

ทฤษฎีของประเภท Category Theory

ฉบับร่าง วันที่ March 23, 2020

Contents

0



บทนิยาม 1.1. แคลเทกอรี (Category) ประกอบด้วย

- ลูกศร แทนด้วยสัญลักษณ์ f, g, h, \dots
- วัตถุ แทนด้วยสัญลักษณ์ A, B, C, \dots
- แต่ละลูกศร f จะมีวัตถุที่เกี่ยวข้องอยู่ด้วย คือ $\text{dom}(f), \text{cod}(f)$ เรียกว่า โดเมน และ โคโดเมน ของ f ตามลำดับ นิยมเขียนด้วยสัญลักษณ์

$$f: A \rightarrow B$$

และให้เข้าใจว่า $A = \text{dom}(f)$ และ $B = \text{cod}(f)$

- สำหรับ f, g ที่มีสมบัติว่า $\text{cod}(f) = \text{dom}(g)$ จะมีลูกศร

$$g \circ f: \text{dom}(f) \rightarrow \text{cod}(g)$$

เรียกลูกศรนี้ว่าคอมโพสิทของ f และ g

- สำหรับแต่ละวัตถุ A จะมีลูกศรไปหาตัวมันเอง

$$1_A: A \rightarrow A$$

เรียกว่า ลูกศรเอกลักษณ์ ของ A

นอกจากนี้แล้ว แคลเทกอรีต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขดังต่อไปนี้

- (สมบัติการจัดกลุ่ม) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ สำหรับลูกศรใด ๆ ที่ซึ่ง $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C, h: C \rightarrow D$
- (สมบัติเอกลักษณ์) $f \circ 1_A = f = 1_B \circ f$ สำหรับทุก ๆ $f: A \rightarrow B$

2.1 บทตั้งของโยเนดะ

บทนิยาม 4.1. สำหรับแคเทกอรี \mathbf{C} ใด ๆ พูลแบ็ค (Pullback) ของลูกศร f, g ที่ซึ่ง $\text{cod}(f) = \text{cod}(g)$ คือ ลูกศร p_1, p_2 ที่ทำให้ $fp_1 = gp_2$ ดังแผนภาพต่อไปนี้

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{p_2} & B \\ p_1 \downarrow & & \downarrow g \\ A & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

และสมบัตินี้เป็นสากล นั่นคือสำหรับ $z_1: Z \rightarrow A$ และ $z_2: Z \rightarrow B$ ที่มีสมบัติว่า $z_1f = z_2g$ เช่นกัน จะมี $u: Z \rightarrow P$ เพียงหนึ่งเดียว ซึ่งมีสมบัติว่า $z_1 = p_1u$ และ $z_2 = p_2u$ เป็นไปตามแผนภาพด้านล่าง

$$\begin{array}{ccccc} & & Z & & \\ & & \swarrow & & \searrow \\ & & u & & z_2 \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & P & \xrightarrow{p_2} & B \\ & & p_1 \downarrow & & \downarrow g \\ & & A & \xrightarrow{f} & C \\ & \swarrow & & & \\ z_1 & & & & \end{array}$$

จะเห็นว่าพูลแบ็คมีได้เพียงแบบเดียวขึ้นกับไอโซมอร์ฟิซึม

4.1 ทฤษฎีบทฟังก์เตอร์แต่งเติม

