Metode Numerik

Pertemuan 3

Agenda Pertemuan 3

1. Metode Terbuka
2. Newton-Raphson
3. Secant
4. Iterasi Titik Tetap

1

Pencarian Akar: Metode Terbuka

Pencarian Akar: Metode Terbuka

Tidak seperti pada metode tertutup, metode terbuka tidak memerlukan selang yang mengurung akar. Yang diperlukan hanya sebuah tebakan awal akar.

Kadang iterasi konvergen ke akar sejati, kadang juga divergen. Namun, jika konvergen, konvergensinya itu berlangsung sangat cepat dibandingkan dengan metode tertutup.

Yang termasuk ke dalam metode terbuka:

1. Metode Newton-Raphson
2. Metode Secant
3. Metode Iterasi Titik-Tetap (*fixed-point iteration*)

2

Metode Newton-Raphson

Metode Newton-Raphson

Metode pendekatan yang menggunakan satu titik awal dan mendekatinya dengan memperhatikan slope atau gradien pada titik tersebut. Metode ini paling disukai karena konvergensinya paling cepat di antara metode lainnya.

Langkah Metode Newton Raphson:

1. Definisikan fungsi f(x) dan f'(x)
2. Tentukan toleransi error (e) dan iterasi maksimum (n)
3. Tentukan nilai pendekatan awal x_0
4. Hitung $f(x_0)$ dan $f'(x_0)$
5. Untuk iterasi i = 1 s/d n atau $|f(x_i)| > e$
   - Hitung $f(x_i)$ dan $f^1(x_i)$
   - $X_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f^1(x_i)}$
6. Akar persamaan adalah nilai x_i yang terakhir diperoleh.

Contoh Metode Newton-Raphson

Selesaikan persamaan $x - e^{-x} = 0$ dengan titik pendekatan awal $x_0 = 0$

Langkah Penyelesaian

1. Definisikan fungsi f(x) dan f'(x).
   $f(x) \;= x - e^{-x}$
   $f'(x) = 1 + e^{-x}$
2. Tentukan toleransi error (e) dan iterasi maksimum (n).
   [tahap ini dilewati karena e & n tidak ditentukan di soal, jadi iterasi berhenti ketika nilai f(x) sudah dianggap kecil]
3. Tentukan nilai pendekatan awal x_0
   $x_0 = 0 \rightarrow$ didapat dari soal
4. Hitung $f(x_0)$ dan $f'(x_0)$
   $f(x_0) = f(0) = 0 - e^{-0} = -1$
   $f'(x_0) = f'(0) = 1 + e^{-0} = 2$

Contoh Metode Newton-Raphson

Selesaikan persamaan $x - e^{-x} = 0$ dengan titik pendekatan awal $x_0 = 0$

Langkah Penyelesaian

5. Menghitung X_{i+1} di setiap iterasi
   - Iterasi 0

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f^1(x_0)} = 0 - \frac{-1}{2} = 0,5$$

   - Iterasi 1

$f(x_1) = -0.106631$ dan $f^1(x_1) = 1.60653$

$$x_1 - \frac{f(x_1)}{f^1(x_1)} = 0.5 - \frac{-0,106531}{1,60653} = 0.566311$$

Contoh Metode Newton-Raphson

Selesaikan persamaan $x - e^{-x} = 0$ dengan titik pendekatan awal $x_0 = 0$

Langkah Penyelesaian

- Iterasi 2

  $f(x_2) = -0.00130451$ dan $f^1(x_2) = 1.56762$

  $$x_2 - \frac{f(x_2)}{f^1(x_2)} = 0.566311 - \frac{-0.00130451}{1.56762} = 0{,}567143$$

- Iterasi 3

  $f(x_3) = -1.96.10^{-7}$

  Nilai $f(x_3)$ yang didapat sangat kecil sehingga dianggap melebihi batas error yang ditentukan.

  Disimpulkan bahwa akar persamaan **x = 0.567143.**

Penyelesaian Metode Newton Raphson dalam bentuk tabel

$x - e^{-x} = 0 \rightarrow x_0 = 0, e = 0.00001$

Iterasi	x	f(x)	f'(x)
0	0	-1	2
1	0.5	-0.106531	1.60653
2	0.566311	-0.00130451	1.56762
3	0.567143	-1.9648e-007	1.56714
Akar terletak di x = 0.567143			

