Влияние формулировки задачи на решение методом PINN

Донецков Андрей Дмитриевич[1,*], Бакакин Валерий Дмитриевич[1], Жулев Егор Михайлович[1]
[1]НИЯУ МИФИ
[*]e-mail: andrey.donetskov@gmail.com

Аннотация

Целью работы является анализ влияния различных формулировок задачи Коши для уравнения гармонического осциллятора с вынуждающей силой на эффективность и точность решений. Проведённые эксперименты показали влияние постановки задачи на сходимость нейронной сети и вычислительные затраты.

Ключевые слова: гармонический осциллятор, PINN.

Постановка задачи

Рассматриваются три постановки задачи Коши:

1. **ОДУ второго порядка:**

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = -A\cos(\omega t), \quad x(0) = x_0, \quad \frac{dx}{dt}(0) = v_0. \tag{1}$$

2. **Система ОДУ первого порядка:**

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\omega_0^2 x - A\cos(\omega t), \quad x(0) = x_0, \quad y(0) = v_0. \tag{2}$$

3. **Альтернативная система ОДУ:**

$$\frac{dx}{dt} = \omega y - \frac{A}{\omega}\sin(\omega t), \quad \frac{dy}{dt} = -\omega x, \quad x(0) = x_0, \quad y(0) = \frac{v_0}{\omega}. \tag{3}$$

Методология

Физически-информированные нейронные сети (PINN) используются для аппроксимации решений. [2] Функция потерь минимизирует отклонения от исходных уравнений и начальных условий. [1]

Результаты

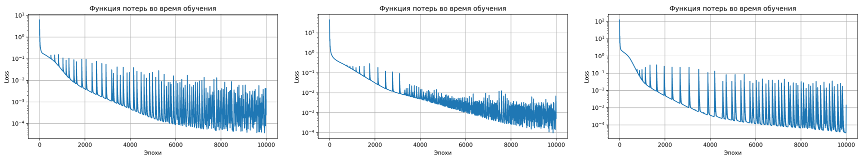

Рис. 1: Функция потерь для альтернативной системы (слева), системы ОДУ первого порядка (в центре) и второго порядка (справа).

Анализ графиков функции потерь показывает, что:

- **ОДУ второго порядка** показывает наибольшую скорость сходимости и высокую точность, но часто выходит из локальных минимумов;
- **Система ОДУ первого порядка** показывает медленную скорость сходимости и меньшую точность, но процесс обучения довольно стабилен;
- **Альтернативная система ОДУ** показывает точность сопоставимую с первой при меньших колебаниях loss - функции.

Таким образом, выбор формулировки задачи существенно влияет на характер сходимости и вычислительные затраты.

Список литературы

[1] Lagaris I.E., Likas A., Fotiadis D.I. Artificial neural networks for solving ordinary and partial differential equations //IEEE transactions on neural networks. — 1998. — Т. 9. — №. 5. — С. 987-1000.

[2] Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G.E. Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations //Journal of Computational Physics. — 2019. — Т. 378. — С. 686- 707.