INDUCTION AND RECURSION

- IBRAHIM DAFI ISKANDAR - 140810210039
- SATRIA ALIEF PUTRA - 140810210051
- PRAMES RAY LAPIAN - 140810210059
- SARAH KHAIRUNNISA - 140810210063
- ZAKIA NOORARDINI - 140810210065

4.1 MATEMATHICAL INDUCTION

Pengertian

Induksi matematika adalah sebuah proses pembuktian dalam matematika yang bertujuan untuk membuktikan sebuah statement P(n) benar untuk semua integer n positif.

Contoh

Misal ada sebuah tangga tak hingga, namun kita mengetahui 2 hal, yaitu :
(1) kita dapat capai anak tangga pertama
(2) Bila kita dapat sebuah anak tangga, kita dapat mencapai anak tanga setelahnya

Dari pernyataan (1), kita tahu bahwa kita dapat mencapai anak tangga pertama, lalu kita dapat mengaplikasikan pernyataan (2) agar dapat mencapai anak tangga kedua. Kemudian, kita dapat menggunakan pernyataan (2) lagi untuk mencapai anak tangga ketiga. Kita dapat memakai pernyataan (2) sebanyak yang kita mau untuk mencapai setinggi yang kita mau.

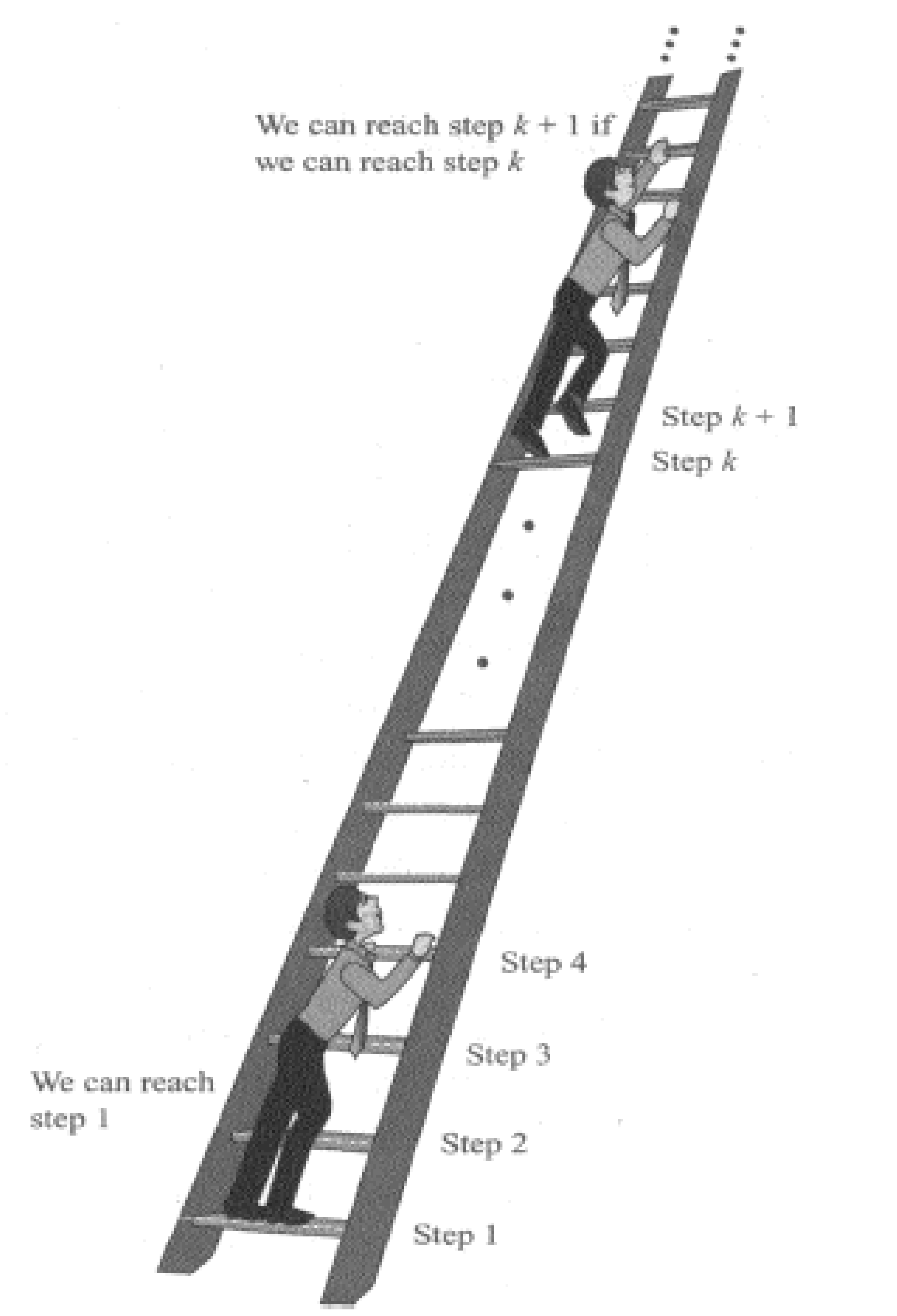


FIGURE 1 **Climbing an Infinite Ladder.**

Langkah-langkah induksi

Dari contoh sebelumnya, kita dapat mengetahui langkah-langkah yang dibutuhkan dalam sebuah induksi, yaitu :

Misal ada sebuah pernyataan P(n)

Basis Step

Tunjukkan bahwa P(1) adalah benar.

Inductive Step

misalkan P(k) = P(n) dimana P(k) adalah benar. tunjukkan bahwa P(k+1) adalah benar

Contoh Pembuktian

Misal ada sebuah pernyataan $P(n) = 1 + 2 + \ldots + n = n(n+1)/2$
Buktikan bahwa $P(n)$ benar untuk semua bilangan integer n positif!

Basis Step :
$P(1) = 1 = 1(1+1)/2 = 2/2 = 1$ Benar
Inductive Step :
Misal $P(k) = 1 + 2 + \ldots + k = k(k+1)/2$ benar
Buktikan bahwa $P(k+1) = 1 + 2 + \ldots + k + (k+1) = (k+1)(k+2)/2$
$1 + 2 + \ldots + k + (k+1) = (k(k+1)/2) + (k+1) = (k^2 + k)/2 + (2k + 2)/2$
$= (k^2 + 3k + 2)/2 = (k+1)(k+2)/2$ Benar

Karena kedua tahap sudah benar, maka dapat disimpulkan bahwa $P(n)$ benar untuk semua bilangan integer n positif

Menduga dan membuktikan sebuah formula

Misal kita memiliki soal sebagai berikut :

Duga dan buktikan benar sebuah rumus untuk jumlah dari bilangan ganjil ke n.

solusi :

kita punya gambaran seperti berikut : $1 = 1$, $1 + 3 = 4$, $1 + 3 + 5 = 9$, $1 + 3 + 5 + 7 = 16$, dan $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$.

Melihat polanya, kita dapat menduga sebuah rumus seperti

$P(n) = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$

Buktikan !

Basis Step :

$P(1) = (2 - 1) = 1 \Leftrightarrow 1^2 = 2$ Benar

Inductive Step :

Let $P(k) = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2k-1) = k^2$ benar

Buktikan bahwa $P(k+1) = (k+1)^2$

$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k-1) + (2k+1) = k^2 + (2k+1) = k^2 + 2k + 1 = (k+1)(k+1) = (k+1)^2$ Benar

Karena kedua tahap sudah benar, kita dapat menyimpulkan bahwa P(n) benar untuk semua bilanagn n integer positif

Poin-Poin penting dalam induksi matematik

Induksi matematika dapat dinyatakan dimana domainnya adalah bilangan integer positf

Dalam pembuktian, kita tidak mengasumsi bahwa P(k) benar untuk setiap bilangan integer positif! kita tunjukkan bahwa bila P(k) benar, maka P(k+1) juga benar

Pembuktian tidak selalu mulai dengan integer 1. DI beberapa kasus, basis step dimulai di integer b

Validitas Induksi Matematis

$$P(1) \land \forall k\,(P(k) \to P(k+1))) \to \forall n\, P(n)$$

Induksi Matematis valid karena adanya Well Ordering Property, yang menyatakan bahwa setiap subset yang tidak kosong dalam set integer positif punya nilai terkecil.

