Funcio contractiva

Marco Praderio 1361525

Sigui (E, d) un espai mètric complet i $g : E \to E$ una aplicació tal que, per algun m pertanyent a $\mathbb{N}$, g^m és contractiva amb constant de contracció $k < 1$ (donats u,v pertanyents a E aleshores $\mathrm{d}(g(u), g(v)) \leq k\mathrm{d}(u, v)$).
Demostreu que g te un únic punt fix α pertenyent a E i, per a cada x_0 pertanyent a E, α és el límit de $n \to \infty$ de x_n on $x_n = g(x_{n-1})$ per a cada n pertanyent a $\mathbb{N}$.

Per realitzar aquesta demostració serà necessari demostrar abans el següent lema inmediat.
Tota funció contractiva és continua.

Agafem (E, d) un espai mètric i g una funció contractiva amb constant de contracció $k < 1$ (donats u,v pertanyents a E aleshores $\mathrm{d}(g(u), g(v)) \leq k\mathrm{d}(u, v)$). tenim per definició que per a tot $\varepsilon > 0$ si $\mathrm{d}(u, v) < \frac{\varepsilon}{k}$ aleshores $\mathrm{d}(g(u), g(v)) \leq k\mathrm{d}(u, v) < \varepsilon$ i, per tant, g és continua.

Ara podem començar amb la demostració

Agafem x_0 un punt cualsevol pertanyent a E i la successió $\{x_n\}$ definida recursivament per $x_{n+1} = g^m(x_n)$ i obtindrem que, per a tot s,t,n_0 pertanyents a $\mathbb{N}$ tals que $s > t > n_0$ es complirà

$$\mathrm{d}(x_s, x_t) \leq \sum_{i=0}^{s-t-1} \mathrm{d}(x_{t+i}, x_{t+i+1}) \leq \sum_{i=0}^{s-t-1} k^i \mathrm{d}(x_t, x_{t+1}) \leq \mathrm{d}(x_t, x_{t+1}) \sum_{i=0}^{\infty} k^i =$$

$$= \frac{\mathrm{d}(x_t, x_{t+1})}{1-k} \leq fracd(x_{n_0}, x_{n_0+1}1 - k \leq \frac{\mathrm{d}(x, g(x))k^{n_0}}{1-k}$$

per tant, com que podem fer $\frac{\mathrm{d}(x,g(x))k^{n_0}}{1-k}$ arbitrariament petit solament augmentant el valor de n_0 aleshores queda demostrat que la successió $\{x_n\}$ és de cauchy i, com que E és complet, aleshores existeix el límit d'aquesta sèrie que anomenarem α. A més a més, com que g^m és contractiva i, per tant, continua, es compleix

$$g^m(\alpha) = g^m(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} g^m(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$$

per tant α és un punt fix per g^m. A més a més és l'unic punt fix per g^m en quant, si existis β un'altre punt fix diferent tindriem que $\mathrm{d}(\alpha, \beta) > 0$ i es compliria

$$\mathrm{d}(\alpha, \beta) = \mathrm{d}(g^m(\alpha), g^m(\beta)) \leq k\mathrm{d}(\alpha, \beta) < \mathrm{d}(\alpha, \beta)$$

i arribariem a contradicció. Ara bé, a també és un punt fix per g perquè en cas contrari tindriem $g(\alpha) = \beta$ amb α diferent de β i $g^m(\beta) = g^{m+1}(\alpha) = g(\alpha) = \beta$ i tindriem un punt fix per g^m diferent de α cosa que acabem de veure que no és possible.
Per últi cal dir que α és l'unic punt fix per g en quant tots els punts fixes per g també ho són per g^m i tan sols tenim un punt fix per g^m.