

Cvičenie druhé

Hlavné ciele cvičenia

- Minule, riešenie diferenciálnej rovnice (analyticky).
Nadviažeme, numerické riešenie...
Simulink, ODE solver (len ukážka/zopakovanie, trochu podrobnejšie bude neskôr)
- Čo je to numerické riešenie diferenciálnej rovnice?
- Diskusia k dosiaľ uvedenému (najmä k práci v Simulinku)
- Priestor na diskusiu k témam prednášky¹
- Jemná mini prednáška k analytickému riešeniu „zložitejšej“ diferenciálnej rovnice

Obsah

| | | |
|----------|---|----------|
| 1 | Diferenciálna rovnica - numerické riešenie | 2 |
| 1.1 | S využitím Simulinku | 2 |
| 1.2 | S využitím ODE solvera | 2 |
| 2 | Diferenciálna rovnica - príklad pre širší rozhľad | 3 |
| 2.1 | Simuláciou v Simulinku (numerické riešenie) | 3 |
| 2.2 | Pomocou ODE solvera – numerické riešenie (MATLAB) | 4 |
| 2.3 | Analyticky (matematika) | 4 |
| 2.4 | Pomocou Laplaceovej transformácie | 6 |
| 2.5 | Pomocou Symbolic toolboxu (MATLAB) | 9 |

¹...no už to vidím

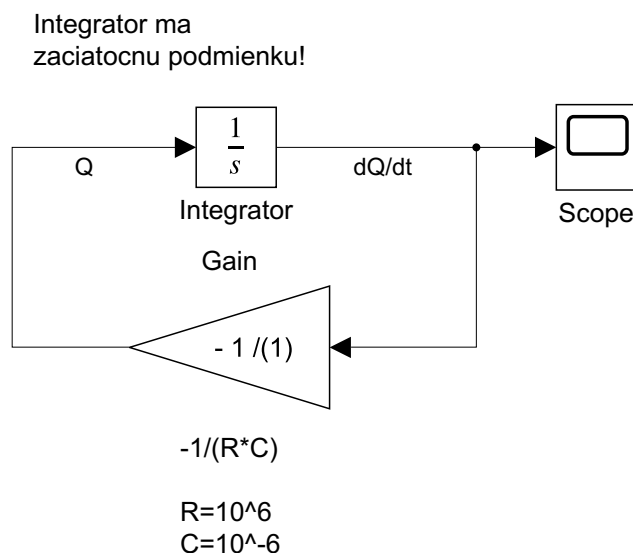
1 Diferenciálna rovnica - numerické riešenie

1.1 S využitím Simulinku

Zaoberáme sa (viď predchádzajúce cvičenie) problémom v tvare

$$\frac{dQ(t)}{dt} = -\frac{1}{RC}Q(t) \quad Q(0) = Q_0 \quad (1)$$

kde $Q(t)$ je neznáma časová funkcia. Konštanty (nezávislé od času) R , C a aj Q_0 sú známe.



Obr. 1: Simulačná schéma zodpovedajúca rovnici (1)

1.2 S využitím ODE solvera

Pre numerický výpočet riešenia pomocou procedúry `ode45` je potrebné predmetný systém (rovniciu) zapísať ako funkciu, ktorú bude procedúra `ode45` používať. V tomto prípade:

```
1 function dQ = fundif(t,x);  
2 R = 10^6;  
3 C = 10^(-6);  
4 Q = x;  
5 dQ = -(1/(R*C)) * Q;
```

Je potrebné vytvoriť samostatný súbor `fundif.m`, ktorý bude obsahovať uvedenú funkciu, tak ako je tu uvedená.

Mimochodom, na tomto mieste nebudeme (tu v texte) uvádzať podrobnosti k ODE solveru. Cieľom je tu len oboznámiť čitateľa s možnosťami ako získať numerické riešenie. Ako to „funguje“ bude jemne komentované neskôr.

Samotné použitie procedúry `ode45` sa vykoná nasledovnými príkazmi (povedzme v skripte v inom m-súbore):

```
1 Q_0 = 2 * 10^(-6);  
2 [t,y] = ode45('fundif',[0 5],[Q_0]);  
3 plot(t,y)
```

Obrázok sa ponecháva na čitateľa²...

