Práctica 3: Interpolación

Marco Praderio

Problema

Considerar la elipse que tiene como ecuación

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + (2y)^2 = 1, \qquad x \in [-2, 2] \tag{1}$$

Encontrar el punto $A = (x^*, y^*)$ de la elipse ($y^* > 0$) tal que la proporción entre las longitudes de los arcos medidas desde el punto $(2, 0)$ en sentidos a favor de las agujas del reloj y en contra sea 4:1.

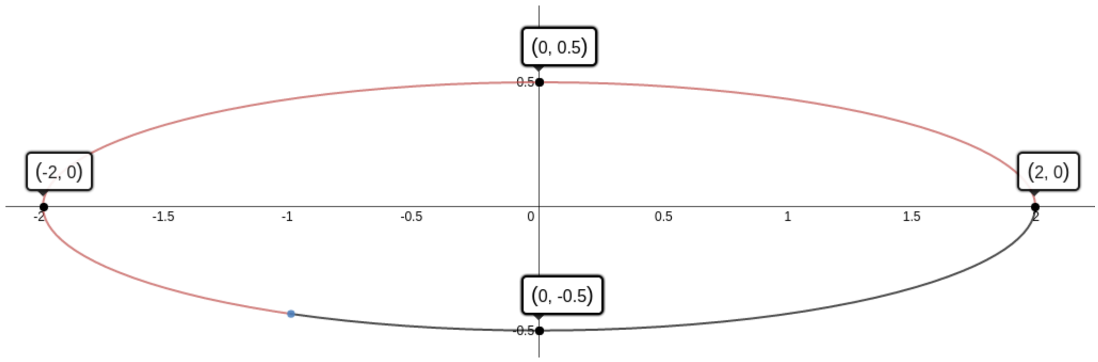

Figura 1: En la imagen se intenta exponer de manera mas visual el planteamiento del problema. El objetivo es lograr encontrar la abscisa x^* del punto azul tal que la longitud de la curva de color rojo sea 4 veces mayor a la longitud de la curva de color negro.

1. Demostrar que $x^* > 0$

Para demostrar esto definiremos la función

$$F(x) := L - 5\int_x^2 \sqrt{1 + y'(t)^2}\mathrm{d}t = L - 5L_{EA}(x) \tag{2}$$

donde L es la longitud de la elipse $y(t)$ es la ordenada negativa de un punto de la elipse (1) en función de la abscisa. Resulta evidente que la función $F(x)$ es continua en cuanto derivable. Ademàs tenemos que

$$F(2) = L - 5\int_2^2 \sqrt{1 + y'(t)^2}\mathrm{d}t = L > 0$$

y, por otro lado, teniendo en cuenta que $\int_x^2 \sqrt{1 + y'(t)^2}\mathrm{d}t$ indica la longitud de la curva negra que se puede ver en figura (1) resulta evidente que $\int_0^2 \sqrt{1 + y'(t)^2}\mathrm{d}t = \frac{L}{4}$ y, por lo tanto

$$F(0) = L - 5\int_0^2 \sqrt{1 + y'(t)^2}\mathrm{d}t = L - \frac{5}{4}L = -\frac{L}{4} < 0$$

por lo tanto, aplicando el teorema de Bolzano, tenemos que la función $F(x)$ tiene su cero en un punto $x^* \in (0, 2)$. En particular tenemos que $x^* > 0$ tal i como queriamos demostrar. Es necesario mencionar que, mas específicamente, el punto azul de la figura (1) se encuentra en el cuarto cuadrante y no en el primero dado que si se encontrara en el primero la longitud de la curva roja seria menor a la longitud de la curva negra contradiciendo así los requisitos del problema.