Validitas Induksi Matematis

- *Misalkan P(1) benar dan P(k) --> P(k+1) benar untuk nilai k positif.*
- *Asumsikan ada setidaknya satu integer positif n dimana P(n) tidak benar. Lalu set integer positif S dimana P(n) salah tidak kosong.*
- *Dari aturan Well Ordering Property, S memiliki nilai minimal, misalkan m.*
- *Nilai m tidak bisa 1 karena P(1) benar.*
- *Karena nilai m positif dan lebih besar dari 1, m - 1 pasti integer positif. Karena m - 1 < m, berarti tidak ada di dalam S, jadi P(m - 1) benar.*
- *Tapi, karena P(k) --> P(k+1) untuk tiap nilai k positif benar, P(m) juga seharusnya benar. Ini merupakan kontradiksi terhadap P(m) salah.*
- *Maka itu, P(n) harus benar untuk tiap n integer positif.*

Pembuktian Ketidaksetaraan

Contoh: Gunakan Induksi Matematis untuk membuktikan $n < 2^n$ untuk tiap integer positif n.

Solusi: Jadikan P(n) sebagai proposisi bahwa $n < 2^n$

- Basis Step

P(1) benar karena $1 < 2^1 = 2$

- Inductive Step

Asumsikan bahwa P(k) pasti benar, contoh $k<2^k$ untuk integer positif k asal

Harus menunjukkan bahwa P(k+1) benar. Karena dengan hipotesis induktif, $k< 2^k$, maka

$k + 1 < 2^k + 1 <= 2^k + 2^k = 2^k (1+1) = 2 . 2^k = 2^k+1$

Maka $n < 2^n$ benar untuk semua integer positif n.

Pembuktian Ketidaksetaraan

Contoh: Gunakan Induksi Matematis untuk membuktikan $2^n < n!$, untuk tiap integer positif $n >= 4$.

Solusi: Jadikan $P(n)$ sebagai proposisi bahwa $2^n < n!$.

- Basis Step

$P(4)$ benar karena $2^4 = 16 < 4! = 24$

- Inductive Step

Asumsikan bahwa $P(k)$ pasti benar, contoh $2k<k!$ untuk integer positif k asal

Untuk menunjukkan bahwa $P(k+1)$ benar:

$2^k+1 = 2 . 2^k$

$< 2 . k!$ (Dari HIpotesis Induktif)

$< (k + 1)k!$

$= (k + 1)!$

Jadi, $2^n < n!$ benar untuk tiap integer $n >= 4$.

Untuk Basis Step $P(4)$ karena $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, dan $P(3)$ semuanya salah.

Pembuktian Hasil Keterbagian

Contoh: Gunakan Induksi Matematis untuk membuktikan $n^3 - n$ bisa dibagi oleh 3, untuk tiap nilai n positif.

Solusi: Jadikan $P(n)$ sebagai proposisi $n^3 - n$ bisa dibagi oleh 3.

- Basis Step

$P(1)$ benar karena $1^3 - 1 = 0$, yang bisa dibagi oleh 3.

- Inductive Step

Asumsikan $P(k)$ benar, contohnya $k^3 - k$ bisa dibagi 3, untuk nilai asal positif k. Untuk membuktikan

$P(k + 1)$ benar:

$(k + 1)^3 - (k + 1) = (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) - (k + 1)$

$= (k^3 - k) + 3(k^2 + k)$

Berdasarkan hipotesis induksi, $(k^3 - k)$ pertama bisa dibagi 3 dan yang kedua juga bisa dibagi 3 karena itu merupakan sebuah integer yang dikalikan oleh 3. Jadi $(k + 1)^3 - (k + 1)$ bisa dibagi 3. Maka, $n^3 - n$ bisa dibagi oleh 3, untuk tiap nilai integer n positif.

Jumlah Subset dalam Set Terbatas

Contoh: Gunakan induksi matematis untuk menunjukkan bahwa S adalah set terbatas dengan jumlah elemen n, dimana n adalah integer yang tidak negatif, maka S punya jumlah 2^n subset.

Solusi: Jadikan P(n) sebagai proposisi bahwa sebuah set dengan jumlah elemen n memiliki jumlah subset 2^n.

- Basis Step

P(0) benar, karena empty set hanya memiliki dirinya sendiri sebagai subset dan $2^0 = 1$.

- Inductive Step

Asumsi P(k) benar untuk nilai asal integer k yang tidak negatif.

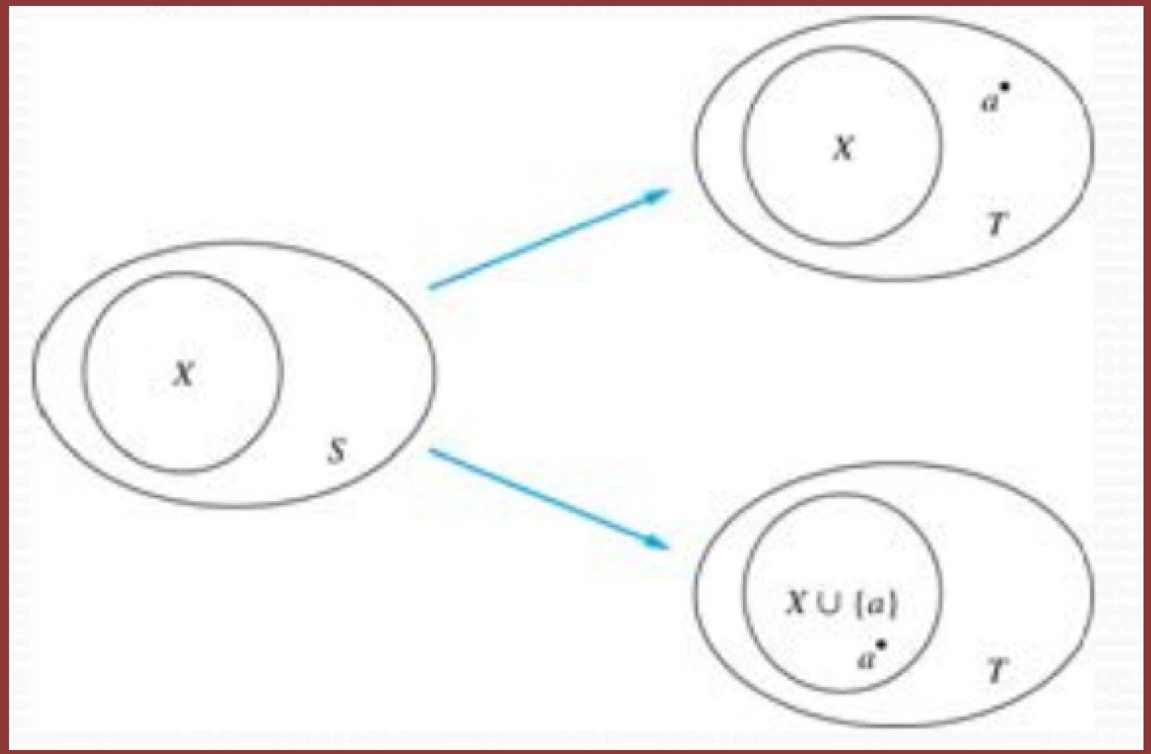
Hipotesis Induktif: Untuk tiap integer k tidak negatif, tiap set dengan jumlah elemen k memiliki jumlah subset 2^k.

Jumlah Subset dalam Set Terbatas

Jadikan T sebagai sebuah set dengan jumlah elemen k+1. Lalu T = S ∪ {a}, dimana a ∈ T dan S = T - {a}. Jadi, |S| = k.

Untuk tiap subset X dari S, ada dua subset dari T, maka X dan X ∪ {a}.

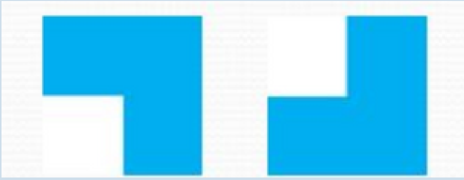
Dari Hipotesis Induksi S memiliki jumlah subset 2^k. Karena ada dua subset dari T untuk tiap subset S, jumlah subset yang dimiliki T adalah 2.2^k = 2^k+1.



Mengolah Papan Catur

Contoh:

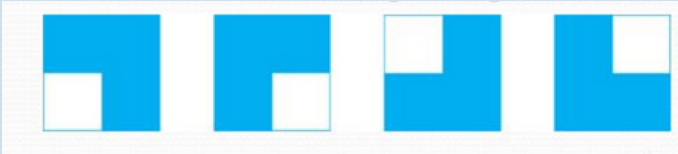
Tunjukkan bahwa setiap 2^n x 2^n papan catur dengan satu kotak dihapus dapat dipetakan menggunakan triomino kanan !