²Čitateľ sa akosi stáva dôležitou súčasťou týchto cvičení.

2 Diferenciálna rovnica - príklad pre širší rozhľad

Majme diferenciálnu rovnicu:

$$\ddot{y} + 5,4\ddot{y} + 9,7\dot{y} + 5,592y = 2e^{-1,2t} \quad (2)$$

Pre tento dynamický systém zvolme nenulové začiatočné podmienky nasledovne:

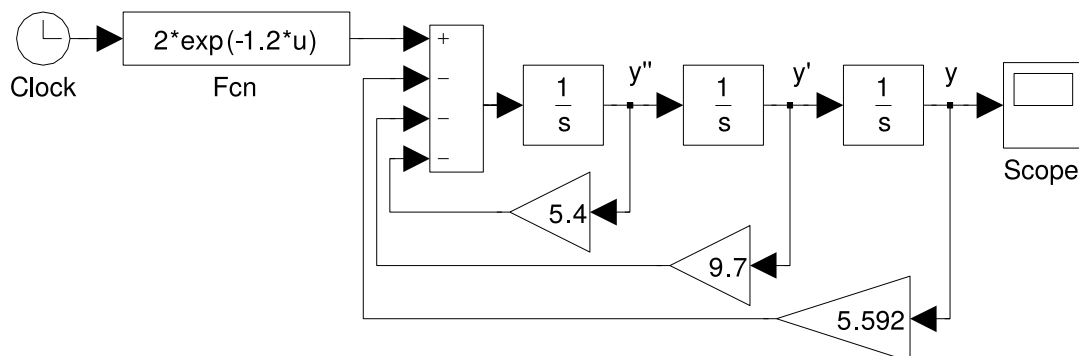
$$y(0) = 1 \quad \dot{y}(0) = 1 \quad \ddot{y}(0) = 1$$

Nájďme riešenie rovnice (2) nasledujúcimi spôsobmi:

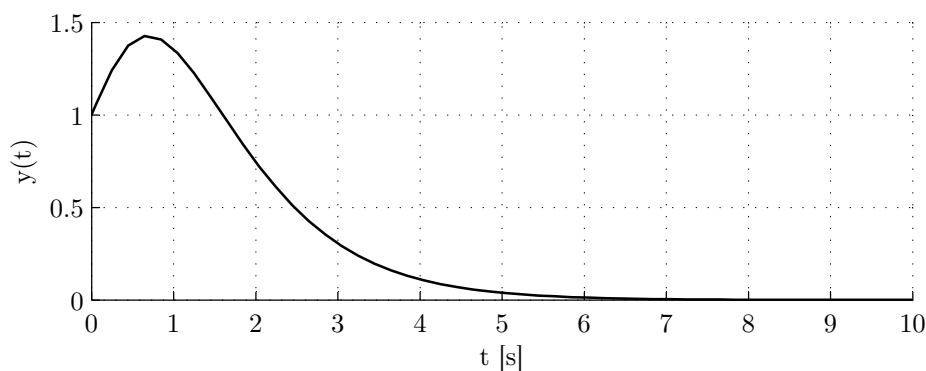
1. Numerické riešenie
 - (a) simuláciou v Simulinku
 - (b) pomocou ODE solvera
2. Analytické riešenie
 - (a) Analyticky (teória dynamických systémov, diferenciálne rovnice (matematika))
 - (b) pomocou Laplaceovej transformácie
3. Analytické riešenie, avšak pomocou softvérového toolboxu

2.1 Simuláciou v Simulinku (numerické riešenie)

Simulačná schéma zodpovedajúca diferenciálnej rovnici (2) je na Obr. 2. Začiatočné podmienky integrátorov v schéme sú nastavené rovnako ako boli zvolené v zadaní. Simuláciou získaný časový priebeh je na Obr. 3.



