MATEMATIKA DISKRIT

Materi: Graph

ANGGOTA

- Ibrahim Dafi Iskandar - 140810210039
- Satria Alief Putra - 140810210051
- Prames Ray Lapian - 140810210059
- Sarah Khairunnisa - 140810210063
- Zakia Noorardini - 140810210065

9.1

Sub Materi:

Graphs & Graph Model

Graph,

Grafik G = (V, E) terdiri dari V, satu set simpul (atau node) dan E, satu set Tepi. Setiap tepi memiliki satu atau dua simpul yang terkait dengannya, yang disebut titik akhir. Sebuah Tepi/Edge dikatakan menghubungkan titik akhir.

Himpunan simpul V dari grafik G mungkin tidak terbatas. Grafik dengan set verteks tak terbatas disebut grafik tak terbatas (infinite graph), dan sebagai perbandingan, grafik dengan himpunan verteks terbatas disebut grafik terbatas (finite graph)

Graph:

1.

Grafik di mana setiap tepi menghubungkan dua simpul yang berbeda dan di mana Tidak ada dua tepi yang menghubungkan pasangan simpul yang sama yang disebut grafik sederhana (Simple Graph).

2.

Grafik yang mungkin memiliki beberapa tepi yang menghubungkan simpul yang sama disebut Multigraph.

3.

Grafik yang menganung loop, dan mungkin beberapa tepi yang menghubungkan sepasang simpul yang sama, disebut pseudograph.

4.

Edges/tepi pada graph terbai menjadi dua yaitu directed(memiliki arah) dan undirected (tidak memiliki arah)

Hal yang perlu diperhatikan:

1. Apakah tepi grafik undirected / directed atau keduanya?

2. Jika grafik tidak terarah, apakah ada beberapa tepi yang menghubungkan pasangan simpul yang sama? Jika grafik diarahkan, apakah ada beberapa tepi yang diarahkan?

