Lemes per a descomposició LU

Marco Praderio 1361525

1 El producte de dues matrius triangulars superiors és una matriu triangular superior.

Agafem A, B dues matrius triangulars superiors de dimensió $n \times n$ i $C = A \cdot B$. Aleshores, per definició del producte entre matrius, tenim que

$$C_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} \cdot B_{k,j}$$

Notem ara que, si $j < i$ (ens trobem sota la diagonal de la matriu) aleshores es compleix

$$C_{i,j} = \sum_{k=1}^{j-1} A_{i,k} \cdot B_{k,j} + A_{i,j} \cdot B_{j,j} + \sum_{k=j+1}^{n} A_{i,k} \cdot B_{k,j}$$

En el primer sumatori tenim que $i > j > k$ i, com a conseqüència, $A_{i,k} = 0$ en quant A és una matriu diagonal superior. Tenim llavors que el primer sumatori val 0 en quant tots els seus termes valen 0. Per el segon sumatori tenim que $k > j$ i, com a conseqüència, $B_{k,j} = 0$ en quant B és una matriu diagonal superior. Tenim per tant que el segon sumatori també val 0 en quant tots els seus termes valen 0. per últim es compleix que $A_{i,j} \cdot B_{j,j} = 0$ en quant $A_{i,j} = 0$ perquè $j > i$ per hipòtesis i A és una matriu triangular superior. En conclusió si A, B són matrius triangulars superiors i $C = A \cdot B$ aleshores $C_{i,j} = 0$ si $j > i$. En altres paraules el producte de dues matrius triangulars superiors és una matriu triangular superior.

2 La inversa de d'una matriu triangular superior no-singular és una matriu triangular superior.

Agafem $P(x)$ el polinomi característic de la matriu triangular superior no-singular A. Aleshores, per el teorema de Cayley Hamilton, tenim que

$$P(A) = A^n + \lambda_{n-1}A^{n-1} + \cdots + \lambda_1 A + \lambda_0 Id = 0$$

On $\lambda_0 = (-1)^n \det(A) \neq 0$ en quant A és no-singular. tenim per tant que

$$\lambda_0^{-1}(A^{n-1} + \lambda_{n-1}A^{n-2} + \cdots + \lambda_1) \cdot A = Id$$

I, com a conseqüència, $A^{-1} = \lambda_0^{-1}(A^{n-1} + \lambda_{n-1}A^{n-2} + \cdots + \lambda_1)$ que és una matriu triangular superior en quant la suma i el producte de matrius triangulars superiors segueix sent una matriu triangular superior.

3 El producte de dues matrius triangulars inferior amb uns a la diagonal és una matriu triangular inferior amb uns a la diagonal.

Podem demostrar de manera anàloga a com ho hem fet en el cas de les matrius triangular superiors que el producte de dues matrius triangulars inferiors és una matriu triangular inferior. Si a més a més les diagonals de les matrius triangulars inferiors A i B estan compostes exclusivament per uns i $C = A \cdot B$ aleshores

$$C_{i,i} = \sum_{k=1}^{i-1} A_{i,k} \cdot B_{k,i} + A_{i,i} \cdot B_{i,i} + \sum_{k=i+1}^{n} A_{i,k} \cdot B_{k,i} = 0 + 1 \cdot 1 + 0 = 1$$

On el primer sumatori és 0 en quant $B_{k,i} = 0$ perquè B és triangular inferior i $k < i$. El segon sumatori també és 0 en quant $A_{i,k} = 0$ perquè A és triangular inferior i $k > i$. Els termes $A_{i,i}$ i $B_{i,i}$ valen 1 per hipòtesis.

4 la inversa de una matriu triangular inferior amb uns a la diagonal és una matriu triangular inferior amb uns a la diagonal.

Podem demostrar de manera anàloga a com ho hem fet en el cas de les matrius triangular superiors que la inversa de una matriu triangular inferior és una matriu triangular inferior. A més a més, donada A un matriu triangular inferior de dimensió $n \times n$ i $B = A^{-1}$ la seva inversa es compleix que

$$1 = \sum_{k=1}^{n} Ai, kB_{k,i} = \sum_{k=1}^{i-1} A_{i,k}B_{k,i} + A_{i,i}B_{i,i} + \sum_{k=i+1}^{n} A_{i,k}B_{k,i} = 0 + 1 \cdot B_{i,i} + 0 = B_{i,i}$$

On $A_{i,i} = 1$ per hipòtesis i els sumatoris valen 0 per els motius exposats en el apartat anterior.