Práctica 3: Interpolación

Marco Praderio y Marta Cavero

1. Estudia la interpolación polinómica en la base de Newton con diferencias divididas para la función

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2} \quad x \in [-1, 1]$$

unsando nodos equidistantes x_j,

$$x_j = -1 + j\frac{2}{n} \qquad j = 0, \ldots, n$$

y nodos de Chebyschev x_j,

$$x_j = cos\left(\frac{2j+1}{n+1}\frac{\pi}{2}\right) \quad j = 0, ..., n$$

para $n = 4, 8, 16, 32, 64$.

1.1. Estudiar el error máximo que se comete a medida que se aumenta el número de nodos de interpolación. Sugerencia: calcular (y dibujar) $|f(x_j) - p(x_j)|$ en cada uno de los casos para valores $x_k = -0{,}989 + k \cdot 0{,}011, k = 0, \ldots, 180$ (abscisas en $[-1, 1]$ que no coinciden con los nodos de interpolación).

Ejecutando el programa 'Problema1 ' y haciendo uso de la libreria 'Interpolacio.h'[1] obtenemos las gráficas mostradas en las Figuras 1, 2, 3, 4 y 5. Obtenemos además los datos, que se pueden observar en cuadro 1, relativos al error máximo cometido al aproximar con los polinomios interpoladores.

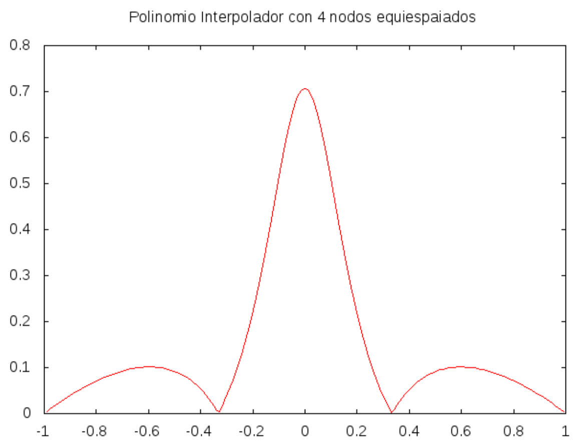
1.2. Comentar las diferencias en la interpolación.

Es interesante notar que, aunque en el caso de 4 nodos interpoladores los resultados obtenidos son prácticamente idénticos, en general, la interpolación obtenida haciendo uso de Nodos de Chebyschev es mejor que la obtenida haciendo

[1] Ambos se pueden encontrar en la carpeta CODIGOS o en Programas práctica 3

Nodos equidistantes					
Nodos	4	8	16	32	64
punto de máximo error	0.001	0.001	-0.967	-0.989	0.991
Error	0.706988829811	0.247338223727	2.09265583932	674.648811213	1.35779692856e+8
Nodos de Chebyschev					
Nodos	4	8	16	32	64
punto de máximo error	0.001	0.001	0.001	0.001	-0.989
Error	0.750275360769	0.391717956015	0.0830943329477	0.0034634972307	2.14716689758

Cuadro 1: Error máximo cometido en la interpolación mediante 4, 8, 16, 32 y 64 nodos equidistantes y de Chebyschev juntamente con el punto en el que se cometen. Notemos que todos los valores de error que superan la únidad se encuentran en los extremos del intervalo $[-1, 1]$.

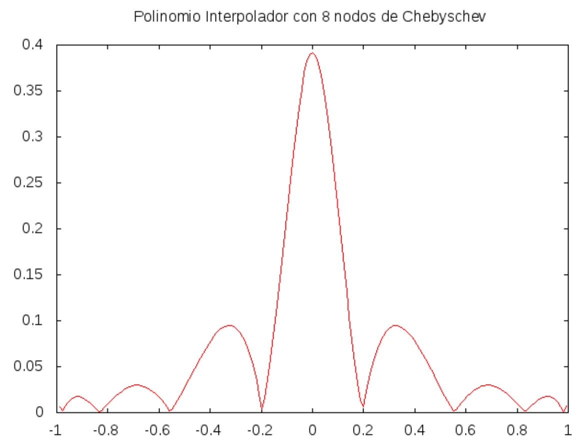


(a) 4 nodos equidistantes.

(b) 4 nodos de Chebyschev.

Figura 1: Curvas de error de polinomios obtenidos interpolando la función $\frac{1}{1+25x^2}$ mediante 4 nodos equidistantes y 4 nodos de Chebyschev.

(a) 8 nodos equidistantes.



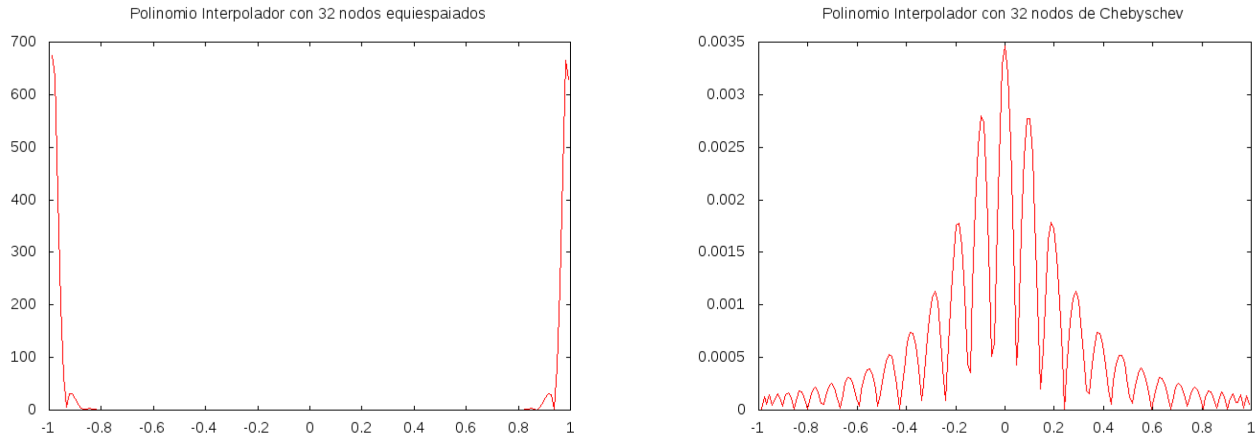
(b) 8 nodos de Chebyschev.

Figura 2: Curvas de error de polinomios obtenidos interpolando la función $\frac{1}{1+25x^2}$ mediante 8 nodos equidistantes y 8 nodos de Chebyschev.