Scilabkeun

```
function hasil=f(x)
    hasil = x-%e^-x
endfunction
```

```
function hasil=turunanf(x)
    hasil = 1+%e^-x
endfunction
```

```
function newton()
    x=input('Masukkan tebakan awal x0 = ');
    printf('Toleransi yang digunakan berdasarkan |f(x)|');
    tol=input('Masukkan nilai toleransi = ');
    printf('Metode Newton-Raphson\n\n');
    i = 0;
    absfx = abs(f(x));
    while (absfx > tol)
        fx = f(x);
        fnx = turunanf(x);
        printf('iterasi-%d ->\t x%d = %.4e\t f(x%d) = %.4e\t f`(x%d) = %.4e\n', i, i, x, i, fx, i, fnx);
        absfx = abs(f(x));
        xtmp = x
        x = x - (fx / fnx);
        i = i + 1;
    end
    printf('akar terletak di x = %.5f', xtmp);
endfunction
```

```
Masukkan tebakan awal x0 = 0

Toleransi yang digunakan berdasarkan |f(x)|
Masukkan nilai toleransi = 10^-6

Metode Newton-Raphson

iterasi-0 ->     x0 = 0.0000e+00         f(x0) = -1.0000e+00     f`(x0) = 2.0000e+00
iterasi-1 ->     x1 = 5.0000e-01         f(x1) = -1.0653e-01     f`(x1) = 1.6065e+00
iterasi-2 ->     x2 = 5.6631e-01         f(x2) = -1.3045e-03     f`(x2) = 1.5676e+00
iterasi-3 ->     x3 = 5.6714e-01         f(x3) = -1.9648e-07     f`(x3) = 1.5671e+00
akar terletak di x = 0.56714
```

3

Metode Secant

Metode Secant

Metode secant adalah bentuk modifikasi dari Metode Newton Raphson. Metode Newton Raphson memerlukan perhitungan f'(x), *padahal tidak semua fungsi mudah dicari turunannya*. Turunan fungsi dapat dihilangkan dengan cara menggantinya dengan bentuk lain yang ekivalen.

Langkah Penyelesaian Metode Secant:

1. Definisikan fungsi f(x)
2. Definisikan toleransi error (e) dan iterasi maksimum (n)
3. Masukkan dua nilai pendekatan awal yang di antaranya terdapat akar yaitu x_0 dan x_1, sebaiknya gunakan metode tabel atau grafis untuk menjamin titik pendekatannya adalah titik pendekatan yang konvergensinya pada akar persamaan yang diharapkan.
4. Hitung $f(x_0)$ dan $f(x_1)$ sebagai y_0 dan y_1
5. Untuk iterasi i = 1 s/d n atau $|f(x_i)| > e$

$$x_{i+1} = x_i - y_i \frac{x_i - x_{i-1}}{y_i - y_{i-1}}$$

6. Hitung $y_{i+1} = f(x_{i+1})$
7. Akar persamaan adalah nilai x yang terakhir.

Contoh Metode Secant

Tentukan penyelesaian dari $\mathbf{x^2 - (x+1)\,e^{-x} = 0}$. Tebakan awal akar $x_0 = 0.8$ dan $x_1 = 0.9$

Langkah Penyelesaian

1. Menghitung y_0 dan y_1

$$y_0 = F(x_0) = -0{,}16879$$
$$y_1 = F(x_1) = 0{,}037518$$

2. Melakukan perhitungan setiap iterasi
   - Iterasi 1

$$x_2 = x_1 - y_1 \frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0} = 0{,}881815$$

$$y_2 = 0{,}00153$$

Contoh Metode Secant

Tentukan penyelesaian dari $x^2 - (x+1)\,e^{-x} = 0$. Tebakan awal akar $x_0 = 0.8$ dan $x_1 = 0.9$

Langkah Penyelesaian

- Iterasi 2

$$x_3 = x_2 - y_2 \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} = 0{,}882528$$

$$y_3 = 1{,}3.10^{-5}$$

- Iterasi 3

$$x_4 = x_3 - y_3 \frac{x_3 - x_2}{y_3 - y_2} = 0{,}882534$$

$$y_4 = 4{,}91.e^{-9}$$

Maka diperoleh akar **x = 0,882534**

4

Metode Iterasi Titik Tetap

Metode Iterasi Titik Tetap

Metode ini disebut juga metode iterasi sederhana, adalah metode yang memisahkan x dengan sebagian x yang lain sehingga diperoleh: $x = g(x)$. Contoh :

$$x - e^x = 0 \text{ ubah}$$
$$x = e^x \text{ atau } g(x) = e^x$$

g(x) inilah yang menjadi dasar iterasi pada metode iterasi sederhana ini

Langkah Penyelesaian Metode Iterasi Titik Tetap:

