Proyecto final

Marco Praderio 1361525

Problema

Considerar la elipse que tiene como ecuación

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + (2y)^2 = 1, \qquad x \in [-2, 2] \tag{1}$$

Encontrar el punto $A = (x^*, y^*)$ de la elipse ($y^* > 0$) tal que la proporción entre las longitudes de los arcos medidas desde el punto $(2, 0)$ en sentidos a favor de las agujas del reloj y en contra sea 4:1.

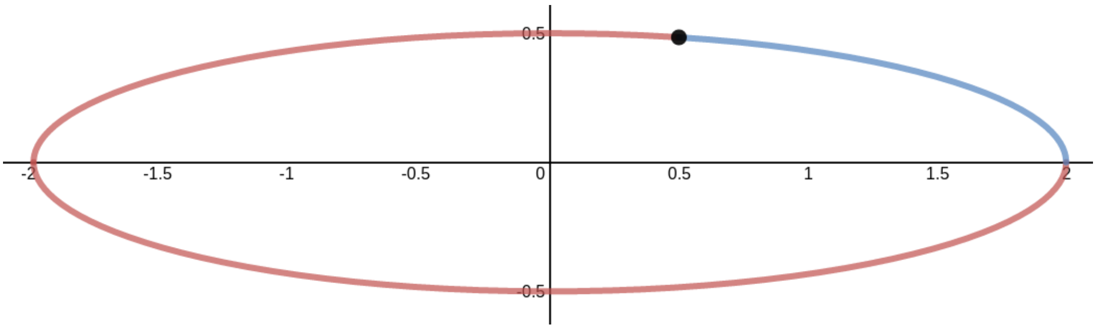

Figura 1: En la imagen se intenta exponer de manera mas visual el planteamiento del problema. El objetivo es lograr encontrar la abscisa x^* del punto negro tal que la longitud de la curva de color rojo sea 4 veces mayor a la longitud de la curva de color azul.

1. Demostrar que $x^* > 0$

Para demostrar esto definiremos la función

$$F(x) := L - 5\int_x^2 \sqrt{1 + y'(t)^2}\mathrm{d}t = L - 5L_{EA}(x) \tag{2}$$

donde L es la longitud de la elipse (1) y $y(t)$ es la ordenada positiva de un punto de la misma elipse de abscisa t. Resulta evidente que la función $F(x)$ es continua en cuanto derivable. Además tenemos que

$$F(2) = L - 5\int_2^2 \sqrt{1 + y'(t)^2}\mathrm{d}t = L > 0$$

y, por otro lado, teniendo en cuenta que $\int_x^2 \sqrt{1 + y'(t)^2}\mathrm{d}t$ indica la longitud de la curva azul que se puede ver en la figura (1) en función de la abscisa del punto negro, entonces, resulta evidente que $\int_0^2 \sqrt{1 + y'(t)^2}\mathrm{d}t = \frac{L}{4}$ y, por lo tanto

$$F(0) = L - 5\int_0^2 \sqrt{1 + y'(t)^2}\mathrm{d}t = L - 5\frac{L}{4} = -\frac{L}{4} < 0$$

por lo tanto, aplicando el teorema de Bolzano, tenemos que la función $F(x)$ tiene un cero en un punto $x^* \in (0, 2)$. En particular tenemos que $x^* > 0$ tal y como queríamos demostrar. Es necesario mencionar que, mas específicamente, el punto azul de la figura (1) se encuentra en el primer cuadrante y no en el cuarto dado que, si se encontrara en el cuarto, la longitud de la curva roja seria menor a la longitud de la curva azul y seria por lo tanto imposible que se encontraran en proporción 4:1.

