

Solución Ecuaciones Cinética

Daniel Vázquez Lago

Resumen

En este documento voy a tratar de solucionar las ecuaciones de cinemática del proceso de interacción de partículas $^{11}\text{Li} + ^2\text{H} \rightarrow ^3\text{H} + ^{10}\text{Li}$ para los sistemas LAB (Laboratorio) y CM (Centro de masas) a través de las leyes de conservación (transformaciones de Lorentz).

Índice

1	Introducción	1
1.1	Relatividad especial	1
1.2	Notación	1
2	Cálculo de los ángulos	2
3	Anexo	3
3.1	Cálculo de γ y β	3
3.2	Cálculo de E'_3 y E'_4	3
3.3	Calculo de p_3 y p_4	3

1. Introducción

1.1 Relatividad especial

La relatividad especial nos permite estudiar la conservación de la energía y el momento usando los cuadri-vectores. Definimos el 4-momento P de una partícula de masa m que se mueve a una velocidad \mathbf{v} de un sistema de coordenadas como:

$$P = (p^0, \mathbf{p}) = m\gamma(c, \mathbf{v}) = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p}\right) \quad (1)$$

La norma de un cuadrimomento cualquiera viene dado siempre por

$$P^2 = -m^2c^2 \quad (2)$$

Lo que antes era la ley de conservación de la energía y la ley de conservación del momento de cualquier fenómeno físico, ahora se puede condensar ahora en:

$$\sum P_{\text{inicial}} = \sum P_{\text{final}} \quad (3)$$

Cuando un sistema de referencia se mueve a una velocidad $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$ respecto otro debemos usar las **transformaciones de Lorentz** para calcular el cambio del cuadrimomento \mathbf{p} de una partícula en ambos sistemas de referencia. Si denotamos con primas a los momentos/energía del sistema que se mueve, tendremos que

$$E'/c = \gamma(E/c - \beta p_x) \quad (4)$$

$$p'_x = \gamma(p_x - \beta E/c) \quad (5)$$

$$p'_y = p_y \quad (6)$$

$$p'_z = p_z \quad (7)$$

siendo la transformación inversa:

$$E/c = \gamma(E'/c + \beta p'_x) \quad (8)$$

$$p_x = \gamma(p'_x + \beta E'/c) \quad (9)$$

$$p_y = p'_y \quad (10)$$

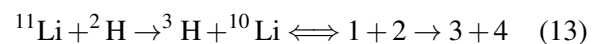
$$p_z = p'_z \quad (11)$$

ya que ahora el sistema que se mueve se mueve a la velocidad $\mathbf{v} = (-v, 0, 0)$. Los factores γ y β (en este sistema) se definen como:

$$\beta = \frac{v_x}{c} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (12)$$

1.2 Notación

Como hemos dicho el proceso de interacción viene dado por



A partir de ahora nos referiremos a estas partículas como 1, 2, 3 y 4. Así p_1 será el momento de la partícula uno (en este caso la de litio 11). Dado que en función del sistema de referencia tendremos un valor de momento u otro, necesitaremos especificar que sistema de referencia seguimos. Usaremos la siguiente notación: p_1 es el momento en el sistema laboratorio y p'_1 es el sistema del centro de masas. En la siguiente figura presentamos un esquema de ambos sistemas de referencia, y como son las partículas para cada uno de ellos.

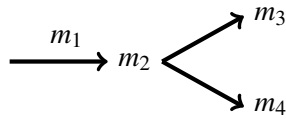


Figura 1. Sistema Laboratorio

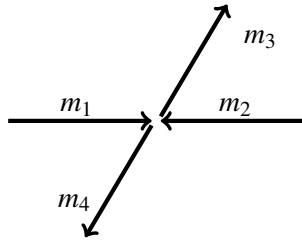


Figura 2. Sistema Centro de Masas

2. Cálculo de los ángulos

En esta sección trataremos de obtener los ángulos de salida de las partículas 3 y 4 (y sus energías) en función de las variables conocidas: energía cinética y masas de las partículas. Para esto necesitaremos calcular las energías de las partículas en el sistema centro de masas, ya que las relaciones de conservación de la energía es mucho mas sencilla en este sistema referencial. Luego podremos recuperarlas usando la *transformada de Lorentz*.

Como podemos ver en las figuras, en el sistema laboratorio la partícula 1 está en movimiento mientras que la partícula 2 está en reposo. Eso nos lleva a que sus momentos, en el sistema de referencia del laboratorio:

$$P_1 = (E_1/c, \mathbf{p}_1) \quad P_2 = (m_2 c, 0) \quad (14)$$

$$P_3 = (E_3/c, \mathbf{p}_3) \quad P_4 = (E_4/c, \mathbf{p}_4) \quad (15)$$

Por otro lado, los momentos en el sistema de referencia del centro de masas vendrán dados por

$$P'_1 = (E'_1/c, \mathbf{p}'_1) \quad P'_2 = (E'_2/c, -\mathbf{p}'_1) \quad (16)$$

$$P'_3 = (E'_3/c, \mathbf{p}'_3) \quad P'_4 = (E'_4/c, -\mathbf{p}'_3) \quad (17)$$