(a) 16 nodos equidistantes.

(b) 16 nodos de Chebyschev.

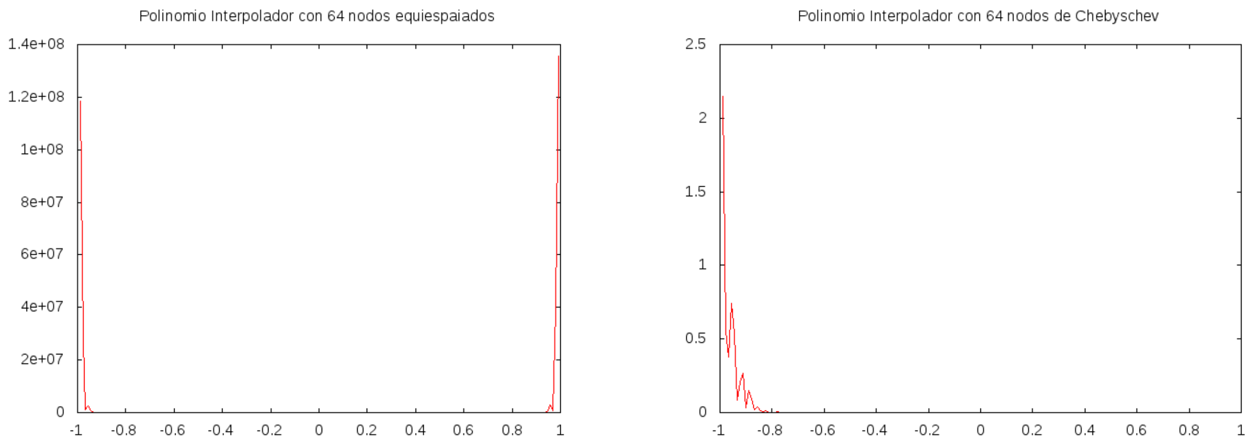
Figura 3: Curvas de error de polinomios obtenidos interpolando la función $\frac{1}{1+25x^2}$ mediante 16 nodos equidistantes y 16 nodos de Chebyschev. Notemos que para nodos equidistantes el error en los extremos es muy superior a el resto de intervalo.



(a) 32 nodos equidistantes.

(b) 32 nodos de Chebyschev.

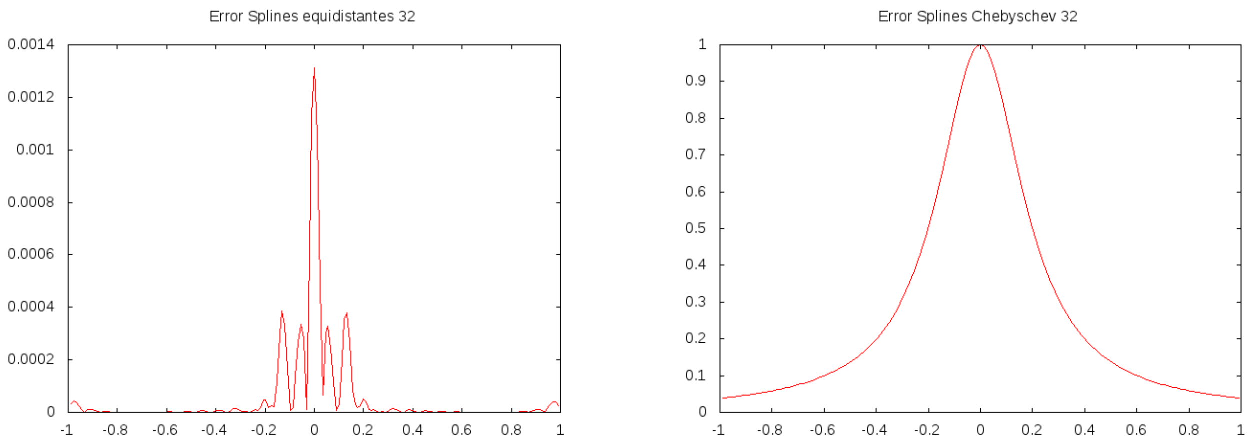
Figura 4: Curvas de error de polinomios obtenidos interpolando la función $\frac{1}{1+25x^2}$ mediante 32 nodos equidistantes y 32 nodos de Chebyschev. Notemos como en el caso de la interpolación por nodos equidistantes el error empieza a subir peligrosamente en los extremos del intervalo.



(a) 64 nodos equidistantes.

(b) 64 nodos de Chebyschev.

Figura 5: Curvas de error de polinomios obtenidos interpolando la función $\frac{1}{1+25x^2}$ mediante 64 nodos equidistantes y 64 nodos de Chebyschev. Notemos como el error en los extremos crece debido probablemente a errores en calculo de coma flotante. En el caso del polinomio de Chebyschev sabemos seguro que es debido a errores en calcuo de coma fotante porque hemos logrado reducir considerablemente el error máximo (ha pasado desde 1.e+11 al actual) simplemente utilizando el esquema de Horner para evaluar los polinomios el cual es el numéricamente mas estable. En el caso de los nodos equidistantes también hemos logrado reducir el error pasando de 1.e+12 al actual pero el hecho de que el error siga siendo tan alto y de que aparezca también con una cantidad de nodos muy inferior nos hace pensar que, probablemente, la interpolación polinómica de $\frac{1}{1+25x^2}$ en el intervalo $[-1, 1]$ obtenida a partir de nodos equidistantes diverja en los extremos de este intervalo.



(a) 32 nodos equidistantes.

(b) 32 nodos de Chebyschev.

Figura 6: Curvas de error para interpolación por trozos de 32 nodos equiespaiados y de Chebyschev.

uso de nodos equidistantes[2]. Otro dato a tener en cuenta es que, si estudiamos el error de interpolación cometido en el caso de interpolación mediante 16, 32 y 64 nodos equidistantes veremos[3] que, en las zonas centrales el error de interpolación es del orden de 10^{-2}, 10^{-4} y 10^{-8} respectivamente. Por otro lado en cambio, los polinomios interpoladores de Chebyschev (exceptuando el de 64 nodos) encuentran el máximo de su error de interpolación justamente en esta zona. En el caso del polinomio interpolador de Chebyschev obtenido con 64 nodos tenemos que el error de interpolación sube repentinamente en uno de los extremos del intervalo. Este fenómeno es debido a errores en los calculos de punto flotante hechos para encontrar y evaluar el polinomio interpolador y se podrian corregir por ejemplo empleando variables con mas precisión que las de tipo double. No obstante, si ignoramos esta parte de la gráfica y nos fijamos en el error de interpolación cometido en el resto del intervalo veremos que el error de interpolación es del orden de 10^{-6} bastante mayor del que obtenemos interpolando en la parte central mediante nodos equidistantes pero con la ventaja de que se mantiene cerca del mismo valor de error en todo el intervalo.

