Ordre de convergència de la secant

Marco Praderio 1361525

Demostrem que l'ordre de convergència del mètode de la secant és $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
La successió donada per el mètode de la secant per trobar zeros de una funció f es defineix de forma recursiva com

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Amb $x_0 = a + \varepsilon_0$ i $x_1 = a + \varepsilon_1$ on a és el zero de la funció f i ε_0 i ε_1 són nombres reals.
Si ara escribim $x_n = a + \varepsilon_n$ podem reescriure la identitat anterior com

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n - f(a+\varepsilon_n)\frac{\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}}{f(a+\varepsilon_n) - f(a+\varepsilon_{n-1})} \tag{1}$$

Si ara suposem que f és una funció C^2 tal que $f'(a)$,$f''(a) \neq 0$ aleshores podem escriure

$$f(a+\varepsilon_n) = f(a) + f'(a)\varepsilon_n + \frac{f''(a)}{2}\varepsilon_n^2 + R(\varepsilon_n^2) = f'(a)\varepsilon_n + \frac{f''(a)}{2}\varepsilon_n^2 + R(\varepsilon_n^2)$$

On $\lim\limits_{e_n \to 0} \frac{R(\varepsilon_n^2)}{e_n^2} = 0$. Per tant, per 1 tindrem que, si $x_n \to a \Leftrightarrow \varepsilon_n \to 0$ aleshores per a n prou gran

$$\varepsilon_{n+1} \approx \varepsilon_n - (f'(a)\varepsilon_n + \frac{f''(a)}{2}\varepsilon_n^2)\frac{\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}}{f'(a)\varepsilon_n + \frac{f''(a)}{2}\varepsilon_n^2 - (f'(a)\varepsilon_{n-1} + \frac{f''(a)}{2}\varepsilon_{n-1}^2)} =$$

$$= \varepsilon_n - \frac{f'(a)\varepsilon_n + \frac{f''(a)}{2}\varepsilon_n^2}{f'(a) + \frac{f''(a)}{2}(\varepsilon_n + \varepsilon_{n-1})} = \varepsilon_n - \frac{\varepsilon_n + \frac{f''(a)}{2f'(a)}\varepsilon_n^2}{1 + \frac{f''(a)}{2f'(a)}(\varepsilon_n + \varepsilon_{n-1})} =$$

$$= \frac{\frac{f''(a)}{2f'(a)}\varepsilon_n\varepsilon_{n-1}}{1 + \frac{f''(a)}{2f'(a)}(\varepsilon_n + \varepsilon_{n-1})} \approx \frac{f''(a)}{2f'(a)}\varepsilon_n\varepsilon_{n-1}$$

Si ara denotem $M = \frac{f''(a)}{2f'(a)}$ i suposem que existeix p tal que existeix el límit $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|\varepsilon_{n+1}|}{|\varepsilon_n|^p} = C$ obtenim

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\varepsilon_{n+1}|}{|\varepsilon_n|^p} = C \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{|M||\varepsilon_n||\varepsilon_{n-1}|}{|\varepsilon_n|^p} = C \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{|\varepsilon_{n-1}|}{|\varepsilon_n|^{p-1}} = \frac{C}{|M|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{|\varepsilon_n|^{p-1}}{|\varepsilon_{n-1}|} = \frac{|M|}{C} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{|\varepsilon_n|}{|\varepsilon_{n-1}|^{\frac{1}{p-1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|\varepsilon_{n-1}|}{|\varepsilon_n|^{\frac{1}{p-1}}} = \left(\frac{|M|}{C}\right)^{\frac{1}{p-1}}$$

Per tant, com que l'ordre de convergència és únic tenim que $p = \frac{1}{p-1}$ i, com que és positiu aleshores tenim que l'ordre de convergència de la secant (amb les hipòtesis que hem fet és $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$