

Cvičenie tretie

Obsah

1	Kyvadlo	1
1.1	Úlohy	2
1.2	Poznámky k riešeniu úloh	2
2	Doplnkový text: o modelovaní systému vo všeobecnosti	2
3	O numerickom riešení diferenciálnych rovníc (a ODE solver)	4
3.1	ODE solver	4
3.2	Rovnica vyššieho rádu ako sústava rovníc 1. rádu	5
3.3	Používanie ODE solvera	6
3.3.1	MATLAB	6
3.3.2	Python	8
4	Doplnkový text: o stabilite dynamického systému	9
4.1	Vektorové pole a fázový portrét	9
4.2	Stabilita	12
4.2.1	Stabilita lineárnych systémov	13
4.3	Linearizácia a jej použitie pri analýze stability	14
5	Ďalšie simulácie s kyvadlom	16
5.1	Iné začiatočné podmienky	16
5.2	Nenulový vstupný signál	16
6	Lineárny dynamický systém a prenosová funkcia	18
6.1	Nelinearita v uvažovanom dynamickom systéme	18
6.2	Linearizácia v okolí bodu v stavovom priestore	19
6.3	Prenosová funkcia	19

1 Kyvadlo

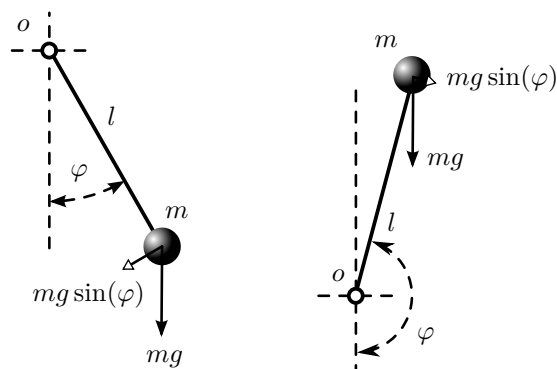
Uvažujme kyvadlo, ktorého kmity sú tlmené viskóznym trením s koeficientom β [kg m² s⁻¹]. Kyvadlo je na Obr. 1, kde hmotný bod s hmotnosťou m [kg] pripevnený na rameno so zanedbateľnou hmotnosťou a dĺžkou l [m] kmitá, φ označuje os otáčania kolmú na rovinu, v ktorej kyvadlo kmitá, uhol medzi zvislicou a ramenom kyvadla je označený φ [rad] a gravitačné zrýchlenie g [m s⁻²].

Pohybová rovnica opisujúca dynamiku rotačného pohybu kyvadla je v tvare

$$ml^2 \ddot{\varphi} + \beta \dot{\varphi} + mgl \sin \varphi = u \quad (1a)$$

$$ml^2 \ddot{\varphi} = -\beta \dot{\varphi} - mgl \sin \varphi + u \quad (1b)$$

kde $u(t)$ [kg m² s⁻²] je externý moment sily pôsobiaci na rameno kyvadla, $\dot{\varphi}(t)$ [rad s⁻¹] je uhlová rýchlosť a $\ddot{\varphi}(t)$ [rad s⁻²] je uhlové zrýchlenie ramena kyvadla. Číselné hodnoty parametrov kyvadla sú uvedené v tabuľke 1.



Obr. 1: Kyvadlo

1.1 Úlohy

- Vytvorte numerickú (počítačovú) simuláciu časového priebehu výchylky kyvadla (kyvadlo ako nelineárny dynamický systém).
 - Schematické znázornenie pre implementáciu v prostredí MATLAB-Simulink (základné bloky).
 - Implementácia s využitím všeobecného ODE solvera. (pre záujemcov)
- Simulujte priebeh výchylky kyvadla
 - pre začiatočný stav $\varphi = 0,25$ [rad], $\dot{\varphi} = 0$ [rad/s] a $\ddot{\varphi} = 0$ [rad/s²] pričom $u(t) = 0$ [kg m² s⁻²],
 - pre skokovú zmenu signálu $u(t)$, ktorá nastane v čase $t = 0$ a hodnota signálu sa zmení z 0 [kg m² s⁻²] na 9,81 [kg m² s⁻²].
- Porovnajte výstup lineárneho modelu, ako je opísaný v časti 6.3, a nelineárneho modelu kyvadla pri vhodne zvolenej simulácii (pripomenka pre cvičiaceho: skoková zmena v okolí pracovného bodu - rôzna veľkosť okolia).

1.2 Poznámky k riešeniu úloh

Tuto by mohla byť nakreslená nejaká tá simulinkovská schéma.

Ale nie je.

Celkovo by tu toho mohlo byť viac.

Ale nie je.

2 Doplnkový text: o modelovaní systému vo všeobecnosti

Rovnica (1) je modelom uvažovaného dynamického systému. Model je matematická reprezentácia v tomto prípade fyzikálneho systému. Model umožňuje uvažovať o systéme a predpovedať ako sa bude systém správať. Uvedený model opisuje vstupno-výstupné správanie sa dynamického systému, kde vstupom je externý moment sily u a výstupom je uhol φ , avšak budeme pracovať aj opisom systému v „stavovom priestore“.

Tabuľka 1: Parametre kyvadla

Parameter	Hodnota	Jednotky
m	1	kg
l	1	m
g	9,81	m s ⁻²
β	$2 \cdot 0,5 \cdot \sqrt{g/l}$	kg m ² s ⁻¹

Stav systému je súbor premenných (súbor veličín), ktoré sumarizujú minulosť systému pre potreby predpovede budúcnosti systému. Pre fyzikálny systém je stav zložený z premenných potrebných pre výpočet zmeny hmotnosti, hybnosti a energie. Kľúčovou otázkou pri vytváraní modelu je ako presne má byť táto zmena popísaná.

Stavové premenné tvoria vektor $x \in \mathbb{R}^n$, ktorý sa nazýva *stavový vektor*. Vstupy, pomocou ktorých je systém riadený, tvoria vektor vstupov $u \in \mathbb{R}^p$ a merateľné výstupy systému tvoria vektor výstupov $y \in \mathbb{R}^q$. V tomto prípade máme $p = q = 1$. Dynamický systém potom možno reprezentovať rovnicami v tvare

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (2a)$$

$$y = h(x, u) \quad (2b)$$

kde $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ a $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ sú hladké funkcie. Model v takomto tvare nazývame *model v stavovom priestore*.

Rozmer stavového vektora sa nazýva *rád systému*. Systém (2) sa nazýva *časovo-invariantný* pretože funkcie f a h nie sú priamo závislé na čase t . Pri časovo-invariantných systémoch sú. Model pozostáva z dvoch funkcií: funkcia f určuje rýchlosť zmeny stavového vektora ako funkciu stavu x a vstupu u , a funkcia h určuje merateľné výstupy ako funkciu stavu x a vstupu u .

Systém sa nazýva lineárny ak sú funkcie f a h lineárne vzhľadom na x a u . Lineárny model v stavovom priestore má tvar

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3a)$$

$$y = Cx + Du \quad (3b)$$

kde A , B , C a D sú konštantné matice. Takýto systém sa nazýva lineárny a časovo-invariantný, v skratke LTI z anglického linear and time-invariant. Matica A sa nazýva dynamická matica, matica B sa nazýva vstupná matica, matica C sa nazýva výstupná matica a matica D sa nazýva priamy člen. Drvivá väčšina systémov nemá priamy člen, čo znamená, že vstup nemá priamy vplyv na výstup.

Iná forma lineárnych diferenciálnych rovníc, ktorá je zovšeobecnením avšak linearizovanej dynamickej rovnice kyvadla (o linearizácii neskôr), má tvar

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{(n-1)} y}{dt^{(n-1)}} + \dots + a_0 y = b_0 u \quad (4)$$

kde t je nezávisle premenná (čas), $y(t)$ je závisle premenná (výstup) a $u(t)$ je vstup. Zápis $\frac{d^n y}{dt^n}$ značí n -tú deriváciu y podľa času t (namiesto n bodiek). Hovoríme, že rovnica (4) je diferenciálna rovnica n -tého rádu, ktorá modeluje dynamiku systému n -tého rádu. Tento model môže byť konvertovaný na model v stavovom priestore napríklad definovaním stavového vektora v tvare

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \frac{dy}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d^{(n-1)} y}{dt^{(n-1)}} \end{bmatrix} \quad (5)$$

potom model v stavovom priestore možno zapísať v tvare

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \\ \vdots \\ -a_{n-1}x_n - \dots - a_0x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b_0u \end{bmatrix} \quad (6a)$$

$$y = x_1 \quad (6b)$$

čo po vhodnej definícii matíc A , B , C a D má tvar (3).

Ešte všeobecnejší systém získame ak výstup bude lineárnou kombináciou všetkých stavových veličín (predpokladáme, že výstup nezávisí priamo od vstupu), teda

$$y = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad (7)$$

Potom model v stavovom priestore je

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u \quad (8a)$$

$$y = [c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_{n-2} \ c_{n-1} \ c_n] x \quad (8b)$$

Vráťme sa späť k nelineárnym dynamickým systémom. Model kyvadla (1a) je nelineárna diferenciálna rovnica. Rovnicu (1a) upravíme na tvar

$$\ddot{\varphi} = -\frac{\beta}{ml^2}\dot{\varphi} - \frac{g}{l}\sin(\varphi) + \frac{1}{ml^2}u \quad (9)$$

Stavom kyvadla sú dve veličiny: uhol natočenia ramena kyvadla φ a uhlová rýchlosť ramena kyvadla $\dot{\varphi}$. Stavový vektor má preto dva prvky $x^T = [x_1 \ x_2]$, kde $x_1 = \varphi$ a $x_2 = \dot{\varphi}$. Model kyvadla v stavovom priestore je v tvare

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{\beta}{ml^2}x_2 - \frac{g}{l}\sin(x_1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix} u \quad (10a)$$

$$\varphi = x_1 \quad (10b)$$

Toto je nelineárny časovo-invariantný systém druhého rádu.

