# Resoldre la equació $e^x = 3x$

Marco Praderio 1361525

Considerem la família de mètodes:

$$g_\mu(x) = \frac{e^x + \mu x}{3+\mu}$$

amb $\mu \in \{p/q : p \in \mathbb{Z}; q \in \{2,3,5\}\}$. Demostreu que qualsevol mètode d'aquesta família és equivalent a resoldre $e^x = 3x$ i determineu el millor mètode de la família per a resoldre aquest problema.

Els mètodes de la familia donada porten a trobar punts fixos de $g_\mu(x) = x$ i, per tant, són solució (per $\mu \neq -3$) de

$$x = \frac{e^x + \mu x}{3+\mu} \Leftrightarrow x(3+\mu) = e^x + \mu x \Leftrightarrow 3x + \mu x = e^x + \mu x \Leftrightarrow 3x = e^x$$

El millor mètode vindrà donat per la funció $g_\mu(x)$ tal que el modul de la seva derivada respecte a $x$ en el punt a on $a$ és solució de $e^x = 3x$ sigui mínim (o sigiu 0 amb multiplicitat més gran). Busquem el $\mu$ que minimitzi el mòdul de la derivada de $g'_\mu(a)$ el cual coincidirà amb el $\mu$ que minimitzi el seu mòdul al cuadrat.

$$|g'_\mu(a)|^2 = \frac{(e^a+\mu)^2}{(3+\mu)^2} = \left(\frac{3a+\mu}{3+\mu}\right)^2 = f(\mu)$$

derivant $f(\mu)$ respecte a $\mu$ obtenim

$$f'(\mu) = 2\frac{3+\mu-3a-\mu}{(3+\mu)^2}\frac{3a+\mu}{3+\mu} = 6\frac{(1-a)(3a+\mu)}{(3+\mu)^3}$$

fent un plot de $h(x) = e^x - 3x$ veiem que aquesta funció te dos zeros els dos positius i que compleixen $a_1 < 1$ i $a_2 > 1$. Per tant, si el nombre que volem trobar és $a_1$ veiem que $f(\mu)$ presenta un mínim en $\mu = -3a_1$ per tant només hem de buscar el valor de $\mu$ entre els valors possibles tal que $|\mu + 3a_1|$ sigui mínim.
Com que $a_1$ és aproximadament 0.619 aleshores $3a_1$ serà aproximadament 1.857 la cual cosa ens dona els següents possibles candidats al millor $\mu$ possibles

- $\mu_1 = -\frac{\text{floor}(2\cdot 1.857)}{2} = -1.5$
- $\mu_2 = -\frac{\text{ceil}(2\cdot 1.857)}{2} = -2$
- $\mu_3 = -\frac{\text{floor}(3\cdot 1.857)}{3} = -1.6$
- $\mu_4 = -\frac{\text{ceil}(3\cdot 1.857)}{3} = -2.0$
- $\mu_5 = -\frac{\text{floor}(5\cdot 1.857)}{5} = -1.8$
- $\mu_6 = -\frac{\text{ceil}(5\cdot 1.857)}{5} = -2.0$

A partir del resultats obtinguts i per lo que hem comentat anteriorment resulta evident que el millor mètode de la famílià s'obtindrà amb $\mu = -9/5$ i, per tant, $g_\mu(x) = \frac{5e^x - 9x}{6}$