A partir de los datos obtenidos y las observaciones hechas podemos deducir que en el caso de disponer tanto de polinomios interpoladores obtenidos mediante nodos equidistantes y polinomios interpoladores obtenidos mediante nodos de chebyschev el método a seguir optimal para interpolar la función seria el de utilizar los primeros para interpolar con gran precisión valores centrales del intervalo y los segundos para interpolar el polinomio en el resto del intervalo. Además es importante estar atentos con no utilizar demasiados nodos interpoladores o algorismos poco eficientes dado que esto puede provocar errores importantes de calculo en punto flotante.

1.3. Utilizar interpolación polinómica a trozos. Comparar numéricamente el error máximo de Chebyschev con los nuevos resultados.

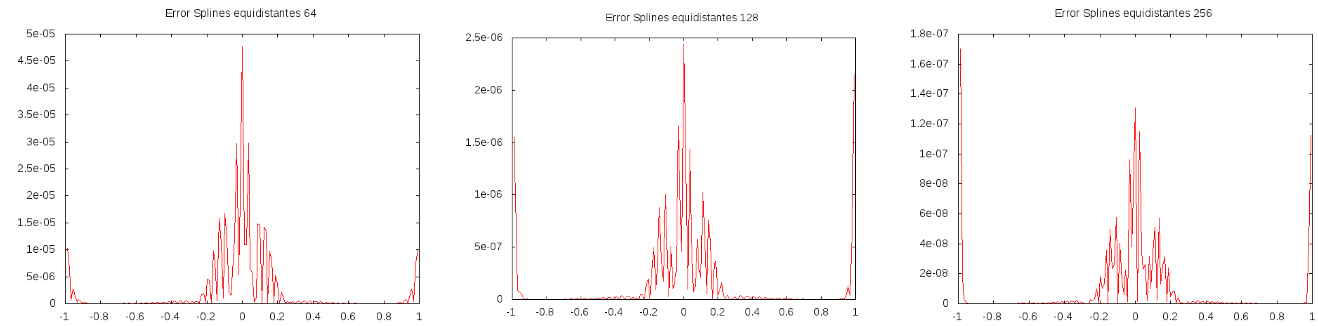
Ejecutando el programa 'Splines' para diferentes números de nodos y haciendo uso de la libreria 'Interpolacio.h'[4] obtenemos las gráficas mostradas en las Figuras 6, 7.

Como podemos ver en la figura 6 la función obtenida interpolando por trozos en los nodos de Chebyschev no funciona dado que la curva de error coincide con la función (la función obtenida al interpolar es constante). Hemos probado con diferente número de nodos y el resultado obtenido no ha variado. Esto nos indica que los nodos de Chebyschev aunque son muy útiles para reducir el error de interpolación polinómica de Lagrange, no es útil para hacer interpolación por Splines. No obstante los resultados obtenidos mediante nodos equidistantes resultan mucho mejores que los que obteniamos con interpolación de Lagrange. En el caso de la interpolación de Lagrange el polinomio que más se ajusta a la función lo hemos obtenido con 32 nodos de Chebyschev con un error máximo del orden de 0.0035, mientras que con la interpolación a trozos y el mismo número de nodos equidistantes obtenemos un error máximo del orden de 0.0014 menos que la mitad que antes. Además, el algoritmo utilizado para encontrar la función intepoladora

[2]En el caso de la interpolación con 8 nodos aunque el error máximo se mayor en el caso de los nodos de Chebyschev podemos ver a partir de la gráfica 2 que el error fuera del intervalo donde se asume el máximo es menor en el caso de la interpolación mediante nodos de Chebyschev.

[3]Se pueden ver los datos utilisados para dibujar las gráficas en las subcarpetas que contienen la palabra datos dentro de la carpeta Graficas.

[4]Ambos se pueden encontrar en la carpeta CODIGOS o en Programas práctica 3



(a) 64 nodos equidistantes.

(b) 128 nodos equidistantes.

(c) 256 nodos equidistantes.

Figura 7: Curvas de error para interpolación por trozos de 64, 128 y 256 nodos. Notamos que el error en los extremos tiende a superar el error del centro a medida que aumenta el número de nodos a interpolar.

a trozos es notablemente más estable que la utilizada para encontrar los polinomios interpoladores de Lagrange. Esto resulta evidente ya que en el caso de interpolar por trozos 256 nodos equidistantes obtenemos un error máximo del orden de 10^{-7}, mientras que interpolando por Lagrange 64 nodos de Chebyschev obteníamos errores del orden de la unidad debido a errores de cálculo con coma flotante.

Podemos concluir por lo tanto que la interpolación por trozos es muy preferible a la interpolación de Lagrange.

2. Considerar la tabla de valores que corresponden a la función de Bessel de primera especie de orden cero, $J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$,

x	1.9	2.0	2.1	2.2
$J_0(x)$	0.281818559374385	0.223890779141236	0.166606980331990	0.110362266922174
x	2.3	2.4	2.5	2.6
$J_0(x)$	0.055539784445602	0.002507683297244	-0.048383776468198	-0.096804954397038
x	2.7	2.8	2.9	3.0
$J_0(x)$	-0.142449370046012	-0.185036033364387	-0.224311545791968	-0.260051954901934

2.1. Estimar el valor de la abscisa x* tal que $J_0(x) = 0$ mediante interpolación inversa de grados 1,3 y 5 utilizando en polinomios interpoladores en la forma de Newton para cada uno de los siguientes casos:

- **Interpolando valores positivos de $J_0(x)$ más próximos al cambio de signo de la función.**
- **Interpolando valores negativos de $J_0(x)$ más próximos al cambio de signo de la función.**
- **Interpolando valores de $J_0(x)$ simétricos alrededor del cambio de signo de la función.**

Ejecutando el programa 'Problema2' y haciendo uso de la libreria 'Interpolacio.h'[5] obtenemos los datos que se muestran en el cuadro 2.

