

# Riešenie lineárnej diferenciálnej rovnice druhého rádu s využitím Laplaceovej transformácie

Martin Dodek

14. októbra 2020

## 1 Diferenciálna rovnica

Majme diferenciálnu rovnicu druhého rádu s konštantnými koeficientami (rovnaká ako na minulom cvičení):

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0y = 0 \quad (1)$$

Riešenie diferenciálnej rovnice spočíva v nájdení *funkcie*  $f(t)$  popisujúcej vývoj premennej  $y$  v čase.

$$y(t) = f(t)$$

Počiatkové podmienky (hodnoty premenných a ich derivácií v čase  $t = 0$ ) nech sú dané ako  $y_0$  a  $\dot{y}_0$ .

Laplaceovu transformáciu je možné použiť iba pre riešenie lineárnych diferenciálnych rovníc (tento prípad).

## 2 Laplaceova transformácia

Laplaceova transformácia je integrálnou transformáciou definovanou ako:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \quad (2)$$

Interpretovať ju môžeme ako integrál vlastných kmitov, respektíve ako koreláciu signálu  $f(t)$  (v časovej oblasti) s komplexnou exponenciálou  $e^{-st}$  (v  $s$  oblasti).

Kde  $s$  je komplexná premenná a je označovaná aj ako Laplaceov operátor.

## 2.1 Vzťah Laplaceovej transformácie a derivácie

Z pohľadu kybernetiky je najdôležitejšou vlastnosťou jej vzťah k derivácii signálu  $f(t)$ . Zjednodušene povedané, operátor  $s$  reprezentuje operáciu časovej derivácie. Presnejšie:

$$\mathcal{L}\{\dot{f}(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) \quad (3)$$

Kde  $f(0)$  je počiatočná podmienka - hodnota signálu v čase 0.

Pre vyššie derivácie signálu potom platí reťazové pravidlo.

Druhá derivácia:

$$\mathcal{L}\{\ddot{f}(t)\} = s(s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)) - \dot{f}(0) \quad (4)$$

Teda po úprave:

$$\mathcal{L}\{\ddot{f}(t)\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - \dot{f}(0) \quad (5)$$

Kde  $f(0)$  je počiatočná hodnota signálu a  $\dot{f}(0)$  je počiatočná hodnota jeho prvej derivácie.

Všeobecný vzťah pre obraz derivácie vyššieho stupňa  $n$

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n\mathcal{L}\{f(t)\} - s^{(n-1)}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \quad (6)$$

## 2.2 Laplaceova transformácia exponenciálnej funkcie

Pre účely riešenia diferenciálnych rovníc a teda aj analýzu lineárnych systémov je zvlášť dôležitý Laplaceov obraz exponenciálnej funkcie.

Jej obraz bude:

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}dt$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{(a-s)t}dt$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{a-s} \left[ e^{(a-s)t} \right]_0^\infty$$

Čo vo výsledku je:

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a} \quad (7)$$

### 3 Riešenie diferenciálnej rovnice

Diferenciálnu rovnicu (1) môžeme s využitím obrazu Laplaceovej transformácie derivácie signálu  $y(t)$  aj jeho vyšších derivácií (5) formulovať ako:

$$Y(s) (s^2 + a_1 s + a_0) = s y_0 + \dot{y}_0 + a_1 y_0 \quad (8)$$

Vyjadrením obrazu signálu  $Y(s)$  získavame racionálnu funkciu:

$$Y(s) = \frac{s y_0 + \dot{y}_0 + a_1 y_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \quad (9)$$

Pre účely riešenia diferenciálnej rovnice (získanie časovej funkcie  $y(t)$ ) musíme túto funkciu rozložiť na parciálne zlomky:

$$Y(s) = \frac{s y_0 + \dot{y}_0 + a_1 y_0}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)} = \frac{A}{s - \lambda_1} + \frac{B}{s - \lambda_2} \quad (10)$$

Je preto nutné nájsť korene menovateľa racionálnej funkcie :  $\lambda_1$  a  $\lambda_2$ . Zostavíme teda charakteristickú rovnicu (kvadratickú rovnicu):

$$s^2 + a_1 s + a_0 = 0 \quad (11)$$

Riešením charakteristickej rovnice sú korene  $\lambda_1$  a  $\lambda_2$  (všeobecne komplexné):

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2} \quad (12)$$

Pre určenie koeficientov  $A$  a  $B$  si pravú stranu rovnice (10) upravíme na spoločného menovateľa:

$$Y(s) = \frac{s y_0 + \dot{y}_0 + a_1 y_0}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)} = \frac{A(s - \lambda_2) + B(s - \lambda_1)}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)} \quad (13)$$

Zavedieme rovnosť polynómov:

$$s y_0 + \dot{y}_0 + a_1 y_0 = (A + B)s - (A\lambda_2 + B\lambda_1)$$

Koeficienty  $A$  a  $B$  potom určíme ako riešenie vzniknutej sústavy lineárnych rovníc.