3 O numerickom riešení diferenciálnych rovníc (a ODE solver)

Majme rovnicu opisujúcu dynamiku rotačného pohybu kyvadla. Rovnica je v tvare

$$ml^2\ddot{\varphi}(t) + \beta\dot{\varphi}(t) + mgl\sin\varphi(t) = u(t) \quad (11)$$

Samozrejme, ide o diferenciálnu rovnicu. Presnejšie o obyčajnú diferenciálnu rovnicu 2. rádu, ktorá je nehomogénna (vyskytuje sa v nej „externý signál“ (vstup)). Cieľom je nájsť numerické riešenie tejto rovnice pre dané začiatočné podmienky a pre prípadné dané vstupy (vstupné signály).

Analytické riešenie diferenciálnej rovnice je v podstate nejaká funkcia času (a prípadne iných veličín). Numerické riešenie je postupnosť hodnôt, číselných hodnôt, ktoré pri daných predpokladoch vyhovujú diferenciálnej rovnici. Je postupnosť hodnôt - vektor hodnôt, ku ktorému prislúcha časový vektor určujúci časovú postupnosť hodnôt numerického riešenia. Tu sme vynechali pár miliónov detailov, ale snád sa dá vytušiť, čo sa tu myslí pod numerickým riešením.

3.1 ODE solver

Pre hľadanie numerického riešenia využijeme ODE solver. ODE je skratka pre obyčajné diferenciálne rovnice (ordinary differential equation).

Úlohou ODE solvera je nájsť numerické riešenie na základe rovnice (diferenciálnej), ktorú je možné vo všeobecnosti zapísať v tvare

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), \dots) \quad (12)$$

kde f je funkcia, ktorej argumenty sú čas t , prirodzene, samotný výstupný (hľadaný, neznámy) signál $x(t)$ a prípadne iné ďalšie parametre či veličiny - napríklad externý vstup. Uvedená rovnica doslova predpisuje aká je časová zmena signálu $x(t)$. Časová zmena signálu, inými slovami časová derivácia (derivácia podľa času) je označená ako $\dot{x}(t)$.

Ak teda do funkcie f dosadíme hodnoty argumentov (čas, signál $x(t)$, a prípadne iné), získame hodnotu časovej zmeny $\dot{x}(t)$. Na základe informácie o $\dot{x}(t)$, ktorá zodpovedá aktuálnemu (dosadenému) signálu $x(t)$, môžeme určiť hodnotu $x(t)$ o nejaký čas neskôr. Túto novú hodnotu $x(t)$ možno opäť dosadiť do funkcie f a následne nájsť ďalšiu ešte ďalej v čase - atď. ODE solver využíva práve tento jednoduchý princíp pre postupné hľadanie hodnôt (numerických hodnôt) signálu $x(t)$.

Vo všeobecnosti sa uvedený princíp nazýva numerická integrácia. ODE solver teda numericky integruje. Je množstvo metód pre numerickú integráciu, ktoré sa líšia spôsobom riešenia problémov súvisiacich so samotným procesom numerickej integrácie (voľba (optimalizácia) časového kroku integrácie, zohľadnenie matematických vlastností daného typu diferenciálnych rovníc a iné). ODE solver sa môžu líšiť aj samotnou implementáciou niektorej z metód numerickej integrácie. Podrobnejší opis ODE solvera je nad rámec tohto textu.

3.2 Rovnica vyššieho rádu ako sústava rovníc 1. rádu

ODE solver z princípu pracuje s diferenciálnou rovnicou prvého rádu, prípadne so sústavou diferenciálnych rovníc 1. rádu. Napríklad sústavu dvoch rovníc prvého rádu je možné vo všeobecnosti zapísať v tvare

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = F\left(t, \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \dots\right) \quad (13)$$

V našom prípade hľadáme riešenie pre rovnicu druhého rádu. Každú diferenciálnu rovnicu vyššieho rádu je možné zapísať ako sústavu rovníc prvého rádu. V takejto novej sústave rovníc, vo všeobecnosti, vznikli nové veličiny (signály), ktoré sa vo všeobecnosti môžu líšiť od pôvodných veličín (signálov) v pôvodnej rovnici vyššieho rádu.

Nové veličiny vystupujúce v sústave rovníc sa v teórii systémov súhrnne označujú ako stav systému (stavové veličiny systému). Ak poznáme aktuálny stav systému potom spravidla vieme určiť predchádzajúce aj budúce stavy (vo všeobecnosti).

Napr. v rovnici kyvadla vystupujú veličiny (signály) $\ddot{\varphi}(t)$, $\dot{\varphi}(t)$ a $\varphi(t)$. Je zrejme (možno nie nad slnko jasné), že ako stav systému je možné zvoliť veličiny $\varphi(t)$ a $\dot{\varphi}(t)$, teda polohu a uhlovú rýchlosť kyvadla. Ak poznáme tieto, poznáme celú históriu a budúcnosť pohybu kyvadla.

Môže existovať viac možností voľby stavových veličín. Pri lineárnych systémoch je možností nekonečne veľa (nekonečne veľa stavových priestorov). Z praktického hľadiska však majú význam len niektoré voľby - napr. pri pohybových systémoch, akým je kyvadlo, sú to prirodzene polohy, rýchlosti, zrýchlenie, trh atď., v závislosti od rádu systému.

Jednou z možností ako previesť rovnicu vyššieho rádu na sústavu rovníc prvého rádu je nasledovný postup. V tomto prípade je zhodou okolností výsledkom aj prakticky využiteľný stavový priestor (stavové veličiny $\varphi(t)$ a $\dot{\varphi}(t)$). Nech

$$x_1(t) = \varphi(t) \quad (14)$$

potom

$$\dot{x}_1(t) = \dot{\varphi}(t) \quad (15)$$

Ďalej nech

$$\dot{x}_1(t) = \dot{\varphi}(t) = x_2(t) \quad (16)$$

a to znamená, že

$$\dot{x}_2(t) = \ddot{\varphi}(t) \quad (17)$$

Tým sme získali veličiny $x_1(t) = \varphi(t)$ a $x_2(t) = \dot{\varphi}(t)$. Je možné zostaviť stavový vektor $x = [x_1(t) \ x_2(t)]^T$ a teda $\dot{x} = [\dot{x}_1(t) \ \dot{x}_2(t)]^T$.

Cieľom je konkretizovať funkciu F v rovnici

$$\dot{x} = F(t, x, \dots) \quad (18)$$

čo je kompaktný zápis sústavy

$$\dot{x}_1(t) = F_1(t, x_1(t), x_2(t), \dots) \quad (19)$$

$$\dot{x}_2(t) = F_2(t, x_1(t), x_2(t), \dots) \quad (20)$$

Prvú rovnicu v tomto prípade máme:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (21)$$

Druhá rovnica vyplynie z postrehu, že pôvodnú rovnicu druhého rádu možno zapísať v tvare

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}(t) &= -\frac{\beta}{ml^2} \dot{\varphi}(t) - \frac{g}{l} \sin(\varphi(t)) + \frac{1}{ml^2} u(t) \\ &= -\frac{\beta}{ml^2} x_2(t) - \frac{g}{l} \sin(x_1(t)) + \frac{1}{ml^2} u(t) \end{aligned} \quad (22)$$

kde sú využité novo zavedené stavové veličiny $x_1(t)$ a $x_2(t)$. Je zrejmé, že druhá rovnica sústavy je

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{\beta}{ml^2} x_2(t) - \frac{g}{l} \sin(x_1(t)) + \frac{1}{ml^2} u(t) \quad (23)$$

a teda rovnice kyvadla v stavovom priestore sú

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -\frac{\beta}{ml^2} x_2(t) - \frac{g}{l} \sin(x_1(t)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix} u(t) \quad (24)$$

čím je funkcia F jasne stanovená (skonkretizovaná) a sústava spĺňa požiadavky pre využitie v ODE solveri.

3.3 Používanie ODE solvera

ODE solver ako funkcia v programe môže mať napríklad nasledujúce vstupy (argumenty) a výstupy:

```
x = odesolver(fcnF, init, timeVect)
```

kde \mathbf{x} je, samozrejme, hľadané numerické riešenie. Prvým argumentom je funkcia s názvom `fcnF`, ktorá implementuje sústavu diferenciálnych rovníc v zmysle predchádzajúceho textu. `init` označuje začiatočné hodnoty stavových veličín. `timeVect` označuje časové okamihy (vzorky), v ktorých hľadáme hodnoty numerického riešenia.

3.3.1 MATLAB

MATLAB obsahuje hneď niekoľko ODE solverov. Tu budeme používať `ode45`.

Vytvoríme funkciu, ktorá realizuje sústavu diferenciálnych rovníc (24), avšak, uvažujme, že vstupný signál $u(t)$ je nulový. Teda neuvažujme vstupný signál vôbec. Ešte inými slovami, externý moment sily je nulový, $u(t) = 0$ a preto potom možno písať

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{\beta}{ml^2} x_2 - \frac{g}{l} \sin(x_1) \end{bmatrix} \quad (25)$$

Toto je autonómny nelineárny časovo-invariantný systém druhého rádu. Jeho správanie závisí len od začiatočného stavu na začiatku uvažovaného času.

