Nama : Muhammad Fauzan Azhiima

NPM : 140810210041

UTS Kalkulus

1. periksa kekonvergenan baris berikut :

a) $\mathbf{a_n = \frac{3n^2+4n-1}{4n-2n^2+4}}$

jawab :

lim n →tak hingga (a_n) = $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+4n-1}{4n-2n^2+4} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{4}{n}-\frac{1}{n^2}}{\frac{4}{n}-2+\frac{4}{n^2}}$

$= \frac{3}{-2}$

Karena lim n → tak hingga (a_n) = -1,5, maka $\frac{3n^2+4n-1}{4n-2n^2+4}$ **konvergen ke -1,5**

b) $\mathbf{a_n = \frac{\sqrt{n}}{4n-5}}$

jawab :

lim n →tak hingga (a_n) = $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{4n-5} * \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{4-\frac{5}{n}}$

$= \frac{0}{4} = 0$

Karena lim n → tak hingga (a_n) = 0, maka $\frac{\sqrt{n}}{4n-5}$ **konvergen ke 0**

2. selidiki kekonvergenan deret berikut :

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{3n+1}}$

Jawab:

$a_n = \frac{2}{\sqrt{3n+1}}$

lim n →∞ (a_n) = $\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{3n+1}} * \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{\sqrt{n}}}{\sqrt{3+\frac{1}{n}}}$

$= \frac{0}{\sqrt{3}} = 0$

Karena lim n → ∞ (a_n) = 0, maka deret $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{3n+1}}$ konvergen

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

Jawab :

$a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

a = lim n →∞ (a_n)^1/2 = $\lim_{n\to\infty} ((1 - \frac{1}{n})^n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n}$

a = 1

karena a =1, maka tidak ada kesimpulan menggunakan uji akar.

lim n→∞ (a_n) = $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} e^{n \ln(1-\frac{1}{n})}$

karena e kontinu pada interval [1, ∞), maka persamaan dapat ditulis ulang sebagai berikut :

$= e^{\lim_{n\to\infty} n.\ln(1-\frac{1}{n})} = e^{\lim_{n\to\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) + n.(\frac{1}{n(n-1)})}$ (l'hopital)

$= e^{\lim_{n\to\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-1}} = e^{0+0} = 1$

Karena lim n→∞ (a_n) = 1 =/= 0, maka deret $\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ divergen

3. Selidiki kekonvergenan deret berikut dengan uji hasil bagi :

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + n}{n!}$

Jawab :

misal $a_n = \frac{4^n+n}{n!}$ dan $a_{n+1} = \frac{4 * 4^n + n + 1}{(n+1)!}$

Sehingga

$\rho = \lim_{n\to\infty} (a_{n+1})/(a_n)$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{4 * 4^n + n + 1}{(n+1)!} * \frac{n!}{4^n + n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4 * 4^n + n + 1}{n+1} * \frac{1}{4^n + n}$

$= \lim_{n\to\infty} ((4 * 4^n + n + 1) / (n * 4^n + n^2 + 4^n + n))$

(penyebut memiliki pangkat n yang lebih tinggi daripada pembilang)

= 0

Karena $\rho = 0 < 1$, maka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + n}{n!}$ konvergen

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(2n)!}$

misal $a_n = \frac{n^3}{(2n)!}$ Dan $a_{n+1} = \frac{(n+1)^3}{(2n+2)!}$

$\rho = \lim_{n\to\infty} (a_{n+1})/(a_n)$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{(2n+2)!} * \frac{(2n)!}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{(2n+2)(2n+1)} * \frac{1}{n^3}$

(penyebut memiliki pangkat n yang lebih tinggi daripada pembilang)

= 0

Karena $\rho = 0 < 1$, maka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(2n)!}$ Konvergen

4. Selidiki kekonvergenanderet berikut dengan uji akar :

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+5}{n-1}\right)^n$

Jawab :

$a_n = \left(\frac{3n+5}{n-1}\right)^n$

a = lim n →∞ (a_n)^1/2 = $\lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{3n+5}{n-1}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+5}{n-1} * \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{5}{n}}{1-\frac{1}{n}}$

a = 3

Karena a = 3 > 1, maka $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+5}{n-1}\right)^n$ divergen

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{5n+3}\right)^n$

Jawab :

$a_n = \left(\frac{2n}{5n+3}\right)^n$

a = lim n →∞ (a_n)^1/2 = $\lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{2n}{5n+3}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{5n+3} * \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{5+\frac{3}{n}}$

a = $\frac{2}{5}$

Karena a = $\frac{2}{5}$ < 1, maka deret konvergen

5. Perihal kekonvergenan deret ganti tanda berikut :

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n . \frac{1}{n(n+4)}$

- Apakah a_n monoton turun?

a_n monoton turun apabila $f'(x) < 0$, dimana $f(x) = a_n$

$f(x) = (n^2 + 4n)^{-1}$

$f'(x) = (-1)(n^2 + 4n)^{-2}(2n + 4) = -\left(\frac{2n+4}{(n^2+4n)^2}\right) = 0$

n = -2

n = 0

menggunakan uji titik, diketahui bahwa $f'(x) < 0$ di (-∞, -2) V (0, ∞). deret a_n berada di interval [1, ∞)

oleh karena itu, a_n monoton turun.

- Lim n→∞ (a_n) = $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+4n} * \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{4}{n}}$

$= \frac{0}{1} = 0$

Karena a_n monoton turun DAN Lim n→∞ (a_n) = 0 < 1, maka $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n . \frac{1}{n(n+4)}$ deret konvergen

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} . \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

Apakah a_n monoton turun?

a_n monoton turun apabila $f'(x) < 0$, dimana $f(x) = a_n$

$f(x) = \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

$f'(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{\ln n}{2\sqrt{n}}}{n} = \frac{2-\ln n}{2n\sqrt{n}} = 0$

n = 0

n = e^2 (7,389…)

menggunakan uji titik, diketahui bahwa $f'(x) < 0$ di (-∞, 0) V (e^2, ∞). Deret a_n berada di interval [1, ∞).

Karena a_n tidak selalu turun di interval [1, ∞), deret $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} . \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ divergen.

6. Selidiki apakah ferret konvergen mutlak, bersyarat atau divergen :

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n . (\frac{n}{4^n})$

Dari soal kita dapatkan $U_n = (-1)^n . (\frac{n}{4^n})$ dan $|U_n| = \frac{n}{4^n}$.

Sehingga dengan uji hasil bagi.

$|U_{n+1}| = \frac{n+1}{4*4^n}$

ρ = lim n→∞ ($|U_{n+1}|$ / $|U_n|$)

$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{4*4^n} * \frac{4^n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{4n} * \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$

$= \lim_{n \to \infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{4} = \frac{1}{4}$

Karena $\rho = \frac{1}{4} < 1$, maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n . (\frac{n}{4^n})$ Konvergen mutlak

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n . \frac{1}{5n+1}$

Dari soal kita dapatkan $U_n = (-1)^n . \frac{1}{5n+1}$ dan $|U_n| = \frac{1}{5n+1}$

Sehingga dengan uji banding limit

Misal, $a = |U_n|$ dan $b = \frac{1}{n}$

$L = \lim_{n \to \infty} \frac{a}{b} = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{5n+1} * \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$

$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{5+\frac{1}{n}} = \frac{1}{5}$

Karena $L = \frac{1}{5}$, maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n . \frac{1}{5n+1}$ konvergen mutlak