1. Ubah fungsi $f(x) = 0$ menjadi bentuk $g(x) = x$
2. Tentukan nilai awal (x_0) dengan syarat $|g'(x)| < 1$
3. Masukkan nilai x_0 ke persamaan g(x) untuk mendapatkan x_1, dst.
4. Iterasi berhenti ketika $|f(x)| <$ toleransi

Contoh Metode Iterasi Titik Tetap

Carilah akar persamaan $f(x) = x^2 - 2x - 3$, gunakan $\varepsilon = 10^{-6}$

Langkah Penyelesaian

- Kemungkinan 1
  1. Ubah fungsi $f(x) = 0$ menjadi bentuk $g(x) = x$

     $x^2 - 2x - 3 = 0$

     $x^2 = 2x + 3$

     $g(x) = \sqrt{(2x + 3)}$

  2. Tentukan nilai awal (x_0) dengan syarat $|g'(x)| < 1$

     Tebakan awal $x_0 = 4$

  3. Membuat tabel untuk proses iterasi

     Hampiran akar $x = 3.000000$

r	x_r	ôx_{r+1} - x_rô
0	4.000000	-
1	3.316625	0.683375
2	3.103748	0.212877
3	3.034385	0.069362
4	3.011440	0.022945
5	3.003811	0.007629
6	3.001270	0.002541
7	3.000423	0.000847
8	3.000141	0.000282
9	3.000047	0.000094
10	3.000016	0.000031
11	3.000005	0.000010
12	3.000002	0.000003
13	3.000001	0.000001
14	3.000000	0.000000

Contoh Metode Iterasi Titik Tetap

Carilah akar persamaan $f(x) = x^2 - 2x - 3$, gunakan $\varepsilon = 10^{-6}$

Langkah Penyelesaian

- Kemungkinan 2
  1. Ubah fungsi $f(x) = 0$ menjadi bentuk $g(x) = x$

     $x^2 - 2x - 3 = 0$

     $x(x-2) = 3$

     $g(x) = 3/(x-2)$

  2. Tentukan nilai awal (x_0) dengan syarat $|g'(x)| < 1$

     Tebakan awal $x_0 = 4$

  3. Membuat tabel untuk proses iterasi

     Hampiran akar $x = -1.000000$

i	x_r	ôx_{r+1} - x_rô
0	4.000000	-
1	1.500000	2.500000
2	-6.000000	7.500000
3	-0.375000	5.625000
4	-1.263158	0.888158
5	-0.919355	0.343803
6	-1.027624	0.108269
7	-0.990876	0.036748
8	-1.003051	0.012175
9	-0.998984	0.004066
10	-1.000339	0.001355
11	-0.999887	0.000452
12	-1.000038	0.000151
13	-0.999987	0.000050
14	-1.000004	0.000017
15	-0.999999	0.000006
16	-1.000000	0.000002
17	-1.000000	0.000001

Contoh Metode Iterasi Titik Tetap

Carilah akar persamaan $f(x) = x^2 - 2x - 3$, gunakan $\varepsilon = 10^{-6}$

Langkah Penyelesaian

- Kemungkinan 3
  1. Ubah fungsi $f(x) = 0$ menjadi bentuk $g(x) = x$

     $x^2 - 2x - 3 = 0$

     $2x = x^2 - 3$

     $g(x) = (x^2 - 3)/2$
  2. Tentukan nilai awal (x_0) dengan syarat $|g'(x)| < 1$

     Tebakan awal $x_0 = 4$
  3. Membuat tabel untuk proses iterasi

     Hampiran akar terbukti *divergen*

i	x_r	ôx_{r+1} - x_rô
0	4.000000	-
1	6.500000	2.500000
2	19.625000	13.125000
3	191.070313	171.445312
4	18252.432159	18061.361847
	...	

Tugas

1. Jelaskan apa yang dimaksud deflasi dan berikan contoh pengerjaan secara manual.
2. Carilah akar persamaan dengan metode Newton Rahpson dari f(x) = x^2 – 7x +5 = 0 dengan tebakan awal x0 = 0.5 dan ε = 10–6. Kerjakan secara manual dan menggunakan scilab. Sertakan codingan dan screenshot program.

Teknis Pengumpulan

- Buat menjadi ke pdf dengan format nama **Tugas3_NPM.pdf**
- Kumpulkan di Google Classroom masing-masing
- Deadline sebelum hari praktikum selanjutnya

  Kelas A: Selasa 27 September 2022 pukul 23.59 WIB

  Kelas B: Rabu 28 September 2022 pukul 23.59 WIB

THANKS!