Obr. 2: Simulačná schéma



Obr. 3: Simuláciou získaný časový priebeh

2.2 Pomocou ODE solvera – numerické riešenie (MATLAB)

Pre numerický výpočet riešenia pomocou procedúry `ode45` je potrebné previesť diferenciálnu rovnicu (2) na systém diferenciálnych rovníc 1. rádu. V tomto prípade:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (3a)$$

$$\dot{x}_2 = x_3 \quad (3b)$$

$$\dot{x}_3 = -5,4x_3 - 9,7x_2 - 5,592x_1 + 2e^{-1,2t} \quad (3c)$$

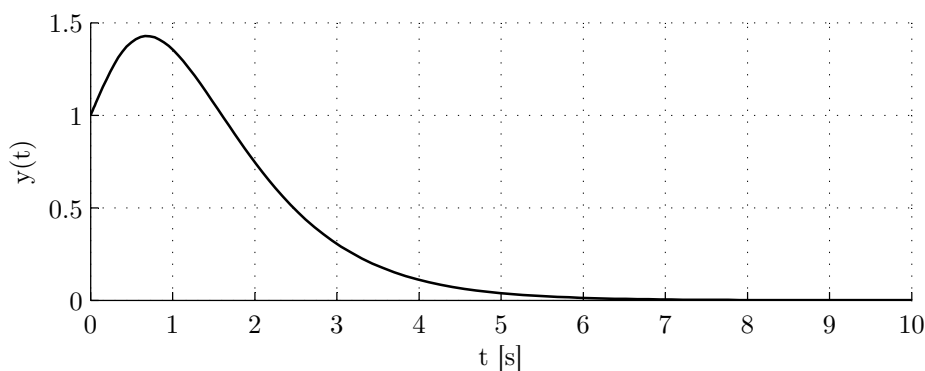
Tento systém sa potom zapíše ako funkcia, ktorú bude procedúra `ode45` používať

```
1 function dx = fundif(t,x);
2 dx(1) = x(2);
3 dx(2) = x(3);
4 dx(3) = -5.4*x(3) - 9.7*x(2) - 5.592*x(1) + 2*exp(-1.2*t);
5 dx = dx(:);
```

Samotné použitie procedúry `ode45` sa vykoná nasledovnými príkazmi:

```
1 [t,y] = ode45('fundif',[0 10],[1; 1; 1]);
2 plot(t,y(:,1))
```

Výsledný priebeh riešenia je na Obr. 4.



Obr. 4: Grafické znázornenie riešenia získaného pomocou `ode45`

2.3 Analytický (matematika)

- Táto časť je len informatívna. NEBUDE predmetom záverečnej skúšky. Je tu uvedená pre náznak úplnosti a ako podnet k rozširovaniu si všeobecného prehľadu.

Rovnica (2) je nehomogénna lineárna diferenciálna rovnica s konštantnými koeficientami tretieho rádu ($n_r = 3$). Jej Charakteristická rovnica je

$$s^3 + 5,4s^2 + 9,7s + 5,592 = 0 \quad (4)$$

Riešeniami Charakteristickej rovnice sú

$$s_1 = -2,1 + 0,5i \quad s_2 = -2,1 - 0,5i \quad s_3 = -1,2 \quad (5)$$

Fundamentálne riešenia (módy) rovnice (2) zodpovedajúce jednotlivým riešeniam Charakteristickej rovnice sú

$$y_1(t) = e^{(-2,1+0,5i)t} = e^{-2,1t}(\cos(0,5t) + i\sin(0,5t)) \quad (6a)$$

$$y_2(t) = e^{(-2,1-0,5i)t} = e^{-2,1t}(\cos(0,5t) - i\sin(0,5t)) \quad (6b)$$

$$y_3(t) = e^{-1,2t} \quad (6c)$$

Totíž, vo všeobecnosti možno rozlišovať niekoľko prípadov, pre ktoré platí:

1. Ak má charakteristická rovnica n navzájom rôznych riešení s_i pre $i = 1, \dots, n$, potom zodpovedajúce fundamentálne riešenia (módy) sú: $e^{s_1 t}, e^{s_2 t}, \dots, e^{s_n t}$.

2. Ak sa medzi n koreňmi charakteristického polynómu vyskytne k -násobný koreň, vytvoríme k lineárne závislých riešení: $e^{s_1 t}, te^{s_1 t}, \dots, t^{k-1}e^{s_1 t}$
3. V prípade výskytu dvojice komplexne združených koreňov charakteristického polynómu, $s_{1,2} = \alpha \pm j\beta$, kde j je imaginárna jednotka, využijeme na určenie fundamentálnych riešení Eulerov vzťah

$$e^{(\alpha \pm j\beta)t} = e^{\alpha t} (\cos \beta t \pm j \sin \beta t) \quad (7)$$

Preto potom možno písať príslušné fundamentálne riešenie v tvare

$$c_1 e^{(\alpha+j\beta)t} + c_2 e^{(\alpha-j\beta)t} = e^{\alpha t} (c' \cos \beta t + c'' \sin \beta t) \quad (8)$$

kde sú imaginárne časti nulové.

