{reg}$  ( $\delta = 15\%$  hodnoty poruchy  $r$ ), maximálne preregulovanie  $\sigma_{max}$ , čas maximálneho preregulovania  $t_\sigma$ .
5. Zhodnoťte rozdiely pri použití jednotlivých regulátorov v úlohe regulácie.

## 8.4 Simulácie v MATLABe

Pre simuláciu overenia vlastností regulátorov je potrebná schéma znázornená na obr. 8.3 (súbor `reg.mdl`). Postup je nasledovný:

1. Simulačná schéma sa otvorí príkazom `reg` v okne MATLABu.
2. Definujeme polynómy  $B_p$ ,  $A_p$  pre prenos procesu  $G_p(s)$  a polynómy  $B_{pr}$ ,  $A_{pr}$  pre prenos poruchy  $G_{pr}(s)$ . Pre úlohy sledovania definujeme  $r = 0$  a  $w$  podľa zadania. Pre úlohy regulácie definujeme  $w = 0$  a  $r$  podľa zadania. Definujeme konštantu  $\delta$ , ktorá vyjadruje s akou presnosťou máme riadiť.
3. Definujeme parametre regulátora. Prenos PID regulátora používaného v MATLABe má tvar

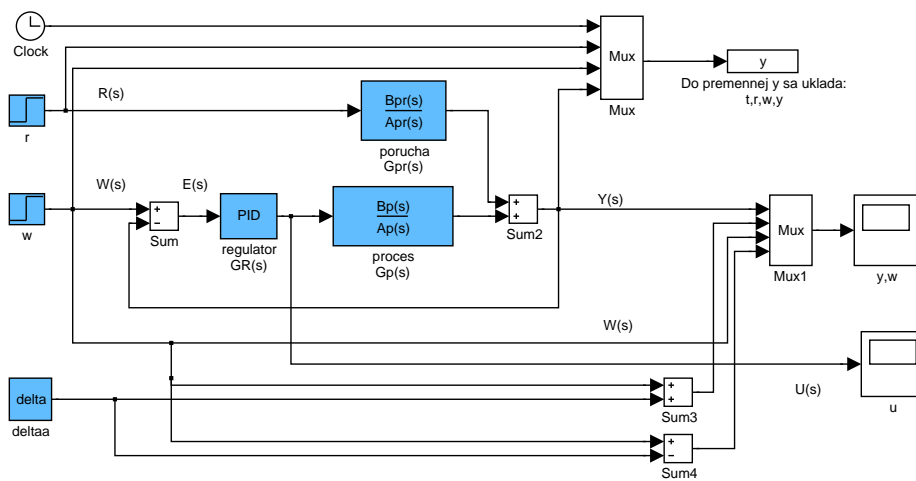
$$G_R(s) = P + \frac{I}{s} + Ds \quad (8.31)$$

## KAPITOLA 8. VLASTNOSTI REGULÁTOROV PRI SPÄTNOVÄZBOVOM RIADENÍ PROCESOV

a preto je potrebné definovať parametre  $P$ ,  $I$ ,  $D$  pomocou parametrov  $Z_R$ ,  $T_I$ ,  $T_D$ .

4. Do premennej  $y$  sa ukladajú v nasledovnom poradí tieto dáta: čas,  $r(t)$ ,  $w(t)$ ,  $y(t)$ . V jednom grafe môžeme sledovať riadiacu veličinu  $u(t)$ , ktorú generuje regulátor. V druhom grafe vidíme žiadanú veličinu  $w(t)$  – modrá čiara, riadenú veličinu  $y(t)$  – žltá čiara,  $+\delta$  okolie žiadanej veličiny – fialová čiara,  $-\delta$  okolie žiadanej veličiny – červená čiara.

Proces považujeme za uriadený, ak sa riadená výstupná veličina (žltá čiara) ustáli na hodnote, ktorá je v grafe medzi červenou a fialovou čiarou.



Obr. 8.3 Program `reg.mdl` – simulačná schéma

### Upozornenia

- Aby URO bol stabilný a mal zápornú spätnú väzbu, musia byť v prípade riadenia dynamického systému s kladným zosilnením (v našich príkladoch kladné  $b_0$ ) kladné aj všetky konštanty regulátora. Takže ak výpočtom vyjde oblasť stabilných hodnôt niektorého z parametrov regulátora tak, že obsahuje aj nulu a záporné čísla, tieto záporné čísla a nulu do oblasti stabilných hodnôt regulátora nezahrnieme.
- Pri výpočte TRO odvoďte v každej úlohe vzťah pre výpočet TRO všeobecne (ako v riešených príkladoch) a až potom dosadte konkrétne čísla. Podstatne to zníži časovú náročnosť výpočtov.

## 8.5 Simulácie v MILABe

Na hlavnej stránke LCZA (<http://www.kirp.chnik.stuba.sk/lcza>) sa nachádza HTML resp. PHP skript programu `reg`, vytvorený v MILABe, ktorý možno použiť na overenie typických vlastností PID regulátora. Vlastnosti PID regulátora pre úlohy sledovania a regulácie sa dajú simulačne overiť nasledujúcim spôsobom:

## 8.5. SIMULÁCIE V MILABE

---

### Vo vstupnom formulári

- zadajte veľkosť skokovej zmeny žiadanej hodnoty  $w$  ( $w(0) = 0$ ) - úloha sledovania
- zadajte veľkosť skokovej zmeny poruchy  $r$  ( $r(0) = 0$ ) - úloha regulácie
- zadajte presnosť riadenia  $\delta$
- zadajte čitatele a menovatele prenosov procesu a poruchy. V prípade, že niektorý z prenosov nie je definovaný, zadajte tento prenos v tvare 0/1 (t.j. čitateľ = 0, menovateľ = 1)
- zadajte parametre PID regulátora, ktorý je v tvare 7.1. Ak nie je definovaný niektorý z parametrov ( $T_D$  alebo  $T_I$ ), musíte ich zadať ako nulové ( $T_D = 0$  alebo  $T_I = 0$ ), pretože musia byť vyplnené všetky položky formulára
- kliknite na ikonu „Spracovať“

### MILAB zobrazí výsledok, ktorý pozostáva z

- výpisu prenosu procesu a poruchy
- blokovej schémy
- prechodovej charakteristiky

**Príklad:** Overte simulačne výsledok príkladu 8.2.6 (obr. 8.3).

**Zápis v MILABe:** HTML/PHP skript programu reg.

<b>Žiadaná hodnota:</b>	$w =$	1
<b>Porucha:</b>	$r =$	0
<b>Interval presnosti:</b>	$\delta =$	0.1
<b>Čitateľ prenosu procesu <math>G_p(s)</math>:</b>	$B_p(s) =$	2
<b>Menovateľ prenosu procesu <math>G_p(s)</math>:</b>	$A_p(s) =$	[5, 1]
<b>Čitateľ prenosu poruchy <math>G_{pr}(s)</math>:</b>	$B_{pr}(s) =$	0
<b>Menovateľ prenosu poruchy <math>G_{pr}(s)</math>:</b>	$A_{pr}(s) =$	1
<b>Zosilnenie PID regulátora:</b>	$Z_R =$	5
<b>Integračná časová konštanta PID regulátora:</b>	$T_I =$	2.5
<b>Derivačná časová konštanta PID regulátora:</b>	$T_D =$	0





## Kapitola 9

# Riadenie zásobníkov kvapaliny

Cieľom cvičenia je zvládnuť návrh (syntézu) regulátorov výpočtovými (analytickými) metódami – Naslinovou metódou a metódou umiestnenia pólov. Navrhnuté regulátory budú použité pre riadenie zásobníkov kvapaliny.

### 9.1 Prehľad pojmov

**Návrh (syntéza) regulátora** zahŕňa voľbu štruktúry (typu) regulátora a výpočet jeho parametrov.

**Charakteristická rovnica uzavretého regulačného obvodu (CHR URO)** (obr. 8.1) má tvar:

$$1 + G_p(s)G_R(s) = 0 \quad (9.1)$$

a po úprave

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0 \quad (9.2)$$

alebo

$$s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0 \quad (9.3)$$

kde v koeficientoch  $a_n, \dots, a_1, a_0$  môžu vystupovať neznáme parametre regulátorov typu PID.

### 9.2 Naslinova metóda syntézy regulátora

Regulátor sa navrhuje na základe požiadavky maximálneho preregulovania. Medzi koeficientmi CHR (9.2) alebo (9.3) platí vzťah

$$a_i^2 = \alpha a_{i+1} a_{i-1} \quad (9.4)$$

pričom medzi parametrom  $\alpha$  v r. (9.4) a maximálnym preregulovaním  $\sigma_{\max}$  (8.6) je vzťah daný tabuľkou 9.1.

Pre CHR  $n$ -tého stupňa, ktorá má  $n + 1$  koeficientov, dostaneme podľa (9.4) systém  $n - 1$  rovníc, lebo rovnice sa nedajú vytvoriť pre  $i = n$  a  $i = 0$ . Aby systém rovníc

Tabuľka 9.1 Vzťah medzi maximálnym preregulovaním  $\sigma_{\max}$  a parametrom  $\alpha$ 

$\sigma_{\max}\%$	20	12	8	5	3	1
$\alpha$	1,7	1,8	1,9	2	2,2	2,4

mal jediné riešenie, štruktúru regulátora (P, PI, PD, PID) volíme tak, aby sme dostali toľko rovníc, koľko v nich bude vystupovať neznámych parametrov regulátora. Treba si pritom uvedomiť, že ak použijeme regulátor bez I zložky, stupeň CHR URO je rovnaký ako stupeň CHR riadeného procesu (rád riadeného procesu) a ak použijeme regulátor s I zložkou, stupeň CHR URO je o jednotku vyšší než stupeň CHR riadeného procesu (rád riadeného procesu).

Pri návrhu regulátora Naslinovou metódou môžeme vychádzať z ľubovoľného tvaru prenosu PID regulátora, t.j. z tvaru s paralelnou štruktúrou, z tvaru so štruktúrou bez interakcie i z matlabovského tvaru. CHR URO môžeme používať i v tvare (9.2) i v tvare (9.3).

**Príklad 9.2.1:** *Syntéza regulátora s I zložkou Naslinovou metódou*

Naslinovou metódou navrhnete regulátor do URO (obr. 8.1) pre spätnoväzbové riadenie procesu, ktorý je opísaný prenosom

$$G_p(s) = \frac{8}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} \quad (9.5)$$

tak, aby maximálne preregulovanie  $\sigma_{\max}$  nebolo väčšie ako 5% a aby regulátor nenechal v URO trvalú regulačnú odchýlku (TRO).

