Quocient de Rayleigh

Marco Praderio 1361525

El nostre objectiu és demostrar que el mètode de Rayleigh per trobar el valor propi dominant de una matriu simètrica A convergeix cap a aquest igual de ràpid que βk^{2n} on $k = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$, λ_i son els valors propis de la matriu A posats en ordre decreixent en mòdul i β és una constant que depèn de les condicions inicials.
Abans de començar recordem com es definia el mètode de Rayleigh.
Donada A una matriu $n \times n$ amb valors propis $\lambda_1, ..., \lambda_n$ tals que $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$ i donada la recurrència definida per

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= \frac{x^{(n)}}{||x^{(n)}||_2} \\ x^{(n+1)} &= Ay^{(n)} \end{aligned}$$

amb $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ tal que $x^(0) = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ on v_i valors propis normalitzats de A amb valors propis λ_i i $\alpha_i \neq 0$ aleshores podem aproximar λ_1 com a límit de la successió $\{R_n\}$ definida com $R_n = \frac{\left(x^{(n+1)}\right)^T y^{(n)}}{\left(y^{(n)}\right)^T y^{(n)}}$. Manipulant el terme R_n obtenim

$$\begin{aligned} R_n = \frac{\left(x^{(n+1)}\right)^T y^{(n)}}{\left(y^{(n)}\right)^T y^{(n)}} &= \frac{\lambda_1^{2n+1}\left[\alpha_1 v_1^T + \sum_{i=2}^n \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{n+1} v_i^T\right]\left[\alpha_1 v_1 + \sum_{i=2}^n \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^n v_i\right]}{\lambda_1^{2n}\left[\alpha_1 v_1^T + \sum_{i=2}^n \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^n v_i^T\right]\left[\alpha_1 v_1 + \sum_{i=2}^n \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^n v_i\right]} = \\ &= \lambda_1 \frac{\alpha_1^2 v_1^T v_1 + \sum_{i=2}^n \alpha_1\alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^n v_1^T v_i + \sum_{i=2}^n \alpha_1\alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{n+1} v_i^T v_1 + \sum_{i,j=2}^n \alpha_i\alpha_j \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{2n+1} v_i^T v_j}{\alpha_1^2 v_1^T v_1 + \sum_{i=2}^n \alpha_1\alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^n v_1^T v_i + \sum_{i=2}^n \alpha_1\alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^n v_i^T v_1 + \sum_{i,j=2}^n \alpha_i\alpha_j \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{2n} v_i^T v_j} = \\ &= \lambda_1 \frac{\alpha_1^2 + \sum_{i=2}^n \alpha_1\alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^n \left(1 + \frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right) v_1^T v_i + \sum_{i,j=2}^n \alpha_i\alpha_j \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{2n+1} v_i^T v_j}{\alpha_1^2 + \sum_{i=2}^n 2\alpha_1\alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^n v_1^T v_i + \sum_{i,j=2}^n \alpha_i\alpha_j \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{2n} v_i^T v_j} \end{aligned}$$

Si la matriu A és simètrica aleshores els vectors propis seran ortogonals. Si a més a més definim $\beta_i = \frac{\alpha_i^2}{\alpha_1^2}$ aleshores pode reescriure

$$\begin{aligned} R_n &= \lambda_1 \frac{\alpha_1^2 + \sum_{i=2}^n \alpha_1\alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^n \left(1 + \frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right) v_1^T v_i + \sum_{i,j=2}^n \alpha_i\alpha_j \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{2n+1} v_i^T v_j}{\alpha_1^2 + \sum_{i=2}^n 2\alpha_1\alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^n v_1^T v_i + \sum_{i,j=2}^n \alpha_i\alpha_j \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{2n} v_i^T v_j} = \\ &= \lambda_1 \frac{\alpha_1^2 + \sum_{i=2}^n \alpha_i^2 \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{2n+1}}{\alpha_1^2 + \sum_{i=2}^n \alpha_i^2 \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{2n}} = \lambda_1 \frac{1 + \sum_{i=2}^n \beta_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{2n+1}}{1 + \sum_{i=2}^n \beta_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{2n}} = \lambda_1 \frac{1 + \beta_2 k^{2n+1} + O\left(k^{2n+1}\right)}{1 + \beta_2 k^{2n} + O\left(k^{2n}\right)} \end{aligned}$$

desenvolupant per Taylor la fracció $\frac{1}{1+y}$ amb $y = \beta_2 k^{2n} + O\left(k^{2n}\right)$ obtenim

$$\begin{aligned} R_n &= \lambda_1 \frac{1 + \beta_2 k^{2n+1} + O\left(k^{2n+1}\right)}{1 + \beta_2 k^{2n} + O\left(k^{2n}\right)} = \lambda_1 \left(1 + \beta_2 k^{2n+1} + O\left(k^{2n+1}\right)\right)\left(1 - \beta_2 k^{2n} + O\left(k^{2n}\right)\right) = \\ &= \lambda_1 \left(1 - \beta_2 k^{2n} + O\left(k^{2n}\right)\right) \end{aligned}$$

Per tant, quan $n \to \infty$ tindrem que $R_n \to \lambda_1$ amb la mateixa velocitat que $\beta_2 k^n \to 0$ tal i com volíem demostrar.
És important notar que, tot i que el mètode de Rayleigh convergeix prou ràpid exigeix la dificultat computacional extra de haver de calcular la norma quadrat i si el vector propi v_1 no és ortogonal a la resta de vectors propis aleshores la velocitat de convergència es redueix a la meitat.