3. Apakah terdapat loop atau tidak.

Graph Model

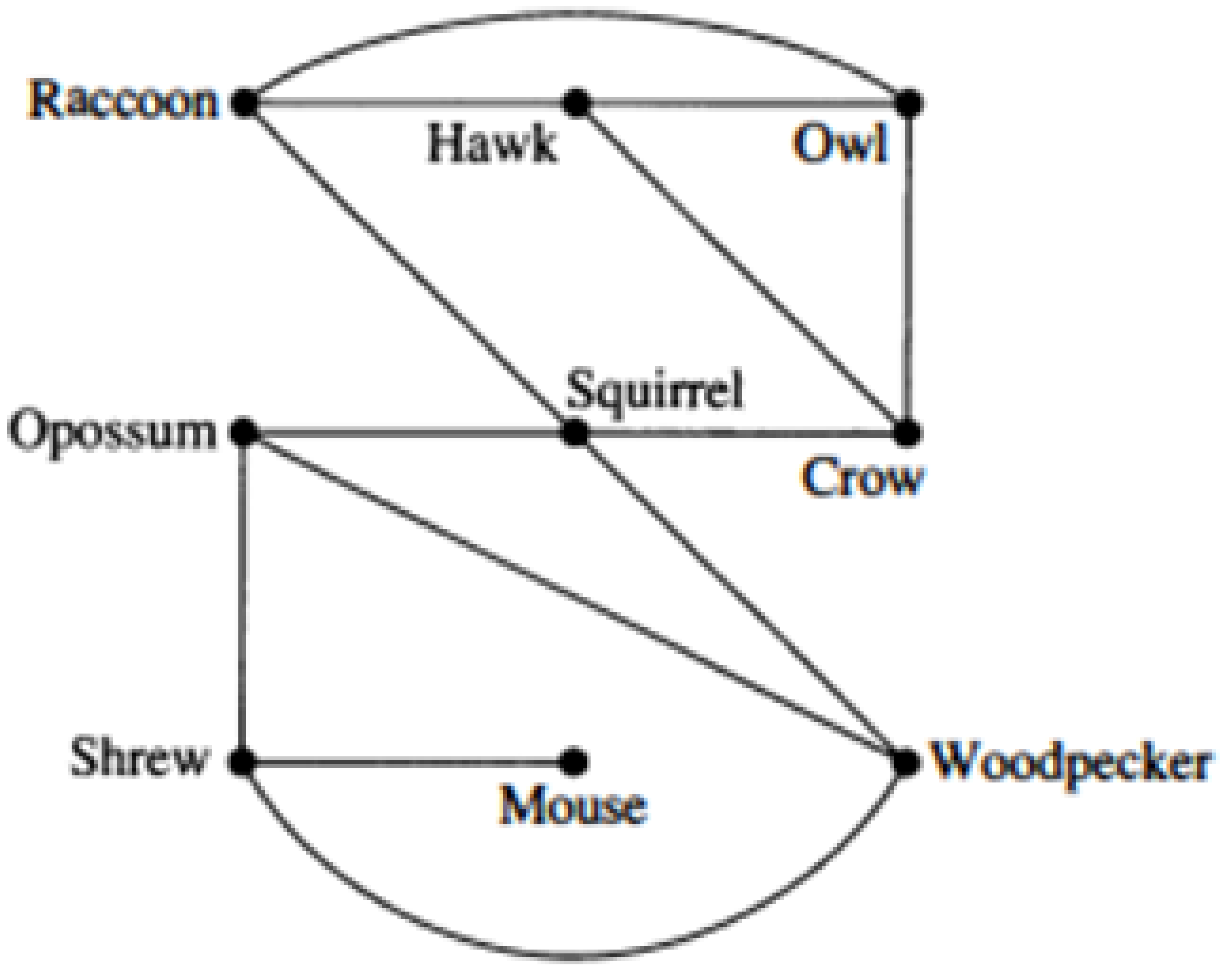


FIGURE 6 A Niche Overlap Graph.