Asumiremos que la partícula 1 incidente se mueve únicamente en el eje x tal que $\mathbf{p}_1 = (p_1, 0, 0)$. En ese caso el sistema centro de masas se moverá respecto al sistema laboratorio en el eje x , por lo que habrá que aplicar la transformaciones de Lorentz (4 y 5) siendo válidas para *cualquier cuádrimomento*. Definimos las energías totales como $E_{tot} = E_1 + E_2$ y como $E'_{tot} = E'_1 + E'_2$, siendo esta última la *energía del centro de masas*, que verifica que

$$E'_{tot} \equiv E_{CM} = E_{tot}^2 - c^2 p_1^2 \quad (18)$$

Tanto E_{tot} como E'_{tot} son variables conocidas. Nos interesa calcular las energías E'_3 y E'_4 , que usando la transformación de Lorentz nos servirán para estudiar las energías E_3 y E_4 , así como los momentos. Las relaciones se pueden calcular como

$$E'_3 = \frac{1}{2} \left(E'_{tot} + \frac{m_3^2 c^4 - m_4^2 c^4}{E'_{tot}} \right) \quad (19)$$

$$E'_4 = \frac{1}{2} \left(E'_{tot} + \frac{m_4^2 c^4 - m_3^2 c^4}{E'_{tot}} \right) \quad (20)$$

A partir de estos valores de E'_3 y E'_4 podemos calcular el valor de los momentos p'_3 y p'_4 (en módulo). Podemos suponer sin ningún tipo de problema que la coordenada x de los momentos vienen dadas por

$$p'_{3x} = p'_3 \cos(\theta'_3) \quad (21)$$

$$p'_{4x} = p'_4 \cos(\theta'_4) \quad (22)$$

de este modo podemos aplicar las transformaciones de Lorentz para hallar los valores del $\cos(\theta_3)$ y $\cos(\theta_4)$. Así, usando la ecuación 9:

$$p_3 \cos(\theta) = \gamma(p'_3 \cos(\theta'_3) + \beta E'_3/c) \quad (23)$$

despejando $\cos(\theta)$ obtenemos:

$$\cos(\theta_3) = \frac{\gamma}{p_3} (p'_3 \cos(\theta'_3) + \beta E'_3/c) \quad (24)$$

El cálculo de p_4 es exactamente igual, obteniendo

$$\cos(\theta_4) = \frac{\gamma}{p_4} (p'_4 \cos(\theta'_4) + \beta E'_4/c) \quad (25)$$

3. Anexo

En esta sección procederemos de hacer el cálculo de las variables que no hemos desarrollado anteriormente, y aquellas que si hemos desarrollado pero no explícitamente. Estas son: γ , β ; E'_3 , E'_4 , y p_3 , p_4 .

3.1 Cálculo de γ y β

Para calcular los valores de γ y β partimos de la ecuación 18. Como podemos ver E'_{tot} es una función de variables conocidas. Dado que podemos relacionar $P_1 + P_2$ con $P'_1 + P'_2$ usando la matriz de Lorentz Λ (la suma de cuadrimomentos sigue siendo un cuadrimomento), tenemos que:

$$\frac{E_1}{c} + m_2 c = \gamma \left(\frac{E'_1}{c} + \frac{E'_2}{c} \right) \quad (26)$$

$$p_1 = \gamma \beta \left(\frac{E'_1}{c} + \frac{E'_2}{c} \right) \quad (27)$$

o lo que es lo mismo

$$E_{tot} = \gamma E'_{tot} \quad p_1 = \gamma \beta E'_{tot} \quad (28)$$

Despejando podemos obtener tanto β como γ en función de variables conocidas

$$\gamma = \frac{E_{tot}}{E'_{tot}} \quad \beta = \frac{p_1}{E_{tot}} \quad (29)$$

3.2 Cálculo de E'_3 y E'_4

Para calcular estos valores usamos las ecuaciones siguientes:

$$E'_3 + E'_4 = E'_{tot} \quad (30)$$

$$E_3'^2 = m_3^2 c^4 + c^2 p_3'^2 \quad (31)$$

$$E_4'^2 = m_4^2 c^4 + c^2 p_4'^2 \quad (32)$$

de tal modo que restando 31 y 32 podemos obtener:

$$E_3'^2 - E_4'^2 = m_3^2 c^4 - m_4^2 c^4 \quad (33)$$

de tal modo que

$$(E'_3 + E'_4)(E'_3 - E'_4) = m_3^2 c^4 - m_4^2 c^4 \quad (34)$$

Esto es

$$(E'_3 - E'_4) = \frac{m_3^2 c^4 - m_4^2 c^4}{E'_{tot}} \quad (35)$$

de tal modo que, podamos obtener

$$E'_3 = \frac{1}{2} \left(E'_{tot} + \frac{m_3^2 c^4 - m_4^2 c^4}{E'_{tot}} \right) \quad (36)$$

$$E'_4 = \frac{1}{2} \left(E'_{tot} + \frac{m_4^2 c^4 - m_3^2 c^4}{E'_{tot}} \right) \quad (37)$$

3.3 Calculo de p_3 y p_4

Como hemos visto hemos calculado E'_3 y p'_3 (esta segunda no la hemos obtenido explícitamente, pero es trivial conociendo E'_3). Lógicamente podremos relacionar estos valores con E_3 , ya que la transformaciones de Lorentz 8, de tal modo que

$$E_3 = \gamma(E'_3 + \beta c p'_3 \cos(\theta'_3)) \quad (38)$$

y así:

$$p_3 = \sqrt{m_3^2 c^2 + E_3^2 / c^2} \quad (39)$$

De manera análoga se calcula p_4 .

$$E_4 = \gamma(E'_4 + \beta c p'_4 \cos(\theta'_4)) \quad (40)$$

$$p_4 = \sqrt{m_4^2 c^2 + E_4^2 / c^2} \quad (41)$$