Triomino Kanan adalah petakan berbentuk L yang mengambil 3 kotak sekaligus 

Solusi

Jadikan P(n) proposisi untuk setiap 2^n x 2^n papan centang dengan satu kotak dihapus dapat disusun menggunakan triomino kanan.Gunakan induksi matematika untuk membuktikan P(n) benar untuk semua integer positif.

- Basis step : P(1) bernilai benar,karena setiap 2x2 papan catur dengan 1 kotak dihilangkan dapat dipetakan menggunkana 1 triomino kanan

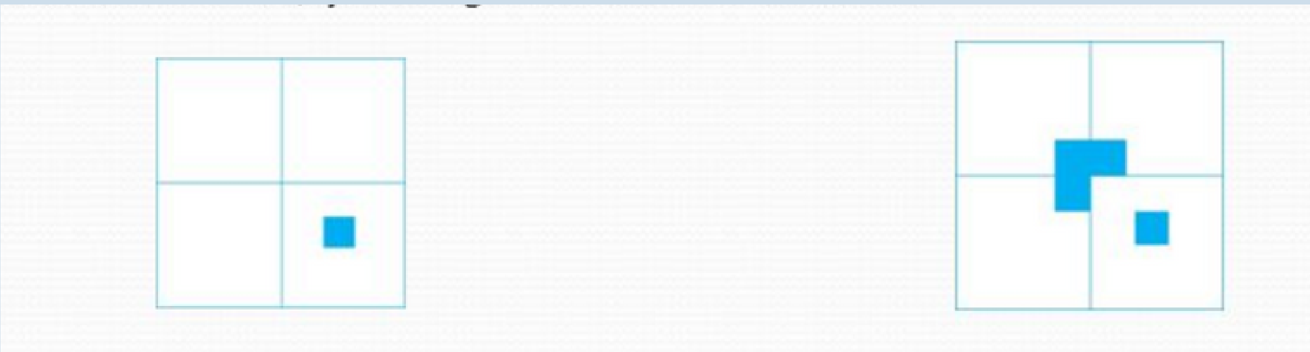
  

- Inductive Step : Asumsikan bahwa P(k) bernilai benar untuk setiap 2^k x 2^k papan catur,untuk beberapa positif integer k

Mengolah Papan Catur

Inductive Hypothesis : setiap 2^k x 2^k papan catur, untuk beberapa positif integer k , dengan satu kotak idihilangkan dapat dipetakan menjadi triomino kanan

- Ambil 2^(k+1) x 2^(k+1) papan catur dengan 1 kotak dihapus. Pisahkan papan catur ini menjadi 4 papan catur dengan ukuran 2^k x 2^k,dengan membaginya menjadi 2 di kedua arah



- Hilangkan kotak dari salah satu 2^k x 2^k papan catur.Dengan inductive hypothesis,papan ini dapat dipetakan.Dan papan lainnya dapat diberi ubin dengan persegi dari sudut tengah papan asli dihapus. Kita kemudian dapat menutupi tiga papan yang berdekatan dengan triomino.
- Oleh karena itu, seluruh 2^(k+1) x 2^(k+1)papan catur dengan satu kotak dihapus dapat dipasangi ubin menggunakan triomino kanan.

Pembuktian yang salah dengan mathematical induction

Contoh : Misalkan P(n) adalah pernyataan bahwa setiap himpunan n garis dalam bidang, tidak ada dua yang sejajar, bertemu di titik yang sama.
Berikut adalah “bukti” bahwa P(n) benar untuk semua bilangan bulat positif n >= 2.

- LANGKAH BASIS : Pernyataan P(2) benar karena sembarang dua garis pada bidang yang tidak sejajar bertemu di satu titik.
- LANGKAH INDUKTIF: Hipotesis induktif adalah pernyataan bahwa P(k) benar untuk bilangan bulat positif k >= 2, yaitu, setiap himpunan k garis dalam bidang, tidak ada dua yang sejajar, bertemu di titik yang sama.
- Kita harus menunjukkan bahwa jika P(k) berlaku, maka P(k + 1) berlaku, yaitu, jika setiap himpunan k garis pada bidang, tidak ada dua yang sejajar, k >= 2, bertemu di titik yang sama, maka setiap himpunan k + 1 garis pada bidang, tidak ada dua yang sejajar, bertemu di satu titik yang sama.

Inductive Hypothesis : setiap set dari k bidang , dimana k>=2 , dan tidak ada 2 yang paralallel,bertemu di satu titik yang sama

- Pertimbangkan satu set k + 1 garis yang berbeda di pesawat, tidak ada dua sejajar. Oleh hipotesis induktif, k pertama dari garis-garis ini harus bertemu di titik yang sama p1. Dengan hipotesis induktif, k terakhir dari garis-garis ini bertemu di titik yang sama p2.
- Jika p1 dan p2 adalah titik yang berbeda, semua garis yang memuat keduanya harus garis yang sama karena dua titik menentukan garis. Ini bertentangan dengan asumsi bahwa garis-garisnya berbeda. Oleh karena itu, p1 = p2 terletak pada semua k + 1 garis berbeda, dan oleh karena itu P(k + 1) berlaku. Asumsikan bahwa k >=2, garis-garis yang berbeda bertemu di suatu garis yang sama titik, maka setiap k +1 garis bertemu di titik yang sama.

Pasti ada error dikarenakan kesimpulan yang absurd,tetapi dimana errornya?
Jawaban:
P(k) —> P(k + 1) hanya berlaku untuk k >=3. Tidak demikian halnya P(2) menyiratkan P(3). Dua garis pertama harus bertemu di titik yang sama p1, dan dua yang kedua harus bertemu di titik yang sama p2. Mereka tidak harus menjadi titik yang sama karena hanya baris kedua adalah umum untuk kedua set garis.

Guidelines : mathematical induction proof

1 . Nyatakan pernyataan yang akan dibuktikan dalam bentuk “untuk semua n >= b, P(n)” untuk suatu bilangan bulat b.

2 . Tuliskan kata-kata “Langkah Dasar”. Kemudian tunjukkan bahwa P(b) benar, perhatikan bahwa benar
nilai b yang digunakan. Ini melengkapi bagian pertama dari bukti.

3. Tuliskan kata-kata “Langkah Induktif”.

4 . Nyatakan, dan identifikasi dengan jelas, hipotesis induktif, dalam bentuk “asumsikan bahwa P(k) benar”
untuk bilangan bulat tetap arbitrer k >= b.”

5. Nyatakan apa yang perlu dibuktikan dengan asumsi bahwa hipotesis induktif itu benar. Artinya, tuliskan apa yang dikatakan P(k + 1).

6 . Buktikan pernyataan P(k + 1) dengan menggunakan asumsi P(k). Pastikan itu buktimu
berlaku untuk semua bilangan bulat k dengan k >= b, perhatikan bahwa pembuktiannya bekerja untuk nilai-nilai kecil
dari k, termasuk k = b.

7 . Identifikasi dengan jelas kesimpulan dari langkah induktif, seperti dengan mengatakan "ini melengkapi langkah induktif."

8 . Setelah menyelesaikan langkah dasar dan langkah induktif, nyatakan kesimpulannya, yaitu
dengan induksi matematika, P(n) benar untuk semua bilangan bulat n dengan n >= b.

4.2 STRONG INDUCTION AND WELL-ORDERING

Introduction

- Pada bagian ini kita akan membahas bentuk lain dari induksi matematika, yaitu ***strong induction*** yang digunakan saat kita tidak bisa membuktikan dengan induksi matematika.
- Langkah dasar pembuktiannya sama dengan cara pembuktian induksi matematika.
- Dalam *strong induction*, P(n) benar untuk semua bilangan bulat positif n, yang menunjukkan bahwa P(1) benar. Tetapi, dalam langkah induktifnya berbeda. Pada pembuktian induksi matematika, menunjukkan jika hipotesis induktif P(k) benar, maka P(k + 1) juga benar. Dalam pembuktian *strong induction*, menunjukkan jika P(j) benar untuk semua bilangan bulat positif yang tidak melebihi k, maka P(k + 1) benar. Berarti untuk hipotesis induktif asumsikan bahwa P(j) benar untuk j = 1, 2, ... , k.

