# Исследование влияния вида задачи для уравнения гармонического осциллятора на решение PINN

Донецков А.Д., Бакакин В.Д., Жулев Е.М.
*Институт Лазерных и плазменных технологий*
*НИЯУ МИФИ*
*г. Москва*

20 декабря 2024

# Содержание


1. Введение
2. Постановка задачи
   - Система ОДУ второго порядка
   - Системы ОДУ первого порядка
3. Ключевые особенности PINN
4. Методология
5. Результаты
   - ОДУ второго порядка.
   - Система ОДУ первого порядка
   - Альтернативная система ОДУ первого порядка
6. Выводы

# Введение

- Решение уравнений движения гармонического осциллятора важно в вычислительной физике и механике.
- Гармонический осциллятор описывается дифференциальными уравнениями второго и первого порядка.
- Развитие нейросетевых методов, особенно PINN.[1]
- Цель: сравнить влияние различных формулировок задачи Коши на метод PINN.

[1] *Lagaris I.E. Likas A. F. D.* Artificial neural networks for solving ordinary and partial differential equations. 1998 ; *Raissi M. Perdikaris P. K. G.* Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations. 2019.

# ОДУ второго порядка

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = -A\cos(\omega t), \\ x(0) = x_0, \\ \dfrac{dx}{dt}(0) = v_0. \end{cases} \tag{1}$$

# Системы ОДУ первого порядка

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -\omega_0^2 x - A\cos(\omega t), \\ x(0) = x_0, \\ y(0) = v_0. \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \omega_0 y - \dfrac{A}{\omega}\sin(\omega t), \\ \dfrac{dy}{dt} = -\omega_0 x, \\ x(0) = x_0, \\ y(0) = \dfrac{v_0}{\omega_0}. \end{cases} \tag{3}$$

## Замечание

Разные системы дифференциальных уравнений первого порядка могут быть полезны в случаях, когда форма упрощает аналитическое или численное решение, в зависимости от характера внешней силы или других факторов.

# Преимущества PINN

- Интеграция физических законов в процесс обучения.
- Использование автоматического дифференцирования для вычисления градиентов.
- Применимость к различным задачам: ОДУ, УЧП и их системы.

# Ограничения PINN

- Трудности с аппроксимацией разрывных функций.
- Низкая эффективность при решении жестких и хаотических систем.
- Застревание в локальных оптимумах.
- Сложности в балансировке компонентов функции потерь.

# Методология

- Одинаковая конфигурация нейросети для всех 3 формулировок:
  - Вход: время
  - 5 скрытых слоёв по 20 нейронов
  - Функция активации: синус
  - Выход: 1 или 2 нейрона
- Обучение на интервале $[-5, 15]$ с шагом 0.05
- Функционал потерь: $loss = loss_{interior} + \lambda_{bc} * loss_{boundary}$, где $\lambda_{bc} = 50$
- Оптимизатор: Adam с шагом обучения $10^{-3}$

# ОДУ второго порядка

Рис.: Функция потерь для ОДУ второго порядка

Рис.: Функция потерь для ОДУ второго порядка с резонансом

# ОДУ второго порядка.

- Высокая точность и быстрая сходимость.
- Возможные проблемы с локальными минимумами.

| **MAE** $x, 10^{-2}$ | **MAE** $\frac{dx}{dt}, 10^{-2}$ |
|---|---|
| 1,1879 | 2,4357 |
| 1,2033 | 2,4247 |
| 1,6343 | 3,0803 |
| 1,2127 | 2,4514 |
| 1,1406 | 2,3287 |

Таблица: ОДУ второго порядка без резонанса

**Важно!**

Прошу запомнить среднее значение MAE. Для $x \simeq 1.3$, для $\frac{dx}{dt} \simeq 2.5$.

# Система ОДУ первого порядка

Рис.: Функция потерь для системы ОДУ первого порядка

Рис.: Функция потерь для системы ОДУ первого порядка с резонансом

# Система ОДУ первого порядка с резонансом

- Более стабильный, но медленный процесс обучения.
- Менее точные результаты.

| **MAE** $x, 10^{-2}$ | **MAE** $y, 10^{-2}$ |
|---|---|
| 4,8092 | 9,8869 |
| 3,5429 | 7,2853 |
| 3,6680 | 7,4666 |
| 3,6264 | 7,4309 |
| 2,5681 | 5,4567 |

Таблица: ОДУ первого порядка без резонанса

**Вывод из таблицы**

Среднее MAE больше ОДУ второго порядка в 3 раза.

# Альтернативная система ОДУ первого порядка

Рис.: Функция потерь для альтернативной системы ОДУ

Рис.: Функция потерь для альтернативной системы ОДУ с резонансом

# Альтернативная система ОДУ первого порядка с резонансом

- Большая точность по сравнению с первой системой.
- Менее стабильный процесс обучения.

| **MAE** $x, 10^{-2}$ | **MAE** $\frac{dx}{dt}, 10^{-2}$ |
|---|---|
| 1,0991 | 2,3144 |
| 2,4914 | 5,1818 |
| 1,0468 | 2,2011 |
| 0,44066 | 0,96563 |
| 0,92337 | 1,9852 |

Таблица: Альтернативная система ОДУ первого порядка без резонанса

## Вывод из таблицы

Достигается точность, близкая к ОДУ второго порядка.

# Выводы

- Выбор постановки задачи Коши существенно влияет на эффективность и точность PINN.
- **ОДУ второго порядка:**
  - Быстрая сходимость.
  - Возможны локальные минимумы.
- **Системы ОДУ первого порядка:**
  - Повышенная устойчивость обучения.
  - Снижение точности и увеличение времени сходимости.
- **Альтернативная система ОДУ первого порядка:**
  - Высокая точность.
  - Более стабильный процесс оптимизации.

Мы приглашаем заинтересованных исследователей использовать и развивать представленный подход.[2]

[2] Репозиторий с кодом [Электронный ресурс]. URL: https://github.com/PracticalOscillations/Practice3.

*Lagaris I.E. Likas A. F. D.* — Artificial neural networks for solving ordinary and partial differential equations. — 1998.

*Raissi M. Perdikaris P. K. G.* — Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations. — 2019.

Репозиторий с кодом. — [Электронный ресурс]. — URL: https://github.com/PracticalOscillations/Practice3.