**Riešenie:**

Za predpokladu, že potrebujeme odstrániť trvalú regulačnú odchýlku, musíme použiť regulátor s I zložkou. Riadený proces je 3. rádu, lebo stupeň menovateľa jeho prenosu je 3, takže aj CHR riadeného procesu je 3. stupňa. Stupeň CHR URO bude v tomto prípade 4. stupňa (stupeň CHR procesu + 1), takže pomocou vzťahu (9.4) vytvoríme 3 rovnice. Kvôli ich jednoznačnému riešeniu zvolíme regulátor, ktorý má 3 parametre, čiže PID regulátor. Nech jeho prenos má tvar

$$G_R(s) = Z_R \left( 1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) \quad (9.6)$$

CHR URO (8.1) s procesom (9.5) a regulátorom (9.6) má tvar

$$1 + \frac{8}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} Z_R \left( 1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) = 0 \quad (9.7)$$

Po jej úprave dostaneme

$$s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 6s + 8Z_R s + \frac{8Z_R}{T_I} + 8Z_R T_D s^2 = 0 \quad (9.8)$$

a nakoniec

$$s^4 + 6s^3 + (11 + 8Z_R T_D) s^2 + (6 + 8Z_R) s + \frac{8Z_R}{T_I} = 0 \quad (9.9)$$

kde zároveň vidíme, že CHR je skutočne 4. stupňa.

### 9.3. SYNTÉZA REGULÁTORA METÓDOU UMIESTNENIA PÓLOV

Podľa (9.4) teraz vytvoríme systém 3 rovníc o 3 neznámych:

$$6^2 = \alpha (11 + 8Z_R T_D) \quad (9.10)$$

$$(11 + 8Z_R T_D)^2 = \alpha 6 (6 + 8Z_R) \quad (9.11)$$

$$(6 + 8Z_R)^2 = \alpha (11 + 8Z_R T_D) \frac{8Z_R}{T_I} \quad (9.12)$$

Do rovníc (9.10) – (9.12) treba ešte dosadiť číselnú hodnotu parametra  $\alpha$ . Z tabulky (9.1) zistíme, že pre  $\sigma_{\max} = 5\%$  je  $\alpha = 2$ .

Systém rovníc riešime tak, že z r. (9.10) vyjadríme

$$(11 + 8Z_R T_D) = \frac{6^2}{\alpha} = \frac{36}{2} = 18 \quad (9.13)$$

Po dosadení (9.13) do r. (9.11), z (9.11) ľahko vypočítame  $Z_R$ . Z r. (9.10) dopyčítame  $T_D$  a z r. (9.12)  $T_I$ . Hľadané parametre regulátora sú:  $Z_R = 2,6250$ ,  $T_I = 1,0370$ ,  $T_D = 0,3333$ .

#### Simulácia riadenia s navrhnutým regulátorom

Riadenie procesu s prenosom (9.5) pomocou navrhnutého regulátora môžeme odsimulovať pomocou programu `reg` (viď. kap. 8.4) a to napr. pre úlohu sledovania. Pre simuláciu zadáme parametre do bloku regulátor a do bloku proces. Pri zadávaní parametrov regulátora si treba uvedomiť, že v MATLAbE sa používa iný tvar PID regulátora a jeho parametre  $P$ ,  $I$ ,  $D$  treba vypočítať pomocou  $Z_R$ ,  $T_I$ ,  $T_D$ . Ďalej budeme predpokladať, že prenos poruchy je  $G_{pr}(s) = 0/1$ . Pre úlohu sledovania ďalej zadáme  $r(t) = 0$ ,  $w(t) = 2$ ,  $\delta = 0,2$  a overíme, či sa výstup riadeného procesu ustáli na hodnote 2 a či teda dosiahne požadovanú hodnotu.

## 9.3 Syntéza regulátora metódou umiestnenia pólov

Hlavnou myšlienkou metódy umiestnenia pólov je vnútiť CHR URO určité póly, čím sa vlastne predurčí dynamické správanie sa URO, ktoré závisí od pólov. Voľbou pólov predpisujeme napr. stabilitu, aperiodický alebo periodický priebeh riadeného výstupu. Nevýhodou je, že sa nešpecifikuje čitateľ prenosu URO a dynamické vlastnosti URO môžu zhoršiť niektoré neznáme nuly URO.

#### Metóda umiestnenia pólov v prípade požiadavky na stabilný aperiodický priebeh výstupnej veličiny URO

Použitie metódy umiestnenia pólov je jednoduché v prípade požiadavky na stabilný aperiodický priebeh výstupnej veličiny URO (riadenej veličiny). Vtedy musia byť póly CHR URO záporné reálne čísla, ktoré môžeme vhodne zvoliť (umiestniť). Platí pri tom, že ak umiestnime pól (póly) CHR URO viac doľava od imaginárnej osi ako sú póly riadeného procesu, URO bude rýchlejší, než riadený proces. Vplyv niektorého pólu CHR URO na dynamiku URO sa dá potlačiť tak, že ho umiestnime vľavo od imaginárnej osi v čo najväčšej vzdialenosti od ostatných pólov.

Vo všeobecnosti pre CHR URO  $n$ -tého stupňa, môžeme voliť  $n$  pólov. Niektoré možnosti voľby pólov uvádzame :

1. CHR URO má  $n$ -násobný záporný reálny pól  $s_1$

Pre zvolený (známy) pól  $s_1$  bude mať CHR URO tvar

$$(s - s_1)^n = s^n + \tilde{a}_{n-1}s^{n-1} + \dots + \tilde{a}_1s + \tilde{a}_0 \quad (9.14)$$

2. CHR URO má  $n$  rôznych záporných reálnych pólov  $s_1, \dots, s_n$

Pre zvolené (známe) póly  $s_1, \dots, s_n$  bude mať CHR URO tvar

$$(s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n) = s^n + \tilde{a}_{n-1}s^{n-1} + \dots + \tilde{a}_1s + \tilde{a}_0 \quad (9.15)$$

3. CHR URO má niekoľko rôznych záporných reálnych pólov a niekoľko násobných záporných reálnych pólov

Pre zvolené (známe) póly bude mať CHR URO tvar

$$(s - s_1) \dots (s - s_k)(s - s_{k+1})^l (s - s_{k+2})^m = s^n + \tilde{a}_{n-1}s^{n-1} + \dots + \tilde{a}_1s + \tilde{a}_0 \quad (9.16)$$

kde  $k + l + m = n$ .

Z (9.14)–(9.16) je zrejmé, že pre zvolené póly sa koeficienty  $\tilde{a}_{n-1}, \dots, \tilde{a}_0$  dajú vypočítať, takže sú známe.

CHR URO je opísaná r. (9.1), kde  $G_p$  je známe a  $G_R$  sa hľadá a z nej odvodenou r. (9.3). CHR URO je však opísaná aj r. (9.14) alebo (9.15) alebo (9.16). Takže musí platiť

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 = s^n + \tilde{a}_{n-1}s^{n-1} + \dots + \tilde{a}_1s + \tilde{a}_0 \quad (9.17)$$

Porovnaním koeficientov polynómov na ľavej a pravej strane r. (9.17) dostaneme systém  $n$  rovníc

$$\begin{aligned} a_{n-1} &= \tilde{a}_{n-1} \\ &\vdots \\ a_0 &= \tilde{a}_0 \end{aligned} \quad (9.18)$$

z ktorého vypočítame neznáme parametre regulátora, ktoré vystupujú ako neznáme v koeficientoch  $a_{n-1}, \dots, a_0$ .

Systém rovníc (9.18) predstavuje pre CHR URO  $n$ -tého stupňa  $n$  rovníc. Aby tento systém rovníc mal jediné riešenie, štruktúru regulátora a póly volíme tak, aby pre vybraný typ regulátora počet rovníc (9.18) bol rovnaký ako počet neznámych v nich, čiže aby sme dostali systém  $n$  rovníc o  $n$  neznámych.

Pri návrhu regulátora metódou umiestnenia pólov môžeme vychádzať z ľubovoľného tvaru prenosu PID regulátora, t.j. z tvaru s paralelnou štruktúrou, z tvaru so štruktúrou bez interakcie i z matlabovského tvaru. CHR URO je vhodné používať v tvare (9.3).

**Príklad 9.3.1:** *Syntéza regulátora bez I zložky metódou umiestnenia pólov*

Metódou umiestnenia pólov navrhnete regulátor do URO (obr. 8.1) pre riadenie procesu, ktorý je opísaný prenosom

$$G_p(s) = \frac{5}{4s + 2} \quad (9.19)$$

tak, aby výstup z URO bol stabilný a aperiodický. Regulátor môže v URO nechať TRO.

### 9.3. SYNTÉZA REGULÁTORA METÓDOU UMIESTNENIA PÓLOV

#### Riešenie:

V prípade, že v URO môže zostať TRO, regulátor nemusí mať I zložku. CHR URO pre proces 1. rádu a regulátor bez I zložky je 1. stupňa. Vzťah (9.18) v tomto prípade predstavuje len 1 rovnicu. Aby sme dostali jediné riešenie, musí táto rovnica obsahovať len jednu neznámu – parameter regulátora. Preto je vhodné použiť regulátor s najjednoduchšou štruktúrou a to je P regulátor s prenosom

$$G_R(s) = Z_R \quad (9.20)$$

CHR URO pre proces (9.19) a regulátor (9.20) má tvar

$$1 + \frac{5}{4s+2}Z_R = 0 \quad (9.21)$$

a po úprave

$$s + 0,5 + 1,25Z_R = 0 \quad (9.22)$$

Je teda skutočne 1. stupňa.

CHR 1. stupňa má len 1 pól  $s_1$ . Pomocou tohoto pólu sa CHR URO dá napísať v tvare

$$s - s_1 = 0 \quad (9.23)$$

Keďže aj r. (9.22) aj r. (9.23) predstavuje CHR URO, platí

$$s + 0,5 + 1,25Z_R = s - s_1 \quad (9.24)$$

Porovnaním koeficientov polynómov na ľavej a pravej strane r. (9.24) dostaneme

$$0,5 + 1,25Z_R = -s_1 \quad (9.25)$$

$$Z_R = \frac{-s_1 - 0,5}{1,25} \quad (9.26)$$

Keď vhodne zvolíme pól  $s_1$ , v r. (9.26) máme 1 neznámu a tou je  $Z_R$ .

