Formula del error per la quadratura Gaussiana.

Marco Praderio 1361525

El nostre objectiu és demostrar que:
Siguin x_1,x_2,...,x_n els zeros (simples) del polinomi ortogonal ρ_n (de grau n) respecte del pes $\omega(x)$ a l'interval $[a,b]$ i sigui $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ de classe C^{2n}. Llavors

$$\int_a^b \omega(x)f(x)dx-\sum_{i=1}^n \omega_i f(x_i)=\frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}<\rho_n,\rho_n>$$

amb $a<\xi<b$. Per fer-ho aplicarem que la formula de quadratura Gaussiana amb n nodes és exacte per a qualsevol polinomi de grau mes petit o igual que $2n-1$ i que l'error de interpolació de polinomis de Hermite obtinguts amb $n+1$ nodes és $f(x)-H_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n_0}\dots(x-x_m)^{n_m}$ on $\xi_x\in<x_0,\dots,x_m,x>$ x_i són les abscisses dels punts fets servir per interpolar i n_i és el nombre de derivades $+1$ que coneixem d'aquests punts.

Agafem H_{2n-1} el polinomi interpolador de Hermite que interpola f en les n arrels del polinomi ortogonal ρ_n i en la derivada de f en els mateixos punts. Com que H_{2n-1} interpola f en les n arrels de ρ_n (que denotarem per x_i) aleshores es compleix que

$$\sum_{i=1}^n \omega_i f(x_i)=\sum_{i=1}^n \omega_i H_{2n-1}(x_i)$$

Si a més a més tenim en compte que

$$f(x)-H_{2n-1}(x)=\frac{f^{(2n)}(\xi_x)}{(2n)!}(x-x_0)^2\dots(x-x_m)^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(x)=H_{2n-1}(x)+\frac{f^{(2n)}(\xi_x)}{(2n)!}(x-x_0)^2\dots(x-x_m)^2=H_{2n-1}(x)+\frac{f^{(2n)}(\xi_x)}{(2n)!}\rho_n^2(x)$$

Aleshores podem escriure

$$\begin{aligned}\int_a^b \omega(x)f(x)dx-\sum_{i=1}^n \omega_i f(x_i)&=\int_a^b \omega(x)\left(H_{2n-1}(x)+\frac{f^{(2n)}(\xi_x)}{(2n)!}\rho_n^2(x)\right)dx-\sum_{i=1}^n \omega_i H_{2n-1}(x_i)=\\&=\int_a^b \omega(x)H_{2n-1}(x)dx-\sum_{i=1}^n \omega_i H_{2n-1}(x_i)+\int_a^b \omega(x)\frac{f^{(2n)}(\xi_x)}{(2n)!}\rho_n^2(x)dx\end{aligned}\tag{1}$$

Com que H_{2n-1} és un polinomi de grau menor o igual a $2n-1$ i la formula de quadratura Gaussiana és exacta per a polinomis de grau menor o igual a $2n-1$ aleshores tindrem

$$\int_a^b \omega(x)H_{2n-1}(x)dx=\sum_{i=1}^n \omega_i H_{2n-1}(x_i)\Rightarrow\int_a^b \omega(x)H_{2n-1}(x)dx-\sum_{i=1}^n \omega_i H_{2n-1}(x_i)=0$$

A més a més, com que f és C^{2n} aleshores $f^{(2n)}$ és continua i aleshores podem aplicar el teorema del valor mig per afirmar que existeix $\xi\in(a,b)$ que compleix

$$\int_a^b \omega(x)\frac{f^{(2n)}(\xi_x)}{(2n)!}\rho_n^2(x)dx=\frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}\int_a^b \omega(x)\rho_n^2(x)dx=\frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}<\rho_n,\rho_n>$$

Podem per tant reescriure (1) com

$$\begin{aligned}\int_a^b \omega(x)f(x)dx-\sum_{i=1}^n \omega_i f(x_i)&=\int_a^b \omega(x)H_{2n-1}(x)dx-\sum_{i=1}^n \omega_i H_{2n-1}(x_i)+\int_a^b \omega(x)\frac{f^{(2n)}(\xi_x)}{(2n)!}\rho_n^2(x)dx\\&=0+\frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}<\rho_n,\rho_n>=\frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}<\rho_n,\rho_n>\end{aligned}$$

Tal i com volíem demostrar.