Métodos Numéricos. Proyecto de curso

Cálculo de integrales: aplicación al cálculo de la longitud de un arco de curva dado por una función explícita en R^2

Profs. Lluís Alsedà y Susana Serna
Curso 2015-2016

En este proyecto se plantea una metodología para el cálculo de longitudes de arco de curva mediante el cálculo de integrales de funciones utilizando reglas de integración Gaussiana, interpolación por splines, resolución de sistemas lineales y cálculo de raíces mediante métodos iterativos.

PROBLEMA

Considerar la elipse que tiene como ecuación

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + (2y)^2 = 1, \qquad x \in [-2, 2] \tag{1}$$

Encontrar el punto $A = (x*, y*)$ de la elipse ($y^* > 0$) tal que la proporción entre las longitudes de los arcos medidas desde el punto $(2, 0)$ en sentidos a favor de las agujas del reloj y en contra sea 4:1.

RESUMEN TEORICO Y PLANTEAMIENTO

Dada una curva definida por una función explícita $y = y(t)$ y su derivada $y'(t)$, ambas continuas en un intervalo $[a, b]$, la longitud del arco delimitado por a y b se calcula mediante la integral

$$l(y, a, b) = \int_a^b \sqrt{1 + y'(t)^2} dt$$

Si consideramos los puntos $A = (x, y), y > 0$ y $E = (2, 0)$ entonces la longitud de arco EA que une ambos puntos en el semiplano positivo se calcula a partir de

$$L_{EA}(x) = \int_x^2 \sqrt{1 + y'(t)^2} dt$$

Sea L la longitud total de la elipse (1). De acuerdo con las hipótesis del problema se debe cumplir que

$$L - L_{EA} = 4L_{EA}$$

Definiendo la función

$$F(x) := L - 5 \int_x^2 \sqrt{1 + y'(t)^2} dt \tag{2}$$

el problema se resuelve calculando x^* tal que $F(x^*) = 0$.

PROCEDIMIENTO GENERAL

1. Demostrar que $x^* > 0$.

2. Calcular la expresión $y'(t)$ a partir de (1).
3. Calcular (en un programa inicial aparte) la longitud total de la elipse (1), L, mediante cuadratura Gaussiana y los polinomios de Chebyshev (9 nodos).
4. En un segundo programa principal resolver $F(x) = 0$ usando el método de Newton. Para ello calcular previamente $F'(x) = \frac{d}{dx}(L - 5L_{EA}(x))$
   - Elegir $x_0 \in]0, 2[$ para iniciar el proceso iterativo.
   - Obtener los sucesivos $x_{k+1} = x_k - \frac{F(x_k)}{F'(x_k)}$donde cada $F(x_k)$ requiere evaluar $F(x)$, (2), aproximando la integral mediante interpolación de la función $\sqrt{1 + y'(t)^2}$ por splines cúbicos naturales.
   - Parar el proceso iterativo cuando $|x_{k+1} - x_k| < 10^{-6}$.

Metodología para el uso de splines. Obtener una aproximación a la integral $L_{EA}(x)$ mediante interpolación de la función $\sqrt{1 + y'(t)^2}$ por splines cúbicos naturales,

$$\int_x^2 \sqrt{1 + y'(t)^2}dt = \sum_{i=0}^{n_x-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{1 + y'(t)^2}dt \approx \sum_{i=0}^{n_x-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} S_i(t)dt$$

siendo $S_i(t)$ el spline cúbico natural $S_i(t) = \alpha_i + \beta_i(t - t_i) + \gamma_i(t - t_i)^2 + \delta_i(t - t_i)^3$ donde $t_i = x + ih$, $i = 0, \cdots, n_x$ con $n_x = \lfloor \frac{2-x}{h_t} \rfloor$ (parte entera del cociente), $h_t = 10^{-2}$ y $h = \frac{2-x}{n_x}$.

Notar que la elección específica de n_x y h permite a la vez que $h \approx h_t$ y $t_{n_x} = 2$. Además, como $x < 2 - 4 \cdot 10^{-2}$ entonces $n_x \geq 4$ y el numero de splines es mayor o igual a 4. De esta manera el sistema a resolver para calcular los momentos tendrá siempre dimensión mayor o igual a 3.

- Obtener el sistema de ecuaciones de los momentos.
- Resolver el sistema de ecuaciones mediante el método iterativo de Gauss-Seidel y guardar los momentos en un vector de dimensión $n_x + 1$.
- Calcular los coeficientes de los polinomios $S_i(t)$ y guardarlos en una matriz de $n_x - 1$ filas y 4 columnas.
- Calcular una fórmula analítica explícita para $\int_{t_i}^{t_{i+1}} S_i(t)dt$ en términos de $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i, y_i$, e y_{i+1} y acumular los valores para obtener una aproximación de L_{EA}
- Encontrar la fórmula de error de interpolación por splines. Determinar el error en el cálculo de L_{EA} en función de h a partir de dicha fórmula.
- A la vista del resultado, ¿ es correcto tomar $h_t = 10^{-2}$ para obtener precisión 10^{-8} en el cálculo de L_{EA}? En caso negativo, ¿ cuál es el h_t óptimo?

OBJETIVO FINAL

Entregar los códigos en C que resuelvan el problema planteado. Los códigos debe incluir las diferentes rutinas para cada uno de los pasos principales y debe estar comentado.

Proporcionar las líneas de comandos o Makefile que permitan compilar los programas.

Entregar un informe (máximo 6 paginas) que describa el procedimiento llevado a cabo y los resultados obtenidos.

IMPORTANTE

La fecha máxima de entrega para ambos grupos es el Miércoles 1 de Junio de 2016.

Para la evaluación del proyecto es condición imprescindible asistir a las clases correspondientes de Seminario del mes de Mayo. Solo se admitirán faltas debidamente justificadas.