Graph Model

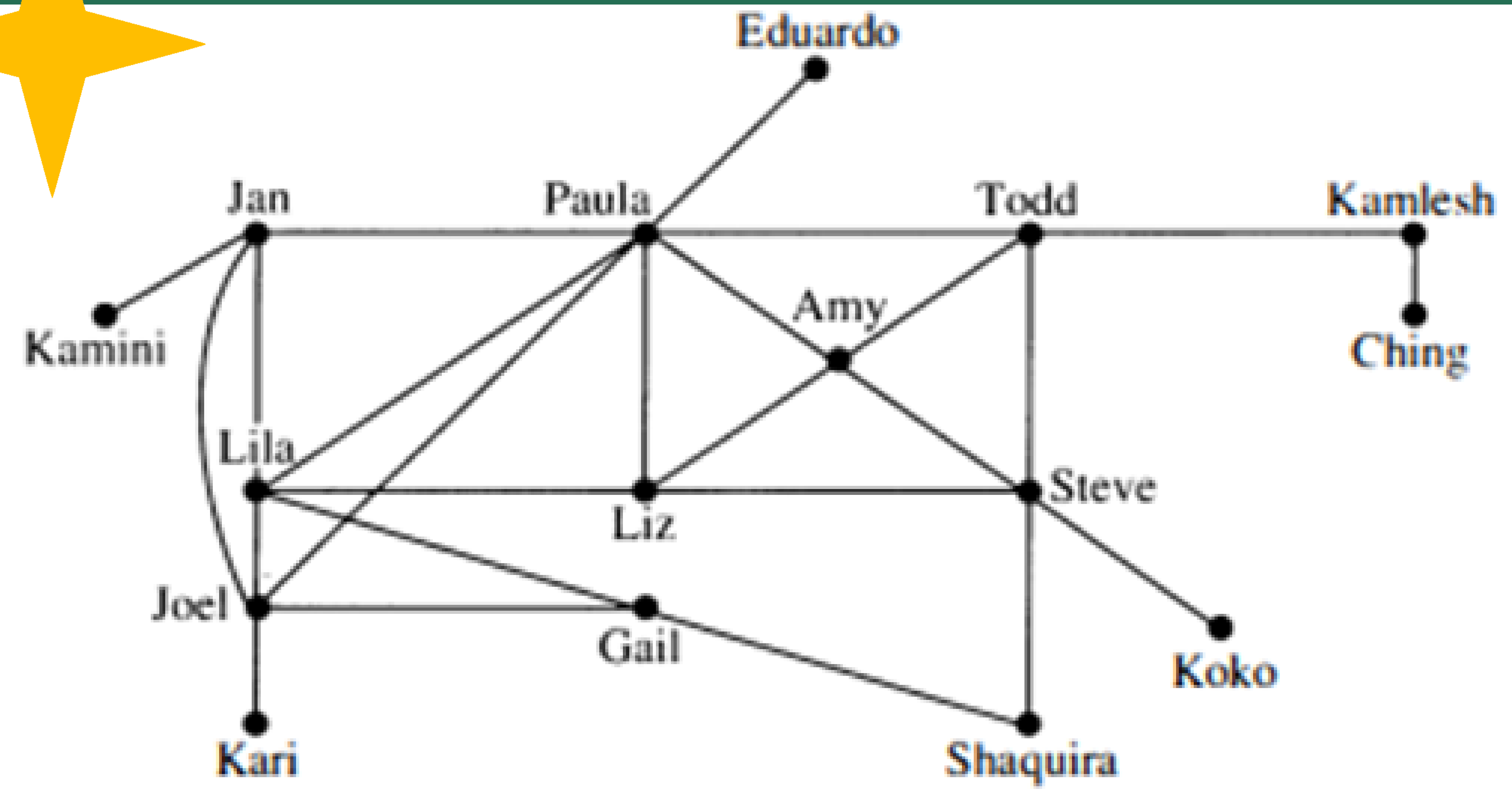


FIGURE 7 An Acquaintanceship Graph.

Graph Model

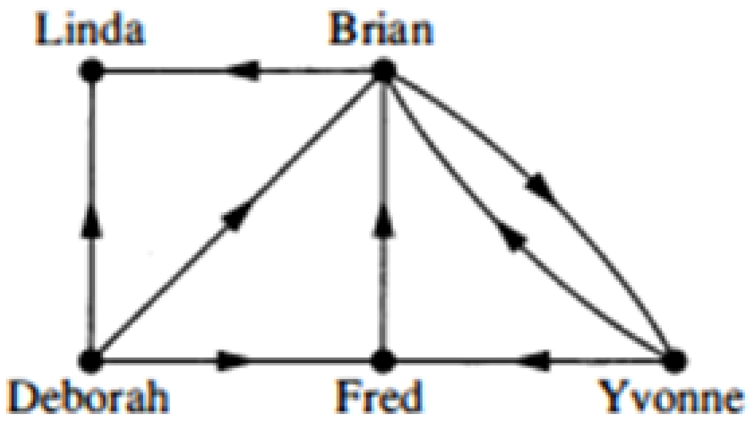


FIGURE 8 An Influence Graph.

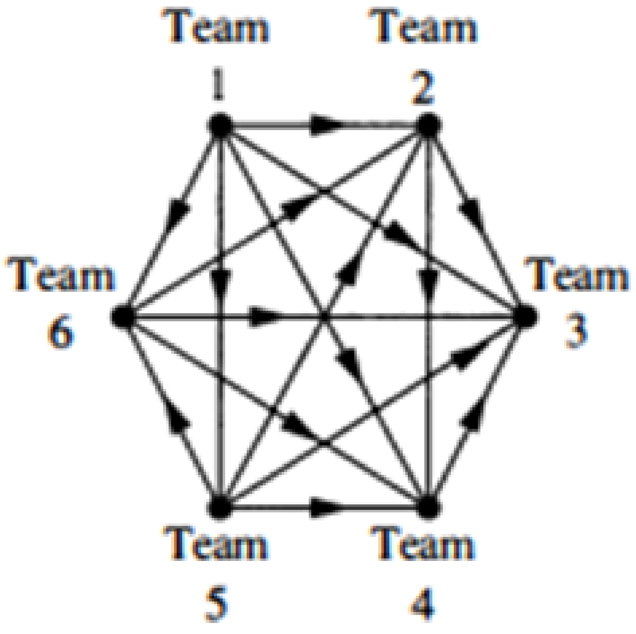


FIGURE 9 A Graph Model of a Round-Robin Tournament.