2. Calcular la expresión de $y'(t)$ a partir de (1).

Aislando la ordenada positiva en función de la abscisa de un punto de la elipse (1) obtenemos

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + (2y)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad (2y)^2 = 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad 2y = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{4}\sqrt{4 - x^2}$$

Si ahora derivamos en función de x obtendremos la expresión.

$$y'(x) = -\frac{x}{4\sqrt{4 - x^2}}$$

Es importante notar que la función $y'(t)$ presenta discontinuidades esenciales en los puntos $x = \pm 2$.
Resultará útil además añadir la expresión de la función que necesitamos integrar

$$g(x) = \sqrt{1 + y'(x)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{16}\frac{x^2}{4 - x^2}} = \frac{1}{4}\sqrt{16 + \frac{x^2}{4 - x^2}} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{64 - 15x^2}{4 - x^2}} \tag{3}$$

La cual sigue presentando discontinuidades esenciales en los puntos $x = \pm 2$.

3. Calcular (en un programa inicial aparte) la longitud total del la elipse (1), L, mediante cuadratura Gaussiana y los polinomios de Chebyschev (9 nodos).

En la línea 1136 de la librería 'CalculNumeric.h' que se puede encontrar en la carpeta CODIGOS o en Programas Proyecto curso se define la función 'QuadraturaGaussChebyschev'. Esta función toma como parámetros una función f los extremos a, b de un intervalo de integración y el número de nodos interpoladores n. Al llamarla devuelve el resultado de aproximar la integral de f en el intervalo $[a, b]$ mediante cuadratura de Gauss-Chebyschev con n nodos interpoladores[1]. Utilizando esta función he logrado aproximar la longitud de la elipse por

$$L \approx 2 \cdot \text{QuadraturaGaussChebyschev}(g, -2, 2, 9) = 8{,}57985509$$

[2] [3] Donde g es la función definida en (3).

Es interesante notar que, al aplicar la cuadratura de Gauss-Chebyschev para calcular la integral

$$\int_{-2}^{2} g(x)\mathrm{d}t = \int_{-2}^{2} \frac{2}{\sqrt{4 - x^2}} \frac{\sqrt{4 - x^2}}{2} g(x)$$

la función que aproximamos a un polinomio es la función

$$h(t) = \frac{\sqrt{4 - t^2}}{2} g(t) = \frac{1}{8}\sqrt{64 - 15t^2}$$

la cual, a diferencia de la función g, no presenta ninguna discontinuidad esencial en el intervalo $[-2, 2]$ pero únicamente una discontinuidad evitable en $t = \pm 2$[4] lo cual soluciona el problema de aproximar por polinomios una función cerca de un punto en el que dicha función diverge[5]

[1]La función define $g(x) = f(x)/w(x)$ donde $w(x)$ es el peso y aproxima la integral $\int_a^b w(t)g(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ interpolando $g(t)$

[2]En una primera instancia había intentado aproximar el perímetro de la elipse mediante

$$L \approx 4 \cdot \text{QuadraturaGaussChebyschev}(g, 0, 2, 9) = 8{,}598930905$$

No obstante, tras descubrir que el método de cuadratura de Gauss-Chebyschev suele dar mejores resultados interpolando funciones simétricas en intervalos simétricos he optado por aproximar el perímetro integrando en el intervalo $(-2, 2)$. Tras una breve investigación he encontrado una fórmula aproximativa al calculo del perímetro de una elipse dada por

$$p \approx \pi(3(r + s) - \sqrt{(3r + s)(r + 3s)})$$

donde r i s son los radios mayor y menor de la elipse. Calculando esta aproximación en el caso de nuestra elipse ($r = 2$ i $s = 0{,}5$) he obtenido $p \approx 8{,}58$ lo cual confirma que integrando en el intervalo $(-2, 2)$ se obtienen mejores resultados.

[3]En el programa "Solucion"donde se calcula la integral mediante 503 nodos interpoladores se obtiene el resultado mas preciso $L \approx 8{,}578421775$.