Pól URO zvolíme pomocou pólu riadeného procesu (9.19). Ten získame riešením rovnice  $4s + 2 = 0$ . Pól riadeného procesu je  $-0,5$ . Aby URO bol rýchlejší než riadený proces, stabilný a výstup z neho aperiodický, zvolíme pól URO na reálnej osi vľavo pólu riadeného procesu, napr.  $s_1 = -5$ . URO bude teda 10krát rýchlejší než riadený proces (pól URO je 10-násobkom pólu riadeného procesu). Po dosadení zvolenej hodnoty  $s_1$  do (9.26) dostaneme  $Z_R = 3,6$ .

Z r. (9.26) vyplýva, že posúvaním pólu doľava sa zväčšuje  $Z_R$  a znižuje TRO.

Posúvaním pólu doľava sa zároveň znižuje časová konštanta URO, pretože medzi časovou konštantou a pólom je nasledovný vzťah:  $T = -1/s_1$ . Čím je časová konštanta URO menšia, tým je regulačný pochod rýchlejší.

Takže ak je TRO pri použití  $Z_R = 3,6$  veľká, posunieme pól ešte viac doľava a zvolíme napr.  $s_1 = -10$ . Vtedy  $Z_R = 7,6$ . TRO sa zmenší a regulačný pochod zrýchli.

Riadenie procesu s prenosom (9.19) pomocou navrhnutého P regulátora môžeme odsimulovať pomocou programu **reg**, kde nastavíme parametre ako pri simulácii riadenia v príklade 9.2.1.

**Príklad 9.3.2:** *Syntéza regulátora s I zložkou metódou umiestnenia pólov*

Metódou umiestnenia pólov navrhnete regulátor do URO (obr. 8.1) pre riadenie procesu, ktorý je opísaný prenosom (9.19) tak, aby výstup z URO bol stabilný a aperiódický. Regulátor nesmie v URO nechať TRO.

**Riešenie:**

V prípade, že v URO nemôže zostať TRO, treba použiť regulátor s I zložkou. CHR URO pre proces 1. rádu a regulátor s I zložkou je 2. stupňa. Systém rovníc (9.18) v tomto prípade predstavuje systém 2 rovníc. Aby sme dostali jediné riešenie, musia tieto rovnice obsahovať dve neznáme – parametre regulátora. Vhodný typ regulátora je teda PI regulátor s prenosom napr.

$$G_R(s) = Z_R \left( 1 + \frac{1}{T_I s} \right) \quad (9.27)$$

CHR URO pre proces (9.19) a regulátor (9.27) má tvar

$$1 + \frac{5}{4s+2} Z_R \left( 1 + \frac{1}{T_I s} \right) = 0 \quad (9.28)$$

a po úprave

$$s^2 + (0,5 + 1,25Z_R)s + \frac{1,25Z_R}{T_I} = 0 \quad (9.29)$$

CHR URO 2. stupňa a má 2 póly a to buď 2 rôzne póly  $s_1, s_2$  alebo jeden dvojnásobný pól  $s_1$ . Predpokladajme druhú možnosť. Pomocou dvojnásobného pólu  $s_1$  sa CHR URO dá napísať v tvare

$$(s - s_1)^2 = s^2 - 2s_1s + s_1^2 = 0 \quad (9.30)$$

Keďže aj r. (9.29) aj r. (9.30) predstavuje CHR URO, platí

$$s^2 + (0,5 + 1,25Z_R)s + \frac{1,25Z_R}{T_I} = s^2 - 2s_1s + s_1^2 \quad (9.31)$$

Porovnaním koeficientov polynómov na ľavej a pravej strane r. (9.31) dostaneme

$$0,5 + 1,25Z_R = -2s_1 \quad (9.32)$$

$$\frac{1,25Z_R}{T_I} = s_1^2 \quad (9.33)$$

Keď vhodne zvolíme pól  $s_1$ , v systéme rovníc (9.32), (9.33) máme 2 neznáme  $Z_R$  a  $T_I$ , pre ktoré platí

$$Z_R = \frac{-2s_1 - 0,5}{1,25} \quad (9.34)$$

$$T_I = \frac{1,25Z_R}{s_1^2} \quad (9.35)$$

Pól  $s_1$  zvolíme ako v príklade 9.3.1, napr.  $s_1 = -5$ . Po dosadení jeho hodnoty do (9.34), (9.35) dostaneme  $Z_R = 7,6$ ,  $T_I = 0,38$ .

Riadenie procesu s prenosom (9.19) pomocou navrhnutého PI regulátora môžeme odsimulovať pomocou programu `reg`, kde nastavíme parametre ako pri simulácii riadenia v príklade 9.2.1.

### 9.3. SYNTÉZA REGULÁTORA METÓDOU UMIESTNENIA PÓLOV

**Príklad 9.3.3:** *Syntéza regulátora s I zložkou metódou umiestnenia pólov pre riadený systém 3. rádu*

Metódou umiestnenia pólov navrhnete regulátor pre riadenie procesu, ktorý je opísaný prenosom (9.5) tak, aby výstup z URO bol stabilný a aperiodický a aby regulátor v URO nenechal TRO.

**Riešenie:**

V prípade, že potrebujeme odstrániť trvalú regulačnú odchýlku, použijeme regulátor s I zložkou. CHR URO s procesom (9.5) a regulátorom s I zložkou je 4. stupňa a má 4 póly. Systém rovníc (9.18) predstavuje v tomto prípade systém 4 rovníc, v ktorom musíme mať štyri neznáme, aby sme dostali jeho jediné riešenie.

Štruktúru regulátora volíme teda tak, aby obsahoval čo najviac parametrov, a preto nech regulátor je PID regulátor v tvare (9.6). Parametre regulátora  $Z_R$ ,  $T_I$ ,  $T_D$  predstavujú 3 neznáme. Za štvrtú neznámu budeme považovať jeden pól CHR URO. Po jeho výpočte však treba skontrolovať, či je záporný a reálny. Z toho vyplýva, že voliť môžeme maximálne 3 póly URO v prípade, ak póly URO sú rôzne. V prípade násobných pólov stačí voliť len 2 alebo 1 pól.

Pre riešenie nášho príkladu môžeme predpokladať, že CHR URO má 1 trojnásobný pól  $s_1$  a 1 pól  $s_2$ .

CHR URO bude mať podľa (9.16) tvar

$$(s - s_1)^3(s - s_2) = s^4 + (-3s_1 - s_2)s^3 + (3s_1^2 + 3s_1s_2)s^2 + (-s_1^3 - 3s_1^2s_2)s + s_1^3s_2 \quad (9.36)$$

Zároveň platí, že CHR URO pre proces (9.5) a regulátor (9.6) má tvar (9.9), takže porovnaním (9.9) a pravej strany (9.36) dostaneme

$$s^4 + 6s^3 + (11 + 8Z_RT_D)s^2 + (6 + 8Z_R)s + \frac{8Z_R}{T_I} = s^4 + (-3s_1 - s_2)s^3 + (3s_1^2 + 3s_1s_2)s^2 + (-s_1^3 - 3s_1^2s_2)s + s_1^3s_2$$

Porovnaním koeficientov polynómov na ľavej a pravej strane ostatnej rovnice dostaneme systém 4 rovníc o 4 neznámych v tvare:

$$6 = -3s_1 - s_2 \quad (9.37)$$

$$(11 + 8Z_RT_D) = 3s_1^2 + 3s_1s_2 \quad (9.38)$$

$$(6 + 8Z_R) = -s_1^3 - 3s_1^2s_2 \quad (9.39)$$

$$\frac{8Z_R}{T_I} = s_1^3s_2 \quad (9.40)$$

Otázkou zostáva, ktorý pól máme zvoliť a ako. Pomôžeme si výpočtom pólov riadeného procesu (9.5). Tieto dostaneme riešením rovnice  $s^3 + 6s^2 + 11s + 6 = 0$  a sú  $-3$ ,  $-2$ ,  $-1$ . Pól URO zvolíme tak, aby ležal na reálnej osi vľavo od pólov riadeného procesu a teda tak, aby URO bol rýchlejší ako riadený proces. Zároveň pól URO volíme tak, aby sme riešením (9.37) dostali druhý pól v tvare záporného a reálneho čísla. Vhodnejší na voľbu je v tomto prípade pól  $s_2$ , ktorý musí byť z intervalu  $(-6; 0)$ , aby vyhovoval uvedeným podmienkam. Pre  $s_2 \leq -6$  by nám výpočtom vyšiel pól  $s_1 \geq 0$ , takže URO by bol nestabilný. Zároveň musíme riešením (9.38)–(9.40) dostať konštanty regulátora ako kladné čísla, pretože riadený proces má kladné statické zosilnenie. Všetky podmienky budú splnené, ak zvolíme napr.  $s_2 = -3,25$ . Riešením (9.37) dostaneme  $s_1 = -0,9167$ . Riešením (9.38)–(9.40) získame  $Z_R = 0,3704$ ,



$T_I = 1,1836$  a  $T_D = 0,1547$ . Keby sme pri voľbe  $s_2$  dostali výpočtom  $s_1 \geq 0$  alebo niektorú z konštánt regulátora  $\leq 0$ , museli by sme  $s_2$  zvoliť inak.

## 9.4 Zieglerova–Nicholsova metóda syntézy regulátora s výpočtom kritického zosilnenia

Pri vypracovaní tejto metódy sa vychádzalo z riadeného procesu opísaného systémom 1. rádu s dopravným oneskorením a parametre regulátora boli vypočítané tak, aby riadená veličina vykazovala tlmené kmity s koeficientom tlmenia asi 25% .

Postup pri návrhu regulátora touto metódou je nasledovný:

1. Predpokladá sa, že k riadenému procesu je pripojený najskôr len P regulátor. Vypočíta sa jeho kritické zosilnenie  $Z_{R,krit}$ . Pri použití tohto zosilnenia je URO na hranici stability a výstup z URO kmitá netlmenými kmitmi.
2. Vypočíta sa perióda netlmených kmitov  $T_{krit}$ .
3. Vypočítané parametre  $Z_{R,krit}$ ,  $T_{krit}$  sa použijú na nastavenie parametrov regulátora podľa tabuľky 9.2.

Pri návrhu regulátora Zieglerovou–Nicholsovou metódou s výpočtom kritického zosilnenia nie je možné použiť ľubovoľnú štruktúru regulátora. Pri návrhu regulátora touto metódou sa predpokladá štruktúra bez interakcie, t.j. základný prenos PID regulátora musí mať tvar (9.6).