2. Calcular la expresión de $y'(t)$ a partir de (1).

Aislando la ordenada negativa en función de la abscisa de un punto de la elipse (1) obtenemeos

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2+(2y)^2=1 \quad\Rightarrow\quad (2y)^2=1-\left(\frac{x}{2}\right)^2 \quad\Rightarrow\quad 2y=-\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2} \quad\Rightarrow\quad y=-\frac{1}{4}\sqrt{4-x^2}$$

derivando en función de x obtenemos

$$y'(x)=\frac{x}{4\sqrt{4-x^2}}$$

Es importante notar que la función $y'(t)$ presenta discontinuidades esenciales en los puntos $x=\pm 2$. Añado además la expresión de la función que necesitamos integrar

$$g(x)=\sqrt{1+y'(x)^2}=\sqrt{1+\frac{1}{16}\frac{x^2}{4-x^2}}=\frac{1}{4}\sqrt{16+\frac{x^2}{4-x^2}}=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{64-15x^2}{4-x^2}} \tag{3}$$

La cual sigue presentando discontinuidades esenciales en los puntos $x=\pm 2$.

3. Calcular (en un programa inicial aparte) la longitud total del la elipse (1), L, mediante cuadratura Gaussiana y los polinomios de Chebyschev (9 nodos).

En la linea 1136 de la libreria 'CalculNumeric.h' que se puede encontrar en la carpeta CODIGOS o en Programas Proyecto curso podemos ver definida la función 'QuadraturaGaussChebyschev' la cual toma como parametros una función f los extremos a, b de un intervalo de integración i el número de nodos n y devuelve el resultado de aproximar la integral de f en el intervalo $[a, b]$ mediante cuadratura de Gauss-Chebyschev de la función f con n nodos interpoladores. Utilizando esta función hemos logrado aproximar la longitud de la Elipse como

$$L\approx 2\cdot \text{QuadraturaGaussChebyschev}(g,-2,2,9)=8{,}57985509$$

[1] donde g és la función definida en (3).

És interesante notar que, al aplicar la cuadratura de GaussChebyschev para calcular la integral

$$\int_{-2}^{2} g(x)\mathrm{d}t=\int_{-2}^{2}\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}g(x)$$

la función que aproximamos a un polinomio és la función

$$h(t)=\frac{\sqrt{4-t^2}}{2}g(t)=\frac{1}{8}\sqrt{64-15t^2}$$

la cual, a diferencia de la función g no presenta una discontinuidad esencial en los puntos $t=\pm 2$ si no que presenta una discontinuidad evitable[2] lo cual soluciona el problema de aproximar con un polinomio una función que diverge en un punto[3]

4. En un segundo programa principal resolver $F(x)=0$ usando el método de Newton. Para ello calcular previamente $F'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(L-5L_{EA}(x))$

Para calcular $F'(x)$ solo nos hace falta notar que la función g definida en (3) és continua en el intervalo $(-2,2)$ y aplicar el teorema fundamental del calculo para obtener

$$F'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(L-5L_{EA}(x))=-5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_x^2\frac{1}{4}\sqrt{\frac{64-15x^2}{4-x^2}}\right)=5\frac{1}{4}\sqrt{\frac{64-15x^2}{4-x^2}}=5g(x)$$

[1] Invetigando un poco he encontrado la aproximación al calculo del perimetro de una elipse formulada por el matemàtico Ramanujan y que viene dada por

$$p\approx\pi(3(r+s)-\sqrt{(3r+s)(r+3s)})$$

donde r i s són los radios mayor y menor de la elipse. Calculando esta aproximación en el caso de nuestra elipse hemos obtenido $p\approx 8{,}58$ lo cual nos indica que no ha habido ningún fallo en la ejecución del programa.

[2] Además la función no se evalua en los puntos de discontinuidad evitable dado que los nodos de chebyschev para un intervalo no contienen los extremos del mismo.

[3] Problema que sin embargo se mantentrá cuando aproximemos la integral utilizando polinomios interpoladores de Splines.

El metodo de Newton lo he aplicado haciendo uso de la función 'Newton' definida en linea 1288 de la libreria 'CalculNumeri.h' mencionada anteriormente.

4.1. Elegir $x_0 \in]0,2[$ para iniciar el proceso iterativo.

Ayudandome con la imagen de la elipse mostrada en figura (1) y tras comprobar experimentalmente la convergéncia del método de Newton he decidido coger $x_0 = 0{,}5$.