Funkcia, ktorá realizuje uvedenú sústavu, môže byť nasledovná:

```
function dotx = PravaStr(t,x)

global m l g beta

dotx1 = x(2);
```

```
dotx2 = - (beta/m*l^2)*x(2) - (g/l)*sin(x(1));

dotx = [dotx1; dotx2];

end
```

Celý súbor PravaStr.m

Vytvoríme „hlavný skript“, v ktorom všetko potrebné nastavíme a v ktorom budeme volať ODE solver. Ako prvé nech su globálne premenné (v tomto prípade parametre kyvadla):

```
global m l g beta

m = 1; %kg
l = 1; %m
g = 9.81; %m/s^2
beta = 2*0.5*sqrt(g/l); %kgm^2/s
```

Časť súboru hlSkript.m

Definujme časový vektor, ktorý určí pre aké časové okamihy ODE solver vráti numerické riešenie:

```
timeVect = 0:0.1:5;
```

Časť súboru hlSkript.m

Zavolajme ODE solver, pričom ostáva zvoliť začiatočné podmienky - začiatočný stav kyvadla. Nech začiatočný stav je $x_1(0) = 0.25$ [rad] a $x_2(0) = 0$ [rad/s].

```
[t,x] = ode45(@ (t,x) PravaStr(t,x), timeVect, [pi/4; 0]);
```

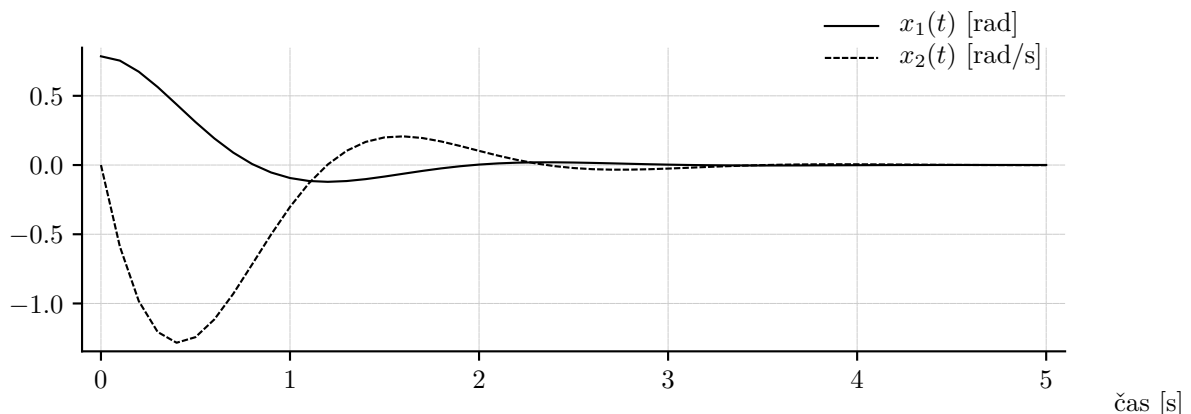
Časť súboru hlSkript.m

Premenná x teraz obsahuje dva stĺpce - prvý stĺpec je prvá stavová veličina a druhý stĺpec je druhá stavová veličina. Pre nakreslenie vypočítaného riešenia:

```
figure(1)
plot(t,x)
```

Časť súboru hlSkript.m

Výsledné numerické riešenie je graficky znázornené na obr. 2.

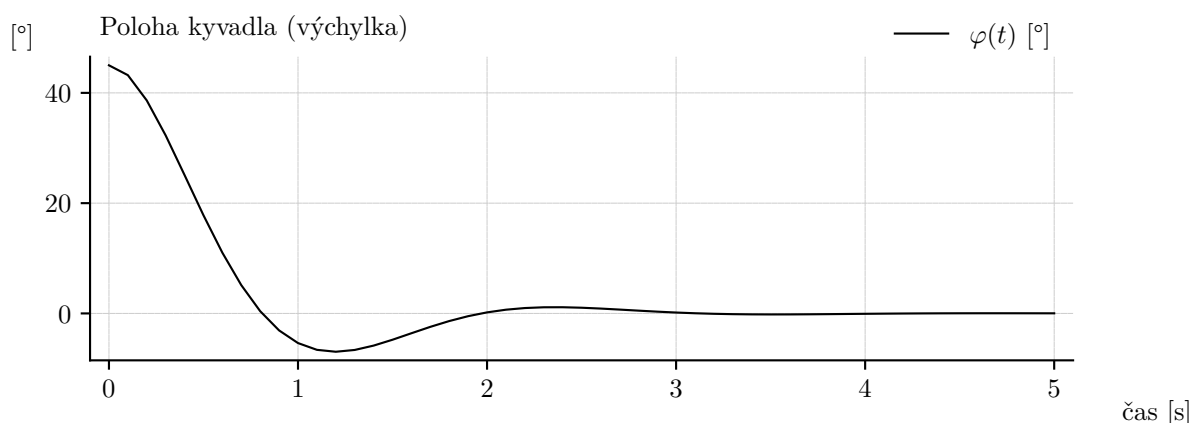


Obr. 2: Grafické zobrazenie numerického riešenia

Na obr. 2 ide však len o akési základné zobrazenie. Zmyslupnnejšie by napríklad mohlo byť, ak by sme do grafu nakreslili len priebeh polohy (výchylky) kyvadla samostatne a navyše nie v radiánoch ale v stupňoch – viď obr. 3. Pre takýto obrázok možno do hl. skriptu pridať:

```
figure(2)
plot(t,x(:,1)*180/pi)
```

Časť súboru hlSkript.m



Obr. 3: Grafické zobrazenie priebehu polohy kavydla

3.3.2 Python

Pre informáciu, nasledovne by vyzeralo hľadanie numerického riešenia v rámci jazyka Python.

Ak sa tu čitateľ prvý krát stretáva s Python-om pre numerické výpočty, azda užitočnými mu budú tieto odkazy:

Python (inštalovaný ako distribúcia balíčkov...)

Pre všeobecné používanie Python-u na Windows, obzvlášť pre „vedecké výpočty“, sa čitateľovi odporúča, tak ako sa uvádza aj tu: <https://www.scipy.org/install.html>, distribúcia Anaconda: <https://www.continuum.io/downloads>

Ak nie je výslovne uvedené inak, používa sa tu Python vo verzii 3.

Spyder

Spyder (<https://github.com/spyder-ide>) je IDE obsiahnuté v distribúcii Anaconda.

Jupyter

V týchto súvislostiach je vhodné tiež upozorniť na <https://ipython.org/notebook.html>. IPython ako aj Jupyter notebook sú súčasťou distribúcie Anaconda.

Knižnica [SciPy](#), presnejšie [scipy.integrate](#) obsahuje ODEsolver s názvom `odeint`. Vytvoríme skript využívajúci tento ODE solver:

```
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt

m = 1.0
l = 1.0
g = 9.81
beta = 2 * 0.5 * np.sqrt(g/l)

def fcn_rovniceKyvadla(x, t, u):
    x_1, x_2 = x
    dotx_1 = x_2
    dotx_2 = -(beta/m*l**2) * x_2 - (g/l) * np.sin(x_1) + (1.0/m*
l**2) * u
    return [dotx_1, dotx_2]

timeVect = np.arange(0, 5.1, 0.1)

u = 0
```



```

x = odeint(fcn_rovniceKyvadla,
           [np.pi/4, 0], # zaciatočne podmienky
           timeVect,
           args=(u,),
           )

plt.figure(1)
plt.plot(timeVect, x)
plt.xlabel(u'cas [s]')
plt.legend(['$x_1(t)$ [rad]', '$x_2(t)$ [rad/s]'])

plt.figure(2)
plt.plot(timeVect, x[:,0]*180/np.pi)
plt.xlabel(u'cas [s]')
plt.ylabel(u'$x_1(t)$ [stupne]')

```

Skript v Python-e

Pozornému čitateľovi iste neuniklo, že uvedený skript v Pythone obsahuje funkciu, ktorá realizuje sústavu diferenciálnych rovníc (24), ale v tomto prípade zahŕňa aj vstupnú veličinu $u(t)$. Táto je potom v tomto prípade nastavená na nulovú hodnotu.

4 Doplnkový text: o stabilite dynamického systému

Aj v tejto časti budeme uvažovať predmetný dynamický systém, avšak bez vstupu, inými slovami externý moment sily je nulový, $u(t) = 0$. Potom

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{\beta}{ml^2}x_2 - \frac{g}{l}\sin(x_1) \end{bmatrix} \quad (26a)$$

$$\varphi = x_1 \quad (26b)$$

4.1 Vektorové pole a fázový portrét

Kvalitatívne správanie sa nelineárneho dynamického systému je dôležité pre porozumenie kľúčovým konceptom Lyapunovovej teórie stability systémov. Pre analýzu je dôležitá istá trieda systémov nazývaná planárne dynamické systémy. Tieto systémy majú dve stavové veličiny $x \in \mathbb{R}^2$, čo umožňuje znázorniť stavový priestor v rovine so súradnicovým systémom (x_1, x_2) . Navyše výsledky kvalitatívnej analýzy platia vo všeobecnosti a môžu byť použité aj pri systémoch vyššieho rádu. Preto sú tieto systémy dôležité z hľadiska analýzy. Do tejto triedy systémov patrí aj model kyvadla.