[4]Además la función no se evalúa en los puntos de discontinuidad evitable dado que los nodos de Chebyschev en un intervalo $[a, b]$ no contienen sus extremos.

[5]Problema que, sin embargo, tendremos que solucionar de otra manera cuando aproximemos la integral utilizando polinomios interpoladores de Splines.

4. En un segundo programa principal resolver $F(x) = 0$ usando el método de Newton. Para ello calcular previamente $F'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(L - 5L_{EA}(x))$

Para calcular $F'(x)$ solo hace falta notar que la función g definida en (3) es continua en el intervalo $(-2, 2)$ y, por lo tanto, se puede aplicar el teorema fundamental del calculo para obtener

$$F'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(L - 5L_{EA}(x)) = -5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_x^2 g(t)\mathrm{d}t\right) = 5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_2^x g(t)\mathrm{d}t\right) = 5g(x)$$

El método de Newton lo he aplicado haciendo uso de la función 'Newton' definida en línea 1288 de la librería 'CalculNumeric.h' mencionada anteriormente.

4.1. Elegir $x_0 \in]0, 2[$ para iniciar el proceso iterativo.

Ayudándome con la imagen de la elipse mostrada en figura (1) y tras comprobar experimentalmente la convergencia del método de Newton he decidido coger $x_0 = 0{,}5$.

4.2. Obtener los sucesivos $x_{k+1} = x_k - \frac{F(x_k)}{F'(x_k)}$ donde cada $F(x_k)$ requiere evaluar $F(x)$, aproximando la integral mediante interpolación de la función $\sqrt{1 + y'(t)^2}$ por splines cúbicos naturales.

En la línea 662 de la librería 'CalculNumeric.h' se encuentra definida la función 'PolinomiInterpoladorSplinesGaussSeidel'. Esta función, dados n nodos interpoladores, una tolerancia (tol) y el valor n calcula el polinomio interpolador cúbico natural de Splines. Para hacerlo construye el sistema lineal necesario para encontrar los momentos y aproxima su solución (con tolerancia tol) mediante el método iterativo de Gauss-Seidel[6].
Es importante notar que, para poder aproximar la integral utilizando un polinomio interpolador de Splines y integrando este polinomio[7], no se puede utilizar el punto de abscisa 2 como punto interpolador. Esto se debe a que, en este punto, la función g, definida en (3), tiene una asíntota vertical. Con tal de superar este inconveniente he aproximado la integral de x a 2 de la función $g(t)$ con la integral de x a $2 - \varepsilon$ de la misma función cometiendo necesariamente un cierto error de truncamiento. Sucesivamente he aproximado esta integral interpolando g mediante interpolación cúbica natural de Splines en el intervalo $[x, 2 - \varepsilon]$ cometiendo error de interpolación.
Tras una breve investigación he conseguido encontrar en el siguiente link una cota del error de interpolación mediante Splines cúbico natural[8]. La fórmula encontrada afirma que, al interpolar mediante polinomio cúbico natural de Splines S la función f en un intervalo $[a, b]$, se cumple

$$|f(x) - S(x)| \leq h^{\frac{3}{2}} \left(\int_a^b f''(t)^2 \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4}$$

donde h es la distancia máxima entre dos nodos interpoladores consecutivos. En el caso del problema presentado tenemos $f = g$. Derivando g se obtiene

$$g''(x) = \frac{2}{15^{\frac{3}{2}}} \frac{120 + 60x^2 - 23x^4}{(4 - x^2)^4}$$

Como consecuencia de esto se cumple

$$g''(x)^2 = \frac{4}{15^3} \frac{(23x^4 - 60x^2 - 120)^2}{(4 - x^2)^8}$$

Integrando se llega al siguiente resultado

$$\int g''(t)^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{44040192}\Bigg(1824585 \ln(t + 2) - \frac{4t}{(t^2 - 4)^7}(1824585t^{12} - 48655600t^{10} + 550781392t^8 - 2584412160t^6 +$$
$$+ 6480454400t^4 - 17271296000t^2 + 32162672640) - 1824585 \ln(2 - t)\Bigg) + c$$

