Métodos Numéricos. Práctica 2: Ceros de funciones

Prof. Susana Serna
Curso 2015-2016

14 Marzo 2016

Problema 1

Considerar la ecuación polinómica

$$x^3 = x + 40 \tag{1}$$

(a) Comprobar que al evaluar en doble y simple precision la expresión de la raiz real de la ecuación anterior (que se obtiene a partir de las fórmulas de Cardano-Vieta) dada por la fórmula

$$\alpha = \left(20 + \frac{1}{9}\sqrt{32397}\right)^{1/3} + \left(20 - \frac{1}{9}\sqrt{32397}\right)^{1/3}$$

proporciona un resultado con error de cancelación. Estimar este error.

(b) Aplica el método de Newton a la función empezando con $x_0 = 2$.

$$f(x) = x^3 - x - 40$$

utilizando precision simple y doble. Estimar el número de iteraciones necesarias para obtener una aproximación de la raiz con 8 y 16 decimales correctos respectivamente.

(c) Considera la ecuación polinómica

$$x^3 = x + 400$$

Obtén una fórmula de Cardano-Vieta para el calculo de la raiz real, β. Comprueba que dicha raiz cumple que

$$2 \leq \beta \leq 8$$

Estimar el error de cancelación calculando la fórmula explicita en doble precisión.

Aplicar los siguientes métodos iterativos para obtener los 16 decimales correctos de la raiz.

(c1) Método de la bisección partiendo del intervalo $[2, 8]$

(c2) Método de la secante partiendo del intervalo $[2, 8]$

(c3) Método de Newton partiendo del pivote $x_0 = 2$

Comparar el orden de convergencia numérica.

Considerar la posible aceleración mediante la iteración de Aitken sobre las sucesiones de iterados obtenidas. Discutir en su caso la mejora.

Problema 2

Sea la ecuación $f(x) = 0$ con $f(x)$ continuamente derivable, x^* una raiz simple, $f(x^*) = 0$, con $f'(x) \neq 0$ en un entorno de x^*. Considerar la iteración

$$x_{k+1} = x_k - b_k f(x_k)$$

donde

$$b_{k+1} = b_k(2 - f'(x_{k+1})b_k)$$

partiendo de un pivote x_0 suficientemente próximo a x^* con $b_0 = \frac{1}{f'(x_0)}$.

(a) Aplicar la iteración a la ecuación polinómica del Problema 1, $x^3 = x + 400$, tomando $x_0 = 6$ y $b_0 = \frac{1}{3x_0^2-1}$. Estudiar el orden de convergencia: sugerencia, calcular $e_k = |x_k - x_{k-1}|$ y compara los cocientes $\frac{e_k}{e_{k-1}}$, $\frac{e_k}{(e_{k-1})^2}$, $\cdots$

Calcular cuantas iteraciones son necesarias para tener una precisión de 13 cifras decimales correctas

Problema 3

Definimos la iteración para $k = 1, 2, 3, \cdots$, $p_k = \frac{2a_k^2}{s_k}$

$$a_k = \frac{a_{k-1} + b_{k-1}}{2} \qquad b_k = \sqrt{a_{k-1}b_{k-1}}$$

$$c_k = a_k^2 - b_k^2 \qquad s_k = s_{k-1} - 2^k c_k$$

tomando $a_0 = 1$, $b_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $s_0 = \frac{1}{2}$.

Teóricamente, p_k converge al número π. Verificar que la convergencia es cuadrática. Determinar cuantas iteraciones debemos realizar para que el error absoluto comience a crecer y la convergencia numérica degenere (debido a la precisión finita). Investigar si la convergencia puede acelerarse.

Problema 4. **Cálculo aproximado de raices cuadradas.**

El objetivo es obtener una aproximación de la raíz cuadrada de un número utilizando la expresión

$$\sqrt{1+x} = f(x)\sqrt{1+g(x)},$$

donde g es un infinitésimo de orden más pequeño que x para x tendiendo a 0. Si elegimos $f(x)$ como una aproximación de $\sqrt{1+x}$ entonces se puede calcular $g(x)$ como

$$g(x) = \frac{1+x}{f(x)^2} - 1,$$

(a) La función $f(x)$ puede elegirse como una función racional $p(x)/q(x)$, tal que p y q tienen el mismo grado y su desarrollo de MacLaurin coincide con el de $\sqrt{1+x}$ hasta cierto grado. Hallar una función racional, $f(x) := p(x)/q(x)$, cociente de dos lineales, tal que el desarrollo de MacLaurin de $p(x) - \sqrt{1+x}\,q(x)$ tenga los tres primeros términos nulos. Esta función f se conoce como el aproximante de Padé de la función $\sqrt{1+x}$.

(b) Siendo $a_0 = x$, $a_{n+1} = g(a_n)$ y $b_n = f(a_n)$. Comprobar que

$$\sqrt{1+x} = \Big(\prod_{j=0}^{k} b_j\Big)\sqrt{1+a_{k+1}}$$

(c) Realizar programas en C para experimentar con el algoritmo anterior para una eleción de f como el cociente de dos polinomios de tercer grado.

Apartados opcionales

(d) Hallar el $n > 0$ tal que la función, g, calculada mediante $g(x)$ a partir de la racional f obtenida en el apartado (a), cumpla que $g(x) = O(x^n)$.

(e) Comprobar que la función $g(x)$ es contractiva para $x > 0$.

(f) Comprobar la desigualdad

$$\left|\sqrt{1+x} - \prod_{j=0}^{k} b_j\right| \leq \frac{a_{k+1}}{2}\sqrt{1+x}.$$

(g) Comprobar los apartados anteriores para una elección de f como el cociente de dos polinomios de tercer grado. Para este caso ver que

$$|\sqrt{2} - b_0 b_1 b_2| < 5 \times 10^{-255}$$