

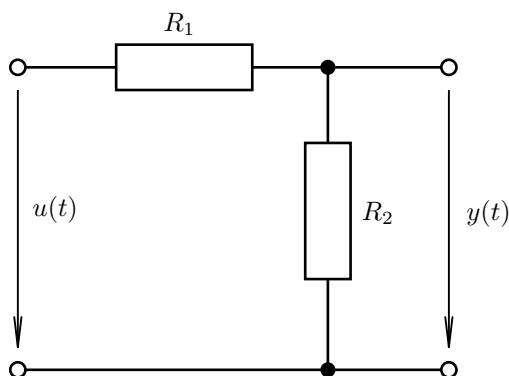
## Cvičenie úvodné

### Obsah

<b>1</b>	<b>Zosilnenie odporového deliča</b>	<b>1</b>
1.1	Úlohy . . . . .	1
<b>2</b>	<b>Vybíjanie kondenzátora – matematický model procesu</b>	<b>1</b>
2.1	Úlohy . . . . .	2
2.2	Poznámky k riešeniu úloh . . . . .	2
2.2.1	Náčrt riešenia diferenciálnej rovnice separáciou premenných . .	3
2.2.2	Časový priebeh napätia na kondenzátore . . . . .	4
2.2.3	Príklady pre rôzne parametre $R$ a $C$ . . . . .	5

## 1 Zosilnenie odporového deliča

Uvažujme klasický odporový delič ako je znázornené na nasledujúcom obrázku.



Obr. 1: Odporový delič

Vstupom uvažovaného systému nech je napätie označené ako  $u(t)$  a výstupným signálom nech je napätie  $y(t)$ .

### 1.1 Úlohy

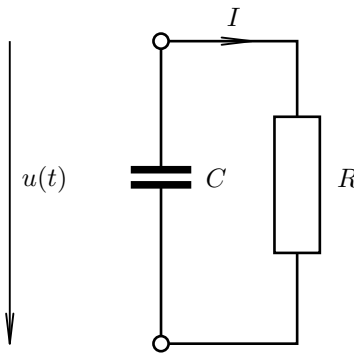
1. Nech hodnota vstupného signálu je konštantná, nemení sa, je ustálená. Určte hodnotu výstupného signálu, pričom hodnoty rezistorov  $R_1$  a  $R_2$  sú známe.
2. Definujte zosilnenie uvažovaného systému a určte jeho veľkosť.

## 2 Vybíjanie kondenzátora – matematický model procesu

Majme RC obvod ako je znázornené na obr. 2.

Nech je na začiatku, v čase  $t = 0$ , kondenzátor  $C$  nabitý a na jeho svorkách je napätie s hodnotou  $u_0$ . Inými slovami napätie  $u(t)$  v čase 0 je  $u_0$ , teda  $u(0) = u_0$ .

Ku kondenzátoru  $C$  je pripojený rezistor  $R$  a preto sa kondenzátor s rastúcim časom vybíja.



Obr. 2: RC obvod

## 2.1 Úlohy

1. Zostavte diferenciálnu rovnicu, ktorá opisuje proces vybíjania kondenzátora.
2. Určte jednotky (rozmer) všetkých parametrov a signálov (veličín) v zostavenej rovnici.
3. Nájdite analytické riešenie diferenciálnej rovnice.
4. Nakreslite graf časovej funkcie, ktorá je analytickým riešením diferenciálnej rovnice. Potrebné číselné hodnoty parametrov a signálov nech sú ľubovoľné.
5. Nájdite numerické riešenie diferenciálnej rovnice (s využitím Simulinku).

## 2.2 Poznámky k riešeniu úloh

Pre kondenzátor platí

$$Q = CU \quad (1)$$

čo znamená, že elektrický náboj  $Q$  nazhromaždený v kondenzátore je úmerný napätiu na svorkách kondenzátora  $U$  (azda priveľmi zjednodušene povedané, čitateľ si však iste vie dohľadať podrobnosti). Parameter  $C$  predstavuje, ako je iste zrejmé, kapacitu kondenzátora.

Ak sa kondenzátor vybíja, mení sa náboj. Preto má zmysel vyšetrovať časový priebeh veľkosti náboja. Tým sa získa celkový prehľad aj o ďalších veličinách súvisiacich s procesom vybíjania kondenzátora.

Časová zmena elektrického náboja je elektrický prúd, teda

$$\frac{dQ}{dt} = -I \quad (2)$$

kde  $I$  je elektrický prúd a dôvodom záporného znamienka je, že smer elektrického prúdu sa značí práve opačne ako smer pohybu záporného náboja.