[6]En la línea 842 de Ç alculNumeric.h"se define la función ResoldreSistemaLinealGaussSeidel"la cual resuelve sistema lineales mediante este método.
[7]En línea 1164 de la librería 'CalculNumeric.h' se encuentra definida la función ÏntegracioPolinomiSplines"la cual integra polinomios interpoladores de Splines.
[8]Una cota del error de integración será dada por el producto entre este valor y la longitud del intervalo de integración. Esta cota será del mismo orden que la cota del error de interpolación.

Figura 2: Valor de la integral $\int g''(t)^2 \mathrm{d}t$ con constante de integración 0. Esta integral nos da una indicación de la cota del error cometido al interpolar mediante Splines cúbico natural la función g en el intervalo $[0, x]$. Notemos que la función diverge al acercarnos a 2.

Para poder entender esta expresión he realizado un plot de la integral con $c = 0$ que se puede observar en la figura (2). Notase que, tal y como cabria esperar dado que no se puede interpolar mediante polinomios de tercer grado funciones con discontinuidades esenciales, la cota del error diverge cuando se intenta interpolar cerca de la asíntota vertical. Además, notando el termino $\frac{4t}{(t^2-4)^7}$ en la formula de $\int g''(t)^2 \mathrm{d}t$, podemos deducir que la velocidad con la cual esta integral tiende a infinito a medida que acerca a 2 es la misma con la que la función $f(x) = \frac{7852215}{(2-x)^7}$[9] tiende a infinito cuando x tiende a 2. Por lo tanto, por la ecuación (4) , la velocidad con la cual la cota del error tiende a infinito cuando intentamos interpolar la función g en un intervalo cuyo extremo derecho se acerca a 2 será la misma velocidad con la cual la fracción $h^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{7852215}{(2-x)^7}}$ tiende a infinito cuando x tienda a 2.
Finalmente, si acotamos el error de la integral por el producto entre la cota de interpolación y la longitud del intervalo de integración obtendremos que, cuando intentemos extender la integral hasta 2 la cota del error de integración crecerá como

$$E_{int} \approx (2-x) h^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{7852215}{(2-x)^7}} \leq h^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{31408860}{(2-x)^7}} < 6000 h^{\frac{3}{2}} (2-x)^{-\frac{7}{2}}$$

Es importante ser consciente de que esta cota es válida únicamente para valores de x cercanos a 2, pero, considerando que és necesario extender esta integral hasta 2, esta cota será aplicable en nuestro caso.

Por otro lado acotando superiormente el error de truncamiento dado por la integral $\int_{2-\varepsilon}^{2} g(t) \mathrm{d}t$ se obtiene

$$\begin{aligned} E_{tru} = \int_{2-\varepsilon}^{2} g(t) \mathrm{d}t = \frac{1}{4} \int_{2-\varepsilon}^{2} \sqrt{\frac{64-15t^2}{(2+t)(2-t)}} \mathrm{d}t \leq \frac{1}{4} \int_{2-\varepsilon}^{2} \sqrt{\frac{4+30\varepsilon-15\varepsilon^2}{4-\varepsilon} \frac{1}{2-t}} \mathrm{d}t = \\ = -\frac{\sqrt{4+30\varepsilon-15\varepsilon^2}}{2\sqrt{4-\varepsilon}} \int_{2-\varepsilon}^{2} \frac{\mathrm{d}(2-t)}{2\sqrt{2-t}} = \frac{\sqrt{4+30\varepsilon-15\varepsilon^2}}{2\sqrt{4-\varepsilon}} \sqrt{\varepsilon} \end{aligned} \tag{5}$$

