No
Date

Nama : Rifqi Muhadzib Ahdan
NPM : 1402 1021 0029
Kelas : A

Tugas 7 - Induksi Matematika

Halaman 330

4| Let P(n) be the statement that $1^3+2^3+\dots+n^3 = (n(n+1)/2)^2$ for the positive integer n

(a) What is the statement P(1)?

$$P(n) = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = n^3$$

$$P(1) = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2 = 1^3$$

(b) Show that P(1) is true, completing the basis step of the proof!

P(1) bernilai BENAR, karena

$$1^3 = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2$$

$$1^3 = \left(\frac{2}{2}\right)^2$$

$$1 = 1$$

(c) What is the inductive hypotesis?

Assume P(k) for $k \geq 1$

$$1^3+2^3+\dots+k^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$$

(d) What do you need to prove in the inductive step?

Perlu dibuktikan bahwa P(k) mengartikan P(k+1), yang mana P(k) adalah inductive hypotesis di bagian (c), sehingga P(k+1) adalah

$$1^2+2^2+\dots+k^2+(k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}$$

(e) Complete the inductive step

$$\Rightarrow 1^3+2^3+\dots+k^3+(k+1)^3 = \left(\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}\right)+(k+1)^2 \text{ (inductive hypotesis)}$$

$$= (k+1)\left(\frac{k(2k+1)}{6}+(k+1)\right)$$

$$= (k+1)\left(\frac{2k^2+7k+6}{6}\right)$$

$$= (k+1)\left(\frac{(2k+3)(k+2)}{6}\right)$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}$$

JOYKO® 36 Lines, 6 mm

No
Date

4) Explain why these steps show that this formula is true whenever n is a passive integer
Basis dan inductive step telah selesai, maka secara prinsipal dari induksi matematika P(n) bernilai BENAR untuk seluruh $n \geq 1$ (positif)

5| Prove that $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n+1)^2 = (n+1)(2n+1)(2n+3)/3$ whenever n is a nonnegative integer

- Basis step:

Assume $n = 0$

$(2 \cdot 0 + 1)^2 = \frac{(0+1)(2 \cdot 0+1)(2 \cdot 0+3)}{3}$

$1^2 = \frac{(1)(1)(3)}{3}$

$1 = 1$ ∴ P(n) bernilai benar

- Inductive step

Harus dibuktikan dahulu (k+1)

$= 1^2 + 3^2 + \dots + (2k+1)^2 + (2(k+1)+1)^2$

$= 1^2 + 3^2 + \dots + (2k+1)^2 + (2k+3)^2$

$= \frac{(k+1)(2k+1)(2k+3)}{3} (2k+3)^2$

$= \left(\frac{(k+1)(2k+1)}{3} + (2k+3)\right)(2k+3)$

$= \left(\frac{(k+1)(2k+1) + (6k+9)}{3}\right)(2k+3)$

$= \left(\frac{2k^2 + 2k + k + 1 + 6k + 9}{3}\right)(2k+3)$

$= \left(\frac{2k^2 + 9k + 10}{3}\right)(2k+3)$

$= \left(\frac{(k+2)(2k+5)}{3}\right)(2k+3)$

$= \frac{(k+2)(2k+3)(2k+5)}{3}$

$= \frac{((k+1)+1\ (2(k+1)+1)\ (2(k+1)+3))}{3} \Rightarrow$ P(k+1) BENAR

∴ P(k+1) BENAR untuk seluruh nonnegatif / positif integer n

No
Date

Halaman 299

53| Show that we can prove that $P(n,k)$ is true for all pairs of positive integers n and k if we show

(a) $P(1,1)$ is true and $P(n,k) \rightarrow [P(n+1,k) \wedge P(n,k+1)]$ is true for all positive integers n and k
(b) $P(1,k)$ is true for all positive integers k, and $P(n,k) \rightarrow P(n+1,k)$ is true for all positive integers n and k
(c) $P(n,1)$ is true for all positive integers n and $P(n,k) \rightarrow P(n,k+1)$ is true for all positive integers n and k

Jawaban

(a) $P(n,k) \xrightarrow{\text{misal}} P(a,b) \rightarrow P(n,k)$ FALSE jika n dan k positif
Anggap bahwa $P(a,b)$ salah ketika $(a+b)$ sekecil mungkin

- $a > 1$
$P(a-1,b) \rightarrow [P(a,b) \wedge P(a-1,b+1)]$ SALAH
$P(a-1,b)$ SALAH jika $a-1+b < a+b$ terkecil melalui 'kontradiksi'
- $b > 1$
$P(a,b-1) \rightarrow [P(a+1,b-1) \wedge P(a,b)]$ SALAH
$P(a,b-1)$ SALAH jika $a+b-1 < a+b$ terkecil melalui kontradiksi

∴ $P(n,k)$ tidak berlaku untuk semua pasangan bilangan positif n dan k' adalah SALAH

(b) $P(n,k)$ FALSE jika n dan k positif
Anggap bahwa $P(a,b)$ salah sehingga $(a+b)$ sekecil mungkin karena $P(1,b)$ TRUE untuk $a > 1$

- $a > 1$

$P(a-1,b)$ harus SALAH seperti $P(a-1,b) \rightarrow P(a,b)$ tidak BENAR
Namun $P(a-1,b)$, salah satunya yaitu $(a-1+b) < (a+b)$ kontradiksi
∴ Sehingga $P(a,b)$ terkecil $P(n,k)$ berlaku untuk semua pasangan bulat n dan k

JOYKO® 38 Lines, 6 mm

No
Date

ⓒ $P(n,k)$ FALSE n dan k positif
Anggap bahwa $P(a,b)$ salah sehingga $(a+b)$ sekecil mungkin
Karena $P(a,1)$ BENAR untuk $b > 1$

• $b > 1$
$P(a, b-1)$ harus SALAH seperti $P(a, b-1) \rightarrow P(a,b)$ SALAH.
Namun $P(a, b-1)$ SALAH dengan $(a+b-1 < a+b)$ kontradiksi
$P(a,b)$ terkecil
∴ $P(n,k)$ berlaku untuk semua pasangan bulat n dan k