Výsledné reálne všeobecné riešenie homogénnej časti má tvar

$$y_{hvs}(t) = c_1 e^{-2,1t} \cos(0,5t) + c_2 e^{-2,1t} \sin(0,5t) + c_3 e^{-1,2t} \quad (9)$$

kde c_1, c_2 a c_3 sú reálne konštanty.

Pravá strana $q(t)$ diferenciálnej rovnice (2) má vo všeobecnosti tvar $q(t) = e^{\alpha t} P_n(t)$, pričom platí

$$P_n(t) = 2 \quad (10a)$$

$$\alpha = -1, 2 \quad (10b)$$

Pre tento špeciálny tvar pravej strany má partikulárne riešenie $\psi(t)$ tvar $\psi(t) = t^k e^{\alpha t} Q_n(t)$, kde k je násobnosť koreňa α a $Q_n(t)$ je všeobecný polynóm rovnakého stupňa ako $P_n(t)$. V tomto prípade

$$k = 1 \quad (11a)$$

$$Q_n(t) = A_0 \quad (11b)$$

Partikulárne riešenie $\psi(t)$ určíme použitím metódy neurčitých koeficientov, a teda partikulárne riešenie a jeho derivácie dosadíme do diferenciálnej rovnice.

$$\psi(t) = A_0 t e^{-1,2t} \quad (12a)$$

$$\dot{\psi}(t) = A_0 e^{-1,2t} - 1,2 A_0 t e^{-1,2t} \quad (12b)$$

$$\ddot{\psi}(t) = -2,4 A_0 e^{-1,2t} + 1,44 A_0 t e^{-1,2t} \quad (12c)$$

$$\ddot{\psi}(t) = 4,32 A_0 e^{-1,2t} - 1,728 A_0 t e^{-1,2t} \quad (12d)$$

Rovnice (12) dosadíme do diferenciálnej rovnice (2) a upravíme.

$$\begin{aligned} 2e^{-1,2t} &= 4,32 A_0 e^{-1,2t} - 1,728 A_0 t e^{-1,2t} + 5,4 (-2,4 A_0 e^{-1,2t} + 1,44 A_0 t e^{-1,2t}) \\ &\quad + 9,7 (A_0 e^{-1,2t} - 1,2 A_0 t e^{-1,2t}) + 5,592 (A_0 t e^{-1,2t}) \end{aligned} \quad (13a)$$

$$\begin{aligned} 2e^{-1,2t} &= 4,32 A_0 e^{-1,2t} - 1,728 A_0 t e^{-1,2t} - 12,96 A_0 e^{-1,2t} + 7,776 A_0 t e^{-1,2t} \\ &\quad + 9,7 A_0 e^{-1,2t} - 8,5 A_0 t e^{-1,2t} + 5,592 A_0 t e^{-1,2t} \end{aligned} \quad (13b)$$

$$2e^{-1,2t} = 1,06 A_0 e^{-1,2t} + 3,14 t e^{-1,2t} \quad (13c)$$

Z (13c) vyplýva

$$2 = 1,06 A_0 \quad \Rightarrow \quad A_0 = \frac{2}{1,06} \doteq 1,8868 \quad (14)$$

a partikulárne riešenie $\psi(t)$ je

$$\psi(t) = 1,8868 t e^{-1,2t} \quad (15)$$

Všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice (2) je súčet (9) s (15):

$$y_{vs}(t) = c_1 e^{-2,1t} \cos(0,5t) + c_2 e^{-2,1t} \sin(0,5t) + c_3 e^{-1,2t} + 1,8868 t e^{-1,2t} \quad (16a)$$