Tabuľka 9.2 Nastavenie parametrov regulátora Zieglerovou–Nicholsovou metódou

Regulátor	$Z_R$	$T_I$	$T_D$
$P$	$0,5Z_{R,krit}$		
$PI$	$0,4Z_{R,krit}$	$0,8T_{krit}$	
$PID$	$0,6Z_{R,krit}$	$0,5T_{krit}$	$0,125T_{krit}$

**Príklad 9.4.1:** *Návrh regulátora Zieglerovou–Nicholsovou metódou s výpočtom kritického zosilnenia*

Zieglerovou–Nicholsovou metódou s výpočtom kritického zosilnenia navrhnete regulátor do URO (obr. 8.1) pre riadenie procesu (9.5) tak, aby regulátor nenechal v URO trvalú regulačnú odchýlku (TRO).

**Riešenie:**

1. Predpokladáme, že k riadenému procesu (9.5) je pripojený P regulátor (9.20). Vypočítame jeho kritické zosilnenie  $Z_{R,krit}$ . Potrebujeme na to CHR URO, ktorá má tvar

$$1 + \frac{8}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} Z_R = 0 \quad (9.41)$$

$$s^3 + 6s^2 + 11s + 6 + 8Z_R = 0 \quad (9.42)$$

Kritické zosilnenie určíme pomocou Routhovho–Schurovho kritéria stability. Routhov–Schurov algoritmus:

## 9.5. ÚLOHY

1	<u>6</u>	11	<u><math>6 + 8Z_R</math></u>	$k_1 = \frac{1}{6}$	I
$-6\frac{1}{6}$		$-(6 + 8Z_R)\frac{1}{6}$			II
6	<u><math>\frac{60 - 8Z_R}{6}</math></u>		$6 + 8Z_R$		III

Pre  $Z_{R,\text{krit}}$  je URO na hranici stability (výstup kmitá netlmenými kmitmi) a tomu zodpovedá nulový koeficient  $a_1$  v riadku III za predpokladu, že koeficienty  $a_2$  a  $a_0$  sú väčšie ako 0. Takže vyriešime rovnicu

$$\frac{60 - 8Z_R}{6} = 0 \quad (9.43)$$

a dostaneme  $Z_{R,\text{krit}} = 7,5$ .

2. Vypočíta saperióda netlmených kmitov  $T_{\text{krit}}$ . Na výpočetperiódy netlmených kmitov  $T_{\text{krit}}$  výstupnej veličiny URO použijeme riadok III Routhovho–Schurovho algoritmu, ktorý odpovedá rovnici:

$$6s^2 + \frac{60 - 8Z_R}{6}s + 6 + 8Z_R = 0 \quad (9.44)$$

Korene tejto rovnice, ktoré sú súčasne koreňmi CHR URO, ležia na imaginárnej osi (majú nulové reálne časti), ak je systém na hranici stability. Vypočítame ich tak, že vyriešime rovnicu (9.44) so  $Z_R = Z_{R,\text{krit}}$ . Po dosadení  $Z_{R,\text{krit}}$  do (9.44) dostaneme rovnicu

$$6s^2 + 66 = 0 \quad (9.45)$$

ktorej riešením sú korene  $s_{1,2} = \pm 3,3166i$ , pričom zároveň platí  $s_{1,2} = \pm \omega_{\text{krit}}i$ , kde  $\omega_{\text{krit}}$  je uhlová rýchlosť netlmených harmonických kmitov. Takže v našom prípade  $\omega_{\text{krit}} = 3,3166$ . Vzťah medzi periódou netlmených kmitov  $T_{\text{krit}}$  a uhlovou rýchlosťou netlmených kmitov  $\omega_{\text{krit}}$  je nasledovný:

$$T_{\text{krit}} = \frac{2\pi}{\omega_{\text{krit}}} = \frac{2,3,14}{3,3166} = 1,8935 \quad (9.46)$$

3. Vypočítané parametre  $Z_{R,\text{krit}}$  a  $T_{\text{krit}}$  sa použijú na nastavenie parametrov regulátora podľa tabuľky 9.2. Ak v URO nesmie zostať TRO, vyberieme si regulátor s I zložkou, a to napr. PID regulátor (9.6) a vypočítame jeho parametre:

$$Z_R = 0,6Z_{R,\text{krit}} = 4,5 \quad (9.47)$$

$$T_I = 0,5T_{\text{krit}} = 0,9468 \quad (9.48)$$

$$T_D = 0,125T_{\text{krit}} = 0,2367 \quad (9.49)$$

Riadenie procesu s prenosom (9.5) pomocou navrhnutého PID regulátora môžeme odsimulovať pomocou programu **reg**, kde nastavíme parametre ako pri simulácii riadenia v príklade 9.2.1.

## 9.5 Úlohy

Analytickými metódami navrhните regulátory pre riadenie dvoch zásobníkov kvapaliny s interakciou alebo bez interakcie, ktorých prechodové charakteristiky ste simulovali a

prenos ste odvodili pri sledovaní dynamických vlastností dvoch za sebou zapojených zásobníkov kvapaliny (úloha 6.3.1).

K dispozícii máte prenos 2 zásobníkov kvapaliny s interakciou alebo bez interakcie, odvodený na cvičení venovanom modelovaniu procesov.

1. Navrhните vhodný regulátor pre riadenie sústavy dvoch zásobníkov kvapaliny tak, aby maximálne preregulovanie nebolo väčšie ako 5 % a aby v URO nezostala TRO.
2. Navrhните vhodný regulátor pre riadenie sústavy dvoch zásobníkov kvapaliny tak, aby maximálne preregulovanie nebolo väčšie ako 20 % , v URO môže byť TRO.
3. Nájdite vhodný regulátor pre riadenie sústavy dvoch zásobníkov kvapaliny tak, aby výstup z URO bol aperiodický a aby v URO nezostala TRO.
4. Nájdite vhodný regulátor pre riadenie sústavy dvoch zásobníkov kvapaliny tak, aby výstup z URO bol aperiodický. V URO môže zostať TRO.
5. Odsimulujte riadenie zásobníkov kvapaliny pomocou všetkých navrhnutých regulátorov. Na simuláciu použite program **hs2riad**.
6. Výsledky riadenia spracujte do tabuľky, do ktorej ku každému regulátoru vyhodnotíte TRO, čas regulácie  $t_{reg}(\delta=5\%)$  hodnoty žiadanej veličiny), maximálne preregulovanie  $\sigma_{max}$ , čas maximálneho preregulovania  $t_{\sigma}$ .

### Upozornenie

- Pri použití metódy umiestnenia pólov na syntézu regulátora je vhodné voliť póly URO síce vľavo na reálnej osi od pólov riadeného procesu, ale nie rádovo rozdielne. Keď zvolíme póly URO vo veľkej vzdialenosti od pólov riadeného procesu, mal by byť síce regulačný pochod rýchly, ale regulátor generuje príliš veľké zmeny riadiacej veličiny, čo spôsobuje problémy, ak je riadiaca veličina zhora alebo zdola obmedzená (čo v praxi takmer vždy je). V takomto prípade sa riadiaca veličina mení z hodnoty horného obmedzenia na hodnotu dolného obmedzenia a naspäť, čo má za následok, že riadená veličina kmitá netlmenými kmitmi.

## 9.6 Simulácie v MATLABe

Pre simuláciu riadenia dvoch zásobníkov kvapaliny je potrebná schéma znázornená na obr. 9.1 (súbor **hs2riad.mdl** využívajúci súbory **hs2.m**, **tanksnew.m**). Postup je nasledovný:

1. Simulačná schéma (obr. 9.1) sa otvorí príkazom **hs2riad** v okne MATLABu.
2. Definujeme:  $w$  v bloku **w** (žiadaná veličina – žiadaná výška hladiny v 2. zásobníku),  $\delta$  v bloku **delta** (presnosť s akou chceme riadiť),  $q_0^s$  v bloku **q0s** (vstupný prietok v pôvodnom ustálenom stave),  $q_{0max}$  v bloku **obmedzenie** (obmedzenie prietoku podľa vlastností potrubia,  $q_{0max}$  je horná hranica fyzikálne realizovateľného prietoku, dolná hranica je 0), parametre zásobníkov v bloku **Zasobniky** (nelineárny model).

Blok **Zasobniky** (nelineárny model) obsahuje v sebe prepínač animácie riadenia zásobníkov. Animácia spomaľuje výpočty a môže byť vypnutá, ak trvá simulácia príliš dlho.

## 9.7. SIMULÁCIE V MILABE

Doporučené hodnoty: žiadaná výška hladiny v druhom zásobníku  $w$  = hodnota o 20% vyššia ako výška hladiny v druhom zásobníku v pôvodnom ustálenom stave, ale zaokrúhlená na 1 – 2 desatinné miesta,  $\delta = 5\%$  z hodnoty  $w$ ,  $q_{0\max}$  je 10-násobok vstupného prietoku v pôvodnom ustálenom stave.

Parametre zásobníkov a hodnota  $q_0^s$  boli zadane pri sledovaní dynamických vlastností zásobníkov.

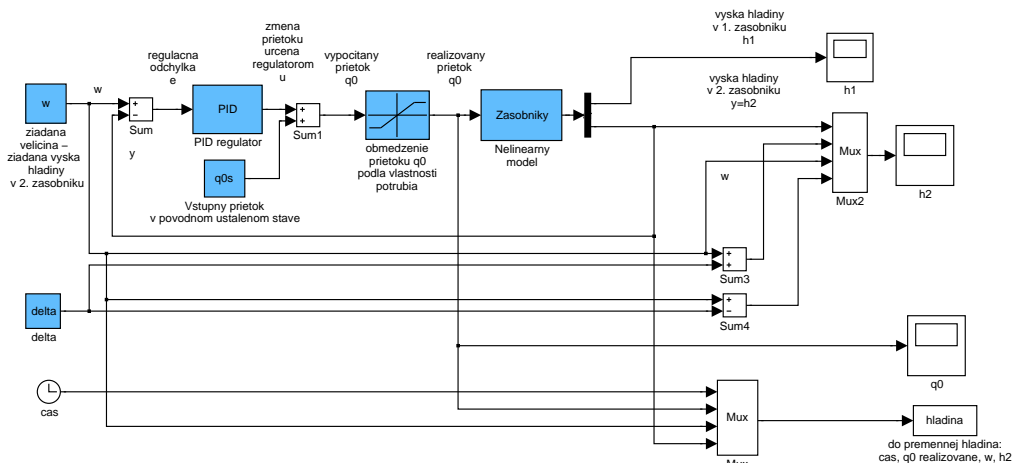
- Definujeme parametre regulátora. Prenos PID regulátora používaného v MATLABe má tvar

$$G_R(s) = P + \frac{I}{s} + Ds \quad (9.50)$$

a preto je potrebné definovať parametre  $P$ ,  $I$ ,  $D$  pomocou vypočítaných parametrov  $Z_R$ ,  $T_I$ ,  $T_D$ .

