

# Quocient de Rayleigh

Marco Praderio 1361525

El nostre objectiu és demostrar que el mètode de Rayleigh per trobar el valor propi dominant de una matriu simètrica  $A$  convergeix cap a aquest igual de ràpid que  $\beta k^{2n}$  on  $k = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ ,  $\lambda_i$  son els valors propis de la matriu  $A$  posats en ordre decreixent en mòdul i  $\beta$  és una constant que depèn de les condicions inicials.

Abans de començar recordem com es definia el mètode de Rayleigh.

Donada  $A$  una matriu  $n \times n$  amb valors propis  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  tals que  $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$  i donada la recurrència definida per

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= \frac{x^{(n)}}{\|x^{(n)}\|_2} \\ x^{(n+1)} &= Ay^{(n)} \end{aligned}$$

amb  $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$  tal que  $x^{(0)} = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$  on  $v_i$  valors propis normalitzats de  $A$  amb valors propis  $\lambda_i$  i  $\alpha_i \neq 0$  aleshores podem aproximar  $\lambda_1$  com a límit de la successió  $\{R_n\}$  definida com  $R_n = \frac{(x^{(n+1)})^T y^{(n)}}{(y^{(n)})^T y^{(n)}}$ . Manipulant el terme  $R_n$  obtenim

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{(x^{(n+1)})^T y^{(n)}}{(y^{(n)})^T y^{(n)}} = \frac{\lambda_1^{2n+1} \left[ \alpha_1 v_1^T + \sum_{i=2}^n \alpha_i \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^{n+1} v_i^T \right] \left[ \alpha_1 v_1 + \sum_{i=2}^n \alpha_i \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^n v_i \right]}{\lambda_1^{2n} \left[ \alpha_1 v_1^T + \sum_{i=2}^n \alpha_i \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^n v_i^T \right] \left[ \alpha_1 v_1 + \sum_{i=2}^n \alpha_i \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^n v_i \right]} = \\ &= \lambda_1 \frac{\alpha_1^2 v_1^T v_1 + \sum_{i=2}^n \alpha_1 \alpha_i \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^n v_1^T v_i + \sum_{i=2}^n \alpha_1 \alpha_i \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^{n+1} v_i^T v_1 + \sum_{i,j=2}^n \alpha_i \alpha_j \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^{2n+1} v_i^T v_j}{\alpha_1^2 v_1^T v_1 + \sum_{i=2}^n \alpha_1 \alpha_i \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^n v_1^T v_i + \sum_{i=2}^n \alpha_1 \alpha_i \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^n v_i^T v_1 + \sum_{i,j=2}^n \alpha_i \alpha_j \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^{2n} v_i^T v_j} \end{aligned}$$

Si la matriu  $A$  és simètrica aleshores els vectors propis seran ortonormals. Si a més a més definim  $\beta_i = \frac{\alpha_i^2}{\alpha_1^2}$  aleshores pode reescriure

$$\begin{aligned} R_n &= \lambda_1 \frac{\alpha_1^2 v_1^T v_1 + \sum_{i=2}^n \alpha_1 \alpha_i \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^n v_1^T v_i + \sum_{i=2}^n \alpha_1 \alpha_i \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^{n+1} v_i^T v_1 + \sum_{i,j=2}^n \alpha_i \alpha_j \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^{2n+1} v_i^T v_j}{\alpha_1^2 v_1^T v_1 + \sum_{i=2}^n \alpha_1 \alpha_i \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^n v_1^T v_i + \sum_{i=2}^n \alpha_1 \alpha_i \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^n v_i^T v_1 + \sum_{i,j=2}^n \alpha_i \alpha_j \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^{2n} v_i^T v_j} = \\ &= \lambda_1 \frac{\alpha_1^2 + \sum_{i=2}^n \alpha_i^2 \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^{2n+1}}{\alpha_1^2 + \sum_{i=2}^n \alpha_i^2 \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^{2n}} = \lambda_1 \frac{1 + \sum_{i=2}^n \beta_i \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^{2n+1}}{1 + \sum_{i=2}^n \beta_i \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^{2n}} = \lambda_1 \frac{1 + \beta_2 k^{2n+1} + O(k^{2n+1})}{1 + \beta_2 k^{2n} + O(k^{2n})} \end{aligned}$$

desenvolupant per Taylor la fracció  $\frac{1}{1+y}$  amb  $y = \beta_2 k^{2n} + O(k^{2n})$  obtenim

$$\begin{aligned} R_n &= \lambda_1 \frac{1 + \beta_2 k^{2n+1} + O(k^{2n+1})}{1 + \beta_2 k^{2n} + O(k^{2n})} = \lambda_1 (1 + \beta_2 k^{2n+1} + O(k^{2n+1})) (1 - \beta_2 k^{2n} + O(k^{2n})) = \\ &= \lambda_1 (1 - \beta_2 k^{2n} + O(k^{2n})) \end{aligned}$$

Per tant, quan  $n \rightarrow \infty$  tindrem que  $R_n \rightarrow \lambda_1$  amb la mateixa velocitat que  $\beta_2 k^n \rightarrow 0$  tal i com volíem demostrar.

És important notar que, tot i que el mètode de Rayleigh convergeix prou ràpid exigeix la dificultat computacional extra de haver de calcular la norma quadrat i si el vector propi  $v_1$  no és ortogonal a la resta de vectors propis aleshores la velocitat de convergència es redueix a la meitat.