Algoritme anti Newton

Marco Praderio 1361525

El mètode de Newton resulta sovint molt útil i convergeix sovint més ràpidament que el mètode de la bijecció. No obstant no és un mètode 100% eficaç i pot no convergir i quedar atrapat en un bucle. En aquest breu text presentaré una manera per construir un polinomi de grau n tal que, donats un nombre n de punts de $\mathbb R$ diferents disposats en qualsevol ordre aplicant el mètode de Newton agafant com a valor inicial qualsevol d'aquests punts es caurà en un cicle que recorrerà tots aquests punts en ordre. anomenem x_1, x_2, \ldots, x_n els punts per els quals volem que passi l'algoritme que apliqui el mètode de Newton i agafem p(x) un polinomi. Aleshores és condició necessària i suficient per tal de que p(x) tingui les propietats desitjades que, per a tot $i=0,\ldots,n$ es compleixi

$$x_i = x_{i-1} - \frac{p(x_{i-1})}{p'(x_{i-1})}$$

on $x_0 = x_n$. Notem que, com que els valors x_i són tots diferents aleshores $p(x_i)$ ha de ser diferent 0 per a tot x_i i si $p(x_i)$ és diferent de 0 per a tot x_i aleshores

$$x_i = x_{i-1} - \frac{p(x_{i-1})}{p'(x_{i-1})} \Leftrightarrow x_i \cdot p'(x_{i-1}) = x_{i-1} \cdot p'(x_{i-1}) - p(x_{i-1})$$

en quant, si és complís la segona equació, $p'(x_i)$ hauria de ser diferent de 0 per a tot i (en cas contrari hi hauria un $p(x_i) = 0$).

Per tant, si imposem $p(x_i) = 1$ per a tot i = 1, ..., n i denotem $p(x) = a_1 + a_2x + ... + a_{2n}x^{2n-1}$ podem reduir el problema de determinar el polinomi a resoldre el següent sistema de equacions lineals

$$\begin{cases} \operatorname{eqn}_1 : & p(x_1) = 1 \\ \vdots \\ \operatorname{eqn}_n : & p(x_n) = 1 \\ \operatorname{eqn}_{n+1} : & p'(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) + p(x_{i-1}) = 0 \\ \vdots \\ \operatorname{eqn}_{n+i} : & p'(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) + p(x_{i-1}) = 0 \\ \vdots \\ \operatorname{eqn}_{2n} : & p'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) + p(x_{n-1}) = 0 \end{cases}$$

Qualsevol polinomi (de qualsevol grau) que sigui solució d'aquest sistema tindrà les propietats desitjades.