- Do premennej **hladina** sa ukladajú tieto dáta: čas,  $q_0$  realizované,  $w$ ,  $h_2$ . V grafe **q0** môžeme sledovať riadiacu veličinu  $q_0(t)$  ( $q_0$  realizované). V grafe **h2** modrá čiara reprezentuje žiadanú veličinu  $w(t)$  – požadovanú výšku hladiny v druhom zásobníku kvapaliny, žltá čiara riadenú veličinu  $h_2(t)$  – skutočnú výšku hladiny v 2. zásobníku kvapaliny, fialová čiara  $+\delta$  okolie žiadanej veličiny a červená čiara  $-\delta$  okolie žiadanej veličiny. V grafe **h1** sa dá sledovať výška hladiny v 1. zásobníku kvapaliny.

Proces považujeme za uriadený, ak sa riadená výstupná veličina (žltá čiara v grafe **h2**) ustáli na hodnote, ktorá je v grafe medzi červenou a fialovou čiarou.



Obr. 9.1 Program **hs2riad** – simulačná schéma

## 9.7 Simulácie v MILABe

Na hlavnej stránke LCZA (<http://www.kirp.chnik.stuba.sk/lcza>) sa nachádza HTML resp. PHP skript programu **hs2riad**, vytvorený v MILABe, ktorý možno použiť na simuláciu riadenia. Simulácia riadenia zásobníkov kvapaliny pomocou navrhnutého regulátora sa dá vykonať nasledujúcim spôsobom:

**Vo vstupnom formulári**

- zadajte veľkosť skokovej zmeny žiadanej hodnoty  $w$  ( $w(0) = 0$ )
- zadajte presnosť riadenia  $\delta$
- zadajte parametre zásobníkov
- zadajte parametre PID regulátora, ktorý je v tvare 7.1. Ak nie je definovaný niektorý z parametrov ( $T_D$  alebo  $T_I$ ), musíte ich zadať ako nulové ( $T_D = 0$  alebo  $T_I = 0$ ), pretože musia byť vyplnené všetky položky formulára
- kliknite na ikonu „Spracovať“

**MILAB zobrazí výsledok, ktorý pozostáva z**

- výpisu parametrov procesu a regulátora
- blokovej schémy
- prechodovej charakteristiky

**Príklad:** Simulujte riadenie zásobníkov kvapaliny pomocou regulátora v tvare 7.1, kde  $Z_R = 3$ ,  $T_I = 4$ .

**Zápis v MILABe:** HTML/PHP skript programu `hs2riad`.

Žiadaná hodnota [m]:	$w = 4.8$
Interval presnosti [m]:	$\delta = 0.24$
Ustálený vstupný prietok [ $\text{m}^3 \text{s}^{-1}$ ]:	$q_0^s = 1$
Ustálená výška hladiny [m]:	$h_1^s = 1.5625$
Ustálená výška hladiny [m]:	$h_2^s = 4$
Odpor [ $\text{m}^{2.5} \text{h}^{-1}$ ]:	$k_{11} = 0.8$
Odpor [ $\text{m}^{2.5} \text{h}^{-1}$ ]:	$k_{22} = 0.5$
Prierez [ $\text{m}^2$ ]:	$F_1 = 0.8$
Prierez [ $\text{m}^2$ ]:	$F_2 = 0.8$
Obmedzenie prietoku [ $\text{m}^3 \text{s}^{-1}$ ]:	$q_{0max} = 10$
Interakcia:	bez interakcie
Zosilnenie PID regulátora:	$Z_R = 3$
Integračná časová konštanta PID regulátora:	$T_I = 4$
Derivačná časová konštanta PID regulátora:	$T_D = 0$

## Kapitola 10

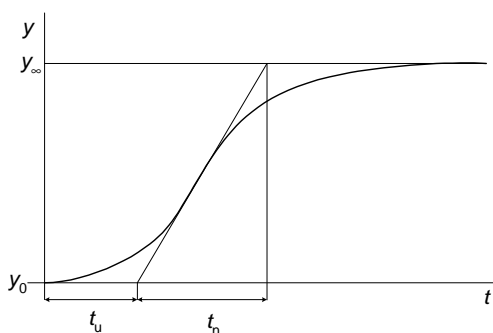
# Riadenie výmenníkov tepla

Cieľom cvičenia je naučiť sa identifikovať náhradný prenos Strejcovou metódou z prechodovej charakteristiky a zvládnuť syntézu regulátorov experimentálnymi metódami z prechodovej charakteristiky – Zieglerovou–Nicholsovou metódou a Strejcovou metódou. Navrhnuté regulátory budú použité pre riadenie výmenníkov tepla.

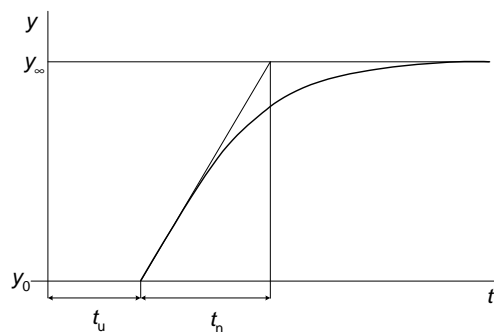
### 10.1 Prehľad pojmov

#### 10.1.1 Spracovanie prechodovej charakteristiky

Najčastejšie používaným vstupným signálom pre návrh regulátora, prípadne pre približné určenie dynamických vlastností regulovaného objektu, je skoková zmena jednej zo vstupných veličín pri zachovaní ostatných vstupných veličín konštantných. Pred uskutočnením skokovej zmeny je nutné, aby bol skúmaný systém v ustálenom stave. Časový priebeh výstupnej veličiny, ktorý je odozvou na skokovú zmenu jednej zo vstupných veličín, voláme reálnou prechodovou charakteristikou (PCH).



Obr. 10.1 Všeobecná prechodová charakteristika



Obr. 10.2 Prechodová charakteristika systému prvého rádu s dopravným oneskorením

Uvažujme nameranú prechodovú charakteristiku podľa obr. 10.1. Predpokladáme, že vstupná veličina sa zmenila skokom v čase  $t = t_0$  (do času  $t = t_0$  posunieme os  $y$ ) z hodnoty  $y_0$  na hodnotu  $y_\infty$ . Na PCH určíme inflexný bod, preložíme ním dotyčnicu k PCH, ktorá na rovnobežkách s časovou osou prechádzajúcimi hodnotami  $y_0, y_\infty$  vymedzí dva

Tabuľka 10.1	Tabuľka pre Strejcovu metódu identifikácie					
$n$	1	2	3	4	5	6
$f(n) = t_u/t_n$	0,000	0,104	0,218	0,319	0,410	0,493
$g(n) = T/t_n$	1,000	0,368	0,271	0,224	0,195	0,161

časové údaje: čas prietahu  $t_u$  a čas nábehu  $t_n$ . Okrem toho môžeme z PCH určiť hodnotu zosilnenia systému daného vzťahom

$$Z = \frac{y_\infty - y_0}{u_\infty - u_0} \quad (10.1)$$

### Poznámky

- Dotyčnicu v inflexnom bode určíme najjednoduchšie ako priamku minimálneho sklonu, ktorá ešte nepretína PCH v troch bodoch.
- V prípade, že nameriame PCH, ktorá neobsahuje inflexný bod, prekladáme dotyčnicu spôsobom znázorneným na obr. 10.2.

Pre približný prenos identifikovaného systému potom môžeme použiť Strejcovu metódu.

## 10.2 Strejcová metóda identifikácie systémov

Dynamické vlastnosti identifikovaného systému aproximujeme pomocou náhradného prenosu v tvare

$$G(s) = \frac{Z}{(Ts + 1)^n} e^{-Ds} \quad (10.2)$$

kde  $Z$  je zosilnenie,  $T$  časová konštanta,  $D$  dopravné oneskorenie systému a  $n$  rád systému, ktoré potrebujeme určiť.

Postup pri identifikácii je nasledovný:

1. Z nameranej PCH určiť hodnoty  $Z$ ,  $t_u$ ,  $t_n$ .
2. Určiť podiel  $f_s = t_u/t_n$ .
3. V tabuľke 10.1 vybrať rád systému  $n$  tak, aby platilo

$$f(n) \leq f_s < f(n+1)$$

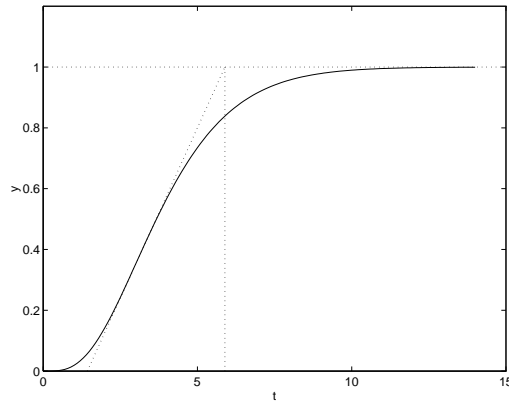
V prípade, že vypočítaná hodnota  $f_s$  je väčšia, ako maximálna možná uvedená v tabuľke,  $t_u$  sa zmenší na prijateľnú mieru (výsledná hodnota  $t_u$  musí byť taká, aby sa hodnota podielu  $t_u/t_n$  rovnala tabuľkovému) o hodnotu, ktorá sa potom v ďalšom kroku pripočíta k vypočítanej hodnote dopravného oneskorenia.

4. Dopravné oneskorenie  $D$  sa určí ako rozdiel medzi skutočným a fiktívnym časom nábehu  $t_u$

$$D = [f_s - f(n)]t_n$$

### 10.3. ZIEGLEROVA–NICHOLSOVA METÓDA SYNTÉZY REGULÁTORA S VYUŽITÍM PCH

---



Obr. 10.3 Prechodová charakteristika neznámeho systému

5. Časová konštanta  $T$  sa určí pomocou hodnôt z riadku funkcie  $g(n)$  pre príslušné  $n$ . Odčíta sa  $g(n)$  a  $T$  sa určí ako

$$T = g(n)t_n$$

**Príklad 10.2.1:** *Identifikácia z prechodovej charakteristiky*

Identifikujme systém s prechodovou charakteristikou na obr. 10.3, ktorá je odozvou na jednotkovú skokovú zmenu vstupnej veličiny.