Valores a interpolar	Grado del polinomio interpolador		
	1	3	5
Positivos	2.404728613882804	2.404822718113948	2.40482529478546
Valor en el punto	5.03292e-05	1.47416e-06	1.36489e-07
Negativos	2.400077241947102	2.404149375353531	2.404216734868256
Valor en el punto	0.0024675	0.000351088	0.000316109
Simetricos	2.406885837931727	2.404769184225625	2.404832619742294
Valor en el punto	-0.00106913	2.92665e-05	-3.66624e-06

Cuadro 2: El resultado obtenido aplicando interpolación inversa de la función de Bessel para valores negativos, positivos y simétricos respecto al cambio de signo de grado 1,3 y 5.

Para evaluar J_0 en los puntos obtenidos hemos calculado los 50 primeros iterados de la serie que define $J_0(x)$[6]. Dado que el enunciado especificaba utilizar valores simetricos para hacer la interpolación centrada entonces, en este caso, hemos utilizado únicamente los puntos: $(0{,}166606980331990; 2{,}1)$, $(0{,}110362266922174; 2{,}2)$, $(0{,}055539784445602; 2{,}3)$, $(-0{,}048383776468198; 2{,}5)$, $(-0{,}096804954397038; 2{,}6)$ y $(-0{,}185036033364387; 2{,}8)$, los cuales son los más simétricos respecto al origen de entre los que disponemos.

Vemos a partir de los resultados que la aproximación cuya imagen se aproxima más al cero[7] de la función de Bessel de primera especie de orden cero es, contrariamente a lo que podriamos pensar en un principio, la que hemos obtenido interpolando los valores positivos. Esto es debido a que, en el caso de la interpolación con valores positivos, los datos de los que disponemos son más próximos al cero dado que en el caso de la interpolación con valores simétricos hemos descartado el punto interpolador $(0{,}002507683297244, 2{,}4)$ que es el más próximo al cero.

Si repetimos los calculos utilizando los 6 puntos mas cercanos al cambio de signo[8] de la función (los primeros tres

[5] Ambos se pueden encontrar en la carpeta CODIGOS o en Programas práctica 3

[6] Dado que hemos notado que los resultados obtenidos a partirs del iterado 15 no varian para distintos valores de x hemos considerado que con 50 iterados seria suficiente para obtener una buena aproximación del valor real de la función de Bessel de primera especie y orden 0.

[7] En el apartado 2.2 veremos que esto es equivalente a decir que es la mejor aproximación del cero de la función J_0 y por lo tanto utilizaremos estos dos conceptos como sinonimos.

[8] Ejecutando el programa 'Problema2' podemos observar también los resultados obtenidos utilizando 2, 4, 8, 10 y 12 puntos lo más cercanos posibles al cambio de signo. Como era de esperar el resultado cuya imagen se aproxima más al 0 obtenido es el que deriva de utilizar todos los nodos (12) mediante la cual obtenemos el valor $\alpha = 2{,}40482555542959$ para el cual se cumple $J_0(\alpha) = 1{,}17648e-09$

positivos y los primeros tres negativos) obtenemos el valor 2.404825653043717 y en ese punto la función de Bessel de primera especie de orden 0 vale -4.94996e-08 la cual se acerca más al cero que el resultado de evaluar J_0 en la aproximación la obtenida interpolando únicamente valores positivos.

2.2. Sabiendo que la función $J_0(x)$ es estrictamente monótona y derivable, ¿qué resultado está más próximo a la raiz de la función? Comprobar que el razonamiento es consistente evaluando la función $J_0(x)$ en cada uno de los valores obtenidos para la aproximación de la raiz.

En este apartado demostraremos que decir que la imagen de las aproximaciones a la raiz obtenidas anteriormente se acercan más a 0 es equivalente a decir que son mejores aproximaciones de la raiz.

Si la función J_0 es monotona entonces es inmediato deducir que tiene una única raíz α. Además, dados dos puntos x_1 y x_2 tales que las imagenes tienen el mismo signo (podemos suponer sin perdida de generalidad que son positivas) se cumple que $J_0(x_2) > J_0(x_1) \Rightarrow x_2 > x_1 > \alpha$ dado que J_0 es monotona creciente y tanto $J_0(x_1)$ como $J_0(x_2)$ son positivos. Por lo tanto se cumple que $|J_0(x_2)| > |J_0(x_1)| \Rightarrow |x_2 - \alpha| > |x_1 - \alpha|$ por lo tanto a mejor aproximación a α que hemos obtenido está entre la que tiene imagen positiva más pequeá y la que tiene imagen negativa más grande. Además, dado que la función J_0 es derivable podemos aproximarla en un entorno de α a una recta. Dado que los dos resultados mencionados están bastante cerca del 0 es lícito aproximar la función J_0 en un entorno de α que contenga x_1 y x_2 las mejores aproximaciones a α de las que disponemos. Es por lo tanto lícito aproximar α por el punto en que la recta que pasa por $(x_1, J_0(x_1))$ y $(x_2, J_0(x_2))$ corta el eje de las abscisas. Llamaremos a este punto $\beta \approx \alpha$[9]. Notemos ahora que, por como hemos definido β se cumple que si $|J_0(x_1)| > |J_0(x_2)|$ entonces $|x_1 - \beta| > |x_2 - \beta|$ y, por lo tanto, teniendo en cuenta que el orden de convergencia del método de regula falsi es almenos lineal y que x_1 y x_2 son aproximaciones de α se cumplirá que

$$\begin{aligned} |x_1 - \beta| > |x_2 - \beta| &\Rightarrow |x_1 - \alpha| + |\beta - \alpha| > ||x_2 - \alpha| - |\beta - \alpha|| = |x_2 - \alpha| - |\beta - \alpha| \Rightarrow \\ &\Rightarrow |x_1 - \beta| > |x_2 - \beta| - 2|\beta - \alpha| \approx |x_2 - \beta| \Rightarrow \\ &\Rightarrow |x_1 - \alpha| > |x_2 - \alpha| \end{aligned}$$