Rovnica (2) je v princípe diferenciálnou rovnicou. Obsahuje časovú deriváciu veličiny – elektrického náboja. V tomto tvare však rovnicu nie je možné použiť na získanie časového priebehu samotnej veličiny (elektrického náboja). Totiž neznáme je nie len  $Q$  ale v podstate aj  $I$ .

Namiesto veličiny  $I$  by bolo vhodné mať na pravej strane rovnice (2) veličinu  $Q$ . Z Ohmovho zákona plynie

$$I = \frac{U}{R} \quad (3)$$

Napätie  $U$ , ktoré sa týka nášho problému, je vo vzťahu k veličine  $Q$ , viď rovnicu (1). Konkrétne

$$U = \frac{Q}{C} \quad (4)$$

Dosadením (4) do (3) sa získa

$$I = \frac{Q}{RC} \quad (5)$$

a následne dosadením (5) do (2)

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{RC}Q \quad (6)$$

Diferenciálna rovnica (6) obsahuje jednu neznámu. Neznámou je veličina  $Q$ . Všeobecnejšie povedané, neznámou je časový priebeh veličiny. Neznámou je teda funkcia času. Preto píšme, že sa zaoberáme signálom (veličinou)  $Q(t)$ . Hodnoty  $R$  a  $C$  sú len pevné hodnoty odporu a kapacity (viď obr. 2). Neuvažujeme, že by sa menili v čase. Preto ich neoznačujeme ako signál (funkciu času). Teda signál označujeme ako napr.  $Q(t)$  a konštantu ako napr.  $R$ .

Typicky, a pre zjednodušenie, sa rovnice (6) zapisuje aj v tvare

$$\dot{Q}(t) = -\frac{1}{RC}Q(t) \quad (7)$$

kde bodka  $\dot{\phantom{x}}$  označuje deriváciu podľa času rovnako ako operátor  $\frac{d}{dt}$ .

Riešením rovnice (7) je nejaká časová funkcia, nejaký signál, nejaký časový priebeh, konkrétne časový priebeh elektrického náboja, ktorý tu označujeme ako  $Q(t)$ .

Pre nájdenie jednoznačného riešenia je potrebné doplniť úlohu o začiatočnú podmienku. To je podmienka, ktorú musí spĺňať hľadaný signál  $Q(t)$  na začiatku, teda v čase  $t = 0$ . Pripomeňme, že napätie pred vybíjaním je dané (známe) a má hodnotu  $u_0$ . Je teda zrejmé, že je známa aj hodnota  $Q(0) = Cu_0$ . Pre zjednodušenie označme ako  $Q(0) = Q_0$ .

### 2.2.1 Náčrt riešenia diferenciálnej rovnice separáciou premenných

Zaoberáme sa problémom v tvare

$$\frac{dQ(t)}{dt} = -\frac{1}{RC}Q(t) \quad Q(0) = Q_0 \quad (8)$$

kde  $Q(t)$  je neznáma časová funkcia. Konštanty (nezávislé od času)  $R$ ,  $C$  a aj  $Q_0$  sú známe. V rovnici je však ešte jedna premenná a tou je čas  $t$ . Ten, ako je známe, si len tak plyní. Je premennou pretože sa napríklad „podľa neho derivuje“.

---

#### Mimochodom

- Aké jednotky (rozmer) má výraz  $RC$  v rovnici (8)?

---

Upravme diferenciálnu rovnicu (8) tak, aby rovnaké premenné boli na rovnakých stranách. V tvare (8) je signál  $Q(t)$  na oboch stranách rovnice. Nech je len na ľavej strane. Rovnako, nech čas  $t$  je len na pravej strane. Teda

$$\frac{1}{Q(t)}dQ(t) = -\frac{1}{RC}dt \quad (9)$$

Všimnime si, že teraz je možné obe strany rovnice integrovať, každú podľa vlastnej premennej, teda

$$\int \frac{1}{Q(t)}dQ(t) = \int -\frac{1}{RC}dt \quad (10)$$

Výsledkom integrovania je

$$\ln(Q(t)) + k_1 = -\frac{1}{RC}t + k_2 \quad (11)$$

kde  $k_1$  a  $k_2$  sú konštanty vyplývajúce z neurčitých integrálov (a tiež sme potichu uvážili, že  $Q(t)$  nebude nadobúdať záporné hodnoty).

Rovnica (11) už nie je diferenciálna. Žiadna veličina v nej nie je derivovaná podľa času.