Konštanty c_1 , c_2 a c_3 sú dané konkrétnymi začiatočnými podmienkami, ktoré sa dosadia do príslušných derivácií všeobecného riešenia. V tomto prípade sú potrebné okrem nulovej derivácie (16a) aj prvá a druhá derivácia všeobecného riešenia:

$$\dot{y}_{vs}(t) = 1,8868e^{-1,2t} - 2,2642te^{-1,2t} - 1,2c_3e^{-1,2t} - 2,1c_2e^{-2,1t} \sin(0,5t) + 0,5c_2e^{-2,1t} \cos(0,5t) - 2,1c_1e^{-2,1t} \cos(0,5t) - 0,5c_1e^{-2,1t} \sin(0,5t) \quad (16b)$$

$$\ddot{y}_{vs}(t) = -4,5283e^{-1,2t} + 2,717te^{-1,2t} + 1,44c_3e^{-1,2t} + 4,16c_2e^{-2,1t} \sin(0,5t) - 2,1c_2e^{-2,1t} \cos(0,5t) + 4,16c_1e^{-2,1t} \cos(0,5t) + 2,1c_1e^{-2,1t} \sin(0,5t) \quad (16c)$$

Dosadením začiatočných podmienok do (16a), (16b) a (16c) získame sústavu troch rovníc o troch neznámých, ktorá má v maticovom zápise tvar

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2,1 & 0,5 & -1,2 \\ 4,16 & -2,1 & 1,44 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 - 1,8868 \\ 1 + 4,5283 \end{bmatrix} \quad (17)$$

a jej riešením je

$$c_1 = -5,0979 \quad (18a)$$

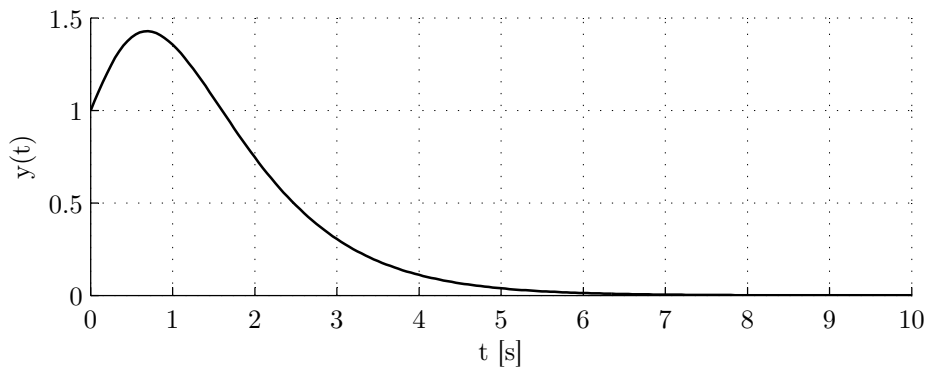
$$c_2 = -8,5498 \quad (18b)$$

$$c_3 = 6,0979 \quad (18c)$$

Riešením diferenciálnej rovnice (2) je

$$y(t) = -5,0979e^{-2,1t} \cos(0,5t) - 8,5498e^{-2,1t} \sin(0,5t) + 6,0979e^{-1,2t} + 1,8868te^{-1,2t} \quad (19)$$

Graficky je riešenie znázornené na Obr. 5.



Obr. 5: Grafické znázornenie riešenia získaného analyticky

2.4 Pomocou Laplaceovej transformácie

- Táto časť je len informatívna. NEBUDE predmetom záverečnej skúšky. Je tu uvedená pre náznak úplnosti a ako podnet k rozširovaniu si všeobecného prehľadu.

Rovnica (2) má po Laplaceovej transformácii tvar

$$s^3Y - s^2 - s - 1 + 5,4(s^2Y - s - 1) + 9,7(sY - 1) + 5,592Y = \frac{2}{(s + 1,2)} \quad (20)$$

Po úprave

$$s^3 Y - s^2 - s - 1 + 5,4s^2 Y - 5,4s - 5,4 + 9,7s Y - 9,7 + 5,592 Y = \frac{2}{(s+1,2)} \quad (21a)$$

$$Y(s^3 + 5,4s^2 + 9,7s + 5,592) + (-s^2 - s - 1 - 5,4s - 5,4 - 9,7) = \frac{2}{(s+1,2)} \quad (21b)$$

$$Y(s^3 + 5,4s^2 + 9,7s + 5,592) + (-s^2 - 6,4s - 16,1) = \frac{2}{(s+1,2)} \quad (21c)$$

$$Y = \frac{2}{(s+1,2)(s^3 + 5,4s^2 + 9,7s + 5,592)} + \frac{(s^2 + 6,4s + 16,1)}{(s^3 + 5,4s^2 + 9,7s + 5,592)} \quad (21d)$$

