

## Проектная практика

Весна, 2024

### Задачи

**Задача 1.** Вокруг Земли по круговой орбите радиуса  $R = 10^4$  км вращается спутник. Вследствие короткого направленного удара, спутнику сообщается скорость  $\mathbf{v}_0 = (v_0^x, v_0^y)$ . Рассчитать новую траекторию спутника. Проанализировать возможность касания спутником поверхности земли при различных  $\mathbf{v}_0$ .

Постановка задачи:

$$\begin{aligned}x'' &= -\frac{GM}{r^3}x, \\y'' &= -\frac{GM}{r^3}y, \\x(0) &= R, y(0) = 0, \\x'(0) &= v_0^x, y'(0) = v_1 + v_0^y, \\v_1 &= \left(\frac{GM}{R}\right)^{\frac{1}{2}}, M = 5,99 \cdot 10^{24} \text{ кг}, G = 0,667 \frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2}.\end{aligned}$$

Радиус земли  $R_e = 6380$  км.

**Задача 2.** Численное решение задачи трех тел (Земля - Луна - спутник).

Безразмерная постановка задачи для координат спутника  $(x, y)$ :

$$\begin{aligned}x'' &= 2y' + x - \mu^* \frac{x + \mu}{r_1^3} - \mu \frac{x - \mu^*}{r_2^3} - kx', \\y' &= -2x' + y - \mu^* \frac{y}{r_1^3} - \mu \frac{y}{r_2^3} - ky', \\r_1^2 &= (x + \mu)^2 + y^2, r_2^2 = (x - \mu^*)^2 + y^2, \\x(0) &= 1.2, x'(0) = 0, y(0) = -1.05.\end{aligned}$$

Здесь  $\mu = 1/82.45$  – отношение масс Луны и Земли,  $\mu^* = 1 - \mu$ . Земля и Луна находятся в точках  $(1 - \mu, 0)$  и  $(-\mu, 0)$ , соответственно. Масса спутника предполагается пренебрежимо малой по сравнению с массами Земли и Луны. Провести расчеты движения спутника при различных значениях параметра трения  $k$ .

**Задача 3.** Численное исследование динамики двух популяций и двух генетических признаков.

Постановка задачи:

$$\begin{aligned}
x' &= x(2\alpha_1 - 0.5x - \alpha_1^2\alpha_2^{-2}y), \\
y' &= y(2\alpha_2 - \alpha_1^{-2}\alpha_2^{-2}x - 0.5y), \\
\alpha_1' &= \varepsilon(2 - 2\alpha_1\alpha_2^{-2}y), \\
\alpha_2' &= \varepsilon(2 - 2\alpha_2\alpha_1^{-2}y).
\end{aligned}$$

Здесь  $0 < \varepsilon \leq 10^{-2}$ ,  $0 \leq x(0) \leq 40$ ,  $0 \leq y(0) \leq 40$ ,  $\alpha_1(0) = 0$ ,  $\alpha_2(0) = 10$ . Исследовать изменения в популяциях и эволюцию признаков в зависимости от времени в течение временного интервала  $0 \leq t \leq 2000$ .

**Задача 4.** Численное исследование уравнения Ван дер Поля.

Постановка задачи:

$$\begin{aligned}
x' &= -a \left( \frac{x^3}{3} - x \right) - ay, \\
y' &= -x, \\
x(0) &= 2, y(0) = 0.
\end{aligned}$$

Здесь  $1 \leq a \leq 10^3$ . Провести исследование поведения решений в зависимости от значений «большого» параметра  $a$ .

**Задача 5.** Численное исследование уравнения Бонгоффера – Ван дер Поля.

Постановка задачи:

$$\begin{aligned}
x' &= -a \left( \frac{x^3}{3} - x \right) + ay, \\
y' &= -x - by + c, \\
x(0) &= 2, y(0) = 0.
\end{aligned}$$

Здесь  $1 \leq a \leq 10^3$ ,  $0 < c < 1$ . Провести исследование поведения решений в зависимости от значений «большого» параметра  $a$ .

**Задача 6.** Численное исследование неавтономного уравнения Ван дер Поля.

Постановка задачи:

$$\begin{aligned}
x' &= -a \left( \frac{x^3}{3} - x \right) - ay, \\
y' &= -x + A \cos \omega t \\
x(0) &= 2, y(0) = 0.
\end{aligned}$$

Здесь  $1 \leq a \leq 10^3$ . Провести исследование поведения решений в зависимости от значений «большого» параметра  $a$  и частоты  $\omega$ . Рассмотреть случаи  $0 < A < 1$  и  $1 < A < \sqrt{1 + \frac{1}{64\omega^2}}$ .

**Задача 7.** Численное исследование изменения концентраций веществ в одной химической реакции Белоусова–Жаботинского с тремя активными веществами.

Постановка задачи:

$$\begin{aligned}x' &= -0.04x + 10^4yz, \\y' &= 0.04x - 10^4yz - 3 \cdot 10^7y^2, \\z' &= 3 \cdot 10^7y^2.\end{aligned}$$

Здесь  $0 \leq t \leq 1000, x(0) = 1, y(0) = z(0) = 0$ . Построить графики зависимости концентраций активных веществ от времени, а также зависимости  $x(y), y(z), z(x, y)$  и т.д.

**Задача 8.** Численное исследование изменения концентраций веществ в одной химической реакции Белоусова–Жаботинского с четырьмя активными веществами.

Постановка задачи:

$$\begin{aligned}x' &= -Ax - Bxz, \\y' &= Ax - M \cdot Cyz, \\z' &= Ax - Bxz - M \cdot Cyz + Ch \\h' &= Bxz - Ch\end{aligned}$$

Здесь  $0 \leq t \leq 1013, x(0) = 1.76 \cdot 10^{-3}, y(0) = z(0) = h(0) = 0$ . Построить графики зависимости концентраций активных веществ от времени, а также зависимости  $x(y), y(z), z(x, y)$  и т.д. при  $A = 7.89 \cdot 10^{-10}, B = 1.1 \cdot 10^7, C = 1.13 \cdot 10^3, M = 10^6$ .

**Задача 9.** Численное исследование уравнения Капицы.

Уравнение Капицы имеет вид:

$$L\phi'' + (g - A\omega^2 \sin \omega t) \sin \phi = 0.$$

Построить графики решения и фазовые портреты при  $\phi'(0) = 0$  и  $L = 10$  для следующих наборов параметров  $(A, \omega, \phi(0))$ :

$$(0.5, 5.3, 3.1), (10, 100, 3.1), (10, 100, 0.1), (2, 100, 0.1), (0.5, 200, 0.05).$$

**Задача 10.** Численное исследование уравнения Минорского.

Уравнение Минорского имеет вид:

$$y'' + 2ry' + \omega^2 y + 2qy'(t-1) = \varepsilon y^3(t-1).$$

Здесь  $r = -1, q = -1, \omega = \pi n$ . Начальные данные задаются при всех  $t \in [-1, 0]$ . Построить графики решения и фазовые портреты.