Výhodným spôsobom ako porozumieť správaniu dynamického systému so stavom $x \in \mathbb{R}^2$ je nakresliť *fázový portrét systému*. Začneme zavedením konceptu *vektorového poľa*. Pre systém obyčajných diferenciálnych rovníc zapísaných kompaktne vo vektorovej rovnici (ako rovnica (26a)) v tvare

$$\dot{x} = F(x) \quad (27)$$

pravá strana rovnice definuje v každom $x \in \mathbb{R}^n$ rýchlosť $F(x) \in \mathbb{R}^n$. Táto rýchlosť hovorí o tom ako sa x mení a môže byť reprezentovaná vektorom.

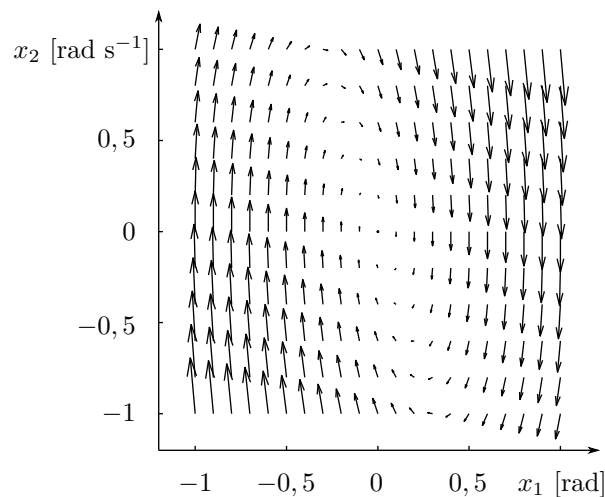
Pri planárnom dynamickom systéme, každý stav zodpovedá bodu v rovine a $F(x)$ je vektor rýchlosti reprezentujúci veľkosť a smer zmeny (rýchlosti) daného stavu. Tieto vektory môžeme vykresliť na mriežke bodov v rovine a získať tak vizuálny obraz dynamiky systému, tak ako na Obr. 4. Pre vykreslenie tohto vektorového poľa boli použité parametre kyvadla uvedené v Tabuľke 1 a tieto parametre budú používané aj v ďalšom.

Vektorové pole na obr. 4 bolo vygenerované v Matlabe použitím nasledujúceho kódu:

```

m = 1; %kg
l = 1; %m

```



Obr. 4: Vektorové pole znázorňujúce dynamiku kyvadla (obrázok vytvorený v Matlabe, viď text)

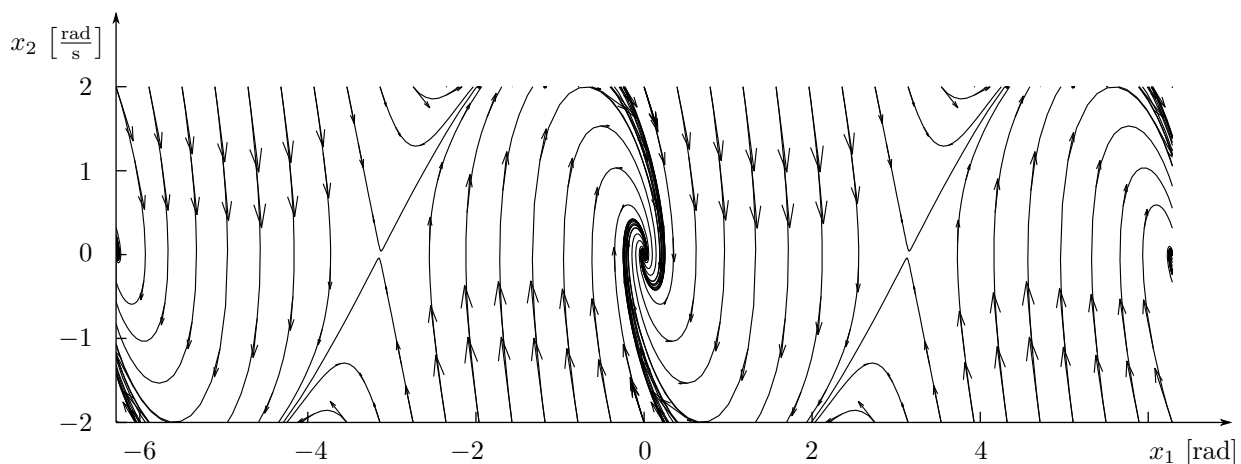
```
g = 9.81; %m/s^2
beta = 2*0.5*sqrt(g/l); %kgm^2/s
[x1, x2] = meshgrid(-1:.1:1, -1:.2:1);
x1dot = x2;
x2dot = -(beta/m*l^2).*x2 - (g/l).*sin(x1);
quiver(x1,x2,x1dot,x2dot,1.5);
axis([-1.2 1.2 -1.2 1.2])
axis equal
```

Kód pre vygenerovanie obr. 4

Body, v ktorých je vektor rýchlosti nulový sú obzvlášť zaujímavé, pretože definujú stacionárne body systému: ak je autonómny systém v takom stave na začiatku, ostane v tom stave po celý čas.

Fázový portrét (nazývaný aj Fázový diagram) pozostáva z „prúdnic“ nakreslených podľa vektorového poľa. Inými slovami, pre istú množinu začiatkových stavov vykreslíme riešenia diferenciálnej rovnice v rovine a smer pohybu v stavovom priestore vyznačíme šípkou. To zodpovedá sledovaniu „šípky vektorového poľa“ v každom bode stavového priestoru a nakresleniu výslednej trajektórie. Po vykreslení niekoľkých trajektórií pre rôzne začiatkové stavy získame fázový portrét ako na Obr. 5.

Zdrojový kód pre MATLAB pre získanie tohto obrázku je nasledovný:



Obr. 5: Fázový portrét kyvadla (obrázok vytvorený v Matlabe, viď text pre zdrojový kód)

```

global m l g beta
m = 1; %kg
l = 1; %m
g = 9.81; %m/s^2
beta = 2*0.5*sqrt(g/l); %kgm^2/s

for uhlovarychlost = -2:4:2
    for uhol = -360:22.5:360
        [t,x]=ode45(@PravaStr,[0 5],[uhol*pi/180 uhlovarychlost]);
        hold on
        stav = x;
        x = x(1:5:end-70,:);
        x1dot = x(:,2);
        x2dot=-(beta/m*l^2)*x(:,2)-(g/l)*sin(x(:,1));
        quiver(x(:,1),x(:,2),x1dot,x2dot,0.5,'k')
        plot(stav(:,1),stav(:,2),'k');
        hold off
    end
end

axis equal
axis([-2*pi 2*pi -2 2])

```

Kód pre vygenerovanie obr. 5

kde funkcia PravaStr je

```

function dotx = PravaStr(t,x)
    global m l g beta
    dotx(1)=x(2);
    dotx(2)=-(beta/m*l^2)*x(2)-(g/l)*sin(x(1));
    dotx=dotx';
end

```

Fázový portrét je nástroj, ktorý umožňuje posudzovať celkovú dynamiku systému pomocou vykreslenia niekoľkých riešení v stavovom priestore (rovine) systému. Napríklad je možné vidieť, či sa všetky trajektórie s narastajúcim časom približujú k jednému bodu alebo či ide o komplikovanejšie správanie systému. Fázový portrét však nehovorí o veľkosti rýchlosti zmeny stavu (avšak toto môže byť odvodené z dĺžky vektorov vo vektorovom poli systému).

Ekvilibrium dynamického systému je bod v stavovom priestore, ktorý reprezentuje rovnovážne podmienky pre dynamiku systému. Ide o stacionárny bod, v ktorom je vektor rýchlosti trajektórie systému nulový, ako už bolo uvedené.

Hovoríme, že stav x_e je ekvilibrium dynamického systému

$$\dot{x} = F(x)$$

ak $F(x_e) = 0$. Ak má autonómny systém začiatočnú podmienku $x(0) = x_e$, potom ostane v tomto stave a riešenie má tvar $x(t) = x_e$ po celý čas $t > 0$, kde sme uvažovali začiatočný čas $t_0 = 0$.

Stacionárne body (ekvilibríá) patria medzi najdôležitejšiu vlastnosť dynamického systému, pretože definujú stavy s nemennými pracovnými podmienkami systému. Systém môže mať nula, jeden alebo viac stacionárnych bodov.

Stacionárne body uvažovaného kyvadla sú

$$x_e = \begin{bmatrix} \pm n\pi \\ 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

kde $n = 0, 1, 2, \dots$. Pre párne n sú to stavy keď kyvadlo visí smerom dole a pre nepárne n je kyvadlo v inverznej polohe. Fázový portrét na Obr. 5 je nakreslený pre $-2\pi \leq x_1 \leq 2\pi$, teda na obrázku je päť stacionárnych bodov.