Korene polynómu $s^3 + 5,4s^2 + 9,7s + 5,592$ sú (5) a korene polynómu $s^2 + 6,4s + 16,1$ sú

$$s_4 = -3,2 + 2,4207i \quad s_5 = -3,2 - 2,4207i \quad (22)$$

a teda (21d) je možné napísať v tvare

$$\begin{aligned} Y &= \frac{2}{(s+2,1-0,5i)(s+2,1+0,5i)(s+1,2)^2} \\ &+ \frac{(s+3,2-2,4207i)(s+3,2+2,4207i)}{(s+2,1-0,5i)(s+2,1+0,5i)(s+1,2)} \\ &= Y_1 + Y_2 \end{aligned} \quad (23)$$

Na spätnú Laplaceovu transformáciu využijeme Heavisideov rozvojový vzorec

$$y(t) = \sum_{i=1}^k e^{s_i t} \sum_{j=1}^{r_i} \frac{[G_i^{(r_i-j)}(s)]_{s=s_i}}{(r_i-j)!(j-1)!} t^{j-1} \quad (24)$$

kde $G_i = Y(s)(s-s_i)^{r_i}$, s_i ($i = 1, \dots, j$) sú póly prenosovej funkcie $Y(s)$ a r_i ($i = 1, \dots, j$) je ich násobnosť.

Spätná transformácia $Y_1(s)$.

Najprv je potrebné určiť hodnoty $[G_i^{(r_i-j)}(s)]_{s=s_i}$:

$$G_1(s_1) = \frac{2}{(-2,1+0,5i+2,1+0,5i)(-2,1+0,5i+1,2)^2} = 1,602 - 0,9968i \quad (25a)$$

$$G_2(s_2) = \frac{2}{(-2,1+0,5i+2,1-0,5i)(-2,1+0,5i+1,2)^2} = 1,602 + 0,9968i \quad (25b)$$

$$G_3(s_3) = \frac{2}{(-1,2+2,1-0,5i)(-1,2+2,1+0,5i)} = 1,8868 \quad (25c)$$

$$\dot{G}_3(s_3) = -\frac{2(2s_3+4,2)}{(s_3^2+4,2s_3+4,66)^2} = -\frac{2(2(-1,2)+4,2)}{((-1,2)^2+4,2(-1,2)+4,66)^2} = -3,204 \quad (25d)$$

Tieto hodnoty sa potom dosadia do (24) a po úprave:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= e^{(-2,1+0,5i)t} (1,602 - 0,9968i) + e^{(-2,1-0,5i)t} (1,602 + 0,9968i) \\ &+ e^{-1,2t} \left(\frac{-3,204}{(2-1)!(1-1)!} t^0 + \frac{1,8868}{(2-2)!(2-1)!} t^1 \right) \end{aligned} \quad (26a)$$

$$y_1(t) = e^{-2,1t} (3,204 \cos(0,5t) + 1,9936 \sin(0,5t)) - 3,204e^{-1,2t} + 1,8868te^{-1,2t} \quad (26b)$$

Spätná transformácia $Y_2(s)$:

Určenie hodnôt $\left[G_i^{(r_i-j)}(s)\right]_{s=s_i}$ pre prípad $Y_2(s)$:

$$G_1(s_1) = \frac{(-2,1+0,5i+3,2-2,4207i)(-2,1+0,5i+3,2+2,4207i)}{(-2,1+0,5i+2,1+0,5i)(-2,1+0,5i+1,2)} \quad (27a)$$

$$= -4,1508 + 5,2715i$$

$$G_2(s_2) = \frac{(-2,1-0,5i+3,2-2,4207i)(-2,1-0,5i+3,2+2,4207i)}{(-2,1-0,5i+2,1-0,5i)(-2,1-0,5i+1,2)} \quad (27b)$$

$$= -4,1508 - 5,2715i$$

$$G_3(s_3) = \frac{(-1,2+3,2-2,4207i)(-1,2+3,2+2,4207i)}{(-1,2+2,1-0,5i)(-1,2+2,1+0,5i)} = 9,3017 \quad (27c)$$