4.2. Obtener los sucesivos $x_{k+1} = x_k - \frac{F(x_k)}{F'(x_k)}$ donde cada $F(x_k)$ requiere evaluar $F(x)$, aproximando la integral mediante interpolación de la función $\sqrt{1+y'(t)^2}$ por splines cúbicos naturales.

En la linea 662 de la libreria 'CalculNumeric.h' se encuentra definida la función 'PolinomiInterpoladorSplinesGaussSeidel' la cual, dados n nodos interpoladores, una tolerancia i el valor n calcula el polinomio interpolador cúbico natural de Splines aproximando (con la tolerancia dada) la solución al sistema lineal para encontrar los momentos mediante el método diterativo de Gauss Seidel[4] És importante notar que para poder aproximar la integral utilizando un polinomio interpolador de Splines y integrando este polinomio[5] no podemos utilizar el punto de abscisa 2 como punto interpolador dado que en este punto la función g, definida en (3), no és continua. Para arreglar este inconveniente lo que he hecho ha sido aproximar la integral de x a 2 de la función $g(t)$ con la integral de x a $2-\varepsilon$ de la misma función. Esta integral la he aproximado interpoando mediante polinomio cúbico natural de Splines la función $g(t)$ en el intervalo $[x, 2-\varepsilon]$. Tras investigar un poco he conseguido encontrar en el siguiente link una cota del error de interpolación del Splines Cúbico natural[6]. Según esta cota el error cometido al interpolar por el polinomio cúbico de Splines S la función f en un intervalo $[a,b]$ cumple

$$|f(x) - S(x)| \leq h^{\frac{3}{2}} \left(\int_a^b f''(t)^2 \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}} \tag{4}$$

donde h és la distància màxima entre dos nodos interpoladores consecutivos. En nuestro caso tenemos $f = g$ y, por lo tanto

$$g''(x) = \frac{2}{15^{\frac{3}{2}}} \frac{120 + 60x^2 - 23x^4}{(4-x^2)^4}$$

Por lo tanto tendremos

$$g''(x)^2 = \frac{4}{15^3} \frac{(23x^4 - 60x^2 - 120)^2}{(4-x^2)^8}$$

Integrando obtenemos

$$\int g''(t)^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{44040192} \Bigg(1824585 \ln(t+2) - \frac{4t}{(t^2-4)^7} (1824585t^{12} - 48655600t^{10} + 550781392t^8 - 2584412160t^6 + \\ + 6480454400t^4 - 17271296000t^2 + 32162672640) - 1824585 \ln(2-t) \Bigg) + c$$

Para poder entender esta expresión he realizado un plot de la integral con $c = 0$ y que se muestra en la figura (2). Notemos que, tal y como cabria esperar dado que no se puede interpolar mediante polinomios de tercer grado funciones con discontinuidades esenciales, la cota del error diverge cuando intentamos interpolar cerca de la asimptota. Además podemos observar notendo el termino $\frac{4t}{(t^2-4)^7}$ en la formula de $\int g''(t)^2 \mathrm{d}t$ que la velocidad con la cual esta integral tiende a infinito cuando intentamos extender la integral desde x hasta 2 és la misma con la que la función $f(x) = \frac{7852215}{(2-x)^7}$[7] tiende a infinito cuando x tiende a 2. Por lo tanto, por la equacion (4) , la velocidad con la cual la cota del error tiende a infinito cuando intentamos interpolar la función g hasta 2 serà la misma con que la fracción $h^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{7852215}{(2-x)^7}}$ tiende a infinito cuando x tienda a 2. Finalmente, si acotamos el error de la integral por el producto entre

[4] Se puede encontrar definida la función para aplicar este método en la linea 842 de la misma libreria.

[5] En linea 1164 de la libreria 'CalculNumeric.h' se encuentra definida la función utilizada para integrar el polinomio interpolador de Splines.

[6] Para encontrar una cota del error de integración multiplicaremos este valor por la longitud del intervalo de integración lo cual nos darà como resultado un error del mismo orden.