De forma análoga se puede acotar inferiormente la integral por

$$\begin{aligned} E_{tru} = \int_{2-\varepsilon}^{2} g(t) \mathrm{d}t = \frac{1}{4} \int_{2-\varepsilon}^{2} \sqrt{\frac{64-15t^2}{(2+t)(2-t)}} \mathrm{d}t \geq \frac{1}{4} \int_{2-\varepsilon}^{2} \sqrt{\frac{1}{2-t}} \mathrm{d}t = \\ = -\frac{1}{2} \int_{2-\varepsilon}^{2} \frac{\mathrm{d}(2-t)}{2\sqrt{2-t}} = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} \end{aligned} \tag{6}$$

Para resumir lo que se acaba de mostrar se puede decir que, si se quiere aproximar la integral $\int_{x}^{2} g(t) \mathrm{d}t$ mediante interpolación cúbica natural de Splines será necesario dividir la integral en dos partes

- La primera parte, la integral de x a $2-\varepsilon$ tiene asociado un error que diverge cuando $\varepsilon \to 0$ con una velocidad igual a la de $6000 h^{\frac{3}{2}} \varepsilon^{-\frac{7}{2}}$ donde h es la distancia entre dos nodos interpoladores consecutivos de Splines.
- La segunda parte, la integral de $2-\varepsilon$ a 2 tiende a 0 cuando ε tiende a 0 con una velocidad igual a la mitad de la raíz cuadrada de ε.

[9] El número 7852215 se ha obtenido a partir de la fracción $\frac{4*32162672640}{(x+2)^7}$ evaluada cuando x tiende a 2.

Para obtener una cota del error total será necesario sumar las cotas de los dos errores cuando extendemos la integral a una distancia ε (pequeña) del punto 2[10]. De esta manera obtenemos que al aproximar $\int_x^2 g(t)\mathrm{d}t$ por $\int_x^{2-\varepsilon} S(t)\mathrm{d}t$ donde S es el Splines cúbico natural que interpola g se comete un error que, por ε pequeño está acotado por

$$e(\varepsilon, h) = 6000\frac{h^{\frac{3}{2}}}{\varepsilon^{\frac{7}{2}}} + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}$$

Donde h és la distancia entre dos nodos interpoladores sucesivos.
Derivando esta formula respecto de ε para encontrar el valor de ε que minimice la cota del error se obtiene

$$e'(\varepsilon) = \frac{1}{4\sqrt{\varepsilon}} - 21000\frac{h^{\frac{3}{2}}}{\varepsilon^{\frac{9}{2}}}$$

que se anula en $\varepsilon = \sqrt[4]{84000}h^{\frac{3}{8}} = \varepsilon_m$ donde la función $e(\varepsilon)$ asume un valor mínimo de $e(\varepsilon_m) = \frac{6000}{\sqrt[8]{84000^7}}h^{\frac{3}{16}} + \frac{\sqrt[8]{84000}}{2}h^{\frac{3}{8}}$[11]. Para simplificar sucesivos cálculos tomaré las cotas $\frac{6000}{\sqrt[8]{84000^7}} < 0{,}3$ y $\frac{\sqrt[8]{84000}}{2} < 2{,}1$. De esta manera es posible afirmar que la suma entre error de truncamiento y error de interpolación en el caso en que el error de truncamiento sea suficientemente pequeño está acotada por

$$|err| < 0{,}3h^{\frac{3}{16}} + 2{,}1h^{\frac{3}{8}}$$

Buscando h tal que $|err| \leq 10^{-8}$ se obtiene

$$2{,}1\left(h^{\frac{3}{16}}\right)^2 + 0{,}3\left(h^{\frac{3}{16}}\right) - 10^{-8} \leq 0 \Leftarrow h < \left(3{,}2 \cdot 10^{-8}\right)^{\frac{16}{3}} \approx 10^{-40}$$

En resumen, para estar seguros de obtener un error menor a 10^{-8} en la interpolación és necesario (a parte de realizar el truncamiento en el punto adecuado definido anteriormente) realizar la interpolación por splines con nodos equidistantes tales que la distancia entre un nodo y el sucesivo sea del orden de 10^{-40}.