4.2 Stabilita

Pripomeňme, že sa zaoberáme autonómnym systémom (homogénnou diferenciálnou rovnicou) v tvare

$$\dot{x} = F(x) \quad (29)$$

a tiež pripomeňme, čo rozumieme pod pojmom riešenie systému, alebo skrátene riešenie. Hovoríme, že $x(t)$ je *riešenie* diferenciálnej rovnice (29) na časovom intervale od $t_0 \in \mathbb{R}$ do $t_f \in \mathbb{R}$ ak

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(x(t)) \quad \text{pre } t_0 < t < t_f \quad (30)$$

Daná diferenciálna rovnica môže mať mnoho riešení, najčastejšie nás však zaujíma úloha so zadaným začiatočným stavom, inými slovami so zadanými začiatočnými podmienkami, kedy $x(t)$ je predpísané v začiatočnom čase t_0 a úlohou je nájsť riešenie vyhovujúce pre celý budúci čas $t > t_0$. Vtedy $x(t)$ je riešenie diferenciálnej rovnice (29) so začiatočným stavom $x_0 \in \mathbb{R}^n$ v čase t_0 ak

$$x(t_0) = x_0 \quad \text{a} \quad \frac{dx(t)}{dt} = F(x(t)) \quad \text{pre } t_0 < t < t_f \quad (31)$$

Najčastejšie sa stretávame s diferenciálnymi rovnicami, pre ktoré existuje jedinečné riešenie, navyše pre celý čas $t > t_0$ čo znamená že $t_f = \infty$. Častým je tiež, že funkcia F je nezávislá od času, preto môžeme uvažovať $t_0 = 0$.

Stabilita riešenia určuje či iné riešenia v blízkosti skúmaného riešenia ostávajú v jeho blízkosti, približujú sa k nemu alebo sa od neho vzdalujú. Uvedieme niekoľko neformálnych a formálnych definícií stability:

Nech $x(t; a)$ je riešenie diferenciálnej rovnice so začiatočným stavom a . Toto riešenie je stabilné ak iné riešenia, ktoré začínajú v blízkosti a zostávajú v blízkosti $x(t; a)$. Formálne, hovoríme, že riešenie $x(t; a)$ je stabilné ak pre všetky $\epsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ taká, že

$$\|b - a\| < \delta \Rightarrow \|x(t; b) - x(t; a)\| < \epsilon, \quad \forall t > 0 \quad (32)$$

Všimnime si, že to neznamená, že $x(t; b)$ sa približuje k $x(t; a)$, len ostáva v jeho blízkom okolí. Navyše hodnota δ môže závisieť od ϵ , teda napríklad ak chceme ostať blízko nejakého riešenia potom musíme začať veľmi blízko tohto riešenia. Takto definovaná stabilita sa nazýva *stabilita v zmysle Lyapunova*.

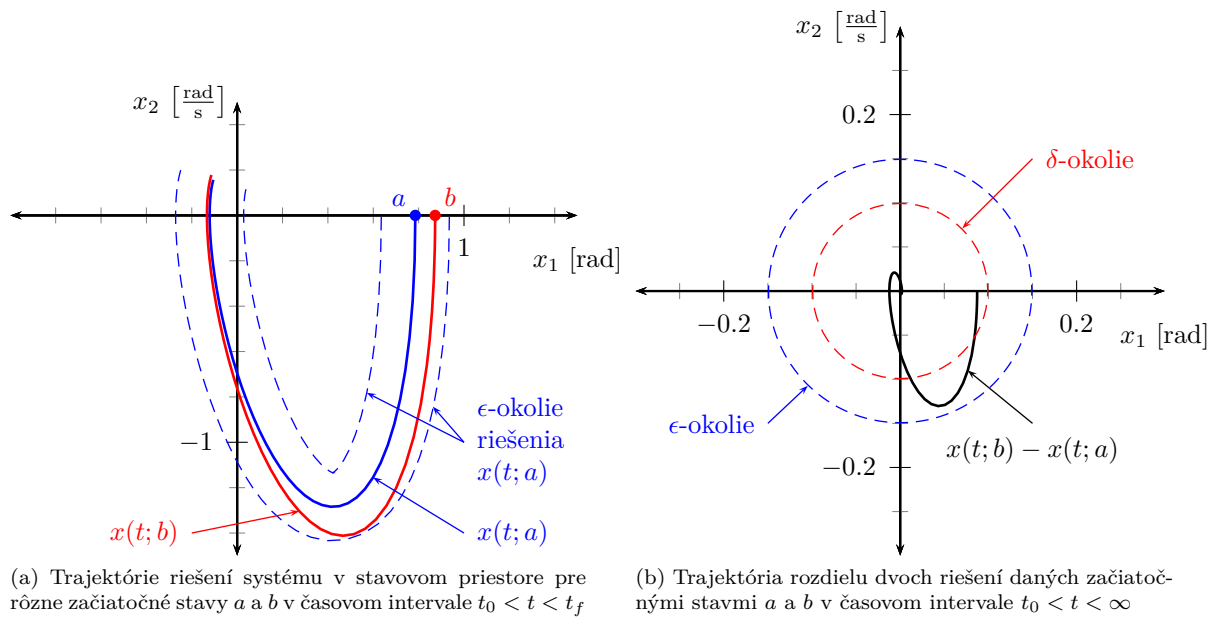
Ilustrujeme uvedenú podmienku (32) na riešení diferenciálnej rovnice kyvadla (26a). Začiatočný čas zvolme $t_0 = 0$ [s], konečný čas zvolme $t_f = 1,4$ [s], začiatočnú polohu kyvadla zvolme $\varphi = 45^\circ$ a začiatočná rýchlosť kyvadla nech je nulová. Začiatočný stav v stavovom priestore je $a = [0,7854 \quad 0]^T$. Týmto začiatočným podmienkam prislúcha riešenie $x(t; a)$, ktoré je znázornené v stavovom priestore na Obr. 6a, kde je vyznačený aj začiatočný stav a . Nebudeme skúmať všetky $\epsilon > 0$, preskúmame len jedno. Napríklad pre $\epsilon = 0,15$ hľadáme $\delta > 0$, ktorá spĺňa podmienku (32). Taká δ existuje, pretože pre riešenie $x(t; b)$, ktoré začína v stave $b = [0,8727 \quad 0]^T$ platí, že $\|x(t; b) - x(t; a)\| < \epsilon$, čo je zrejmé z Obr. 6a a aj z Obr. 6b, kde je navyše predĺžený čas riešenia až do nekonečna. Potom sme našli napríklad $\delta = 0,1$ pretože platí

$$\begin{aligned} \|b - a\| &= \sqrt{(0,8721 - 0,7854)^2 + (0 - 0)^2} = \\ &= 0,0873 < 0,1 \end{aligned} \quad (33)$$

čo je tiež zrejmé najmä z Obr. 6b. Týmto sme nezistili nič o stabilite riešenia $x(t; a)$, pretože sme neoverili, či je podmienka (32) splnená pre všetky $\epsilon > 0$.

Ak je riešenie stabilné v zmysle Lyapunova, ale trajektórie okolitých riešení k nemu nekonvergujú, hovoríme, že riešenie je *neutrálne stabilné*.

Riešenie $x(t; a)$ je *asymptoticky stabilné* ak je stabilné v zmysle Lyapunova a zároveň $x(t; b) \rightarrow x(t; a)$ s rastúcim časom $t \rightarrow \infty$ pri začiatočnom stave b , ktorý je dostatočne blízko stavu a .



Obr. 6: Ilustračný príklad k definícii stability riešenia systému
(b)

Veľmi dôležitým špeciálnym prípadom je ak pre skúmané riešenie platí $x(t; a) = x_e$. Potom nehovoríme o stabilite riešenia ale o *stabilite stacionárneho bodu*. Príkladom asymptoticky stabilného stacionárneho bodu sú body

$$x_{e-2} = \begin{bmatrix} -2\pi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_{e0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{a} \quad x_{e2} = \begin{bmatrix} 2\pi \\ 0 \end{bmatrix}$$

na Obr. 5, vidíme, že ak začíname blízko asymptoticky stabilného stacionárneho bodu, s narastajúcim časom sa k nemu približujeme.

Riešenie $x(t; a)$ je *nestabilné* ak nie je stabilné. Konkrétnejšie, hovoríme, že riešenie $x(t; a)$ je nestabilné ak pre akékoľvek dané $\epsilon > 0$ neexistuje $\delta > 0$ taká, že ak $\|b - a\| < \delta$ potom $\|x(t; b) - x(t; a)\| < \epsilon$, $\forall t > 0$. Príkladom nestabilného stacionárneho bodu sú body

$$x_{e-1} = \begin{bmatrix} -\pi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{a} \quad x_{e1} = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}$$

na Obr. 5.

Predchádzajúce definície nezohľadňujú oblasť, na ktorej môžu byť použité. Presnejšie je definovať riešenie ako *lokálne stabilné* (alebo *lokálne asymptoticky stabilné*) ak je stabilné pre všetky začiatočné stavy $x \in B_r(a)$, kde $B_r(a) = \{x : \|x - a\| < r\}$ je oblasť s polomerom $r > 0$ okolo bodu a . Riešenie je *globálne stabilné* ak je stabilné pre všetky $r > 0$.

4.2.1 Stabilita lineárnych systémov

Lineárny dynamický systém má tvar

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0 \quad (34)$$

kde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je štvorcová matica. Začiatok stavového priestoru je vždy stacionárnym bodom lineárneho systému a stabilita tohto stacionárneho bodu môže byť určená pomocou vlastných čísel matice A .

Vlastné čísla $\lambda(A)$ sú korene *charakteristického polynómu* systému $\det(sI - A)$, kde $s \in \mathbb{C}$ je komplexná premenná a I je jednotková matica. Konkrétne vlastné číslo (i -te vlastné číslo) označujeme λ_i , pričom $\lambda_i \in \lambda(A)$.