A potom:

$$y_2(t) = e^{(-2,1+0,5i)t}(-4,1508 + 5,2715i) \quad (28a)$$

$$+ e^{(-2,1-0,5i)t}(-4,1508 - 5,2715i) + 9,3017e^{-1,2t}$$

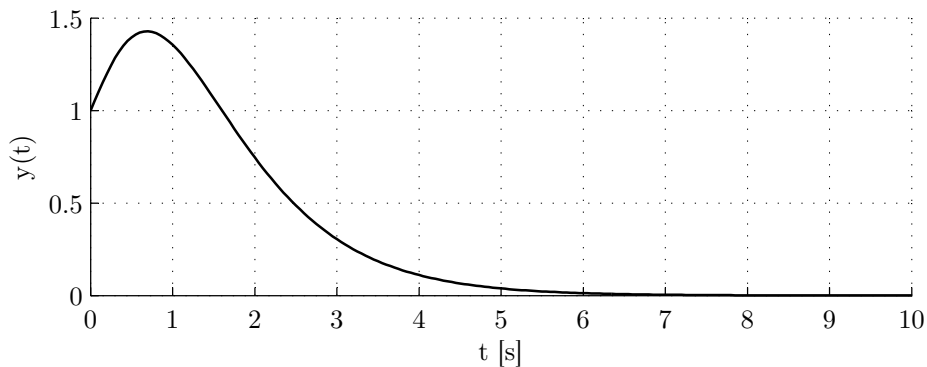
$$y_2(t) = e^{-2,1t}(-8,3016 \cos(0,5t) - 10,543 \sin(0,5t)) + 9,3017e^{-1,2t} \quad (28b)$$

Výsledné riešenie je súčtom $y_1(t)$ s $y_2(t)$

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = e^{-2,1t}(-5,0976 \cos(0,5t) - 8,5494 \sin(0,5t)) \quad (29)$$

$$+ 6,0977e^{-1,2t} + 1,8868te^{-1,2t}$$

Grafické znázornenie riešenia je na Obr. 6.



Obr. 6: Grafické znázornenie riešenia získaného pomocou Laplaceovej transformácie

2.5 Pomocou Symbolic toolboxu (MATLAB)

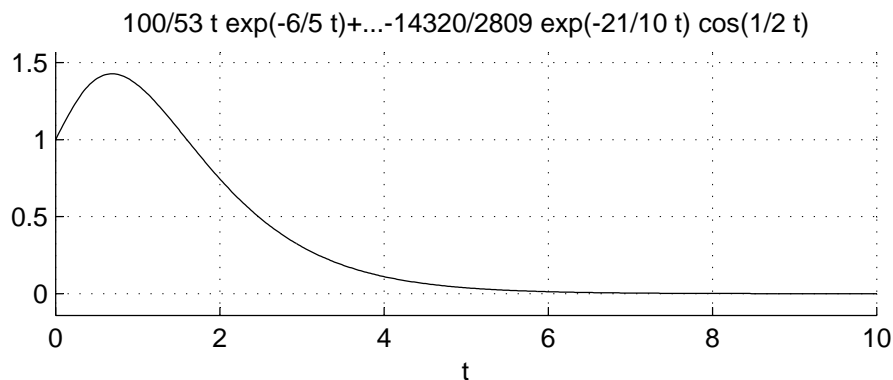
Pre výpočet riešenia pomocou toolboxu Symbolic je potrebné zadať nasledujúce príkazy:

```
1 yt = dsolve('D3y + 5.4*D2y + 9.7*Dy + 5.592*y = 2*exp(-1.2*t)', 'y(0)  
2 =1', 'Dy(0)=1', 'D2y(0)=1')  
3 ezplot(yt,[0 10])
```

Odpoveďou je riešenie a vykreslenie jeho priebehu znázornené na Obr. 7.

yt =

```
100/53*t*exp(-6/5*t)+17129/2809*exp(-6/5*t)-120082/14045*exp(-21/10*t)*sin(1/2*t)  
-14320/2809*exp(-21/10*t)*cos(1/2*t)
```



Obr. 7: Grafické znázornenie riešenia získaného pomocou toolboxu Symbolic