**Riešenie:**

1. Odčítame hodnoty  $t_u = 1,43$ ,  $t_n = 4,46$  a zosilnenie  $Z = 1$ .
2. Určíme podiel  $f_s = t_u/t_n = 0,321$ .
3. Podľa tabuľky 10.1 je rád systému  $n = 4$ .
4. Dopravné oneskorenie  $D = (0,321 - 0,319)4,46 = 0,007 \approx 0$ .
5. Časová konštanta  $T$  sa určí pomocou hodnôt z riadku funkcie  $g(n)$  pre príslušné  $n$ . Odčíta sa  $g(n)$  a  $T$  sa určí ako

$$T = 0,224 \cdot 4,46 = 0,999 \approx 1$$

## 10.3 Zieglerova–Nicholsova metóda syntézy regulátora s využitím PCH

Zieglerovou–Nicholsovou metódou s využitím prechodovej charakteristiky sa určia parametre PID regulátora v tvare

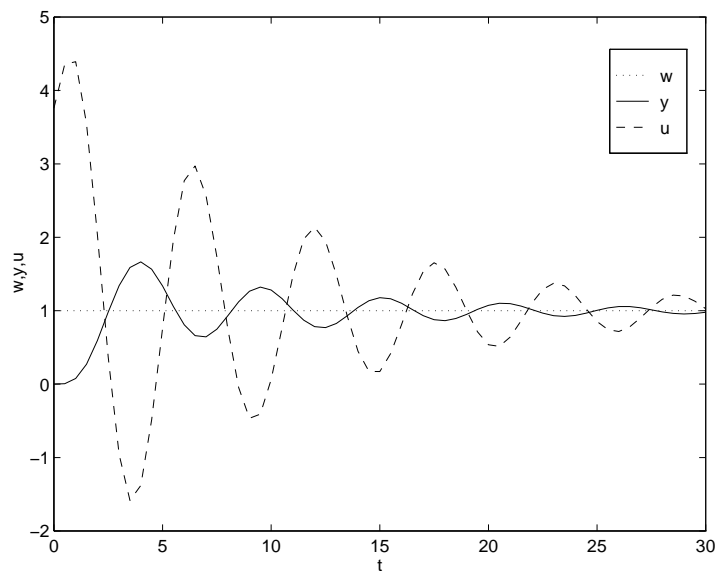
$$G_R(s) = Z_R \left( 1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) \quad (10.3)$$

pomocou tabuľky 10.2. Vyberieme si vhodnú štruktúru regulátora (P, PI, PID) a z príslušného riadku vypočítame jeho parametre.



Tabuľka 10.2 Nastavenie regulátora podľa Zieglera–Nicholsa z prechodovej charakteristiky

Regulátor	$Z_R$	$T_I$	$T_D$
P	$\frac{1}{Z} \frac{t_n}{t_u}$		
PI	$\frac{0,9}{Z} \frac{t_n}{t_u}$	$3,33t_u$	
PID	$\frac{1,2}{Z} \frac{t_n}{t_u}$	$2t_u$	$0,5t_u$



Obr. 10.4 Riadenie PID regulátorom nastaveným Zieglerovou-Nicholsovou metódou.

**Príklad 10.3.1:** *Návrh PID regulátora podľa Zieglera–Nicholsa s využitím PCH*

Navrhňte PID regulátor pre riadenie systému s prechodovou charakteristikou na obr. 10.3.

**Riešenie:**

Na základe hodnôt  $Z = 1$ ,  $t_u = 1,43$ ,  $t_n = 4,46$  získaných riešením príkladu 10.2.1 určíme parametre PID regulátora  $Z_R = 3,74$ ,  $T_I = 2,86$ ,  $T_D = 0,715$ . Výsledky simulácie riadenia sú znázornené na obr. 10.4. Vidíme, že priebeh aj riadiacej  $u(t)$  aj riadenej  $y(t)$  veličiny je kmitavý, čo je často tejto metóde vytýkané ako nedostatok. Obyčajne sa preto parametre regulátora dodatočne doladia ručne.

## 10.4 Strejcová metóda syntézy regulátora

Parametre PID regulátora v tvare

$$G_R(s) = Z_R \left( 1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) \quad (10.4)$$

sa Strejcovou metódou určia podľa tabuľky 10.3. Aby sme mohli tabuľku použiť, potrebujeme poznať prenos riadeného systému tvare (10.2). Takýto prenos môžeme získať postupom opísaným v časti 10.2 (identifikácia prenosu podľa Strejca). Potom si vyberieme vhodnú štruktúru regulátora (P, PI, PID) a z príslušného riadku vypočítame jeho parametre. Ak volíme štruktúru PID regulátora, potom musí byť identifikovaný prenos minimálne tretieho rádu, pre P a PI regulátor je nutný prenos minimálne druhého rádu. Vyplýva to zo vzorca pre výpočet  $Z_R$  v tabuľke 10.3.

Tabuľka 10.3 Nastavenie regulátora podľa Strejca z prechodovej charakteristiky

Regulátor	$Z_R$	$T_I$	$T_D$
P	$\frac{1}{Z} \frac{1}{n-1}$		
PI	$\frac{1}{Z} \frac{n+2}{4(n-1)}$	$T \frac{n+2}{3}$	
PID	$\frac{1}{Z} \frac{7n+16}{16(n-2)}$	$T \frac{7n+16}{15}$	$T \frac{(n+1)(n+3)}{7n+16}$

### Príklad 10.4.1: Návrh PID regulátora podľa Strejca

Strejcovou metódou navrhnete PID regulátor pre riadenie systému s prechodovou charakteristikou na obr. 10.3.

#### Riešenie:

Na základe identifikovaného prenosu s parametrami  $Z = 1$ ,  $T = 1$ ,  $n = 4$  určíme parametre PID regulátora  $Z_R = 1,38$ ,  $T_I = 2,93$ ,  $T_D = 0,80$ . Výsledky simulácie riadenia sú znázornené na obr. 10.5.

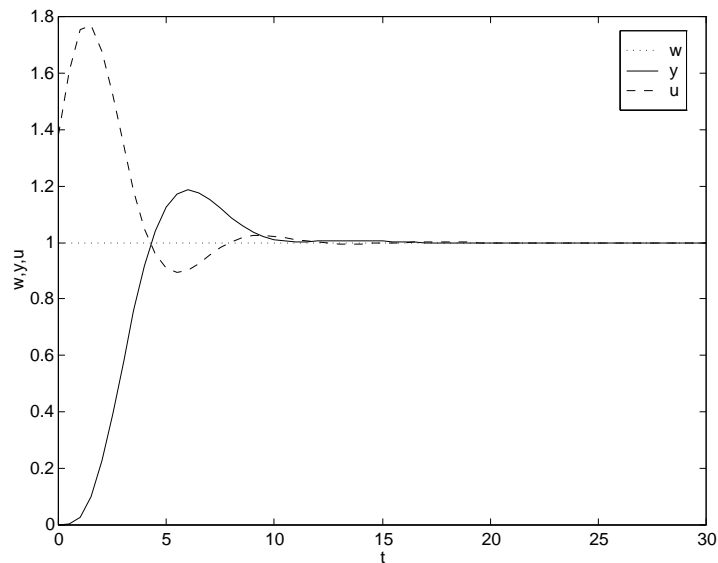
## 10.5 Úlohy

Experimentálnymi metódami navrhnete regulátory pre riadenie sústavy troch sériovo zapojených výmenníkov tepla. Nepoznáte ich dynamický matematický model v tvare diferenciálnych rovníc, ale máte možnosť odmerať (odsimulovať) ich prechodovú charakteristiku.

Riadiacou veličinou výmenníkov je teplota ohrevnej pary  $\vartheta_p$ , ktorá má v pôvodnom ustálenom stave hodnotu  $\vartheta_p^s = 400$  K. Riadenou veličinou je teplota výstupného prúdu ohrievanej kvapaliny z tretieho výmenníka  $\vartheta_3$ . Poruchovou veličinou je teplota vstupného prúdu ohrievanej kvapaliny do prvého výmenníka  $\vartheta_v$ .

Zadané je číslo zadania a žiadaná hodnota teploty výstupného prúdu ohrievanej kvapaliny z tretieho výmenníka.

1. Namerajte a vyhodnoťte prechodovú charakteristiku sústavu výmenníkov tepla. Prechodovú charakteristiku odmeriame vykonaním skokovej zmeny teploty pary



Obr. 10.5 Riadenie PID regulátorom nastaveného Strejcovou metódou

z ustálenej hodnoty  $\vartheta_p^s = 400$  K na vyššiu, v povolenom intervale  $\langle 400; 500 \rangle$  K v čase  $t_0 = 5$  min.

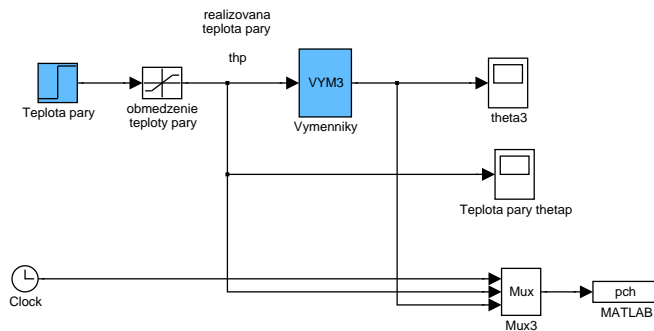
2. Určte z nameranej PCH zosilnenie  $Z$ , čas prietahu  $t_u$  a čas nábehu  $t_n$ .
3. Identifikujte náhradný prenos riadeného systému Strejcovou metódou.
4. Na základe informácií o PCH zistite parametre P, PI, PID regulátora Zieglerovou-Nicholsovou metódou.
5. Na základe aproximovaného prenosu (10.2) zistite parametre P, PI, PID regulátora Strejcovou metódou.
6. Simulujte riadenie výmenníkov získanými regulátormi a pre každý vyhodnoťte kvalitu regulácie pomocou trvalej regulačnej odchýlky, maximálneho preregulovania (v percentách), času maximálneho preregulovania a času regulácie (presnosť riadenia  $\pm 0,5$  K).
7. Vyberte PI regulátor s najmenším časom regulácie a pokúste sa zmeniť jeho parametre tak, aby bol výsledný čas regulácie čo najkratší.

## 10.6 Simulácie v MATLABe

Na simuláciu prechodovej charakteristiky výmenníkov sa do MATLABu/Simulinku nahrá schéma znázornená na obr. 10.6 (súbor `pchvymms.mdl` využívajúci súbor `vymen.m`).

