

Funció distància

Marco Praderio 1361525

sigui E un espai mètric amb la funció distància d i sigui $E \times E$ l'espai mètric amb la distància producte $d \times d$ volem demostrar que la funció distància $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+$ és una funció continua. Dir que d és continua és equivalent a dir que, per a tot punt $(x_0, y_0) \in E \times E$ es compleix que

$$d(x, y) \rightarrow d(x_0, y_0) \text{ quan } (x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$$

Com que d és una funció distància tenim que

$$d(x, y) \leq d(x, x_0) + d(x_0, y) = d(x, x_0) + d(x_0, y_0) + d(y_0, y) \Leftrightarrow d(x, y) \leq d(x_0, y_0) + (d(y_0, y) + d(x, x_0))$$

i, anàlogament

$$d(x_0, y_0) \leq d(x_0, x) + d(x, y) = d(x_0, x) + d(x, y) + d(y, y_0) \Leftrightarrow d(x, y) \geq d(x_0, y_0) - (d(x_0, x) + d(y, y_0))$$

Per tant, com que quan $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ es compleix que $x \rightarrow x_0$ i que $y \rightarrow y_0$, aleshores, per definició de límit, es compleix

$$d(x, x_0) \rightarrow 0 \text{ quan } (x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$$

i

$$d(y, y_0) \rightarrow 0 \text{ quan } (x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$$

i com que acabem de veure que

$$d(x_0, y_0) - (d(x_0, x) + d(y, y_0)) \leq d(x, y) \leq d(x_0, y_0) + (d(y_0, y) + d(x, x_0))$$

aleshores podem assegurar per la regla del Sandwich que

$$d(x, y) \rightarrow d(x_0, y_0) \text{ quan } (x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$$

i, per tant, la funció d és continua.