Pre lineárny systém stabilita stacionárneho bodu (ako veľmi dôležitého špeciálneho prípadu spomedzi všetkých riešení) závisí len od matice A , čo znamená, že stabilita je

vlastnosť systému. Pre lineárny systém preto hovoríme o stabilite systému namiesto o stabilite konkrétneho riešenia alebo ekvilibria.

Stabilitu lineárneho systému možno zhrnúť do jednej vety:

Systém

$$\dot{x} = Ax$$

je asymptoticky stabilný vtedy a len vtedy keď reálne časti všetkých vlastných čísel matice A sú záporné a systém je nestabilný keď aspoň jedno vlastné číslo matice A má kladnú reálnu časť.

4.3 Linearizácia a jej použitie pri analýze stability

Výhodnou vlastnosťou diferenciálnych rovníc je, že je často možné určiť lokálnu stabilitu stacionárneho bodu pomocou aproximácie nelineárneho systému lineárnym systémom.

Uvažujme nelineárny systém

$$\dot{x} = F(x) \quad (35)$$

ktorý má ekvilibrium v bode x_e . Zaujímá nás stabilita tohto stacionárneho bodu. Aproximujme (linearizujeme) nelineárnu funkciu $F(x)$ v okolí bodu x_e pomocou prvých dvoch členov Taylorovho radu

$$F(x) \approx F(x_e) + \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x_e} (x - x_e) \quad (36)$$

Platí $F(x_e) = 0$, a zavedieme nový stavový vektor $z = x - x_e$. To znamená, že $x = z + x_e$, potom $\dot{x} = \dot{z} + \dot{x}_e$, avšak x_e sa s časom nemení a preto platí $\dot{x} = \dot{z}$. Lineárna aproximácia pôvodného nelineárneho systému v okolí bodu x_e má potom tvar

$$\dot{z} = Az \quad (37)$$

kde

$$A = \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x_e} \quad (38)$$

V prípade kyvadla je nelineárny model systému v tvare (26a) a teda

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}; F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l} \sin(x_1) - \frac{\beta}{ml^2} x_2 \end{bmatrix} \quad (39)$$

Linearizujeme nelineárny model systému (26a) v okolí rovnovážneho stavu $x_e = [0 \ 0]^T$. Kľúčovým je výpočet matice A podľa (38). V tomto prípade máme

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} (F_1) & \frac{\partial}{\partial x_2} (F_1) \\ \frac{\partial}{\partial x_1} (F_2) & \frac{\partial}{\partial x_2} (F_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos(x_1) & -\frac{\beta}{ml^2} \end{bmatrix} \quad (40)$$

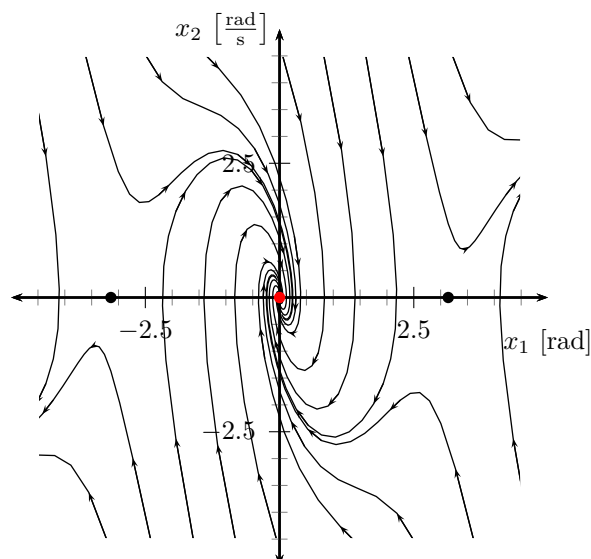
Po dosadení hodnôt stacionárneho bodu za $x_1 = 0$ (a $x_2 = 0$) do (40) máme

$$A = \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x_e} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{\beta}{ml^2} \end{bmatrix} \quad (41)$$

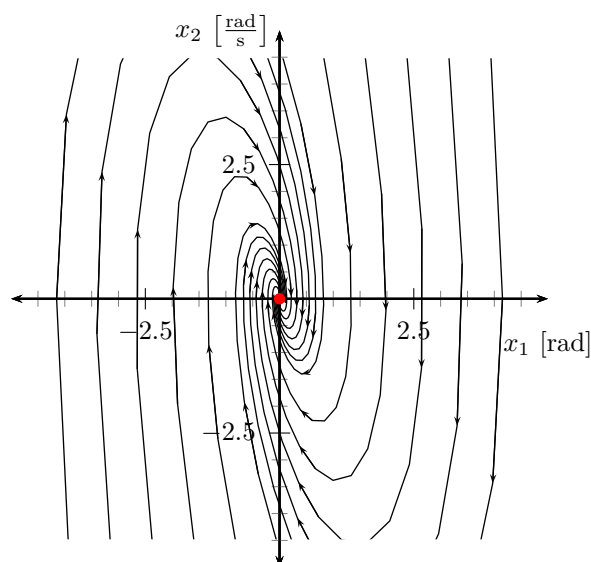
a vzhľadom na fakt, že v tomto prípade $x_e = 0$ je linearizovaný model systému v tvare

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{\beta}{ml^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (42)$$

Lokálna stabilita stacionárneho bodu nelineárneho systému teraz môže byť určená pomocou vlastných čísel matice A .



(a) Fázový portrét nelineárneho modelu kyvadla



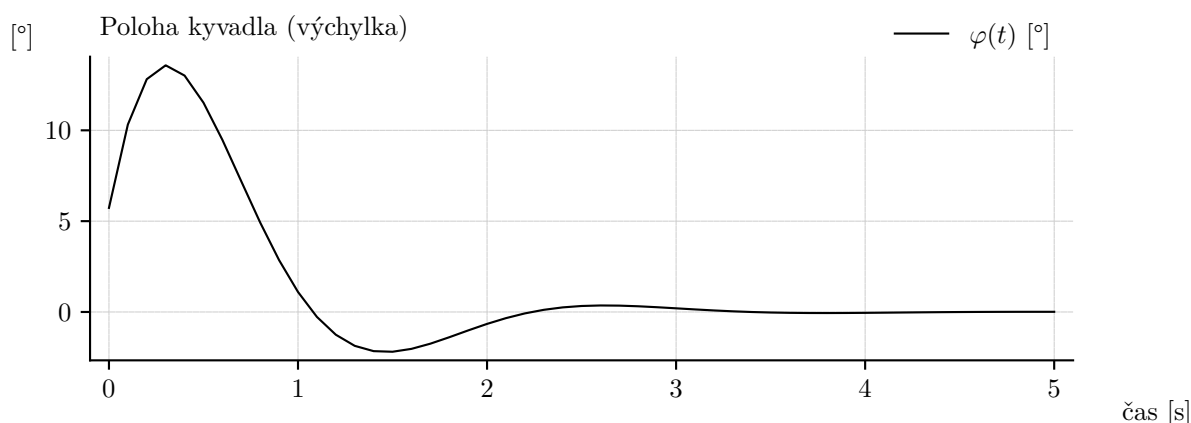
(b) Fázový portrét lineárneho modelu kyvadla

Obr. 7: Porovnanie fázových portrétov nelineárneho systému a jeho linearizovanej aproximácie

Mimochodom výsledný lineárny model (42) je rovnaký, ako keby sme uvažovali, len malé výchylky kyvadla (malé hodnoty uhla φ), pri ktorých dostatočne presne platí, že $\sin(\varphi) = \varphi$ (angl. Small-angle approximation).

Skutočnosť, že lineárny model môže byť použitý pre opis správania nelineárneho systému v okolí rovnovážneho stavu je veľmi výhodná. Je to možné využiť aj pre návrh spätnoväzbového regulátora, ktorý udržiava stav nelineárneho systému v okolí rovnovážneho stavu. Pritom samotný regulátor je navrhnutý pre lineárnu aproximáciu systému. Keďže stav systému je regulátorom udržiavaný blízko stacionárneho bodu, tak aj lineárna aproximácia použitá pri stabilizácii je dostatočne presná.

Na Obr. 7 je porovnanie fázových portrétov nelineárneho modelu kyvadla a linearizovaného modelu kyvadla v okolí začiatku stavového priestoru. Všimnime si, že v okolí stacionárneho bodu (začiatku súradnicového systému) sú tieto fázové portréty takmer identické.



Obr. 8: Grafické zobrazenie priebehu polohy kyvadla

5 Ďalšie simulácie s kyvadlom

5.1 Iné začiatočné podmienky

Nech začiatočné podmienky (začiatočný stav) sú: $x_1(0) = 0.1$ [rad] a $x_2(0) = 1$ [rad/s]. Pritom nech vstup $u(t)$ je stále nulový. Výsledok simulácie je na obrázku 8.

Ďalšie simulácie s rôznymi začiatočnými podmienkami kyvadla sa ponechávajú na čitateľa.

5.2 Nenulový vstupný signál

Modifikujme pôvodnú funkciu a skrip v MATLAB-e tak, aby bolo možné simulovať nenulový vstupný signál $u(t)$.