Llegados a este punto es importante tener en cuenta dos cosas sobre la cota del error dada.

Primero la cota dada es una cota lo cual solo significa que el error no será superior a esta. No obstante el error cometido podría ser mucho menor que la cota. De hecho seria posible acotar mejor el error de interpolación cometido al integrar tomando como cota la suma del producto entre el máximo error cometido por cada uno de los polinomios de Splines multiplicado por la longitud de los intervalos en los que está definido cada polinomio. Esto mejoraría mucho la cota del error dado que el error cometido al interpolar por Splines puntos cercanos al 2 es mucho mayor que en el resto del intervalo de integración. Esto causa que la cota del error que he propuesto[12] sea mucho mayor al error cometido realmente[13]. También es posible encontrar una cota del error de forma numérica evaluando la diferencia entre la función a interpolar y el polinomio interpolador y aproximando la integral de este error[14]. Este método no obstante tiene en cuenta errores debido a operaciones con punto flotante y imposibilita un calculo analítico a priori del error cometido.

La segunda cosa a tener en cuenta es que la cota del error dada no tiene en cuenta errores al hacer operaciones en coma flotante ni el error cometido al aproximar la solución del sistema lineal para encontrar los momentos de los polinomios de Splines mediante el método de Gauss-Seidel. Debido precisamente a estos errores es imposible (utilizando precisión doble) aproximar $L_{EA}(X)$ (definida implícitamente en (2)) mediante polinomios interpoladores de splines con un error inferior a 10^{-8}. Esto se explica notando que, para conseguir que el error de integración sea menor que 10^{-8}, es necesario que el error de truncamiento sea menor que 10^{-8}. Por lo tanto, debido a la cota dada en (6), seria necesario que $\varepsilon < 10^{-16}$ siendo ε la distancia del último nodo interpolador al punto 2. No obstante, para valores de ε

[10] Si nos alejamos demasiado de este punto el error de truncamiento (la segunda integral) crece demasiado como para poder considerar que la aproximación de la integral obtenida sea válida.

[11] Es necesario notar que, para $h = 10^{-2}$ se cumple $\varepsilon_m \approx 3$ valor demasiado grande como para que la formula de acotación empleada tenga sentido. Será por lo tanto necesario emplear un método distinto para poder acotar el error cometido bajo estas condiciones.

[12] Según esta cota el error máximo cometido por cada uno de los polinomios interpoladores de Splines es igual al error máximo cometido en todo el intervalo de interpolación

[13] No obstante para poder calcular esta cota seria necesario encontrar una formula para acotar el error de interpolación por Splines cúbico natural en cada uno de los intervalos en los que están definidos los polinomios de Splines. Cosa que no he logrado hacer.

[14] En la carpeta CODIGOS o en Programas Proyecto curso se puede encontrar el programa ErrorSplines el cual tiene esta función. Haciendo uso de este programa he logrado determinar que los valores de ε y h que logran reducir al máximo el error cometido al integrar son $h = 10^{-3}$ y $\varepsilon = 10^{-4}$ para los cuales el error cometido es del orden de 10^{-2}. En el caso de $h = 10^{-2}$ el mejor ε encontrado es $\varepsilon = 10^{-3}$ y para estos valores el error cometido és del orden de $3 \cdot 10^{-2}$. Es importante no poner valores de h iguales o inferiores a 10^{-4} dado que en este caso el ordenador se podría bloquear.

tan pequeños la máquina no es capaz de distinguir (utilizando precisión doble) entre el punto 2 y el punto $2-\varepsilon$. Por lo tanto el polinomio interpolador de Splines toma como uno de los nodos interpoladores el punto $(2, g(2)) = (2, \infty)$ lo cual, obviamente, provoca error en el calculo del polinomio interpolador de Splines. En otras palabras, al reducir el error de truncamiento por debajo de 10^{-8} deja de ser posible aproximar la integral mediante polinomios interpoladores de Splines.

