Punts periòdics

Marco Praderio 1361525

Estudiem els punts periòdics en el l'interval $[0,1]$ que pot tenir la recurrència $g_\mu(x) = \mu x(1-x)$ amb μ pertanyent a $[0,4]$ en funció de μ.

El problema en si és prou fàcil de resoldre a força bruta. De fet, fixat μ, per trobar un punt periòdic de període m només fa falta definir recursivament la successió de polinòmis

$$g_{\mu_{n+1}} = g_\mu(g_{\mu_n}(x))$$

$$g_{\mu_1}(x) = g_\mu(x)$$

i buscar arrels del polinomi $p_{\mu_m}(x) = g_{\mu_m}(x) - x$ en el interval $[0,1]$ que no siguin arrels dels polinomis $p_{\mu_s}(x) = g_{\mu_s}(x) - x$ amb $s < m$ (com que els $p_{\mu_n}(x)$ són polinòmis podem fer servir el mètode de Sturm per determinar si existeixen arrels en aquest interval). Però per evitar treballs innecessaris estudiarem que passa al variar μ.

Per $\mu = 0$ tenim que $g_0(x) = 0$ i no existeixen punts periòdics excepte el punt 0 de període 1.

per $0 < \mu < 1$ tenim que la derivada de $g_\mu(x)$ en el únic punt fix que te entre 0 i 1 (el 0) és μ i, per tant, 0 és un punt fix atracto. A més a més tenim que entre 0 i 0.5 (on la derivada és 0) la derivada de $g_\mu(x)$ compleix $|g'_\mu(x)| \leq \mu < 1$ i, per tant, podem concloure que, per a tot x pertanyent a $(0, 0.5]$ es complirà $|g_\mu(x)| \leq \mu \cdot x < x$ a més a més es complirà que $g_\mu(x) > 0$ i, per tant, podrem aplicar el mateix raonament per $g_\mu(x)$. Podem per tant deduir que per a tot x pertanyent a $(0, 0.5]$ la successió $x_n = g^n_\mu(x)$ serà estrictament de creixent i tendirà cap a 0 i, per tant, no existiran punts periódics en $(0, 0.5]$. A més a més, com que per a tot y pertanyent a $(0.5, 1)$ es compleix que $g_\mu(y) = g_\mu(1-y)$ podem aplicar el mateix raonament en aquest interval i podem concloure que no hi haurà punts periòdics en $(0, 1)$. Per últim per $x = 1$ tenim $g_\mu(1) = 0$ i $g_\mu(0) = 0$ per tant 1 tampoc és un punt periódic i podem concloure que, per a $\mu < 1$ no tenim punts periòdics en $[0,1]$ llevat el 0 de període 1.

per $\mu = 1$ tenim, per x pertanyent a $(0,1]$, que $g_1(x) > 0$ (en realitat això és cert per a tot $\mu > 0$) i que $g_1(x) = x(1-x) < x$ per tant tindrem una successió estrictament decreixent per a tot x pertanyent a $(0,1]$ i, per tant, no hi haurà punts periòdics.

Per $\mu > 1$ tindrem 2 punts fixos 0 i $\alpha = \frac{\mu-1}{\mu}$ dels cuals 0 serà un punt fix repulsor mentres que a serà atractor per $1 < \mu < 3$.
Comprobem que per $\mu < 3$ no hi ha punts periòdics en $[0,1]$ exceptuant els punts fixos.
Per a tot x es compleix

$$(g_\mu(x) - \alpha)^2 = \left(\mu \cdot x(1-x) - \frac{\mu-1}{\mu}\right)^2 = \left((\mu-1)x - \mu x^2 + x - \frac{\mu-1}{\mu}\right)^2 =$$

$$= (((\mu-1) - \mu x)x + (x-\alpha))^2 = (x-\alpha)^2 + 2x((\mu-1) - \mu x)(x-\alpha) + x^2((\mu-1) - \mu x)^2 =$$

$$= (x-\alpha)^2 + 2x((\mu-1) - \mu x)(x - \frac{\mu-1}{\mu}) + x^2((\mu-1) - \mu x)^2 =$$

$$= (x-\alpha)^2 + 2x\frac{((\mu-1) - \mu x)(\mu x - (\mu-1))}{\mu} + x^2((\mu-1) - \mu x)^2 =$$

$$= (x-\alpha)^2 - 2x\frac{(\mu-1) - \mu x)^2}{\mu} + x^2((\mu-1) - \mu x)^2 =$$

$$= (x-\alpha)^2 - \left(\frac{2x}{\mu} - x^2\right)((\mu-1) - \mu x)^2 = (x-\alpha)^2 - x\left(\frac{2}{\mu} - x\right)((\mu-1) - \mu x)^2$$

A més a més per $2 \geq \mu > 1 > x > 0$ tindrem $\frac{2}{\mu} - x > 0$ i $x > 0$. També es compleix que

$$(\mu - 1) - \mu x = 0 \Rightarrow x = \frac{\mu - 1}{\mu} = a$$

Com a conseqüència, per a tot 0¡x¡1 diferent de a, si u¡=2 es compleix que

$$x\left(\frac{2}{\mu} - x\right)((\mu - 1) - \mu x)^2 > 0$$

i, per tant

$$(g_\mu(x) - \alpha)^2 = (x - \alpha)^2 - x\left(\frac{2}{\mu} - x\right)((\mu - 1) - \mu x)^2 < (x - \alpha)^2$$

Per tant, per a tot punt x pertanyent a $[0, 1]$ no fix es compleix que $g_\mu(x)$ està més a prop de a que x si $1 < \mu < 2$ per tant, per a $1 < \mu \leq 2$ no hi ha punts periòdics.

Finalment per $2 < \mu < 3$ tenim que per $\frac{\mu-1}{2\mu} < x < \frac{\mu+1}{2\mu}$ la derivada de $g_\mu(x)$ és estrictament inferior a 1 per tant per el teorema del punt fix tenim que per a tot x pertanyent a $\left(\alpha - \frac{3-\mu}{2\mu}, \alpha + \frac{3-\mu}{2\mu}\right)$ el punt $g_\mu(x)$ estarà estrictament més a prop de α que x i, per tant, no hi haurà punts periòdics en aquest interval. A més a més, per a $2 < \mu < 3$ tenim que si $0 < x < \frac{1}{\mu}$ aleshores $x < g_\mu(x) < \alpha$ si $\frac{1}{\mu} < x < \alpha - \frac{3-\mu}{2\mu}$ aleshores $g_\mu(x) = g_\mu(1 - x)$ i $1 - x$ pertany a $\left(\alpha - \frac{3-\mu}{2\mu}, \alpha + \frac{3-\mu}{2\mu}\right)$ i, per tant, els següents elements de la successió seràn sempre mes propers a a d'aquesta manera queda demostrat que en el intèrval $\left(0, \alpha + \frac{3-\mu}{2\mu}\right)$ no hi ha punts periòdics exceptuant el punt fix α. Per últim per x pertanyent a $\left(\alpha + \frac{3-\mu}{2\mu}, 1\right)$ aleshores $g_\mu(x)$ pertany a $\left(0, \frac{1}{\mu}\right)$ per tant ens reduïm al cas anterior i acabem de demostrar que per a tot x pertanyent a $[0, 1]$ ($g_\mu(1) = 0$ és un punt fix) no hi ha punts periòdics llevat dels punts fixos per a $\mu < 3$.
per $\mu \geq 3$ hem de resoldre la equació esmentada al començament per trobar els punts periòdics.