Problema 1 llista 4

Marco Praderio 1361525

Sigui $P_4(x)$ el polinomi interpolador d'una funció f en els nodes $a-2h$, $a-h$, a, $a+h$, $a+2h$. Derivant $P_4(x)$ obtenim l'anomenada *fórmula dels cinc punts* per a aproximar $f'(x)$:

$$f'(a) \approx \frac{1}{12h}(f(a-2h) - 8f(a-h) + 8f(a+h) - f(a+2h))$$

Doneu una fórmula per a l'error $f'(a) - P_4'(a)$.

Desenvolupant per Taylor al voltant del punt a la funció f[1] obtenim:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \\ &= f(a) + f^{I)}(a)(x-a) + \frac{f^{II)}(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f^{III)}(a)}{6}(x-a)^3 + \frac{f^{IV)}(a)}{24}(x-a)^4 + \frac{f^{V)}(a)}{120}(x-a)^5 + O(x-a)^6 \end{aligned} \tag{1}$$

Si ara substituïm aquesta formula en la aproximació de $f'(a)$ esmentada obtenim:

$$\begin{aligned} P_4'(a) &= \frac{1}{12h}(f(a-2h) - 8f(a-h) + 8f(a+h) - f(a+2h)) = \\ &= \frac{1}{12h}\Bigg(f(a) - 2hf^{I)}(a) + 2h^2 f^{II)}(a) - \frac{4}{3}h^3 f^{III)}(a) + \frac{2}{3}h^4 f^{IV)}(a) - \frac{4}{15}h^5 f^{V)}(a) + O_{-2h}(-2h)^6 - \\ &\quad - 8\left(f(a) - hf^{I)}(a) + \frac{h^2}{2} f^{II)}(a) - \frac{h^3}{6} f^{III)}(a) + \frac{h^4}{24} f^{IV)}(a) - \frac{h^5}{120} f^{V)}(a) + O_{-h}(-h)^6 \right) + \\ &\quad + 8\left(f(a) + hf^{I)}(a) + \frac{h^2}{2} f^{II)}(a) + \frac{h^3}{6} f^{III)}(a) + \frac{h^4}{24} f^{IV)}(a) + \frac{h^5}{120} f^{V)}(a) + O_{h}(h)^6 \right) - \\ &\quad - f(a) - 2hf^{I)}(a) - 2h^2 f^{II)}(a) - \frac{4}{3}h^3 f^{III)}(a) - \frac{2}{3}h^4 f^{IV)}(a) - \frac{4}{15}h^5 f^{V)}(a) + O_{2h}(2h)^6 \Bigg) = \\ &= \frac{1}{12h}\left(+12hf^{I)}(a) - \frac{2}{5}h^5 f^{V)}(a) + O'(h)^6 \right) = f'(a) - \frac{1}{30}h^4 f^{V)}(a) + O(h)^5 \end{aligned}$$

Es compleix per tant que

$$f'(a) - P_4'(a) = \frac{1}{30}h^4 f^{V)}(a) + O(h)^5$$

Si denotem

$$F(h) = \frac{1}{12h}(f(a-2h) - 8f(a-h) + 8f(a+h) - f(a+2h))$$

demostreu que el seu desenvolupament asimptòtic és

$$F(h) = f'(a) + b_1 h^4 + b_2 h^6 + b_3 h^8 + \cdots$$

[1] estem suposant que la funció f és prou regular com perquè tingui sentit lo que escrivim.

Reescrivint $F(h)$ i aplicant el desenvolupament en sèrie de potències que es mostra en (1) obtenim

$$F(h) = \frac{1}{12h}(f(a-2h) - 8f(a-h) + 8f(a+h) - f(a+2h)) = \frac{(f(a-2h) - f(a+2h)) - 8(f(a-h) - f(a+h))}{12h} =$$

$$= \frac{\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(a)}{n!}(-2h)^n - \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(a)}{n!}(2h)^n\right) - 8\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(a)}{n!}(-h)^n - \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(a)}{n!}(h)^n\right)}{12h} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{f^{n)}(a)}{n!}((-2h)^n - (2h)^n)\right) - 8\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{f^{n)}(a)}{n!}((-h)^n - (h)^n)\right)}{12h} =$$

$$= \frac{-\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{2n+1)}(a)}{(2n+1)!}(2h)^{2n+1} + 8\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{2n+1)}(a)}{(2n+1)!}(h)^{2n+1}}{6h} = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{2n+1)}(a)}{(2n+1)!}(8 - 2^{2n+1})h^{2n} =$$

$$= f'(a) + 0 + \frac{1}{6}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{f^{2n+1)}(a)}{(2n+1)!}(8 - 2^{2n+1})h^{2n} = f'(a) + b_1h^4 + b_2h^6 + b_3h^8 + \dots$$

On hem definit $b_n = \frac{f^{2n+3)}(a)}{6(2n+3)!}(8 - 2^{2n+3})$

Apliqueu l'extrapolació de Richardson a $F(h)$ per calcular $f'(2)$ amb $f(x) = x \cdot sin(x)$ (preneu $h_0 = 0,1$ i $q = 1/2$).

Abans de aplicar l'extrapolació de Richardson en el 0 calculem explícitament $f'(2)$ d'aquesta manera obtenim el següent resultat:

$$f'(x) = \sin(x) + x\cos(x) \Rightarrow f'(2) = \sin(2) + 2\cos(2) \approx 0.0770037537314$$

Usant aquest valor com a valor real de $f'(2)$ mirem (executant el programa 'Problema1Llista4') a partir de quin valor de $h_i = q^i \cdot h_0$ la avaluació de F en el punt h_i comença a donar errors degut a operacions amb punt flotant. Obtenim d'aquesta manera que la funció F dóna la millor aproximació de $f'(2)$ en el vuitè valor o sigui avaluant-la en el punt $h_7 = 10^{-1}2^{-7}$. Aplicant Extrapolació de Richardson (sempre fent servir el programa 'Problema1Llista4') amb les 8 dades inicials donades per $F(h_i)$ amb $i = 0, \dots, 7$ obtenim l'aproximació de $f'(2)$ donada per

$$f'(2) \approx 0.0770037537313$$

Que te 12 decimals iguals a la anterior aproximació de la derivada obtinguda.