Pre formuláciu všeobecného riešenia diferenciálnej rovnice využijeme znalosť Laplaceovho obrazu exponenciálnej funkcie (7).

Realizujeme tak vlastne spätnú Laplaceovu transformáciu rovnice (10).

$$y(t) = A e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t} \quad (14)$$

## 4 Príklad

Majme konkrétnu diferenciálnu rovnicu (rovnaká ako na minulom cvičení):

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 0$$

Počiatkové podmienky nech sú dané:

$$y_0 = 4 \quad \dot{y}_0 = 3$$

Realizujeme Laplaceovu transformáciu tejto rovnice v zmysle (8)

$$Y(s)(s^2 + 3s + 2) = 4s + 3 + 3 \times 4$$

Získavame racionálnu funkciu, podobne ako vo všeobecnom riešení (9)

$$Y(s) = \frac{4s + 15}{s^2 + 3s + 2}$$

Charakteristická rovnica bude zostavená v tvare:

$$s^2 + 3s + 2 = 0$$

Riešenie charakteristickej rovnice (12)

$$\lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2}$$

Korene teda budú reálne:

$$\lambda_2 = -1 \quad \lambda_1 = -2$$

Racionálnu funkciu rozložíme na parciálne zlomky rovnako ako v (10)

$$Y(s) = \frac{4s + 15}{(s + 1)(s + 2)} = \frac{A}{s + 1} + \frac{B}{s + 2}$$

Úpravou na spoločného menovateľa (13)

$$Y(s) = \frac{4s + 15}{(s + 1)(s + 2)} = \frac{A(s + 2) + B(s + 1)}{(s + 1)(s + 2)}$$

Zo zavedenej rovnosti polynómov vyplýva:

$$(A + B)s + (2A + B) = 4s + 15$$

Získame sústavu lineárnych rovníc:

$$\begin{aligned} A + B &= 4 \\ 2A + B &= 15 \end{aligned}$$

Jej riešenie bude:

$$A = 11 \quad B = -7$$

Využijeme znalosť Laplaceovho obrazu exponenciálnej funkcie (7). Ak realizujeme spätnú Laplaceovu transformáciu potom riešenie bude v zmysle (14)

$$y(t) = 11e^{-t} - 7e^{-2t}$$

## 5 Príklad

Majme konkrétnu nehomogénnu diferenciálnu rovnicu (obsahuje vstup  $u(t)$ ):

$$\ddot{y} + 5\dot{y} + 6y = u(t)$$

Počiatkové podmienky nech sú nulové:

$$y_0 = 0 \quad \dot{y}_0 = 0$$

Vstupný signál  $u(t)$  nech je daný ako konštantný skok

$$u(t) = 5$$

Nájdeme Laplaceov obraz vstupného signálu  $u(t)$

$$U(s) = \frac{5}{s}$$

Realizujeme Laplaceovu transformáciu diferenciálnej rovnice v zmysle (8)

$$Y(s) (s^2 + 5s + 6) = U(s)$$

Pre tento systém môžeme definovať jeho prenosovú funkciu:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + 5s + 6}$$

Po dosadení obrazu vstupného signálu  $U(s)$  získavame racionálnu funkciu:

$$Y(s) = \frac{5}{(s^2 + 5s + 6)s}$$

Charakteristická rovnica bude zostavená v tvare:

$$(s^2 + 5s + 6)s = 0$$

Riešenie charakteristickej rovnice (nenulové korene)

$$\lambda_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2}$$

Korene teda budú reálne (z toho jeden nulový):

$$\lambda_0 = 0 \quad \lambda_1 = -2 \quad \lambda_2 = -3$$

Racionálnu funkciu rozložíme na parciálne zlomky:

$$Y(s) = \frac{5}{s(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+3}$$

Úpravou na spoločného menovateľa:

$$Y(s) = \frac{5}{(s+2)(s+3)s} = \frac{A(s+2)(s+3) + B(s+3)s + C(s+2)s}{(s+2)(s+3)s}$$

Zo zavedenej rovnosti polynómov vyplýva:

$$(A + B + C) s^2 + (5A + 3B + 2C) s + 6A = 5$$

Získame sústavu lineárnych rovníc:

$$\begin{aligned} A + B + C &= 0 \\ 5A + 3B + 2C &= 0 \\ 6A &= 5 \end{aligned}$$

Jej riešenie bude:

$$A = \frac{5}{6} \quad B = -2.5 \quad C = \frac{5}{3}$$

Využijeme znalosť Laplaceovho obrazu exponenciálnej funkcie (7). Ak realizujeme spätnú Laplaceovu transformáciu potom riešenie bude:

$$y(t) = \frac{5}{6} - 2.5e^{-2t} + \frac{5}{3}e^{-3t}$$