En resumen, decir que $|J_0(x_1)| > |J_0(x_2)|$ donde x_1 y x_2 son aproximaciones de α implica decir que x_2 es mejor aproximación de α que x_1. Además, con las mismas x_1 y x_2 obtenemos aplicando desarrollo de Taylor de J_0 alrededor de α que

$$\begin{aligned} J_0(x_1) = J_0(\alpha) + J_0'(\alpha)(x_1 - \alpha) + R_{x_1} = J_0'(\alpha)(x_1 - \alpha) + R_{x_1} \\ J_0(x_2) = J_0(\alpha) + J_0'(\alpha)(x_2 - \alpha) + R_{x_2} = J_0'(\alpha)(x_2 - \alpha) + R_{x_2} \end{aligned}$$

Donde $R_{1,2}$ son residuos de orden de $O(x_{1,2} - \alpha)^2$. Podemos por lo tanto aplicar el mismo razonamiento anterior para afirmar que, suponiendo $x_{1,2}$ entonces $|x_1 - \alpha| > |x_2 - \alpha| \Rightarrow |J_0(x_1)| > |J_0(x_2)|$. Queda asi demostrado que, para aproximaciones de α la raiz de J_0 decir que su imagen se aproxima más a 0 es equivalente a decir que la aproximación se acerca más a α. Por lo tanto los razonamientos hechos comentando los resultados del apartado anterior son correctos.

[9] Notemos que acabamos de aplicar el método de regula falsi para encontrar β como una aproximación a α mejor que x_1 y x_2.

3. Estudiar la interpolación con polinomios de grado menor o igual que n para $n = 2 : 4 : 8 : 16$ para la función

$$f(x) = \frac{1}{3+x} \quad x \in [-1, 1]$$

utilizando interpolación de Lagrange con
-nodos equidistantes x_j,

$$x_j = -1 + j\frac{2}{n} \quad j = 0, \ldots, n$$

-nodos de Chebyshev x_j,

$$x_j = cos\left(\frac{2j+1}{n+1}\frac{\pi}{2}\right) \quad j = 0, ..., n$$

para $n = 2, 4, 8, 16$.

3.1. Dibujar la curva de error $(x, \log(|f(x) - p(x)|))$ (escala semilogaritmica) en cada uno de los casos para valores $x_k = -0{,}989 + k \cdot 0{,}011, k = 0, \ldots, 180$

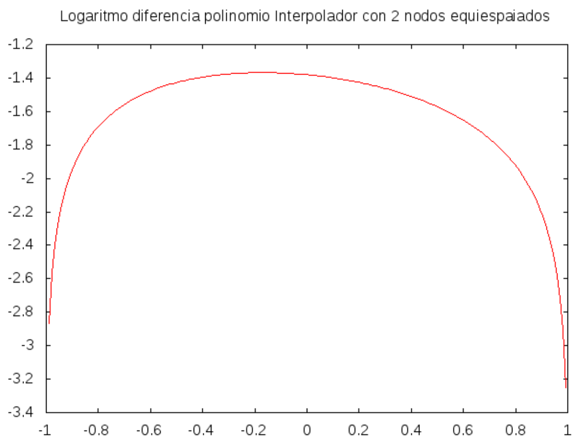
Antes de empezar haremos un breve analisis de la información que nos aportará el estudiar el error en la escala logaritmica y propondremos una ligera modificación a la escala presentada para poder maximizar sus ventajas respecto a la escala habitual.
Utilizar la escala logaritmica para estudiar el error cometido en la interpolación tiene, a nuestro parecer, dos ventajas y una desventaja.

La desventaja consiste en el hecho de que la función logaritmo no está definida en el 0 y, por lo tanto, dependiendo del método empleado para dibujar la curva, puede producir errores en el caso de que el polinomio interpolador corte la función que intentamos aproximar en uno de los puntos en los que hemos evaluado el logaritmo de la diferencia. Afurtunadamente, en nuestro caso, tenemos que C al relaizar las operaciones $\log(0)$ o $\log_{10}(0)$ devuelve como resultado el valor -inf sin producir ningún error. Por otro lado gnuplot (el programa utilizado para realizar las gráficas) al recibir la orden de hacer una gráfica de un listado de puntos (unidos para formar una curva continua) entre los cuales se encuentra el punto (x,-inf) tampoco produce error si no que simplemente ignora ese punto y dibuja dos lineas continuas (claramente separadas entre si) a partir de los conjuntos de puntos previos y posteriores al punto (x, -inf). Por lo tanto en el caso de que se produzca este error al que está sujeto la escala logaritmica seremos capaces de identificarlo a partir de la gráfica que producirá nuestro programa.

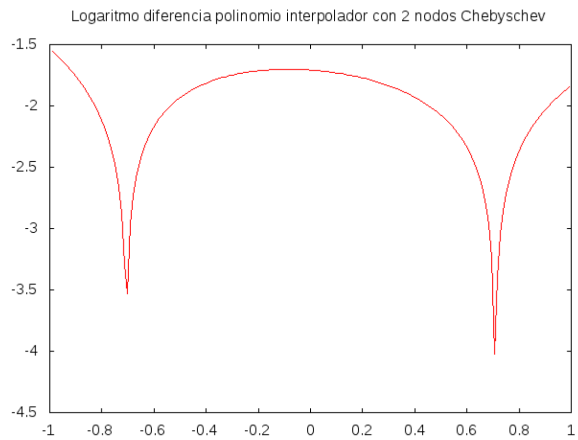
La primera ventaja nos ayudaria a resolver un problema que ya hemos tenido anteriormente y que se produce cuando el error de interpolación se dipara en un pequño intervalo lo cual no nos permite ver claramente a partir de la gráfica como se comporta el polinomio interpolador fuera de ese pequeño intervalo. La escala logaritmica deberia ayudarnos a resolver este problema dado que, al ser el logaritmo una función que crece muy lentamente, deberiamos poder ser capaces de mostrar en la misma gráfica tanto el pico producido en el pequeño intervalo mencionado anteriormente como la curva del error fuera ed este intervalo.[10]

Otra ventaja de la escala logaritmica (ventaja por la cual proponemos cambiar la escala logaritmica por la escala logarimica en base 10) es que, en el caso del logaritmo en base 10, la curva del error nos indica el número de decimales correctos con los que el polinomio interpolador aproxima la función en cada punto.

[10] Obviamente seguirá siendo posible que se produzca este inconveniente o que este problema se produzca con picos negativos de $\log(|f(x) - p(x)|)$. Pero que el problema se produzca con picos positivos es bastante más improbable que antes y los picos negativos, en nuestro caso, no llegarán nunca a superar el valor de -17 dado que la mínima diferencia entre dos variables tipo double del orden de magnitus de 1 (que es el orden de magnitud en el que se encuentra la imagen de $\frac{1}{3+x}$ para $x \in [-1, 1]$) que la máquina es capaz de detectar se encuentra acotada inferiormente por 10^{-17}.