Do schémy je potrebné zadať informácie do modrých blokov: novú hodnotu teploty pary `thetap` a číslo zadania `cislo`. V bloku `teplota pary` nastavte čas uskutočnenia skokovej zmeny a konečnú teplotu pary. Teplotu pary je nutné z prevádzkových dôvodov nastavovať v povolenom intervale  $\langle 400; 500 \rangle$  K. Po skončení simulácie je teplota na výstupe z tretieho výmenníka zobrazená v grafe `theta3` ako aj prístupná v MATLABe

## 10.7. SIMULÁCIE V MILABE



Obr. 10.6 Simulácia prechodovej charakteristiky výmenníkov tepla v Simulinku (súbor `pchvym3.mdl`).

cez premennú `pch`. Prechodová charakteristika sa vyhodnotí priamo z obrazovky alebo prekreslením grafu na papier (najvhodnejšie milimetrový).

Po navrhnutí konštant regulátora sa pre simuláciu riadenia výmenníkov pomocou teploty pary  $\vartheta_p$  nahrá schéma znázornená na obr. 10.7 (súbor `riadvym3.mdl` využívajúci súbor `vymen.m`).

Do schémy je potrebné zadať informácie do modrých blokov: žiadanú teplotu  $w$ , vypočítané parametre PID regulátora `PID regulator`, interval presnosti regulácie `delta` a číslo zadania v bloku `Vymenniky`. Ak by bolo nutné zmeniť čas simulácie, tento sa nastavuje v menu `Simulation`, v príkaze `Parameters`.

V poslednej úlohe meňte jeden z parametrov regulátora dovtedy, kým sa čas regulácie znižuje. Potom meňte druhý, atď. Dobře nastavený regulátor poskytuje čas regulácie menší, ako je čas trvania prechodovej charakteristiky. Uveďte tento údaj v závere protokolu.

Pre presnejšiu kontrolu údajov sa ukladajú simulačné výsledky do premennej `vys` a obsahujú v každom riadku čas, riadenie bez obmedzení, riadenie s obmedzeniami, žiadanú a meranú hodnotu výstupnej teploty. Túto je možné vypísať v MATLABe.

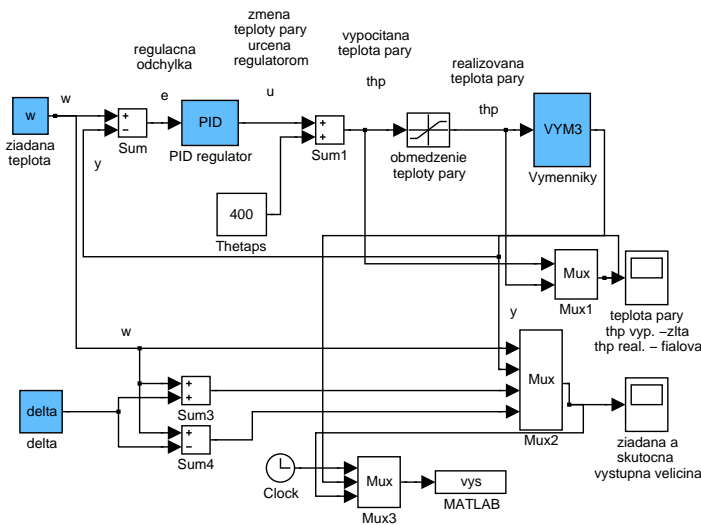
## 10.7 Simulácie v MILABe

Na hlavnej stránke LCZA (<http://www.kirp.chnf.stuba.sk/lcza>) sa nachádzajú HTML resp. PHP skripty programov `pchvym3` a `riadvym3`, vytvorené v MILABe, ktoré možno použiť na výpočet regulátora a simuláciu riadenia.

1. **Prechodová charakteristika výmenníkov tepla** sa dá získať nasledujúcim spôsobom:

### Vo vstupnom formulári

- zadajte číslo zadania
- zadajte teplotu pary  $\vartheta_p$
- kliknite na ikonu „Spracovať“



Obr. 10.7 Riadenie výmenníkov tepla v Simulinku (súbor riadvyms.mdl).

#### MILAB zobrazí výsledok, ktorý pozostáva z

- výpisu parametrov výmenníkov tepla (číslo zadania, teplota pary  $\vartheta_p$ )
- blokovej schémy
- prechodovej charakteristiky

**Príklad:** Získajte PCH výmenníkov tepla (výmenníky č.1) vykonaním skokovej zmeny teploty pary z ustálenej hodnoty  $\vartheta_p^s = 400$  K na hodnotu 450 K.

**Zápis v MILABe:** HTML/PHP skript programu pchvymys.

Číslo zadania: 1

Teplota pary  $\vartheta_p$  [K]: 450

2. **Vyhodnotenie prechodovej charakteristiky:** určenie zosilnenia  $Z$ , času prieťahu  $t_u$  a času náběhu  $t_n$  a následne parametrov regulátora  $Z_R$ ,  $T_I$  a  $T_D$ .
3. **Simulácia riadenia výmenníkov tepla** pomocou navrhnutého PID regulátora sa dá vykonať nasledujúcim spôsobom:

#### Vo vstupnom formulári

- zadajte číslo zadania
- zadajte žiadanú teplotu na výstupe posledného výmenníka  $w$
- zadajte presnosť riadenia  $\delta$
- zadajte parametre PID regulátora, ktorý je v tvare 7.1. Ak nie je definovaný niektorý z parametrov ( $T_D$  alebo  $T_I$ ), musíte ich zadať ako nulové ( $T_D = 0$  alebo  $T_I = 0$ ), pretože musia byť vyplnené všetky položky formulára
- kliknite na ikonu „Spracovať“

MILAB zobrazí výsledok, ktorý pozostáva z

- výpisu parametrov procesu a regulátora
- blokovej schémy
- prechodovej charakteristiky

**Príklad:** Simulujte riadenie výmenníkov tepla pomocou regulátora v tvare [7.1](#), kde  $Z_R = 1,7$ ,  $T_I = 2,2$ .

**Zápis v MILABe:** HTML/PHP skript programu riadvyms.

Číslo zadania:		1
Žiadaná hodnota [K]:	$w =$	380
Interval presnosti [K]:	$\delta =$	3.8
Zosilnenie PID regulátora:	$Z_R =$	1.7
Integračná časová konštanta PID regulátora:	$T_I =$	2.2
Derivačná časová konštanta PID regulátora:	$T_D =$	0



# Literatúra

Fikar, M. a kol. *Metódy počítačového spracovania dát*. Vydavateľstvo STU, Bratislava, 1999.

Mészáros, A., Danko, J., Mikleš, J. a Bakošová, M. *Základy automatizácie*. STU Press, Bratislava, 1997. [21](#)

Mikleš, J., Dostál, P. a Mészáros, A. *Riadenie technologických procesov*. STU, Bratislava, 1994. [21](#)

Mikleš, J. a Fikar, M. *Modelovanie, identifikácia a riadenie procesov I*. STU Press, Bratislava, 1999. [21](#)





## Dodatok A

# LCZA na Internete

V súčasnej dobe sme svedkami rýchleho rozvoja výpočtovej techniky a informačných technológií (IT). Jedno z najprogresívnejších médií - Internet - významným spôsobom zasahuje do všetkých oblastí informatiky. Oblasť softvéru pre priemyselnú automatizáciu nie je výnimkou.

Softvérové balíky zaoberajúce sa riešením rôznych matematických úloh tvoria dôležitú časť informačných technológií. MATLAB, softvérový produkt firmy MathWorks, je „user-friendly“ prostriedok, ktorý sa na FCHPT STU využíva hlavne pri vyučovaní základov automatizácie a počítačového spracovania údajov. Pre zlepšenie pedagogického procesu sme sa rozhodli poskytnúť študentom nepretržitý prístup k MATLABu. Toto mohlo byť vykonané iba za pomoci Internetu a WWW stránok (World Wide Web). Komunikáciu medzi Internetom a MATLABom sprostredkováva MIServer (Matlab Internet Server), ktorý je súčasťou MILABu (Matlab Internet Laboratory).

**MIServer** je program na strane servera, ktorý patrí do skupiny CGI (Common Gateway Interface) skriptov. Zjednodušene povedané: MIServer je brána, ktorá predáva údaje z www stránky do MATLABu a po spracovaní vstupných údajov zabezpečí predanie výsledku späť, vo forme www stránky.

### A.1 Kde sa to nachádza?

Hlavná stránka LCZA (laboratórnych cvičení zo základov automatizácie) sa nachádza na internetovej adrese <http://www.kirp.cht.f.stuba.sk/lcza>. Obsahuje nasledujúce položky:

- **pdf<sup>1</sup> a html/php súbory** - texty jednotlivých kapitol týchto skriptov v elektronickej podobe.
- **m/mdl súbory** - vytvorené v programe MATLAB/Simulink, ktoré možno použiť iba na počítačoch s nainštalovaným MATLABom/Simulinkom.
- **MILAB skripty** - vstupné HTML formuláre, ktoré umožňujú priamo cez Internet riešiť (simulačne, výpočtovo) príklady z LCZA bez nutnosti inštalácie MATLABu.
- **odkazy pre KIRP** - „off-line“ komunikácia s pedagógmi.

---

<sup>1</sup>PDF - Portable Document Format. Na pozeranie pdf súborov je potrebné nainštalovať program Adobe Acrobat Reader.

- **základné operácie MILABu** - často sa vyskytujúce funkcie.

## A.2 Ako to presne pracuje?

Užívateľ si najskôr vyberie úlohu, ktorú chce vyriešiť. Úloha obyčajne obsahuje vysvetlenie základných pojmov, riešené príklady a zadanie. Sú tam tiež súbory MATLABu pre užívateľov, ktorí tento programový balík majú na počítači. Ďalej sa tam nachádza formulár pre danú úlohu. Užívateľ tento vyplní a odošle na HTTP server. HTTP server potom predá formulár MIServeru. MIServer najskôr skontroluje, či užívateľ má alebo nemá oprávnenie na použitie MATLABových funkcií (nie všetky funkcie sú dostupné širokej verejnosti). Ak je užívateľ autorizovaný, MIServer spustí nový proces (MATLAB), vloží údaje od užívateľa do pracovného priestoru MATLABu (MATLAB workspace) a spustí MATLABovú funkciu prislúchajúcu vybranej úlohe. Táto funkcia načíta údaje z pracovného priestoru, spracuje ich, zapíše výsledok do HTML dokumentu, ktorý odovzdá MIServeru. Vygenerovaný HTML dokument je potom poslaný užívateľovi. Keďže MIServer je CGI aplikácia, môžu MILAB používať súčasne viacerí užívatelia. Pre každé spojenie sa spustí nový samostatný proces. Celkový čas odozvy výpočtu (od odoslania formulára až po prijatie výsledku) je závislý na zložitosti úlohy.

