Funció distancia

Marco Praderio 1361525

sigui E un espai mètric amb la funció distància d i sigui $E \times E$ l'espai mètric amb la distància producte $\mathrm{d} \times \mathrm{d}$ volem demostrar que la funció distància $\mathrm{d} : E \times E \to \mathbb{R}^+$ és una funció continua.
Dir que d és continua és equivalent a dir que, per a tot punt $(x_0, y_0) \in E \times E$ es compleix que

$$\mathrm{d}(x, y) \to \mathrm{d}(x_0, y_0) \text{ quan } (x, y) \to (x_0, y_0)$$

Com que d és una funció distància tenim que

$$\mathrm{d}(x, y) \leq \mathrm{d}(x, x_0) + \mathrm{d}(x_0, y) = \mathrm{d}(x, x_0) + \mathrm{d}(x_0, y_0) + \mathrm{d}(y_0, y) \Leftrightarrow \mathrm{d}(x, y) \leq \mathrm{d}(x_0, y_0) + (\mathrm{d}(y_0, y) + \mathrm{d}(x, x_0))$$

i, analogament

$$\mathrm{d}(x_0, y_0) \leq \mathrm{d}(x_0, x) + \mathrm{d}(x, y) = \mathrm{d}(x_0, x) + \mathrm{d}(x, y) + \mathrm{d}(y, y_0) \Leftrightarrow \mathrm{d}(x, y) \geq \mathrm{d}(x_0, y_0) - (\mathrm{d}(x_0, x) + \mathrm{d}(y, y_0))$$

Per tant, com que quan $(x, y) \to (x_0, y_0)$ es compleix que $x \to x_0$ i que $y \to y_0$, aleshores, per definició de límit, es compleix

$$\mathrm{d}(x, x_0) \to 0 \text{ quan } (x, y) \to (x_0, y_0)$$

i

$$d(y, y0) \to 0 \text{ quan } (x, y) \to (x_0, y_0)$$

i com que acabem de veure que

$$\mathrm{d}(x_0, y_0) - (\mathrm{d}(x_0, x) + \mathrm{d}(y, y_0)) \leq \mathrm{d}(x, y) \leq \mathrm{d}(x_0, y_0) + (\mathrm{d}(y_0, y) + \mathrm{d}(x, x_0))$$

aleshores podem asegurar per la regla del sandwich que

$$\mathrm{d}(x, y) \to \mathrm{d}(x_0, y_0) \text{ quan } (x, y) \to (x_0, y_0)$$

i, per tant, la funció d és continua.