Analytické riešenie lineárnej diferenciálnej rovnice druhého rádu s konštantnými koeficientami

Martin Dodek

30. septembra 2020

1 Diferenciálna rovnica

Majme diferenciálnu rovnicu s nasledovnými vlastnosťami:

- Rovnica je druhého rádu, teda obsahuje nanajvýš druhú deriváciu závislej premennej y
- Rovnica má nulovú pravú stranu. Takúto rovnicu tiež označujeme ako *homogénna*.
- Rovnica je *lineárna*, teda vystupujú v nej výlučne násobky premenných konštantami a nie iné operácie s premennými (vzájomné násobenie, umocňovanie).
- Koeficienty a_i sú rovnako konštantné, teda sa nemenia v čase.

Rovnicu teda môžeme formulovať nasledovne:

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = 0 \tag{1}$$

Riešenie diferenciálnej rovnice spočíva v nájdení *funkcie* $f(t)$ popisujúcej vývoj premennej y v čase.

$$y(t) = f(t)$$

Počiatočné podmienky (hodnoty premenných a ich derivácii v čase $t = 0$) nech sú dané ako y_0 a $\dot{y}_0$. Táto úloha sa potom zvykne označovať aj pojmom *"initial value problem"*

2 Charakteristická rovnica

Charakteristická rovnica vychádza priamo z koeficientov diferenciálnej rovnice (charakteristický polynóm premennej λ) a je formulovaná nasledovne:

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0 \tag{2}$$

Riešením tejto charakteristickej rovnice sú dve čísla - teda korene. Tieto korene hľadáme štandardne tak, ako v prípade kvadratickej rovnice.

Diskriminant rovnice:

$$D = \sqrt{a_1^2 - 4a_0} \tag{3}$$

Riešenie charakteristickej rovnice:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2} \tag{4}$$

Len pre pripomenutie:

$$\sqrt{-1} = i$$

Tieto korene sú dva a sú vo všeobecnosti komplexné. Vzhľdaom na ich polohu v komplexnej rovine môže riešenie diferenciálnej rovnice nadobúdať nasledovné vlastnosti.

3 Všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice

Podľa rozloženia koreňov charakteristického polynómu rozlišujeme nasledovné prípady:

3.1 Rôzne reálne korene

Riešenie diferenciálnej rovnice je v tomto prípade všeobecne definované ako súčet exponenciál.

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \tag{5}$$

Prvá derivácia riešenia bude:

$$\dot{y}(t) = c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \tag{6}$$

3.2 Dvojnásobný reálny koreň

Riešenie diferenciálnej rovnice je v tomto prípade všeobecne definované nasledovne:

$$y(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t} \tag{7}$$

Prvá derivácia riešenia bude:

$$\dot{y}(t) = c_1 \lambda e^{\lambda t} + c_2 e^{\lambda t} (1 + t\lambda) \tag{8}$$

3.3 Dva komplexne združené korene

Komplexne združený koreň má rovnakú reálnu a opačnú imaginárnu zložku.

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda_a + i\lambda_b \\ \lambda_2 &= \lambda_a - i\lambda_b \end{aligned} \tag{9}$$

Riešenie diferenciálnej rovnice je v tomto prípade všeobecne definované ako súčet komplexných exponenciál. A keďže komplexná exponenciála obsahuje periodickú zložku:

$$e^{a+bi} = e^a (\cos(b) + i \sin(b))$$

Bude aj riešenie obsahovať trigonometrické funkcie.

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_a t} \cos(\lambda_b t) + c_2 e^{\lambda_a t} \sin(\lambda_b t) \tag{10}$$

Prvá derivácia riešenia bude:

$$\dot{y}(t) = c_1 e^{\lambda_a t} (\lambda_a \cos(\lambda_b t) - \lambda_b \sin(\lambda_b t)) + c_2 e^{\lambda_a t} (\lambda_a \sin(\lambda_b t) + \lambda_b \cos(\lambda_b t)) \tag{11}$$

4 Riešenie s počiatočnými podmienkami

Pre určenie koeficientov riešenia diferenciálnej rovnice c_i, potrebujeme poznať počiatočné podmienky. Dosadíme nulový čas do riešenia diferenciálnej rovnice a rovnako aj do jeho prvej derivácie. Všeobecne máme opať tri možnosti:

4.1 Rôzne reálne korene

Do rovníc riešenia (5) a derivácie riešenia (6) dosadíme $t = 0$.

$$y(0) = c_1 + c_2 \tag{12}$$

$$\dot{y}(0) = c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 \tag{13}$$

Zostavíme zodpovedajúcu sútavu rovníc

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ \dot{y}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \tag{14}$$

4.2 Dvojnásobný reálny koreň

Do rovníc riešenia (7) a derivácie riešenia (8) dosadíme $t = 0$.

$$y(0) = c_1 \tag{15}$$

$$\dot{y}(0) = c_1\lambda + c_2 \tag{16}$$

Zostavíme zodpovedajúcu sútavu rovníc

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ \dot{y}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \tag{17}$$

4.3 Dva komplexne združené korene

Do rovníc riešenia (10) a derivácie riešenia (11) dosadíme $t = 0$.

$$y(0) = c_1 \tag{18}$$

$$\dot{y}(0) = c_1\lambda_a + c_2\lambda_b \tag{19}$$

Zostavíme zodpovedajúcu sútavu rovníc

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ \dot{y}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda_a & \lambda_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \tag{20}$$

5 Príklady

5.1 Príklad

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 0$$

Počiatočné podmienky nech sú dané:

$$y_0 = 4 \quad \dot{y}_0 = 3;$$

Charakteristická rovnica (2) bude zostavená v tvare:

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

Riešenie charakteristickej rovnice (2)

$$\lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2}$$

$$\lambda_1 = -2$$
$$\lambda_2 = -1$$

Získavame dva rôzne reálne korene. Formulujeme sústavu rovníc (17).

$$c_1 + c_2 = 4$$
$$-2c_1 - c_2 = 3$$

Sústavu riešime elimináciou premenných

$$c_1 = -7$$
$$c_2 = 11$$

Výsledné riešenie diferenciálnej rovnice je vo forme funkcie (6).

$$y(t) = -7e^{-2t} + 11e^{-t}$$

5.2 Príklad

$$\ddot{y} + 6\dot{y} + 9y = 0$$

5.3 Príklad

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + 10y = 0$$