Funkciu, ktorá realizuje sústavu diferenciálnych rovníc (24) aj so vstupným signálom $u(t)$:

```
function dotx = PravaStr_u(t,x, u)

global m l g beta

dotx1 = x(2);
dotx2 = - (beta/m*l^2)*x(2) - (g/l)*sin(x(1)) + (1/m*l^2) * u;

dotx = [dotx1; dotx2];

end
```

Celý súbor PravaStr_u.m

Vytvorme „hlavný skript“, v ktorom všetko potrebné nastavíme a v ktorom budeme volať ODE solver:

```
global m l g beta

m = 1; %kg
l = 1; %m
g = 9.81; %m/s^2
beta = 2*0.5*sqrt(g/l); %kgm^2/s

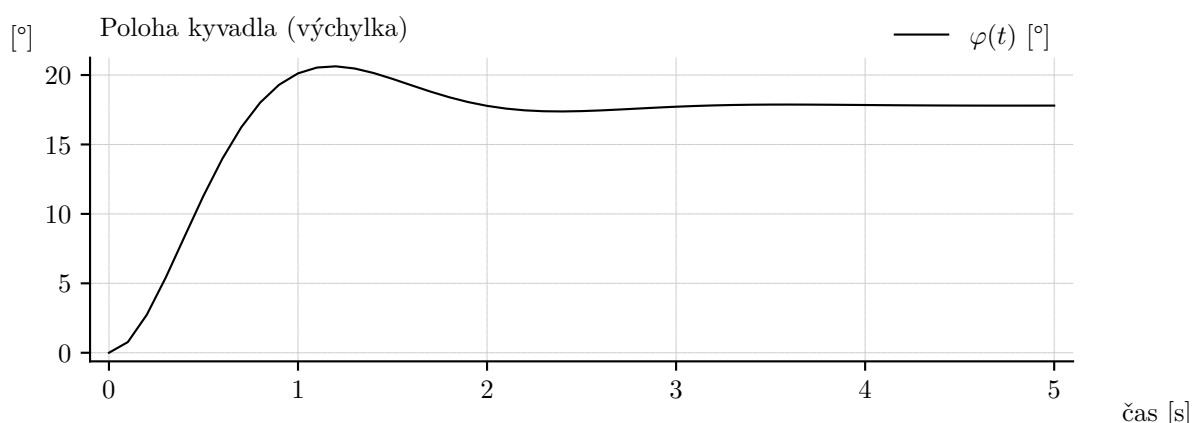
u = 3

[t,x] = ode45(@(t,x) PravaStr_u(t,x,u), [0 10], [0; 0]);

figure(3)
plot(t,x(:,1)*180/pi)
```

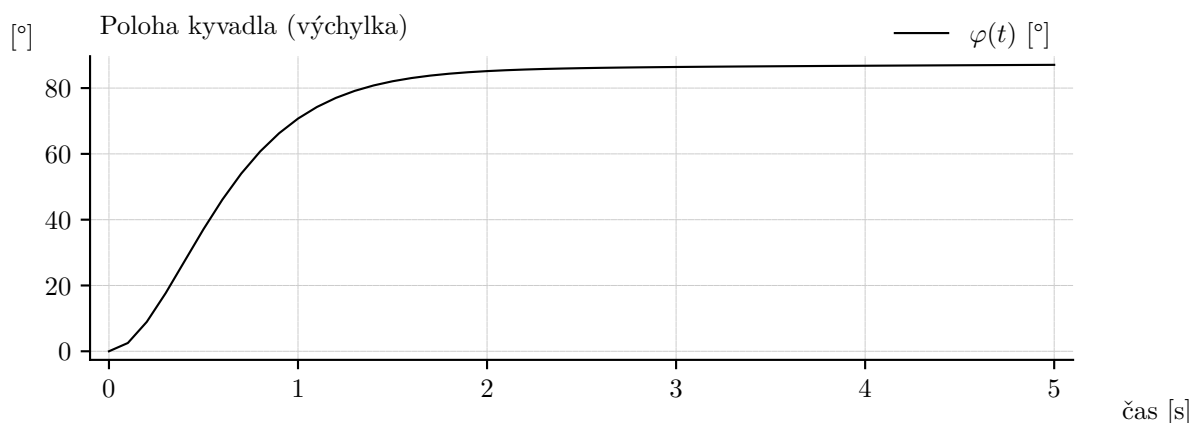
Súbor hlSkript_u.m

Simulujme prípad keď napríklad $u(t) = 3 \text{ [kg m}^2 \text{ s}^{-2}]$ (pozn.: pre lepšiu názornosť uvažujme začiatočné podmienky nulové). Výsledok simulácie je na obrázku 9.



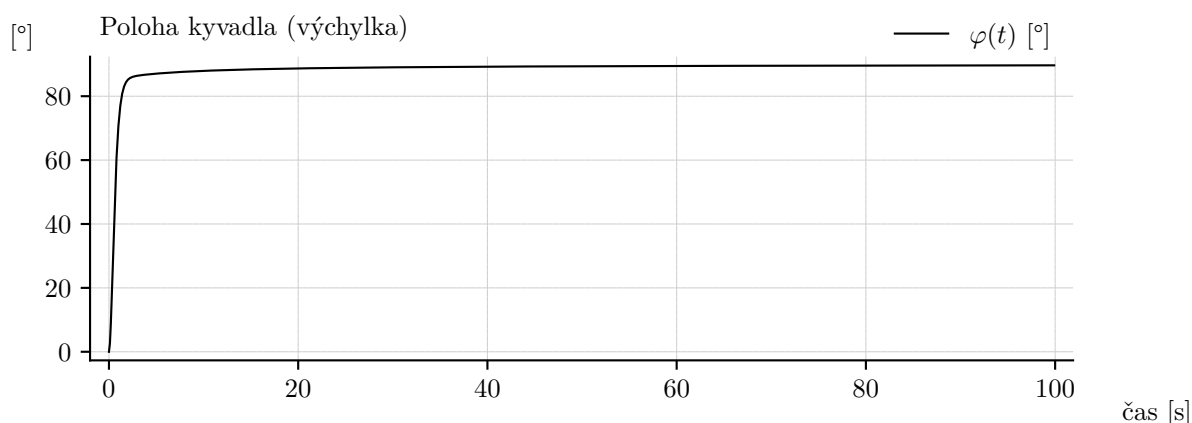
Obr. 9: Grafické zobrazenie priebehu polohy kyvadla

Zaujímavý prípad je, keď $u(t) = 9,81 \text{ [kg m}^2 \text{ s}^{-2}]$. Výsledok simulácie je na obrázku 10.



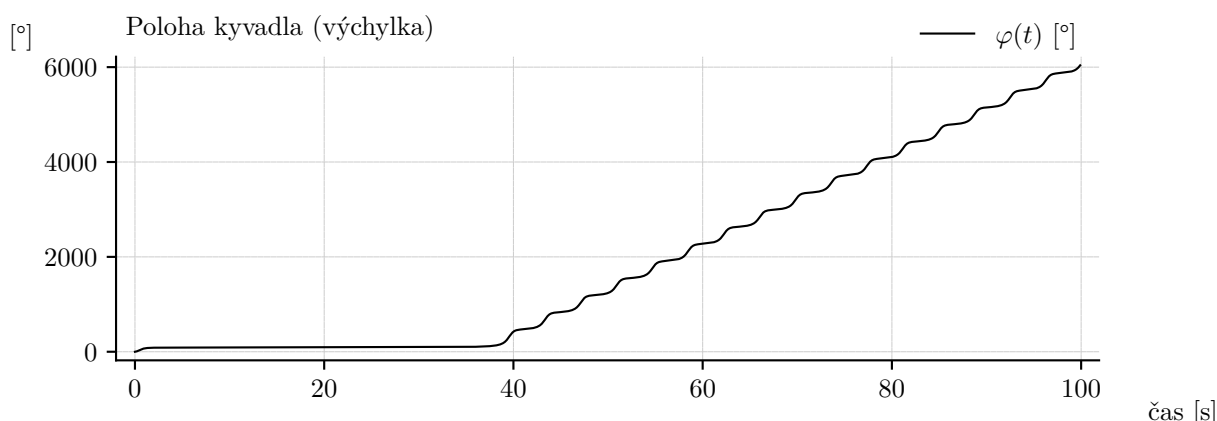
Obr. 10: Grafické zobrazenie priebehu polohy kyvadla

Avšak, lepšie sa to ukáže, ak predĺžime časový vektor (čas simulácie) – viď obrázok 11. Je zrejmé, že kyvadlo sa približuje k hodnote 90 stupňov.



Obr. 11: Grafické zobrazenie priebehu polohy kyvadla

Čo sa stane ak $u = 9,82 \text{ [kg m}^2 \text{ s}^{-2}]$? (obr. 12)



Obr. 12: Grafické zobrazenie priebehu polohy kyvadla

6 Lineárny dynamický systém a prenosová funkcia

Cielom v tejto časti je ukázať súvislosti medzi pojmi dynamický systém, stavové veličiny (stav) a stavový priestor, a v neposlednom rade, prenosová funkcia.

Prenosová funkcia opisuje lineárny dynamický systém. Ak je dynamický systém nelineárny, pri istých podmienkach je ho možné linearizovať. Výsledok linearizácie, avšak, len aproximuje vlastnosti pôvodného systému, a čo je najdôležitejšie, iba v istom (malom) okolí zvoleného bodu v stavovom priestore.

Dôvodom pre linearizáciu a následnú možnosť mať k dispozícii prenosovú funkciu je zjednodušenie ďalšej práce a využitia samotného modelu systému. Ak je model nelineárny, väčšinou je značne náročné ďalej s ním pracovať – napríklad teoreticky ho využívať pri návrhu riadiaceho systému. Lineárny model je značne jednoduchšie využívať vo všeobecnosti a napríklad klasická teória automatického riadenia je prirodzene založená na lineárnych dynamických systémoch.