Konfigurácia softvéru na strane klienta vyžaduje:

- pripojenie počítača na Internet,
- program na prehliadanie HTML stránok (Microsoft Internet Explorer 4.0, Netscape Navigator 3.0, Opera 4.0 a vyššie). Použitie vyšších verzií menovaných programov súvisí so zobrazovaním špeciálnych značiek, Java Skriptov, atď.

### A.2.1 Vstupný HTML formulár

Údaje od užívateľa sa odovzdávajú pomocou vstupného HTML formulára. Ten môže obsahovať nasledujúce objekty: Text Edit, List Box, Check Box, Radio Button, Submit (Reset) Button.

V nasledujúcich odstavcoch sú uvedené jednoduché príklady objektov vstupného formulára.

**Text Edit – Vstupné textové pole** umožňuje užívateľovi zadať jeden riadok textu (textového reťazca).

Vstupný text	[1, 2, 4, 5]
--------------	--------------

**List Box – Výber** umožňuje užívateľovi si vybrať jednu položku z roletového menu alebo z rolujúceho zoznamu.

Výber č.1	<div>Výber č.1</div> <div>Výber č.1</div> <div>Výber č.2</div> <div>Výber č.3</div> <div>Výber č.4</div>
-----------	--

**Check Box – Stavový prepínač** umožňuje užívateľovi vybrať zo zoznamu viac položiek. Každá položka stavového prepínača môže byť buď vybraná alebo zrušená.

## A.2. AKO TO PRESNE PRACUJE?

---

☒ Výber č.1   ☐ Výber č.2   ☒ Výber č.3   ☐ Výber č.4

**Radio Button – Výberový prepínač** tvorí zoznam položiek, z ktorých môže byť vybraná iba jedna. Pokiaľ je zvolená jedna položka zo zoznamu, žiadna iná zvolená nie je.

☐ Výber č.1   ☒ Výber č.2   ☐ Výber č.3   ☐ Výber č.4

**Submit (Reset) Button – Tlačidlo pre odoslanie (vymazanie)** je určené na odoslanie (vymazanie) formulára.

Spracovať

Vymazať

### A.2.2 Formátovanie vstupných údajov

Vo vstupnom formulári je najčastejším objektom Text Edit – Vstupné textové pole, pomocou ktorého sa odovzdáva textový reťazec. Medzi textové reťazce patria aj čísla a kombinácie čísel a rôznych znakov.

Zásady vkladania údajov do vstupného textového poľa:

- Na oddelenie desatinných miest sa používa bodka.

**Príklad:** Majme záporné desatinné číslo  $z$

$$z = -5,5$$

**Zápis v MILABe:**

Záporné desatinné číslo  $z$ :

- 5.5

- Matice sa definujú vo vektorovom tvare, tj. po riadkoch. Do hranatých zátvoriek sa najskôr zapíšu koeficienty prvého riadku (koeficienty sú oddelené medzerou alebo čiarkou, prípadne kombináciou týchto oddeľovačov). Na oddelenie riadkov matice sa používa bodkočiarka.

**Príklad:** Majme maticu  $A$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0,5 & 16 \\ -4 & 25,1 & 2 \\ 8 & 19,6 & 5 \end{pmatrix}$$

**Zápis v MILABe:**

Matica  $A$ :

[2, 0.5, 16; -4, 25.1, 2; 8, 19.6, 5]

- Polynómy sa definujú tiež vo vektorovom tvare, tj. do hranatých zátvoriek sa zapíšu koeficienty pri jednotlivých mocninách (oddelené medzerou alebo čiarkou, prípadne kombináciou týchto oddeľovačov).

**Príklad:** Majme polynóm  $p(s)$

$$p(s) = s^3 + 0,5s + 1 \quad \text{vektorový zápis: } p = [1, 0, 0.5, 1]$$

**Zápis v MILABe:**

Polynóm **p(s)**:

[1, 0, 0.5, 1]

- Skalárne hodnoty sa definujú priamo (skalár je špeciálny prípad vektora, tj. môže sa definovať aj v hranatých zátvorkách).

**Príklad:** Majme skalár (číslo)  $c$

$$c = 5$$

**Zápis v MILABe:**

Skalár **c**:

[5]

alebo

Skalár **c**:

5

- Prenosová funkcia (prenos) je definovaná ako podiel dvoch polynómov, ktoré sa zadávajú jednotlivo (vo vektorovom tvare).

**Príklad:** Majme prenos  $G(s)$

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{2s^2 + 1}{s^3 + 6s^2 + 3s + 2}$$

**Zápis v MILABe:**

Čitateľ prenosu **B(s)**:

[2, 1]

Menovateľ prenosu **A(s)**:

[1, 6, 3, 2]

**Poznámka:** Stupeň čitateľa prenosu nesmie byť väčší ako stupeň menovateľa prenosu.

### A.3 Základné operácie

Do skupiny **základné operácie** sme zaradili často sa vyskytujúce funkcie pre prácu s maticami (vektormi – polynómami). V súčasnosti sú dostupné nasledujúce operácie<sup>2</sup>:

<sup>2</sup>V budúcnosti pribudnú ďalšie operácie.

### A.3. ZÁKLADNÉ OPERÁCIE

---

#### A.3.1 Matematické operácie s polynómami (súčet, rozdiel, súčin, podiel)

V MATLABe (verzia 5 a vyššie) sa pre súčet, rozdiel, súčin a podiel polynómov používajú nasledujúce operátory (funkcie):

operácia	operátor/funkcia	príklad (a, b - polynómy)
súčet	+	a+b
rozdiel	-	a-b
súčin	* <sup>3</sup> alebo conv()	a*b alebo conv(a,b)
podiel	deconv()	[q,r] = deconv(a,b) kde q je kvocient (podiel) a r je zvyšok

Funkcie vytvorené v MILABe umožňujú riešiť matematické tieto operácie s dvoma polynómami. Okrem definovania polynómov vo vektorovom tvare sa vo vstupnom formulári vyberá aj typ matematickej operácie (pomocou List Boxu).

#### A.3.2 Riešenie systému lineárnych rovníc

Systém lineárnych rovníc, ktorý obsahuje rovnaký počet rovníc a neznámych, pričom aspoň jedna pravá strana je nenulová (nehomogénny systém), má v maticovom zápise tvar  $Ax = b$ , ktorého riešenie je v tvare  $x = A^{-1}b$

**Príklad:** Majme systém lineárnych rovníc

$$\begin{aligned}4x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= -4 \\6x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= -1 \\5x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= -3\end{aligned}$$

ktorého maticový zápis je  $Ax = b$ , kde

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 6 & -2 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

**Zápis v MATLABe:**

```
A = [4, -3, 2; 6, -2, 3; 5, -3, 2]; b = [-4; -1; -3];  
x = inv(A)*b  
alebo  
x = A\b
```

**Zápis v MILABe:**

je analogický zápisu v MATLABe. Definuje sa iba matica **A** a stĺpcový vektor **b**.

#### A.3.3 Výpočet koreňov polynómov

Táto funkcia v MILABe vypočíta korene polynómu zadaného vo vektorovom tvare.

---

<sup>3</sup>platí iba v MATLABe s polynomickým toolboxom ([www.polyx.com](http://www.polyx.com))

### A.3.4 Prechodové a impulzné charakteristiky

Tieto funkcie vykresľujú v MILABe prechodovú, resp. impulznú charakteristiku prenosu, ktorý musí spĺňať nasledujúce podmienky:

- stupeň polynómu čitateľa nesmie byť väčší ako stupeň polynómu menovateľa,
- čitateľ a menovateľ musí byť definovaný vo vektorovom tvare.

### A.3.5 Graf pólov a núl

Táto funkcia v MILABe vypočíta nuly, póly a zosilnenie prenosu a vykreslí nuly→o a póly→x do grafu. Prenos musí spĺňať podmienky uvedené v A.3.4.

### A.3.6 Transformácia ZP2TF

ZP2TF je funkcia na transformáciu prenosu  $G(s)$  v tvare pólov  $s_{pi}$ , núl  $s_{zi}$  a zosilnenia  $k$  na prenos v tvare podielu dvoch polynómov  $B(s)$  a  $A(s)$

$$G(s) = k \frac{(s - s_{z1})(s - s_{z2}) \dots (s - s_{zn})}{(s - s_{p1})(s - s_{p2}) \dots (s - s_{pn})} \implies G(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$$

#### Zápis v MILABe:

V MILABe sa prenos definuje v tvare:

Zosilnenie  $k$ :     $k$   
 Nuly  $s_{zi}$ :     $[s_{z1}, s_{z2}, \dots, s_{zn}]$   
 Póly  $s_{pi}$ :     $[s_{p1}, s_{p2}, \dots, s_{pn}]$

### A.3.7 Transformácia TF2ZP

TF2ZP je funkcia na transformáciu prenosu  $G(s)$  v tvare podielu dvoch polynómov  $B(s)$  a  $A(s)$  na prenos v tvare pólov  $s_{pi}$ , núl  $s_{zi}$  a zosilnenia  $k$

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \implies G(s) = k \frac{(s - s_{z1})(s - s_{z2}) \dots (s - s_{zn})}{(s - s_{p1})(s - s_{p2}) \dots (s - s_{pn})}$$

#### Zápis v MILABe:

Prenos musí spĺňať podmienky uvedené v A.3.4.

### A.3.8 Algebra prenosov

V MILABe sú vytvorené blokové schémy základných zapojení dvoch systémov:

- sériové zapojenie
- paralelné zapojenie
- spätnoväzbové zapojenie so zápornou spätnou väzbou
- spätnoväzbové zapojenie s kladnou spätnou väzbou

Prenosy musia spĺňať podmienky uvedené v A.3.4.

### A.3. ZÁKLADNÉ OPERÁCIE

---

#### A.3.9 Minimálna realizácia prenosu

Táto funkcia v MILABe vypočíta minimálnu realizáciu prenosu, t.j. vykráti rovnaké nuly a póly prenosu.

**Zápis v MILABe:**

Prenos musí spĺňať podmienky uvedené v [A.3.4](#).

**Príklad:** Nájdime minimálnu realizáciu prenosu

$$G(s) = \frac{2s + 2}{s^2 + 2s + 1} = \frac{2(s + 1)}{(s + 1)(s + 1)} \xrightarrow{\text{minreal}(G)} G(s) = \frac{2}{s + 1}$$