Vyjadrime z rovnice (11) signál  $Q(t)$ . Úpravou

$$\ln(Q(t)) = -\frac{1}{RC}t + k_3 \quad (12)$$

sme zaviedli konštantu  $k_3 = k_2 - k_1$ . Ďalej

$$Q(t) = e^{(-\frac{1}{RC}t + k_3)} \quad (13a)$$

$$Q(t) = e^{(-\frac{1}{RC}t)} e^{k_3} \quad (13b)$$

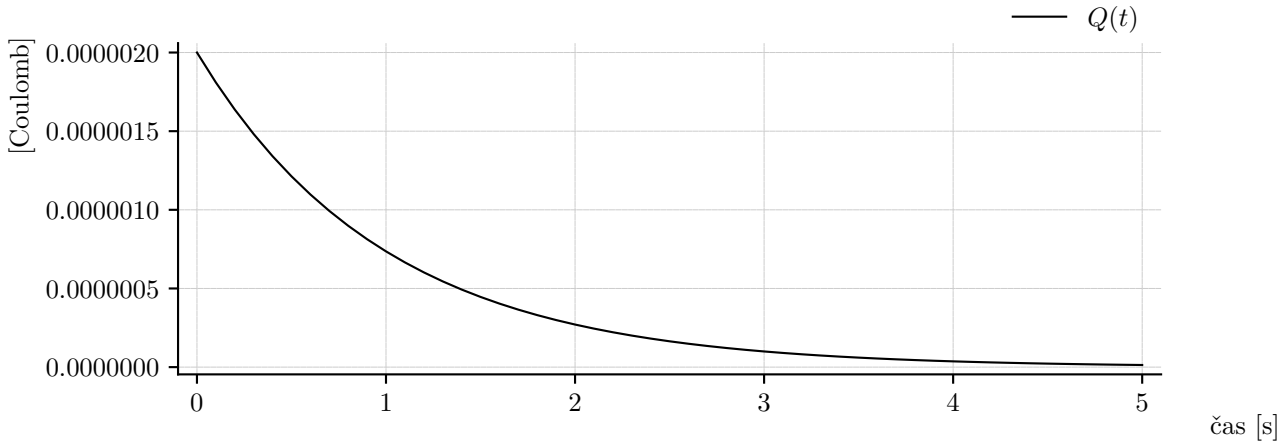
Už v tomto bode je rovnica (13b) predpisom, ktorý udáva časovú závislosť veličiny  $Q$ . Vyjadruje signál (časovú funkciu)  $Q(t)$ . Časová funkcia  $Q(t)$  je riešením diferenciálnej rovnice (9).

V rovnici (13b) je konštanta  $e^{k_3}$ . Je to všeobecná konštanta a môže mať akúkoľvek hodnotu. Je možné ukázať, my si tu však dovoľíme neuviesť formálnu ukážku, že táto konštanta je daná začiatočnou podmienkou priradenou k diferenciálnej rovnici. V tomto prípade platí  $e^{k_3} = Q_0$ .

Hľadaným riešením diferenciálnej rovnice je časová funkcia v tvare

$$Q(t) = Q_0 e^{(-\frac{1}{RC}t)} \quad (14)$$

Funkcia je graficky znázornená na nasledujúcom obrázku.



Obr. 3: Graf funkcie (14) pre  $R = 10^6$  [ $\Omega$ ],  $C = 1$  [ $\mu\text{F}$ ] a  $Q_0 = 2 \cdot 10^{-6}$  [Coulomb] (ľubovoľné hodnoty len ako príklad)

### 2.2.2 Časový priebeh napätia na kondenzátore

Vyšetrili sme časový priebeh elektrického náboja počas vybíjania kondenzátora. Opis situácie na začiatku časti 2 však nepriamo predpokladá, že sa budeme venovať napätiu. Vzájomný vzťah už poznáme, a jeho formálne presnejší zápis (napätie  $u(t)$  ako signál) je

$$u(t) = \frac{1}{C}Q(t) \quad (15)$$

Takže ak poznáme priebeh  $Q(t)$ , poznáme aj priebeh  $u(t)$ .

Začiatočnú podmienku pre signál  $Q(t)$ , teda hodnotu  $Q(0)$  samozrejme tiež možno určiť so želanou (danej) začiatočnej podmienky signálu  $u(t)$ .