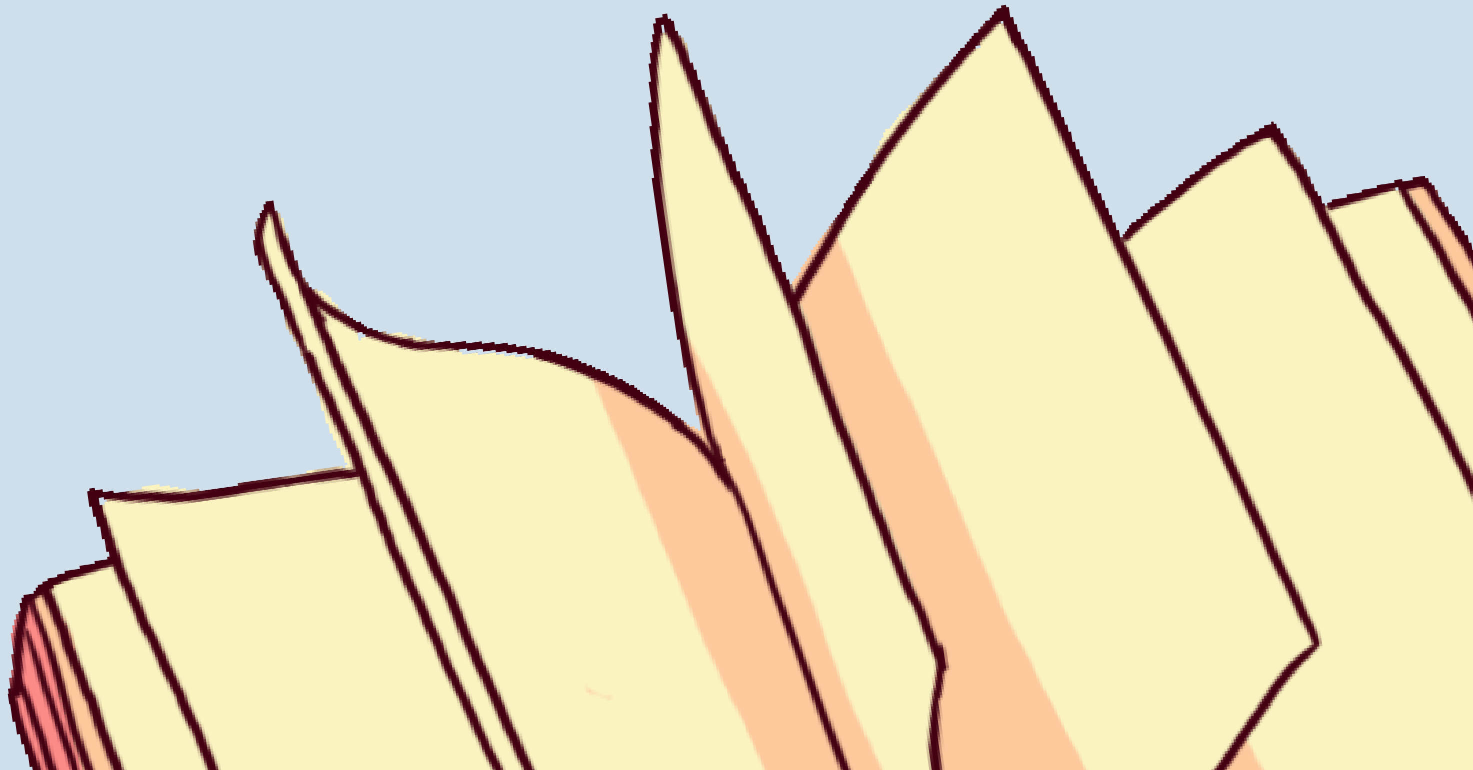
Strong Induction

Sebelum mengilustrasikan bagaimana menggunakan induksi kuat, nyatakan kembali prinsip ini.

STRONG INDUCTION: Untuk membuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n, dimana $P(n)$ adalah fungsi proposional, kami menyelesaikan dua langkah:

BASIS STEP: Kami memverifikasi bahwa proposisi $P(1)$ benar.

INDUCTIVE STEP: Kami menunjukkan bahwa pernyataan kondisional $[P(1) \land P(2) \land \ldots \land P(k)] \rightarrow P(k+1)$ benar untuk semua bilangan positif k.



Ketika kita menggunakan strong induction untuk membuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n, hipotesis induktifnya adalah asumsi bahwa $P(j)$ benar untuk j = 1, 2, ... ,k. Hipotesis induktif mencakup semua k pernyataan $P(1)$, $P(2)$, ... , $P(k)$. Karena kita bisa menggunakan semua k pernyataan $P(1)$, $P(2)$, ... ,$P(k)$ untuk membuktikan $P(k + 1)$, bukan hanya pernyataan $P(k)$ seperti pada pembuktian dengan induksi matematika, induksi kuat adalah teknik pembuktian yang lebih fleksibel. Induksi matematika dan induksi kuat adalah setara. Artinya, masing-masing bisa ditunjukkan sebagai teknik pembuktian yang valid dengan asumsi bahwa yang lain valid.

Khususnya, bukti apa pun menggunakan induksi matematika juga dapat dianggap sebagai pembuktian dengan induksi kuat karena hipotesis induktif dari suatu pembuktian dengan induksi matematika adalah bagian dari hipotesis induktif dalam pembuktian dengan induksi kuat. Artinya, jika kita dapat menyelesaikan langkah induktif dari suatu pembuktian menggunakan induksi matematika dengan menunjukkan bahwa $P(k + 1)$ mengikuti dari $P(k)$ untuk setiap bilangan bulat positif k, maka juga mengikuti bahwa $P(k + 1)$ mengikuti dari semua pernyataan $P(l)$, $P(2)$, ... ,$P(k)$, karena kita mengasumsikan bahwa tidak hanya $P(k)$ benar, tetapi juga lebih, yaitu, bahwa pernyataan $k - 1$ $P(1)$, $P(2)$, ... ,$P(k - 1)$ benar. Namun, jauh lebih canggung untuk mengonversi bukti dengan induksi kuat menjadi pembuktian dengan menggunakan prinsip induksi matematika.

Contoh 1

Misalkan kita dapat mencapai anak tangga pertama dan kedua dari tangga tak terbatas, dan kita tahu bahwa jika kita bisa mencapai satu anak tangga, maka kita bisa mencapai dua anak tangga lebih tinggi. Bisakah kita membuktikan bahwa kita bisa mencapai setiap anak tangga menggunakan prinsip induksi matematika dan induksi kuat?

Induksi Matematika

BASIS STEP: memverifikasi bahwa kita dapat mencapai anak tangga pertama.

ATTEMPTED INDUCTIVE STEP: Pertama, perlu menunjukkan bahwa jika kita asumsikan hipotesis induktif untuk bilangan bulat positif k, berarti kita dapat mencapai anak tangga ke-k, maka kita dapat menunjukkan bahwa kita dapat mencapai anak tangga $(k + l)$. Namun, tidak ada cara yang jelas untuk menyelesaikan langkah induktif ini karena kita tidak tahu dari informasi yang diberikan bahwa kita dapat mencapai anak tangga $(k + 1)$ dari anak tangga ke-k. Setelah semua, kita hanya tahu bahwa jika kita dapat mencapai satu anak tangga, kita dapat mencapai anak tangga dua yang lebih tinggi.

Induksi Kuat (Strong Induction)