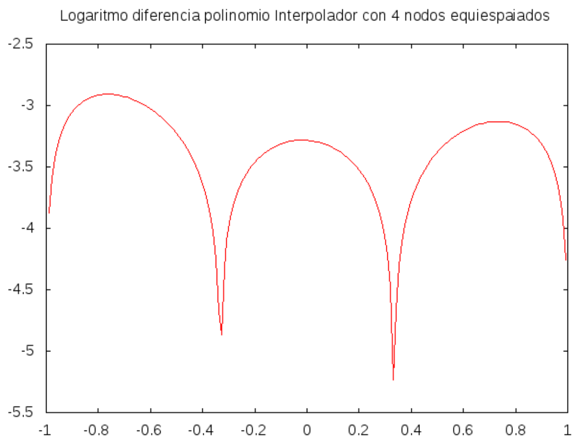


(a) 2 nodos equidistantes.

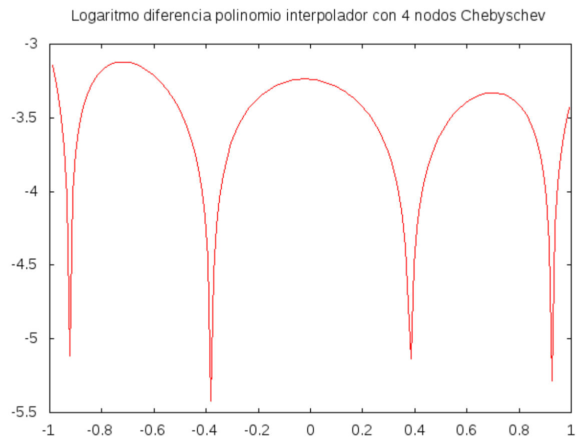


(b) 2 nodos de Chebyschev.

Figura 8: Curvas de error en escala logaritmica en base 10 para polinomios obtenidos interpolando 2 nodos equidistantes 2 nodos de Chebyschev.



(a) 4 nodos equidistantes.



(b) 4 nodos de Chebyschev.

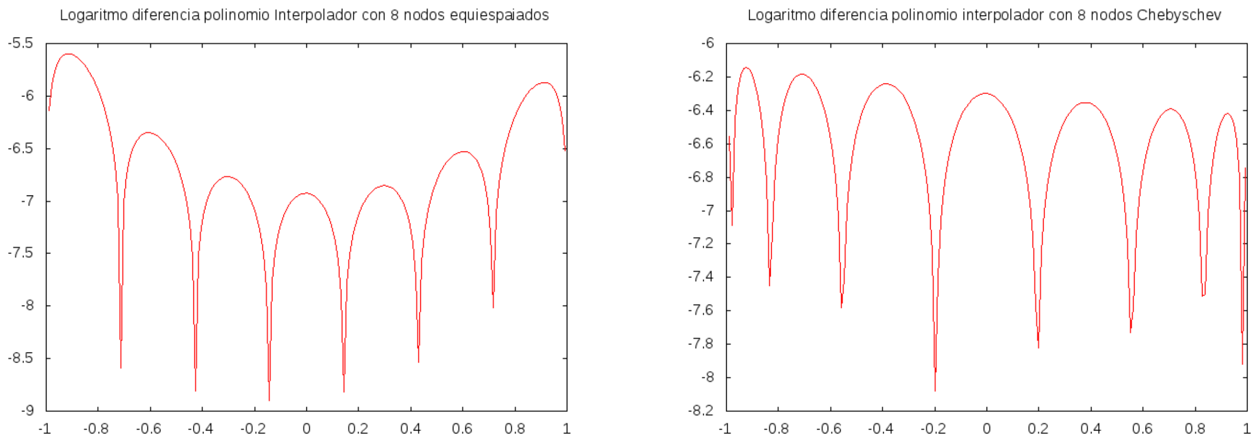
Figura 9: Curvas de error en escala logaritmica en base 10 para polinomios obtenidos interpolando 4 nodos equidistantes y 4 nodos de Chebyschev.

Ahora ya estamos preparados para buscar los polinomios interpoladores pedidos y analizar las curvas del error en escala logaritmica de base 10. Ejecutando el programa 'Problema3 ' y haciendo uso de la libreria 'Interpolacio.h'[11] obtenemos las gráficas mostradas en las Figuras 8, 9, 10 y 11. Obtenemos además los datos, que se pueden observar en cuadro 3, relativos al error máximo cometido al aproximar con los polinomios interpoladores.

Como podemos observar a partir de las gráficas y el cuadro ya mencionados el polinomio interpolador obtenido mediante nodos de Chebyschev siempre tiene un máximo del error inferior al del polinomio obtenido mediante nodos equidistantes. De hecho, en el caso de los polinomios obtenidos utilizando 16 nodos[12] la peor aproximación obtenida mediante nodos de Chebyschev supera en dos cifras decimales correctas a la peor aproximación obtenida mediante nodos equidistantes.
No obstante también es interesante notar que, aunque la cota del error de interpolación dada por los polinomios de Chebyschev sea claramente mejor a la que obtenemos mediante nodos equidistantes, el error cometido se mantiene aproximadamente constante en todo el intervalo $[-1, 1]$. En cambio, en el caso del polinomio obtenido mediante nodos equidistantes, el error decrece notablemente para los valores centrales. Podemos observar claramente este fenómeno