[7] El número 7852215 se ha obtenido a partir de la fracción $\frac{4*32162672640}{(x+2)^7}$ evaluada cuando x tiende a 2.

Figura 2: Valor de la integral $\int g''(t)^2 \mathrm{d}t$ la cual ens indica la cota del error de interpolar por Splines la función g en el intervalo $[0, x]$ notemos como la función diverge al acercarnos a 2.

la cota de interpolación i el intervalo de integración obtendremos que, cuando intentemos extender la integral hasta 2 la cota del error de integración crecerà como

$$E_{int} \approx (2-x)h^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{7852215}{(2-x)^7}} \leq h^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{31408860}{(2-x)^7}} < 6000h^{\frac{3}{2}}(2-x)^{-\frac{7}{2}}$$

Es importante ser consciente de que esta cota és vàlida únicamente si x és un valor cercano a 2, pero, dado que nuestro objectivo és hacer que la integral se extienda hasta 2 esta cota és aplicable en nuestro caso.

Por otro lado tenemos que el error de truncamiento dado por la integral $\int_{2-\varepsilon}^{2} g(t)\mathrm{d}$ se puede acotar superiormente haciendo

$$E_{tru} = \int_{2-\varepsilon}^{2} g(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int_{2-\varepsilon}^{2}\sqrt{\frac{64-15x^2}{(2+x)(2-x)}}\mathrm{d}t \leq \frac{1}{4}\int_{2-\varepsilon}^{2}\sqrt{\frac{4+30\varepsilon-15\varepsilon^2}{4-\varepsilon}\frac{1}{2-x}}\mathrm{d}t =$$
$$= -\frac{\sqrt{4+30\varepsilon-15\varepsilon^2}}{2\sqrt{4-\varepsilon}}\int_{2-\varepsilon}^{2}\frac{\mathrm{d}(2-x)}{2\sqrt{2-x}} = \frac{\sqrt{4+30\varepsilon-15\varepsilon^2}}{2\sqrt{4-\varepsilon}}\sqrt{\varepsilon}$$

De forma anàloga podemos acotar inferiormente la integral por $\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}$. Resumiendo lo que acabamos de ver tenemos que si queremos aproximar la integral $\int_{x}^{2} g(t)\mathrm{d}t$ mediante polinomios interpoladores de Splines serà necesario dividir la integral en dos partes

- La primera parte, la integral de x a $2-\varepsilon$ tiene asociado un error que diverge cuando $\varepsilon \to 0$ con una velocidad de $6000h^{\frac{3}{2}}\varepsilon^{-\frac{7}{2}}$ donde h és la longitud de los intervalos en los que se divide Splines.
- La segunda parte, la integral de $2-\varepsilon$ a 2 tiende a 0 cuando ε tiende a o con una velocidad igual a la mitad de la raiz cuadrada de ε.

Por lo tanto la suma de los dos errores en un entorno del 2[8] es del orden de $e(\varepsilon) = 6000\frac{h^{\frac{3}{2}}}{\varepsilon^{\frac{7}{2}}} + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}$ derivando esta formula respecto de ε para encontrar el valor de ε que minimize la cota del error obtenemos

$$e'(\varepsilon) = \frac{1}{4\sqrt{\varepsilon}} - 21000\frac{h^{\frac{3}{2}}}{\varepsilon^{\frac{9}{2}}}$$

que se anula en $\varepsilon = \sqrt[4]{84000}h^{\frac{3}{8}} = \varepsilon_m$[9] donde la función $e(\varepsilon)$ asume un valor de $e(\varepsilon_m) = \frac{6000}{\sqrt[8]{84000^7}}h^{\frac{3}{16}} + \frac{\sqrt[8]{84000}}{2}h^{\frac{3}{8}}$. Para simplificar los calulos acotaremos $\frac{6000}{\sqrt[8]{84000^7}} < 0{,}3$ y $\frac{\sqrt[8]{84000}}{2} < 2{,}1$. Tendremos por lo tanto que, la suma entre error de truncamiento y error de interpolación en el caso en que el error de truncamiento sea suficientemente pequeño està acotado por

$$|err| \leq 0{,}3h^{\frac{3}{16}} + 2{,}1h^{\frac{3}{8}}$$

[8]Si nos alejamos demasiado de este punto la segunda parte de la integral crece demasiado como para poder considerar que la aproximación es valida.