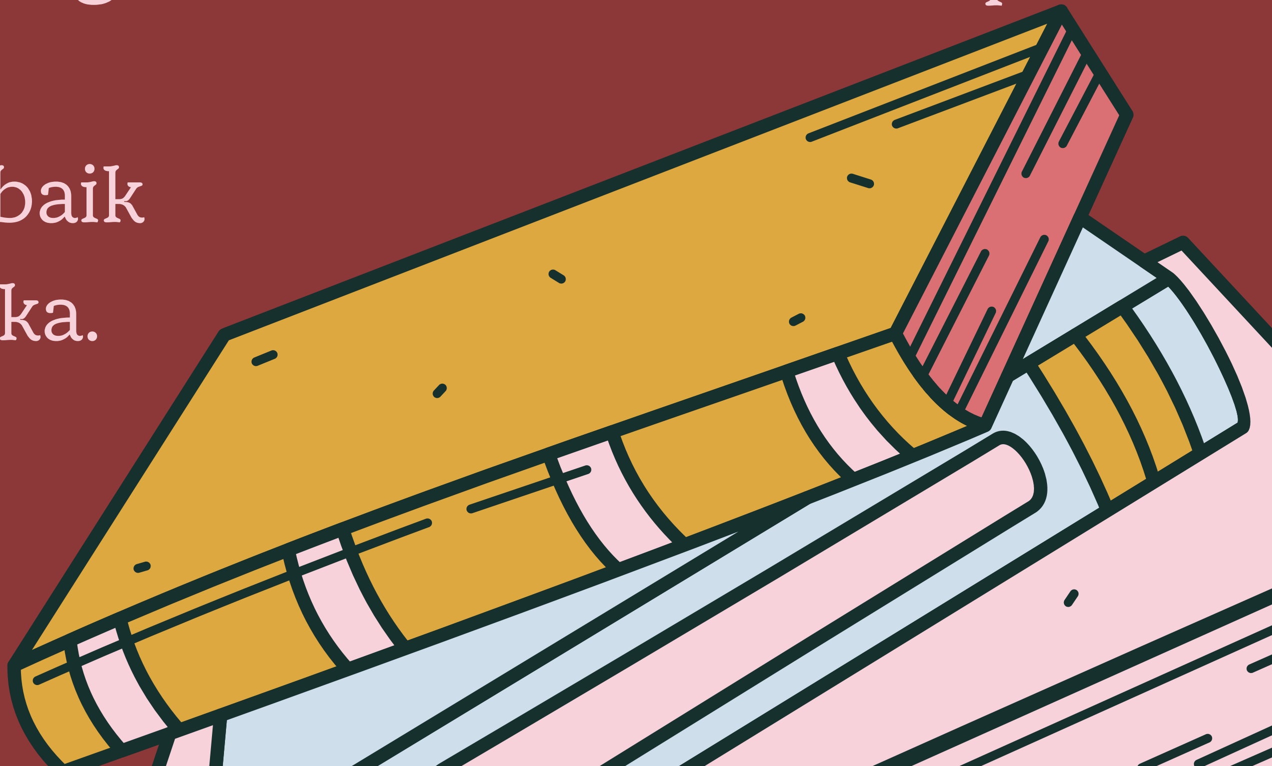
BASIS STEP: memverifikasi bahwa kita dapat mencapai anak tangga pertama.

ATTEMPTED INDUCTIVE STEP: Hipotesis induktif menyatakan bahwa kita dapat mencapai setiap k anak tangga pertama. Pertama, kita perlu mengasumsikan bahwa hipotesis induktif benar, berarti kita dapat mencapai setiap k anak tangga pertama dan anak tangga $(k + 1)$ pertama. Kita sudah tahu bahwa kita bisa mencapai anak tangga kedua. Lalu, catat bahwa selama $k > 2$, kita dapat mencapai anak tangga $(k + 1)$ pertama dari anak tangga $(k - 1)$ pertama karena kita tahu kita bisa menaiki dua anak tangga dari anak tangga yang sudah bisa kita capai. Maka kita dapat mencapai semua anak tangga

Examples of Proofs Using Strong Induction

Bagaimana kita memutuskan untuk menggunakan metode mana yang akan diterapkan dalam situasi tertentu?

- Menggunakan **induksi matematika** untuk membuktikan bahwa P(k) --> P(k + 1) benar untuk semua bilangan bulat positif k.
- Menggunakan ***strong induction*** saat membuktikan bahwa P(k + 1) benar dari asumsi bahwa P(j) benar untuk semua bilangan bulat positif j yang tidak melebihi k, tetapi tidak dapat membuktikan P(k + 1) mengikuti dari P(k).
- Saat memeriksa setiap bukti, pertimbangkan kenapa lebih baik menggunakan *strong induction* daripada induksi matematika.



Contoh 2: Tunjukkan bahwa jika n adalah bilangan bulat yang lebih besar dari 1, maka n dapat ditulis sebagai produk bil. prima.

Solusi: Misal P(n) adalah proposisi bahwa n dapat ditulis sebagai produk bil. prima.

Langkah Dasar: P(2) benar, karena 2 dapat ditulis sebagai produk dari satu bil. prima itu sendiri.

Langkah Induktif: Asumsikan bahwa P(j) benar untuk semua bil. bulat positif j dengan j <= k, asumsikan bahwa j dapat ditulis sebagai produk bil. prima bila j adalah bil. bulat positif paling sedikit 2 dan tidak melebihi k. Untuk menyelesaikan langkah induktif, harus ditunjukkan bahwa P(k + 1) benar berdasarkan asumsi ini, yaitu k + 1 adalah hasil kali bil. prima.

Ada 2 kasus yang perlu dipertimbangkan:

- Jika k + I prima, kita langsung melihat bahwa P(k + 1) benar.
- Jika k + I adalah komposit dan dapat ditulis sebagai produk dari dua bil. bulat positif a dan b dengan 2 <= a <= b < k + I .

Dengan hipotesis induktif, baik a dan b dapat ditulis sebagai produk bil. prima. Jadi, jika k + 1 adalah komposit, maka dapat ditulis sebagai produk dari bil. prima, yaitu bil. prima dalam faktorisasi a dan b.

Note: Karena 1 dapat dianggap sebagai hasil kali kosong tanpa bil. prima, kita dapat memulai pembuktian pada Contoh 2 dengan P(1) sebagai langkah dasarnya.

Using Strong Induction in Computational Geometry

Contoh strong induction berikutnya adalah **geometri komputasi**, bagian dari matematika diskrit yang mempelajari masalah komputasi yang melibatkan objek geometris dan digunakan secara luas dalam grafik komputer, permainan komputer, robotika, perhitungan ilmiah, dan lainnya.

Poligon adalah bangun ruang tertutup yang terdiri dari barisan ruas garis S1, S2, ..., Sn yang disebut **sisi**. Setiap pasang sisi yang bertemu pada titik akhir yang sama, yang disebut **simpul** (vertex). Suatu poligon disebut **sederhana** jika tidak ada dua sisi yang tidak berurutan yang berpotongan. Setiap poligon sederhana membagi bidang menjadi dua wilayah: **interior**, terdiri dari titik-titik di dalam kurva, dan **eksterior**, terdiri dari titik-titik di luar kurva.

Using Strong Induction in Computational Geometry

Suatu poligon disebut **cembung** (convex) jika setiap ruas garis yang menghubungkan dua titik di bagian dalam poligon terletak seluruhnya di dalam poligon. **Diagonal** poligon sederhana adalah segmen garis yang menghubungkan dua simpul poligon yang tidak berurutan, dan diagonal disebut **diagonal interior** jika terletak seluruhnya di dalam poligon, kecuali titik ujungnya. Salah satu operasi paling dasar dari geometri komputasi melibatkan pembagian poligon sederhana menjadi segitiga dengan menambahkan diagonal yang tidak berpotongan yang disebut proses triangulasi. Perhatikan bahwa poligon sederhana dapat memiliki banyak triangulasi yang berbeda seperti di Gambar 2. Setiap poligon sederhana dapat ditriangulasi, seperti yang dinyatakan dalam Teorema 1 yang memberi tahu kita bahwa setiap triangulasi poligon sederhana dengan n sisi termasuk n - 2 segitiga.

Theorema 1

Sebuah poligon sederhana dengan *n* sisi, di mana *n* adalah bilangan bulat dengan *n* >= 3, dapat ditriangulasi menjadi *n* - 2 segitiga.

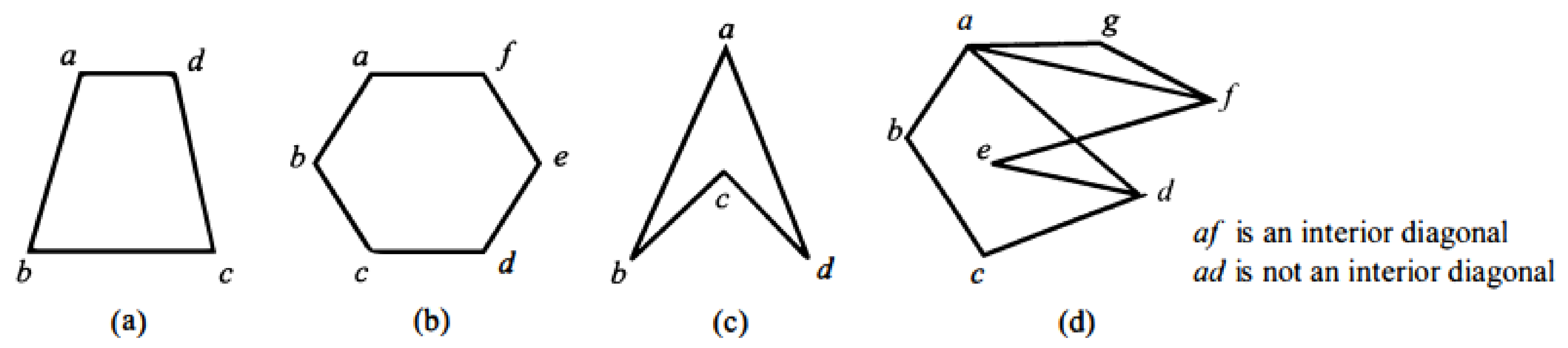


FIGURE 1 Convex and Nonconvex Polygons.