Teniendo en mente todos los posibles errores relacionados con la aproximación de la integral pedida mediante polinomios de Splines he considerado útil resolver el problema (a parte de mediante el método propuesto) de una manera diferente que me permitirá evitar la singularidad.
Este nuevo método és bastante simple y consiste simplemente en reescribir la función $L_{EA}(x)$ definida en (2).
Dado que sabemos que

$$L_{EA}(0) = \int_0^2 g(t)\mathrm{d}t = \frac{L}{4}$$

entonces podemos reescribir $L_{EA}(x)$ como

$$L_{EA}(x) = \int_x^2 g(t)\mathrm{d}t = \int_0^x g(t)\mathrm{d}t + \int_x^2 g(t)\mathrm{d}t - \int_0^x g(t)\mathrm{d}t = \int_0^2 g(t)\mathrm{d}t - \int_0^x g(t)\mathrm{d}t = \frac{L}{4} - \int_0^x g(t)\mathrm{d}t$$

Esta reformulación funciona muy bien para aproximar integrales interpolando por Splines. Si queremos aproximar la integral mediante cuadratura de Gauss-Chebyschev no obstante nos será más útil la siguiente reformulación que aprovecha mejor la simetrias de la elipse

$$L_{EA}(x) = \frac{L}{4} - \int_0^x g(t)\mathrm{d}t = \frac{L}{4} - \frac{1}{2}\int_{-x}^x g(t)\mathrm{d}t$$

4.3. Parar el proceso iterativo cuando $|x_{k+1} - x_k| < 10^{-6}$

Aplicando el método de Newton para encontrar el cero de la función F hemos obtenido el punto 0.4268796206 aproximando las integrales mediante Splines cúbico natural[15]. Por otro lado, aplicando el método de Newton para encontrar el cero de la función F reformulando $L_{EA}(x)$ hemos obtenido el punto 0.4287101418 al integrar por Splines (con distancia entre nodos consecutivos igual a $0{,}5 \cdot 10^{-2}$) y el punto 0.4287100001 al integrar por Gauss-Chebyschev (con 503 nodos interpoladores).
Notemos que los dos últimos resultados coinciden entre si en los primeros 6 decimales mientras que coinciden con el primero solo en los dos primeros decimales. Esto nos indica que, debido a errores de truncamiento y a querer interpolar mediante polinomios una función con discontinuidad esencial la primera aproximación da mas problemas y solamente logra obtener 2 decimales correctos.
Las otras dos aproximaciones en cambio coinciden en los primeros seis decimales los cuales he comprobado que se mantienen estables al aumentar el número de nodos interpoladores[16]. Además, dado que hemos detenido el método de Newton al obtener 6 decimales correctos podemos asegurar que los dos resultados obtenidos tienen 6 decimales correctos (suponiendo exacto el calculo del perímetro el cual se realiza con 503 nodos en el programa ”Solucion”de donde hemos extraído los resultados y con 9 en el programa ”PrimeraAproximacion”).

[15] Como ya hemos dicho anteriormente esta aproximación por Splines se ha realizado con $h = 10^{-3}$ y $\varepsilon = 10^{-3}$ con un error de 10^{-2}. Se pueden realizar los mismos cálculos pero con $h = 10^{-2}$ tal y como indican los enunciados ejecutando el programa ”PrimeraAproximacion”que se puede encontrar en la carpeta CODIGOS o en Programas Proyecto curso

[16] He aplicado Gauss-Chebyschev utilizando 10001 nodos interpoladores obteniendo el valor 0.4287101401 el cual coincide en los primeros 8 decimales con la aproximación por Splines reformulado.