[11] Ambos se pueden encontrar en la carpeta CODIGOS o en Programas práctica 3

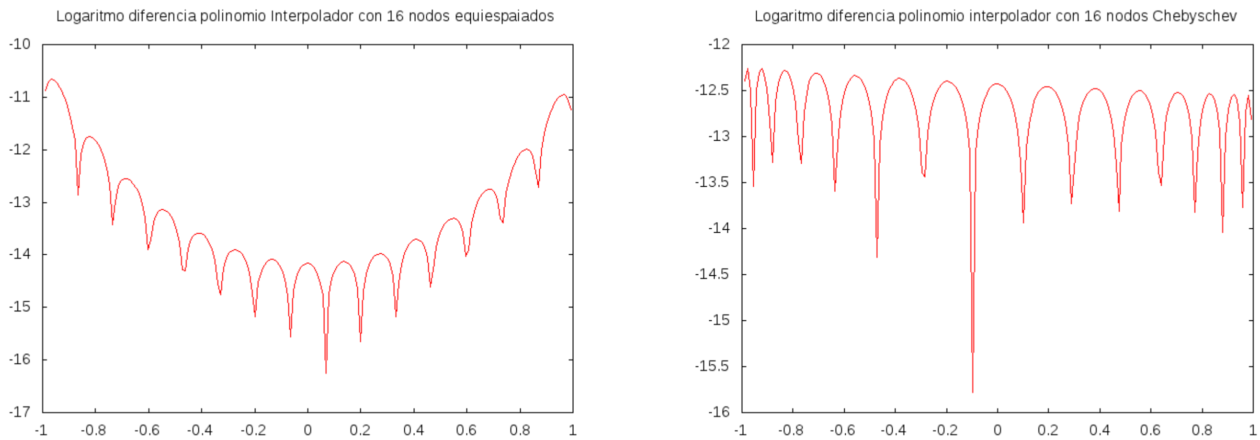
[12] debido al alto número de nodos en este caso se pueden apreciar mejor las diferencias entre los resultados obtenidos con nodos de Chebyschev y los resultados obtenidos con los nodos equidistantes. Estas diferencias no se aprecian en los polinomios obtenidos con solo 2 nodos.



(a) 8 nodos equidistantes.

(b) 8 nodos de Chebyschev.

Figura 10: Curvas de error en escala logaritmica en base 10 para polinomios obtenidos interpolando 8 equidistantes y 8 nodos de Chebyschev.



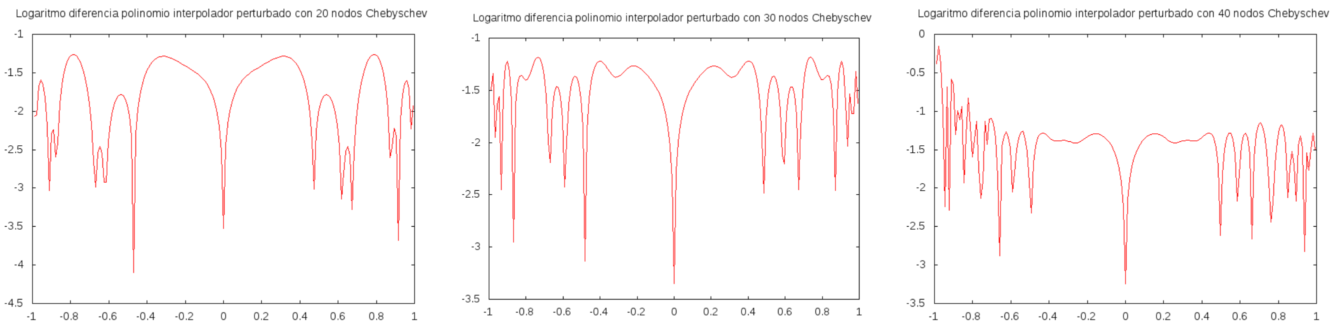
(a) 16 nodos equidistantes.

(b) 16 nodos de Chebyschev.

Figura 11: Curvas de error en escala logaritmica en base 10 para polinomios obtenidos interpolando 16 equidistantes y 16 nodos de Chebyschev. Los picos negativos que se pueden apreciar en estas y las otras gráficas en las que se utiliza escala logarítmica indican la inmediata proximidad de los nodos utilizados para interpolar. Notemos como en el caso de los nodos de Chebyschev se concentran en los extremos del intervalo lo cual reduce el error en estas zonas.

Nodos equidistantes				
Nodos	2	4	8	16
punto de máximo error	-0.175	-0.769	-0.912	-0.967
Curva del error	-1.36762	-2.90763	-5.59623	-10.6622
Error correspondiente	0.0428927	0.001237	2.53377e-06	2.17686e-11
Nodos de Chebyschev				
Nodos	2	4	8	16
punto de máximo error	-0.989	-0.725	-0.923	-0.978
Curva del error	-1.55329	-3.12044	-6.14089	-12.2644
Error correspondiente	0.0279709	0.000757801	7.22952e-07	5.44009e-13

Cuadro 3: Error máximo cometido en la interpolación mediante 2, 4, 8 y 16 nodos equidistantes y de Chebyschev juntamente con el punto en el que se cometen y el valor que la curva del error en la escala logaritmica en base 10 asume en ese punto. Notemos que, excepto en el caso de dos nodos equidistantes, el máximo siempre se asume cerca de los extremos del intervalo $[-1, 1]$.



(a) 20 nodos. (b) 30 nodos. (c) 40 nodos.

Figura 12: Curvas del error en escala logarítmica de base 10 obtenidas al aproximar la función $f(x) = \frac{1}{3+x}$ en el intervalo $[-1, 1]$ mediante polinomios interpoladores de la función $\tilde{f}(x) = f(x) + 0{,}05\sin(2\pi nx)$ donde n indica el número de nodos de Chebyschev utilizados (20, 30 o 40).

en las curvas de error obtenidas interpolando con 16 nodos. En estas gráficas se ve claramente como, en el caso del polinomio obtenido mediante nodos equidistantes, la interpolación aproxima la función con una precisión de 13 o mas decimales correctos en una zona no despreciable situada en el centro del intervalo $[-1, 1]$ mientras que la interpolación obtenida mediante nodos de Chebyschev siempre ronda los 12 decimales correctos y no llega a alcanzar los 13 decimales correctos (excepto, obviamente, en proximidad inmediata de los nodos interpoladores).

Habiendo hecho estas observaciones podemos concluir que la manera optima[13] de aproximar el valor real de una función mediante polinomios interpoladores seria utilizando nodos equidistantes en el caso en el que solo nos interese el valor de la función en la zona central y utilizando nodos de Chebyschev en el caso en el que nos interese el valor de la función en todo el intervalo.

3.2. Para valores grandes de $n (n \geq 18)$ realizar pruebas para estudiar los efectos de perturbaciones introducidas en los valores de la función $f(x)$ mediante la sinusoidal

$$\tilde{f}(x_j) = f(x_j) + 0{,}05\sin(2\pi n x_j)$$

evaluada en los nodos de interpolación.
Dibujar la curva del error $(x, \log(|f(x) - p(x)|))$ para distintos n (grandes).
Discutir los resultados obtenidos.