Gambar 1 menampilkan poligon (a) dan (b) cembung sedangkan poligon (c) dan (d) noncembung.

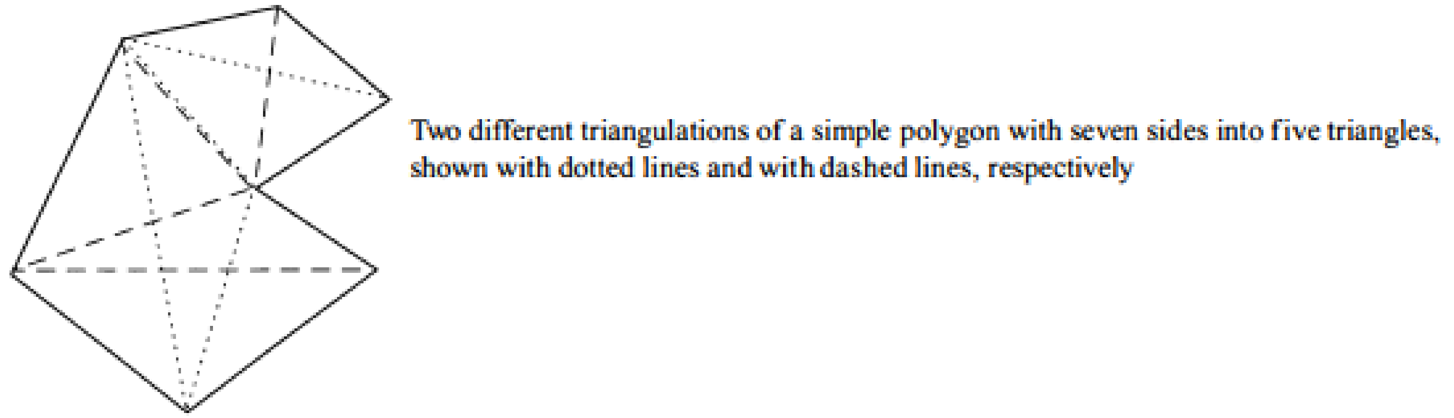


FIGURE 2 Triangulations of a Polygon.

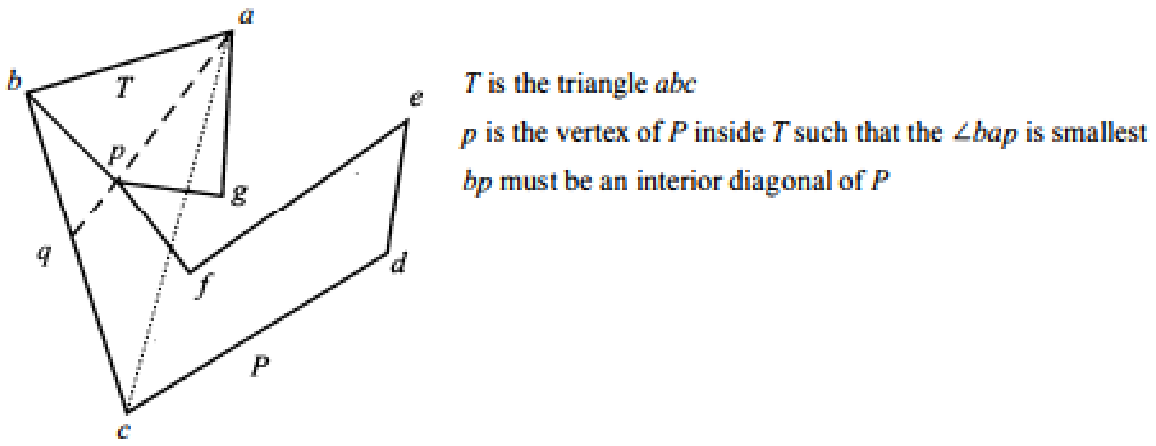


FIGURE 3 Constructing an Interior Diagonal of a Simple Polygon.

Tampaknya jelas bahwa kita harus dapat membuat segitiga poligon sederhana secara berurutan menambahkan diagonal interior. Akibatnya, pembuktian dengan induksi kuat tampaknya menjanjikan. Namun, bukti semacam itu membutuhkan lemma yang penting ini.

Using the Well-Ordering Property

Validitas baik prinsip induksi matematika dan induksi kuat mengikuti dari aksioma dasar dari himpunan bilangan bulat, properti yang tertata dengan baik. Itu properti yang tertata dengan baik menyatakan bahwa setiap himpunan tak kosong dari bilangan bulat tak negatif memiliki elemen terkecil. Kami akan menunjukkan bagaimana properti yang tertata dengan baik dapat digunakan secara langsung dalam bukti. Selain itu, dapat ditunjukkan bahwa sifat keteraturan yang baik, prinsip induksi matematika, dan kuat induksi semuanya setara. Artinya, mengingat salah satu dari tiga teknik pembuktian ini, validitasnya dapat ditunjukkan dari validitas salah satu dari dua teknik lainnya.

Setiap himpunan tak kosong dari bilangan bulat tak negatif memiliki elemen terkecil. Properti yang tertata dengan baik seringkali dapat digunakan secara langsung dalam pembuktian.

Contoh 5

Gunakan properti pengurutan yang baik untuk membuktikan algoritma pembagian. Ingatlah bahwa algoritma pembagian menyatakan bahwa jika a bilangan bulat dan d bilangan bulat positif, maka ada bilangan bulat unik q dan r dengan $0 <= r < d$ *dan* $a = dq + r$.

Solusi: Misalkan S adalah himpunan bilangan bulat tak negatif berbentuk $a - dq$, di mana q adalah bilangan bulat. Ini himpunan tidak kosong karena $-dq$ dapat dibuat sebesar yang diinginkan (mengambil q sebagai bilangan bulat negatif dengan nilai absolut yang besar). Berdasarkan sifat keteraturan yang baik, S memiliki elemen terkecil $r = a - dq_0$. Bilangan bulat r tidak negatif. Hal ini juga terjadi bahwa $r < d$. Jika tidak, maka akan ada elemen nonnegatif yang lebih kecil di S, yaitu, $a - d(q_0 + 1)$. Untuk melihat ini, misalkan $r >= d$. Karena $a = dq_0 + r$, maka $a - d(q_0 + 1) = (a - dq_0) - d = r - d >= 0$. Akibatnya, ada bilangan bulat q dan r dengan $0 <= r < d$. Bukti bahwa q dan r adalah unik dibiarkan sebagai latihan bagi pembaca.

Example 8

Gunakan induksi matematika untuk membuktikan bahwa n^3 -n habis dibagi 3 setiap kali n bilangan bulat positif.
Solusi: Untuk membangun bukti, misalkan P(n) menyatakan proposisi: "n^3-n habis dibagi 3."

LANGKAH DASAR: Pernyataan P(1) benar karena 1^3 - 1 = 0 habis dibagi 3.
Langkah Induktif : Untuk hipotesis induktif kita asumsikan bahwa P (k) benar; yaitu kita asumsikan bahwa k^3 -k habis dibagi 3. Untuk menyelesaikan langkah induktif, kita harus menunjukkan bahwa ketika kita asumsikan hipotesis induktif, maka P(k + 1), pernyataan bahwa (k + 1)^3 - (k + 1) habis dibagi 3, juga benar. Artinya, kita harus menunjukkan bahwa (k + 1)^3 -(k + 1) habis dibagi 3.

$$
\begin{aligned}
(k+1)^3 - (k+1) &= (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) - (k+1) \\
&= (k^3 - k) + 3(k^2 + k).
\end{aligned}
$$

Karena kedua suku dalam jumlah ini habis dibagi 3 (yang pertama oleh hipotesis induktif, dan yang kedua karena 3 kali bilangan bulat), maka (k + 1)^3 -(k + 1) juga habis dibagi 3 .
Ini melengkapi langkah induktif. Karena kami telah menyelesaikan langkah dasar dan langkah induktif, dengan prinsip dari induksi matematika kita tahu bahwa n^3 -n habis dibagi 3 setiap kali n adalah bilangan bulat positif.

Contoh 9

Gunakan induksi matematika untuk menunjukkan bahwa jika S adalah himpunan hingga dengan n elemen di mana n adalah bilangan bulat nonnegatif, maka S memiliki 2n himpunan bagian.