[9]Notemos que para $h = 10^{-2}$ tendremos $\varepsilon_m \approx 3$ valor demasiado grande como para que la formula de acotación empleada tenga sentido.

Buscando h tal que $|err| \leq 10^{-8}$ obtendremos

$$2{,}1\left(h^{\frac{3}{16}}\right)^2 + 0{,}3\left(h^{\frac{3}{16}}\right) - 10^{-8} \leq 0 \Leftarrow h < \left(3{,}2 \cdot 10^{-8}\right)^{\frac{16}{3}} \approx 10^{-40}$$

En resumen si queremos estar seguros de obtener un error menor a 10^{-8} en la interpolación serà necesario (a parte de realizar el truncamiento en el punto adecuado definido anteriormente) realizar la interpolación por splines con nodos equiespaiados tales que la distancia entre un nodo y el sucesivo sea del orden de 10^{-40}.
Llegados a este punto és importante tener en cuenta dos cosas sobre la cota del error dada.

Primero la cota dada és una cota lo cual significa que el error no podrà superar la cota, no obstante el error cometido podria ser mucho menor que el error dado por la cota. En efecto podriamos acotar mejor el error cometido al integrar si lo hubieramos acotado por la suma del error màximo de interpolaión en cada intervalo multiplicado por la longitud de cada intervalo. Esto mejoraria mucho la cota del error dado que el error de interpolación és mucho mayor en puntos cercanos al 2 que en el resto del intervalo de integración cosa que provoca que la cota del error que hemos propuesto sea mucho mayor al error cometido realmente[10]. También seria posible encontrar una cota del error de forma numérica evaluando la diferéncia entre la función a interpolar y el polinomio interpolador y aproximando la integral de este error[11]. Este proceso no obstante imposibilita el calculo del error de interpolación previo al calculo del polinomio interpolador de Splines y habria imposibilitado un estudio a priori del error cometido.

La segunda cosa a tener en cuenta és que la cota del error dada no tiene en cuenta errores al hacer operaciones en coma flotante ni el error cometido al aproximar la solución del sistema lineal asociado a los polinomios de Splines mediante el método de Gauss-Seidel.

Teniendo en mente todos los posibles errores relacionados con la aproximación de la integral pedida mediante polinomios de Splines los calculos pedidos integrando mediante Quadratura de Gauss-Chebyschev además de mediante polinomios interpoladores de Splines para poder comparar los resultados.

4.3. Parar el proceso iterativo cuando $|x_{k+1} - x_k| < 10^{-6}$

Aplicando el metodo de Newton para encontrar el cero de la función F hemos obtenido el punto 0.422687889 aproximando las integrales[12] mediante Splines. Por otro lado, aplicando el metodo de Newton para encontrar el cero de la función F hemos obtenido el punto 0.4284492159.
Dado que, para el calculo de la integral presentada en este ejercicio, el metodo de quadratura de Gauss-Chebyschev no tenia el inconveniente de intentar aproximar mediante polinomios una función con una discontinuidad esencial y, por lo tanto, no tenia que negligir una pequeña parte de la integral[13], considero que la segunda aproximación és mejor que la primera.

[10] No obstante para hacer esto seria necesario encontrar una formula para acotar el error de interpolacion por Splines cúbico natural en cada intervalo cosa que no he logrado hacer

[11] En la carpeta CODIGOS o en Programas Proyecto curso se puede encontrar el programa ErrorSplines el cual tiene este objetivo.

[12] Las integrales se hacen desde x hasta $2 - 0{,}6e-3$ para evitar errores debido a la assintota vertical que presenta la función g en el punto 2.

[13] Tambien tiene la ventaja respecto de Splines de no tener que resolver un sistema lineal para encontrar el polinomio interpolador.