Antes de empezar es interesante notar que la situación descrita en el problema no es poco común dado que, normalmente, las funciones que queremos interpolar son completamente desconocidas y los valores que decimos conoces de esta función pueden no ser exactos y tener asociados un error[14] que en este ejercicio se representa sumandole a la función f la función $0{,}05\sin(2\pi nx)$ la cual nos indica que los valores que conocemos de la función aproximan la función real con un error de 0.05 (1 decimal correcto).

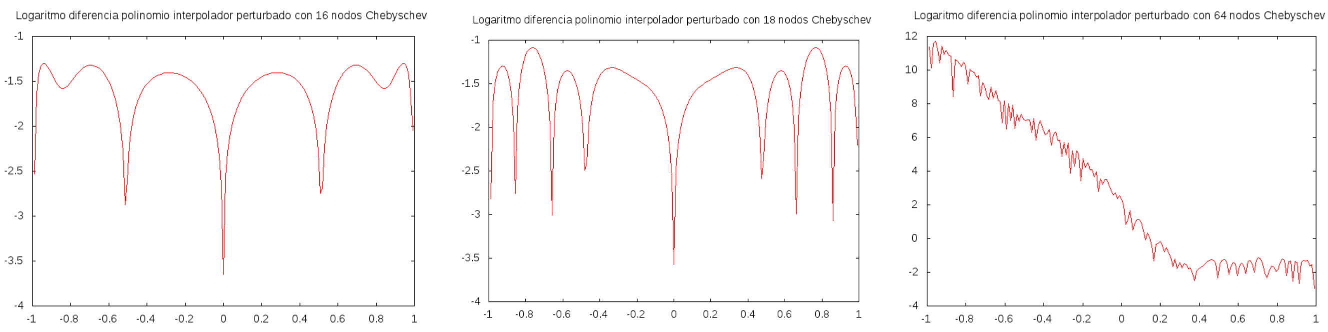
Utilizando 3 veces el programa Problema3 para obtener polinomios interpoladores de $\tilde{f}(x)$ utilizando 20, 30 y 40 nodos de Chebyschev obtenemos las curvas de error en escala logaritmica mostradas en la gráfica 12 y los datos que se pueden observan en el cuadro 4

Como podemos observar a partir de las graficas y el cuadro obtenidos el error cometido en la interpolación no es en ninguno de los casos inferior a 0.05. Este resultado es bastante lógico si tenemos en cuenta que el error máximo introducido por la perturbación es de 0.05 y no es por lo tanto posible superar esta cota. No obstante uno podria pensar que augmentando el número de nodos interpoladores nos podremos acercar indefinidamente a esta cota del error. Pero, a partir de los datos expuestos en el cuadro 4 resulta evidente que esto no es cierto. es más el error tiende a augmentar y, a partir del iterado 41, supera la unidad y empieza a crecer descontroladamente tal y como podemos observar en la figura 13c donde se muestra el polinomio ibtenido interpolando con 64 Nodos de Chebyschev. Este error es debido principalmente a fallos en los calculos numéricos realizados para obtener un polinoio interpolador con una gran cantidad de nodos y en la evaluación de dicho polinomio.

[13]Optima suponiendo que solo disponemos de estos dos tipos de nodos.
[14]Un ejemplo claro de una situación de este estilo se da cuando queremos aproximar una función mediante datos obtenidos experimentalmente y que por lo tanto tienen asociado un error.

Interpolacion de funcion con error				
Nodos	20	30	40	41
punto de máximo error	-0.791	-0.736	-0.978	0.991
Curva del error	-1.26226	-1.1793	-0.683901	0.543778
Error correspondiente	0.0546691	0.0661764	0.207061	3.49766

Cuadro 4: Error máximo cometido en la interpolación en los puntos contaminados de error (ordenadas obtenidas evaluando $\tilde{f}$ en los nodos) mediante 20, 30, 40 y 41 nodos de Chebyschev juntamente con el punto en el que se cometen y el valor que la curva del error en la escala logaritmica en base 10 asume en ese punto.



(a) 16 nodos. (b) 18 nodos. (c) 64 nodos.

Figura 13: Curvas del error en escala logarítmica de base 10 obtenidas al aproximar la función $f(x) = \frac{1}{3+x}$ en el intervalo $[-1, 1]$ mediante polinomios interpoladores de la función $\tilde{f}(x) = f(x) + 0{,}05\sin(2\pi n x)$ donde n indica el número de nodos de Chebyschev utilizados (16, 18 o 64). Notemos que, contrariamente a lo que se podria pensar, en el caso de 64 Nodos interpoladores el error cometido es el mayor llegando a asumir valores del orden de 10^{12}. Esto es sin duda debido a errores en calculo con punto flotante dado que podemos observar como en el extremo derecho la grafica obtenida sigue asemejandose a las anteriores. Además antes de obtener esta gráfica habiamos probado a evaluar el polinomio con un algoritmo numéricamente menos estable que el esquema de Horner y los valores del error que obteniamos eran notablemente peores a los actuales.

El hecho de que la mejor aproximación obtenida haya sido dada por el polinomio interpolador de 20 nodos nos ha hecho pensar que quizas, bajando el número de nodos interpoladores dentro de un límite razonable, podriamos obtener mejores resultados. Podemos observar en las figuras 13a y 13b las curvas de error obtenidas interpolando con 16 y 18 nodos respectivamente. Por último es interesante notar que el error máximo cometido en la interpolación con 18 nodos es de 0.0821424 el cual resulta mayor que el error cometido con la interpolación con 20 nodos. Por otro lado el error máximo cometido con 16 nodos interpoladores es de 0.0497481 el cual es inferior a 0.05 debido probablemente a afortunadas cancelaciones del error.

En definitiva, a partir de los resultados obtenidos podemos afirmar que, en general, no resulta beneficioso augmentar arbitrariamente el número de nodos interpoladores con tal de obtener una mejor interpolación dado que esto generará problemas de otro tipo que augmentaran drasticamente el error. Podemos además hipotizar[15] que el polinomios interpoladores obtenidos utilizando alrededor de 20 nodos de Chebyschev en el intervalo $[-1, 1]$ interpolarán una función desconocida con un error del orden de a. Donde a es el error cometido al evaluar la función desconocida en los nodos de interpolación.

[15] Aunque necesitariamos hacer estudios numéricos similares de otras funciones de diferentes tipos y un analisis teórico más acurado para confirmar esta hipótesis.