Algoritme anti Newton

Marco Praderio 1361525

El mètode de Newton resulta sovint molt útil i convergeix sovint més ràpidament que el mètode de la bijecció. No obstant no és un mètode 100% eficaç i pot no convergir i quedar atrapat en un bucle. En aquest breu text presentaré una manera per construir un polinomi de grau n tal que, donats un nombre n de punts de $\mathbb{R}$ diferents disposats en qualsevol ordre aplicant el mètode de Newton agafant com a valor inicial qualsevol d'aquests punts es caurà en un cicle que recorrerà tots aquests punts en ordre. anomenem $x_1, x_2, \ldots, x_n$ els punts per els cuals volem que passi l'algoritme que apliqui el mètode de Newton i agafem $p(x)$ un polinomi. Aleshores és condició necessaria i suficient per tal de que $p(x)$ tingui les proprietats desitjades que, per a tot $i = 0,\ldots,n$ es compleixi

$$x_i = x_{i-1} - \frac{p(x_{i-1})}{p'(x_{i-1})}$$

on $x_0 = x_n$. Notem que, com que els valors x_i són tots diferents aleshores $p(x_i)$ ha de ser diferent 0 per a tot x_i i si $p(x_i)$ és diferent de 0 per a tot x_i aleshores

$$x_i = x_{i-1} - \frac{p(x_{i-1})}{p'(x_{i-1})} \Leftrightarrow x_i \cdot p'(x_{i-1}) = x_{i-1} \cdot p'(x_{i-1}) - p(x_{i-1})$$

en quant, si és complís la segona equació, $p'(x_i)$ hauria de ser diferent de 0 per a tot i (en cas contrari hi hauria un $p(x_i) = 0$).
Per tant, si imposem $p(x_i) = 1$ per a tot $i = 1,\ldots,n$ i denotem $p(x) = a_1 + a_2 x + ... + a_{2n} x^{2n-1}$ podem reduir el problema de determinar el polinomi a resoldre el següent sistema de equacions lineals

$$\begin{cases} \text{eqn}_1: & p(x_1) = 1 \\ \vdots & \\ \text{eqn}_n: & p(x_n) = 1 \\ \text{eqn}_{n+1}: & p'(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) + p(x_{i-1}) = 0 \\ \vdots & \\ \text{eqn}_{n+i}: & p'(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) + p(x_{i-1}) = 0 \\ \vdots & \\ \text{eqn}_{2n}: & p'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) + p(x_{n-1}) = 0 \end{cases}$$

Qualsevol polinomi (de qualsevol grau) que sigui solució d'aquest sistema tindrà les proprietats desitjades.