Métodos Numéricos. Práctica 1: Errores

Prof. Susana Serna
Curso 2015-2016

22 de febrero de 2016

Problema 1 Considerar la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos^3(x)}{x^2} & \text{si } x \neq 0, \\ \frac{3}{2} & \text{si } x = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Queremos evaluar $f(x_0)$ para el valor $x_0 = 1{,}1 \times 10^{-5}$.

(a) Comprobar que $0 \leq f(x) < \frac{3}{2}$ para cada $x \neq 0$.
(b) Escribir programas en C, uno en precisión simple y otro en precisión doble, que evalúen la función $f(x)$ para valores de $x \neq 0$ y excluyan explícitamente el valor $x = 0$.
Calcular para cada uno de los programas el valor $x = x_0$. Comparar los resultados con el que se obtiene utilizando una calculadora de bolsillo. Identifica la causa del error. Justificar las discrepancias y la magnitud de los errores cometidos.
(c) Reescribir la función $f(x)$ utilizando únicamente fórmulas trigonométricas de manera que se reduzca el error que se produce utilizando la expresion (1).
(d) Discutir el error de cancelación.

Problema 2 El coseno hiperbólico se define como

$$\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

y su función inversa

$$t = \mathrm{arccosh(x)}$$

es la solución de la ecuación $x = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$.

Si resolvemos la ecuación cuadrática

$$(e^t)^2 - 2e^t + 1 = 0$$

encontramos que

$$e^t = x \pm (x^2 - 1)^{1/2}$$

y

$$\mathrm{arccosh(x)} = \log\left(x \pm (x^2 - 1)^{1/2}\right)$$

(a) Demostrar que esta fórmula produce resultados contaminados de error de cancelación cuando se usa el signo menos y x es grande. Probar, por ejemplo, $x = \cosh(10)$ usando doble precisión.
(b) Reescribir la fórmula para arccosh(x).

Problema 3 Cálculo de la varianza muestral.

En estadistica la varianza muestral de n números se define como

$$s_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \tag{2}$$

donde la media muestral $\bar{x}$ se calcula como

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{3}$$

El cálculo de la varianza muestral s_n^2 requiere dos bucles recorriendo los datos: uno para el calculo de $\bar{x}$ y otro para s_n^2.

Para un volumen de datos grande o para el caso en el que los datos se generan en tiempo real, no es recomendable hacer dos bucles (uno tras otro). Una fórmula alternativa equivalente que aparece un numerosos textos de estadística que conlleva un número de operaciones similar pero con un solo bucle es la siguiente:

$$s_n^2 = \frac{1}{n-1}\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)^2\Big) \tag{4}$$

Esta fórmula puede sufrir error de cancelación!

(a) Escribe programas en C que calculen la varianza muestral con dos bucles y con un bucle respectivamente para simple precisión y para doble precisión donde el input sea un vector de números reales y el output sea la varianza muestral.
(b) Considera el vector $x = \{10000, 10001, 10002\}^T$ y calcula la varianza con los programas generados y con la calculadora de bolsillo. Analiza las discrepancias.
(c) Construye ejemplos de vectores de dimensión grande (al menos 100 componentes) donde estas discrepancias sean más conspicuas.

Problema 4 Suma de una serie.

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12} = 0{,}822467033424113... \tag{5}$$

Deseamos calcular aproximadamente la suma S sumando términos (sumas parciales) de la serie y vamos a establecer dos estrategias para programarlas en C en simple y en doble precisión.

(a) Realizar programas C que calculen la suma de los términos de la serie S en orden creciente hasta un término máximo tanto en simple como en doble precisión donde los datos serán el número de términos a sumar. Realizar el cálculo ejecutando los programas para 4096 términos.
(b) Realizar programas en C que sumen términos de la serie desde el más pequeño al más grande (orden decreciente). Realiza el cálculo para 4096 términos.
(c) Comparar los resultados con el valor exacto y justifica los diferentes resultados obtenidos.
(d) Proponer otra alternativa para el cálculo de la serie.
(e) Realizar pruebas para obtener 8 dígitos correctos en doble precisión estimando el número de términos que se deberían sumar.

Problema 5 Fórmula de Heron para el área de un triángulo.

Sean $a \geq b \geq c$ las longitudes de los lados de un triángulo. Si $p = (a + b + c)/2$ (semi-perimetro) entonces el área del triángulo se puede calcular mediante la fórmula de Heron

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \tag{6}$$

(a) Demuestra que dicha fórmula sufre de error de cancelación cuando $a \gtrsim b + c$.
(b) Construye valores para los que el valor de A sea muy inexacto. Computa el valor de A mediante programas C en simple y doble precisión.
(c) Investiga posibles reformulaciones de (6) que reduzcan el error de cancelación significativamente justificando analítica y numéricamente la mejora.