Solusi: Let P (n) menjadi proposisi bahwa suatu himpunan dengan n elemen memiliki 2n himpunan bagian. Basis Step: P (0) adalah benar, karena himpunan dengan nol elemen, himpunan kosong, memiliki tepat 2° = 1 subset, yaitu dirinya sendiri.

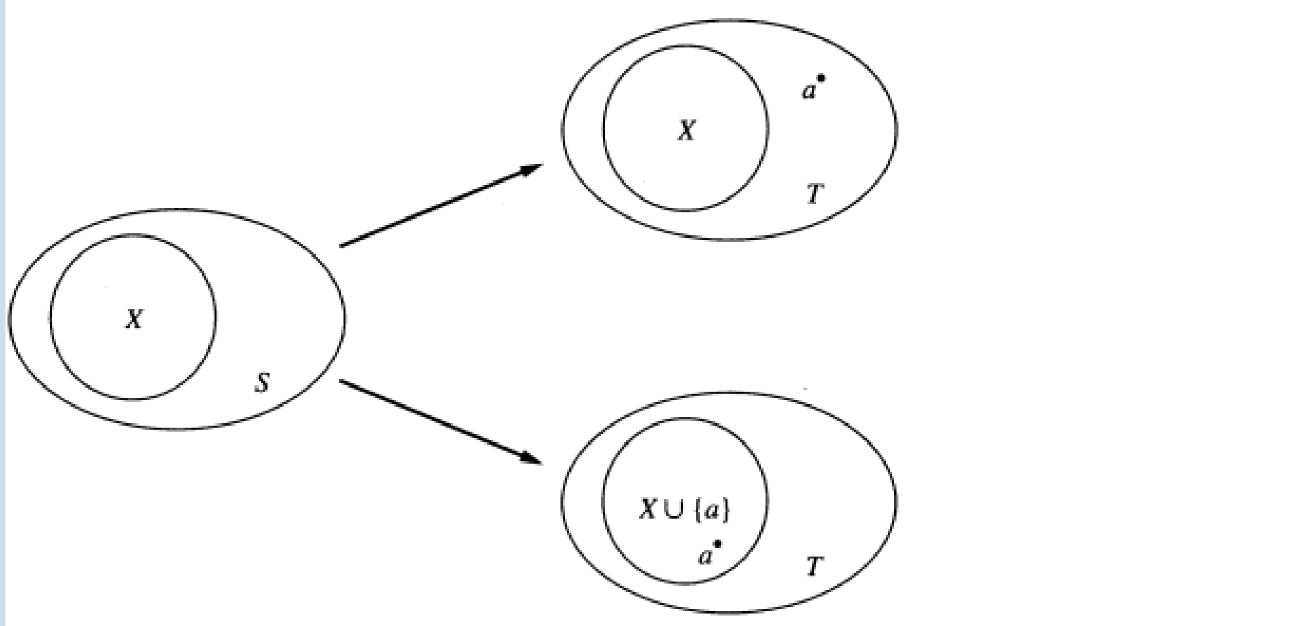


FIGURE 4 Generating Subsets of a Set with $k + 1$ Elements. Here $T = S \cup \{a\}$.

Langkah Induktif:Untuk hipotesis induktif kita asumsikan bahwa P(k) benar untuk bilangan bulat non negatif k, kita asumsikan bahwa setiap himpunan dengan k elemen memiliki 2k himpunan bagian. Ditunjukkan
bahwa di bawah asumsi ini, P (k + I), yang merupakan pernyataan bahwa setiap himpunan dengan k + I elemenmemiliki 2 k+ I himpunan bagian, juga harus benar. Untuk menunjukkan ini, misalkan T adalah himpunan dengan elemen k + I. Lalu itu dimungkinkan untuk menulis T = S U {a }, dimana a adalah salah satu elemen dari T dan S = T - {a } (maka |s| = k). Subset dari T dapat diperoleh dengan cara berikut. Untuk setiap subset X dari S ada tepat dua himpunan bagian dari T, yaitu X dan X U {a}.Subset dari T dapat diperoleh dengan cara berikut. Untuk setiap subset X dari S ada tepat dua himpunan bagian dari T, yaitu X dan X U {a}.Ini merupakan semua himpunan bagian dari T dan semuanya berbeda. Karena ada 2k himpunan bagian dari S, disana adalah 2 . 2k = 2 k+ I himpunan bagian dari T. Ini menyelesaikan argumen induktif

Karena kita telah menyelesaikan langkah dasar dan langkah induktif, dengan induksi matematika maka P(n) benar untuk semua bilangan bulat tak negatif n. Artinya, kami telah membuktikan bahwa himpunan dengan n elemen memiliki 2n himpunan bagian setiap kali n adalah bilangan bulat nonnegatif

Contoh 10

Gunakan induksi matematika untuk membuktikan generalisasi berikut dari salah satu hukum De Morgan:

$$\overline{\bigcap_{j=1}^{n} A_j} = \bigcup_{j=1}^{n} \overline{A_j}$$

bila A1 , A2, ..., An adalah himpunan bagian dari himpunan semesta U dan n >= 2.

Solusi: Misalkan P(n) adalah identitas untuk n himpunan.
LANGKAH DASAR: Pernyataan P(2) menyatakan bahwa A1 n A2 = A1 U A2. Ini adalah salah satu hukum De Morgan; itu dibuktikan dalam Bagian 2.2.
LANGKAH INDUKTIF: Hipotesis induktif adalah pernyataan bahwa P(k) benar, di mana k adalah bilangan bulat dengan k >= 2; yaitu, itu adalah pernyataan bahwa

$$\overline{\bigcap_{j=1}^{k} A_j} = \bigcup_{j=1}^{k} \overline{A_j}$$

setiap kali A1 , A2, ... , Ak adalah himpunan bagian dari himpunan semesta U. Untuk melakukan langkah induktif, kita perlu menunjukkan bahwa asumsi ini menyiratkan bahwa P(k + 1) benar.

Artinya, kita perlu menunjukkan bahwa jika persamaan ini berlaku untuk setiap kumpulan k himpunan bagian dari U, maka persamaan ini juga harus berlaku untuk setiap kumpulan k + 1 himpunan bagian dari U. Misalkan A1, A2, ... , Ak, Ak +1 adalah himpunan bagian dari U. Ketika hipotesis induktif diasumsikan berlaku, maka

$$
\begin{aligned}
\overline{\bigcap_{j=1}^{k+1} A_j} &= \overline{\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_j\right) \cap A_{k+1}} && \text{by the definition of intersection} \\
&= \overline{\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_j\right)} \cup \overline{A_{k+1}} && \text{by De Morgan's law (where the two sets are } \textstyle\bigcap_{j=1}^{k} A_j \text{ and } A_{k+1}) \\
&= \left(\bigcup_{j=1}^{k} \overline{A_j}\right) \cup \overline{A_{k+1}} && \text{by the inductive hypothesis} \\
&= \bigcup_{j=1}^{k+1} \overline{A_j} && \text{by the definition of union.}
\end{aligned}
$$

$$\overline{\bigcap_{j=1}^{n} A_j} = \bigcup_{j=1}^{n} \overline{A_j}$$

Ini melengkapi langkah induktif.

Karena kita telah menyelesaikan langkah dasar dan langkah induktif, dengan induksi matematika kita tahu bahwa P(n) benar jika n adalah bilangan bulat positif, n >= 2.

Artinya, kita tahu bahwa setiap kali A1, A2, ... , An adalah himpunan bagian dari himpunan semesta U dan n >= 2.