Prenosová funkcia tiež súvisí s Laplaceovou transformáciou, ktorá vo všeobecnosti uľahčuje hľadanie analytického riešenia lineárnej diferenciálnej rovnice opisujúcej správanie dynamického systému.

6.1 Nelinearita v uvažovanom dynamickom systéme

Kyvadlo, ktoré sa opisuje v časti 1, možno označiť ako nelineárny dynamický systém. Dôvodom je, že nie je možné nájsť lineárnu funkciu, ktorá by dávala do vzájomného vzťahu časovú deriváciu stavu kyvadla a samotný stav kyvadla.

Pojem stavu či stavových veličín dynamického systému je načrtnutý v časti 2 (podrobnejšia diskusia je nad rámec tohto textu).

V prípade kyvadla je celkom prirodzené, že stavovými veličinami sú uhol natočenia ramena kyvadla $\varphi(t)$ a uhlová rýchlosť ramena kyvadla $\dot{\varphi}(t)$. Ako už bolo uvedené v časti 3.2, vedie to na sústavu diferenciálnych rovníc v tvare

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -\frac{\beta}{ml^2} x_2(t) - \frac{g}{l} \sin(x_1(t)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix} u(t) \quad (43)$$

kde je zavedené označenie $x_1(t) = \varphi(t)$ a $x_2(t) = \dot{\varphi}(t)$. Rovnica (43) by sa dala zovšeobecnene vyjadriť v tvare

$$\dot{x}(t) = F(x(t)) + b u(t) \quad (44)$$

kde $x(t)$ je stavový vektor $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]^T$, ďalej b je jednoducho vektor čísiel, konkrétne $b = [0 \ \frac{1}{ml^2}]^T$ a $F(x(t))$ je všeobecná funkcia, ktorej argumentom je predovšetkým stav systému. Výraz $b u(t)$ je, samozrejme, lineárny. Všeobecná funkcia $F(x(t))$ v tomto prípade nie je lineárna. Ak by bola lineárna bolo by ju možné zapísať v tvare $A x(t)$, kde A je matica čísiel. Výraz $\sin(x_1(t))$ však neumožňuje takýto lineárny zápis (vzťah).

6.2 Linearizácia v okolí bodu v stavovom priestore

Ak chceme linearizovať systém, vždy je potrebné uviesť pri akých podmienkach bude táto linearizácia dobrou aproximáciou pôvodného nelineárneho systému. Tu sa na špecifikáciu takýchto podmienok pozeráme z hľadiska bodu v stavovom priestore. Nech je cieľom linearizovať systém v okolí stavu $x(t) = [0 \ 0]^T$, teda aj poloha aj uhlová rýchlosť kyvadla sú nulové (blízke nule). Nepriamo to udáva, že aj vstup (vstupný moment sily) $u(t) = 0$.

Týmto sú jasne stanovené podmienky, pri ktorých bude linearizácia dobrou náhradou za pôvodný systém – teda v okolí akého bodu v stavovom priestore, alebo aj v akej, takpovediac, pracovnej oblasti, pričom sa má na mysli hodnota výstupnej veličiny a vstupnej veličiny (tieto hodnoty udávajú tzv. pracovný bod).

Mimochodom, uvedené je z hľadiska výsledku taká istá myšlienka, ako keď sa uvažuje o aproximácii rovnice kyvadla pre tzv. malé uhly – vtedy sa jednoducho píše $\sin(x_1(t)) \approx x_1(t)$

Keďže sme sa rozhodli linearizovať pri podmienkach $x(t) = [0 \ 0]^T$ a $u(t) = 0$, tak výsledok je samozrejme to isté ako je uvedené v časti 4.3.

Tu je totiž cieľom dať do súvisu opis v stavovom priestore a prenosovú funkciu, nie uviesť celý zovšeobecnený postup linearizácie.

Lineárne diferenciálne rovnice opisujúce predmetný systém teda v tomto prípade sú rovnaké ako uvádza (42). Tu však pridajme aj člen so vstupným signálom, aby bolo možné mať aj nenulový vstup – avšak jeho hodnoty by mali ostať v okolí nuly. Lineárny dynamický systém potom je v tvare

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{\beta}{ml^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix} u(t) \quad (45a)$$

$$y(t) = x_1(t) \quad (45b)$$

kde $y(t)$ predstavuje zavedenie výstupnej veličiny systému – poloha kyvadla je výstupnou veličinou.

Sústavu diferenciálnych rovníc možno všeobecnejšie zapísať ak nepoužijeme konkrétne parametre m, l, β a g , ale všeobecné koeficienty:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u(t) \quad (46a)$$

$$y(t) = [1 \ 0] x(t) \quad (46b)$$

kde sme rovno písali stavový vektor $x(t)$. Toto je zjavne lineárna rovnica, presnejšie, sústava lineárnych dynamických rovníc. Týmto samozrejme smerujeme k zápisu v tvare

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \quad (47a)$$

$$y(t) = c^T x(t) \quad (47b)$$

6.3 Prenosová funkcia

Laplaceov operátor s (podrobnosti sú ďaleko nad rámec tohto textu) aplikovaný na signál má rovnaký význam ako časová derivácia aplikovaná na signál. Formálnejšie: majme signál $z(t)$ a keď napíšeme $s z(t)$ myslí sa tým to isté ako by sme napísali $\dot{z}(t)$ alebo teda $\frac{d}{dt}z(t)$. Za týmto stojí Laplaceova transformácia avšak tu nie je cieľom vysvetľovať jej podrobnosti.

Cieľom je prezentovať intuitívny pohľad na prevod lineárneho dynamického systému s opisu v stavovom priestore, ako je (47), na prenosovú funkciu. Píšme rovnicu (47a) tak, že deriváciu nahradíme operátorom s .

$$sx = Ax + bu \quad (48)$$

Použitie operátora s má istý vplyv na samotné signály, tu to však nie je podstatné, len to zohľadňujeme tým, že signály tu neznačíme ako funkciu času (píšeme len x , nie $x(t)$).

Prenosová funkcia je (z definície) pomer výstupného ku vstupnému signálu. Vstupom tu je jednoznačne u , preto by bolo výhodné dostať všetky x na ľavú stranu a osamostatniť tento signál (stavový vektor). Môžeme písať

$$sx - Ax = bu \quad (49)$$

Avšak, ak teraz chceme osamostatniť x , je potrebné dávať pozor na rozmery členov rovnice. Matica A má rozmer 2×2 . Preto zavedme výraz sI , kde I je jednotková matica s práve takým rozmerom a teda sI je matica, ktorá má na diagonále operátora s . Potom môžeme písať

$$(sI - A)x = bu \quad (50)$$

Výraz $(sI - A)$ je štvorcová matica. Pre osamostatnenie x na ľavej strane rovnice je potrebné z ľava prenásobiť rovnicu inverziou tejto matice. Teda

$$x = (sI - A)^{-1} bu \quad (51)$$

Všimnime si, že stále platí, že na ľavej aj pravej strane je výraz, ktorý má rozmer 2×1 (vektor x má takýto rozmer).

Cieľom je však získať pomer výstupného ku vstupnému signálu. Výstupným signálom je y , pre ktorý platí $y = c^T x$. Preto potom

$$y = c^T (sI - A)^{-1} bu \quad (52)$$

a teda

$$\frac{y}{u} = c^T (sI - A)^{-1} b \quad (53)$$

Výraz na pravej strane rovnice (53) je prenosová funkcia – stačí dosadiť konkrétne matice, v tomto prípade to v podstate znamená:

$$\frac{y}{u} = [1 \ 0] \left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix} \quad (54a)$$

$$\frac{y}{u} = [1 \ 0] \begin{bmatrix} s & -1 \\ a_0 & (s + a_1) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix} \quad (54b)$$

Je potrebné urobiť inverziu matice:

$$\begin{bmatrix} s & -1 \\ a_0 & (s + a_1) \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s(s + a_1) + a_0} \begin{bmatrix} (s + a_1) & 1 \\ -a_0 & s \end{bmatrix} \quad (55a)$$

$$= \frac{1}{s^2 + a_1 s + a_0} \begin{bmatrix} (s + a_1) & 1 \\ -a_0 & s \end{bmatrix} \quad (55b)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{(s + a_1)}{s^2 + a_1 s + a_0} & \frac{1}{s^2 + a_1 s + a_0} \\ \frac{-a_0}{s^2 + a_1 s + a_0} & \frac{s}{s^2 + a_1 s + a_0} \end{bmatrix} \quad (55c)$$

Potom je možné pokračovať v úprave prenosovej funkcie:

$$\frac{y}{u} = [1 \ 0] \begin{bmatrix} \frac{(s + a_1)}{s^2 + a_1 s + a_0} & \frac{1}{s^2 + a_1 s + a_0} \\ \frac{-a_0}{s^2 + a_1 s + a_0} & \frac{s}{s^2 + a_1 s + a_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix} \quad (56a)$$

$$\frac{y}{u} = [1 \ 0] \begin{bmatrix} \frac{b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \\ \frac{b_0 s}{s^2 + a_1 s + a_0} \end{bmatrix} \quad (56b)$$

$$\frac{y}{u} = \frac{b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \quad (56c)$$

To je, ako sme uviedli, prenosová funkcia. Teraz je zrejmé, že signály na ľavej strane rovnice (y a u) sú z formálneho hľadiska tzv. Laplaceove obrazy pôvodných časových signálov – to ale nebolo pri uvedenej prezentácii podstatné hneď od začiatku.