$$Q(0) = Cu_0 \quad (16)$$

V zmysle úvodu časti 2 uvažujme nasledujúci príklad

$$C = 1 \text{ } [\mu\text{F}]$$

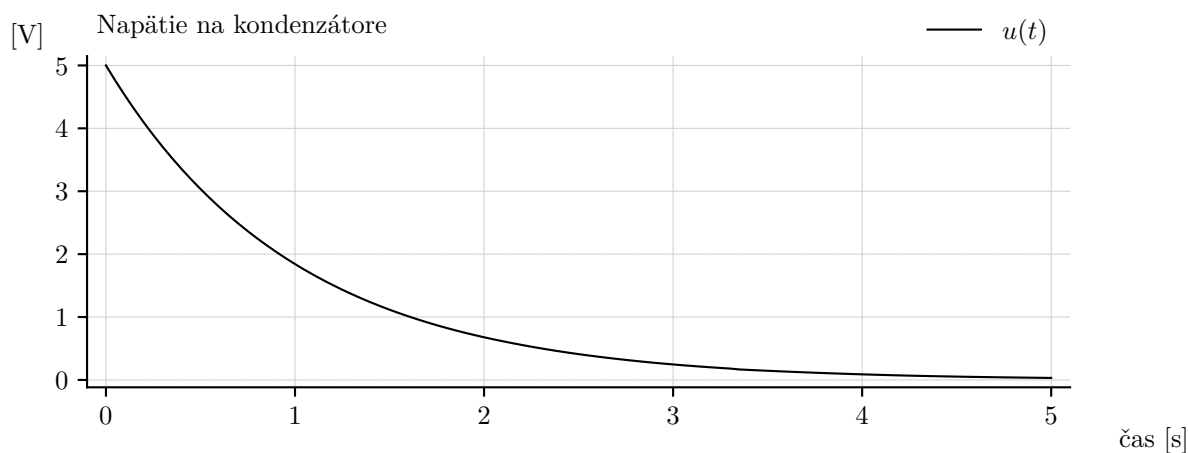
$$R = 10^6 \text{ } [\Omega]$$

$$u_0 = 5 \text{ } [\text{V}]$$

Pre tento príklad je následne začiatočná podmienka pre signál  $Q(t)$

$$Q(0) = 10^{-6} \cdot 5 = 0.000050 \text{ [Coulomb]} \quad (17)$$

Výsledný priebeh napätia je zobrazený na obr. 4.



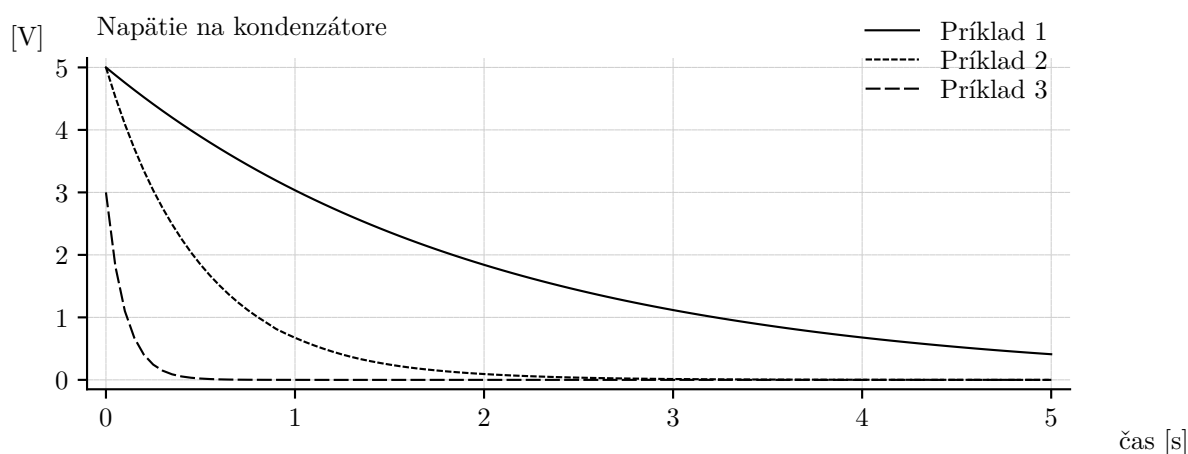
Obr. 4: Časový priebeh napätia na kondenzátore

### 2.2.3 Príklady pre rôzne parametre $R$ a $C$

Pre zaujímavosť, ukážme priebeh napätia pre rôzne parametre  $R$  a  $C$ . Príklady sú sumarizované v tabuľke 1. Graficky znázornené časové priebehy na obr. 5.

Tabuľka 1: Príklady rôznych parametrov

	$C$ [F]	$R$ [ $\Omega$ ]	$u_0$ [V]
Príklad 1	$2 \cdot 10^{-6}$	$10^6$	5
Príklad 2	$\frac{1}{2} \cdot 10^{-6}$	$10^6$	5
Príklad 3	$10^{-6}$	$\frac{1}{10} \cdot 10^6$	3



Obr. 5: Časový priebeh napätia na kondenzátore