Contoh 11

Misalkan kita memiliki sekelompok pembicaraan yang diusulkan dengan waktu yang telah ditentukan. Kami ingin menjadwalkan sebanyak mungkin dari kuliah ini mungkin di ruang kuliah utama. Bagaimana kita bisa menjadwalkan kuliah? Satu Pendekatannya adalah dengan menggunakan algoritma serakah untuk menjadwalkan subset dari m pembicaraan yang diusulkan t1 , t2, ... , tm di ruang kuliah utama. Misalkan pembicaraan tj dimulai pada waktu bj dan berakhir pada waktu ej. (Tidak ada dua kuliah dapat dilanjutkan pada saat yang sama, tetapi kuliah dapat dimulai pada saat yang sama dengan yang lain berakhir.) Kami asumsikan bahwa pembicaraan terdaftar dalam urutan waktu akhir yang tidak berkurang, sehingga e1 <= e2 <=...<em . Algoritma serakah melanjutkan dengan memilih pada setiap tahap pembicaraan dengan waktu berakhir paling awal di antara semua pembicaraan yang dimulai setelah semua pembicaraan yang sudah dijadwalkan berakhir. Perhatikan bahwa kuliah dengan waktu akhir paling awal selalu dipilih terlebih dahulu oleh algoritma. Kami akan menunjukkan bahwa ini serakah algoritma optimal dalam arti selalu menjadwalkan pembicaraan sebanyak mungkin di main ruang kuliah. Untuk membuktikan optimalitas algoritma ini kita menggunakan induksi matematika pada variabel n, jumlah pembicaraan yang dijadwalkan oleh algoritma. Kita biarkan P(n) menjadi proposisi bahwa jika algoritma serakah menjadwalkan n pembicaraan, maka tidak mungkin menjadwalkan lebih dari n pembicaraan

LANGKAH DASAR: Misalkan algoritma yang serakah berhasil menjadwalkan hanya satu pembicaraan, t1 , di ruang kuliah utama. Ini berarti bahwa setiap pembicaraan lainnya tidak dapat dimulai setelah e1 , waktu berakhirnya t1. Jika tidak, pembicaraan seperti pertama yang kita lakukan saat kita melalui pembicaraan dalam urutan waktu akhir yang tidak berkurang dapat ditambahkan. Oleh karena itu, pada waktu e1 setiap pembicaraan yang tersisa perlu menggunakan ruang kuliah karena semuanya dimulai pada atau sebelum e1 dan berakhir setelah e1. Oleh karena itu tidak ada dua pembicaraan yang dapat dijadwalkan karena keduanya harus menggunakan ruang kuliah pada waktu e1. Ini menunjukkan bahwa P(I) benar dan melengkapi langkah basis.

LANGKAH INDUKTIF: Hipotesis induktif adalah bahwa P(k) benar, di mana k adalah bilangan bulat positif, yaitu bahwa algoritma serakah selalu menjadwalkan pembicaraan yang paling mungkin ketika memilih k
pembicaraan, di mana k adalah bilangan bulat positif, diberikan setiap set pembicaraan, tidak peduli seberapa besar. Kita harus menunjukkan bahwa P(k + 1) mengikuti dari asumsi bahwa P(k) benar, yaitu, kita harus menunjukkan bahwa di bawah asumsi P(k), algoritma serakah selalu menjadwalkan pembicaraan yang paling mungkin ketika memilih k + 1 pembicaraan.

Sekarang anggaplah bahwa algoritma telah memilih k + I bicara. Langkah pertama kami dalam menyelesaikan langkah induktif adalah menunjukkan ada jadwal termasuk pembicaraan paling mungkin yang berisi pembicaraan t1 , pembicaraan dengan waktu akhir paling awal. Ini mudah dilihat karena jadwal yang dimulai dengan pembicaraan t1 dalam daftar, di mana i > 1, dapat diubah sehingga pembicaraan t1 menggantikan pembicaraan tj . Untuk melihat ini, perhatikan bahwa karena e1 <= ej, semua pembicaraan yang dijadwalkan untuk mengikuti pembicaraan t1 masih dapat dijadwalkan.

Setelah kami memasukkan pembicaraan t1, menjadwalkan pembicaraan sehingga sebanyak mungkin yang dijadwalkan dikurangi menjadi penjadwalan sebanyak mungkin pembicaraan yang dimulai pada atau setelah waktu el1 Jadi, jika kami telah menjadwalkan sebanyak mungkin pembicaraan, jadwal pembicaraan selain pembicaraan t1 adalah jadwal optimal dari pembicaraan asli yang dimulai setelah pembicaraan t1 berakhir. Karena algoritma serakah menjadwalkan k pembicaraan ketika membuat jadwal ini, kita dapat menerapkan hipotesis induktif untuk menyimpulkan bahwa ia telah menjadwalkan pembicaraan yang paling mungkin. Oleh karena itu algoritma serakah telah menjadwalkan pembicaraan yang paling mungkin, k + 1, ketika menghasilkan jadwal dengan k + 1 pembicaraan, jadi P(k + 1) benar. Ini melengkapi langkah induktif.

Contoh 12

Sejumlah ganjil orang berdiri di halaman dengan jarak yang berbeda. Pada saat yang sama setiap orang melempar kue ke tetangga terdekat mereka, memukul orang ini. Gunakan induksi matematika untuk menunjukkan bahwa setidaknya ada satu orang yang selamat, yaitu setidaknya satu orang yang tidak terkena kue. (Masalah ini diperkenalkan oleh Carmony [Ca79]. Perhatikan bahwa hasil ini salah jika jumlah orang genap; lihat Latihan 71.)

Penyelesaian: Misalkan P(n) adalah pernyataan bahwa ada yang selamat setiap kali 2n + 1 orang berdiri di halaman dengan jarak yang berbeda dan setiap orang melempar kue ke tetangga terdekatnya. Untuk membuktikan hasil ini, kita akan menunjukkan bahwa P(n) benar untuk semua bilangan bulat positif n. Ini mengikuti karena n berjalan melalui semua bilangan bulat positif, 2n + 1 berjalan melalui semua bilangan bulat ganjil yang lebih besar dari atau sama dengan 3. Perhatikan bahwa satu orang tidak dapat terlibat dalam pertarungan kue karena tidak ada orang lain yang melempar
kue di.
LANGKAH DASAR: Ketika n = 1, ada 2n + 1 = 3 orang dalam pertarungan kue. Dari ketiga orang tersebut, misalkan pasangan terdekat adalah A dan B, dan C adalah orang ketiga. Karena jarak antara pasangan orang berbeda, jarak antara A dan C dan jarak antara B dan C keduanya berbeda dari, dan lebih besar dari, jarak antara A dan B. Oleh karena itu, A dan B saling melempar pai, sementara C melempar kue ke A atau B, mana yang lebih dekat. Oleh karena itu, C tidak terkena kue. Ini menunjukkan bahwa setidaknya satu dari tiga orang tidak terkena kue, menyelesaikan langkah dasar.

LANGKAH INDUKTIF: Untuk langkah induktif, asumsikan bahwa P (k) benar. Artinya, asumsikan bahwa setidaknya ada satu yang selamat setiap kali 2k + 1 orang berdiri di halaman pada jarak timbal balik yang berbeda dan masing-masing melempar kue ke tetangga terdekat mereka. Kita harus menunjukkan bahwa jika hipotesis induktif P(k) benar, maka P(k + 1), pernyataan bahwa setidaknya ada satu yang selamat setiap kali 2(k + 1) + 1 = 2k + 3 orang berdiri di halaman pada jarak timbal balik yang berbeda dan masing-masing melempar kue ke tetangga terdekat mereka, juga benar.

Jadi misalkan kita memiliki 2(k + 1) + 1 = 2k + 3 orang dalam satu pekarangan dengan jarak yang berbeda antara pasangan orang. Biarkan A dan B menjadi pasangan orang terdekat dalam kelompok 2k + 3 orang ini. Ketika setiap orang melempar kue ke orang terdekat, A dan B saling melempar kue. Jika orang lain melempar kue ke A atau B, maka setidaknya tiga kue dilemparkan ke A dan B, dan paling banyak (2k + 3) - 3 = 2k kue dilemparkan ke 2k + 1 orang yang tersisa. Ini menjamin bahwa setidaknya satu orang selamat, karena jika masing-masing dari 2k + 1 orang ini terkena setidaknya satu kue, total setidaknya 2k + 1 kue harus dilemparkan ke mereka.

Untuk menyelesaikan langkah induktif, misalkan tidak ada orang lain yang melempar kue ke A atau B. Selain A dan B, ada 2k + 1 orang. Karena jarak antara pasangan orang-orang ini semuanya berbeda, kita dapat menggunakan hipotesis induktif untuk menyimpulkan bahwa setidaknya ada satu yang selamat S ketika 2k + 1 orang ini masing-masing melempar kue ke tetangga terdekat mereka. Selanjutnya, S juga tidak terkena baik oleh pai yang dilempar oleh A atau pai yang dilempar oleh B karena A dan B saling melempar pai, jadi S selamat karena S tidak terkena salah satu pai yang dilemparkan oleh 2k + 3 orang. Ini melengkapi langkah induktif dan membuktikan bahwa P(n) benar untuk semua bilangan bulat positif n. Kami telah menyelesaikan langkah dasar dan langkah induktif. Jadi dengan induksi matematika dapat disimpulkan bahwa Pen) benar untuk semua bilangan bulat positif n. Kami menyimpulkan bahwa setiap kali sejumlah ganjil orang yang terletak di halaman pada jarak timbal balik yang berbeda masing-masing melempar kue ke tetangga terdekat mereka, setidaknya ada satu yang selamat.