Graph Model

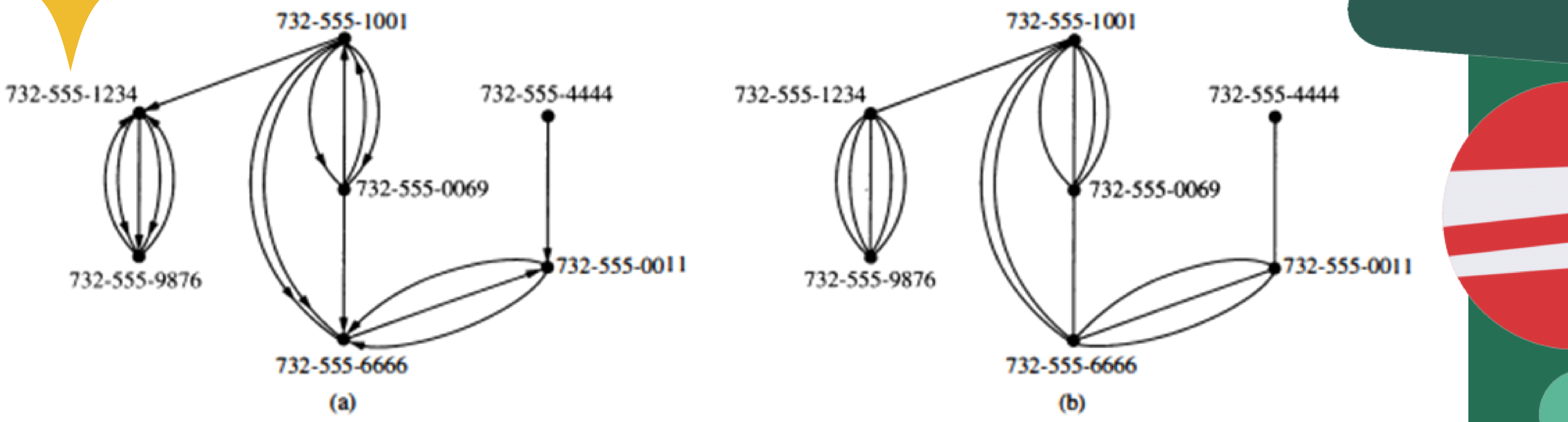


FIGURE 10 **A Call Graph.**

Graph Model

S_1 $a := 0$

S_2 $b := 1$

S_3 $c := a + 1$

S_4 $d := b + a$

S_5 $e := d + 1$

S_6 $e := c + d$

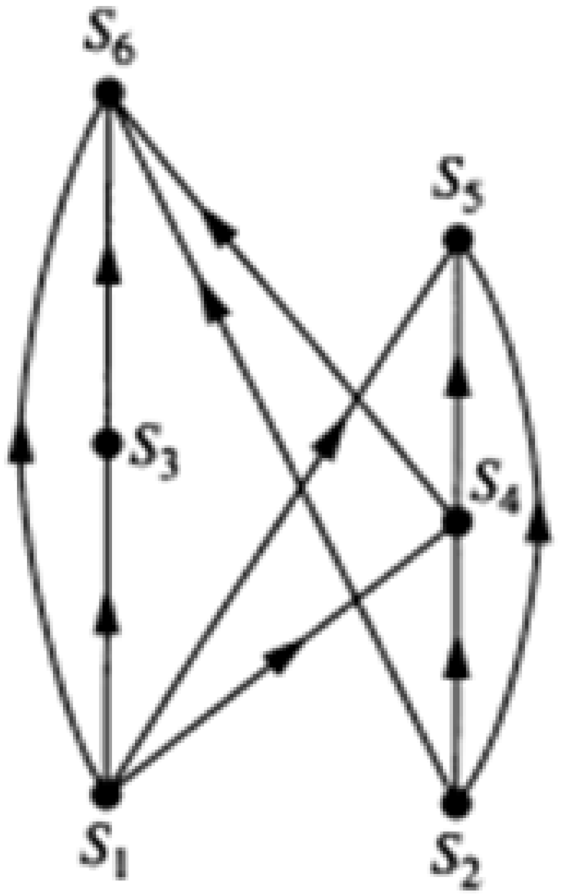


FIGURE 11 **A Precedence Graph.**

9.2

Sub Materi:
Graph Terminology and special Type of graph

Terminology Graph,

Pertama, kami memberikan beberapa terminologi yang menggambarkan simpul(Vertice) dan tepi (Edge) grafik yang tidak terarah.

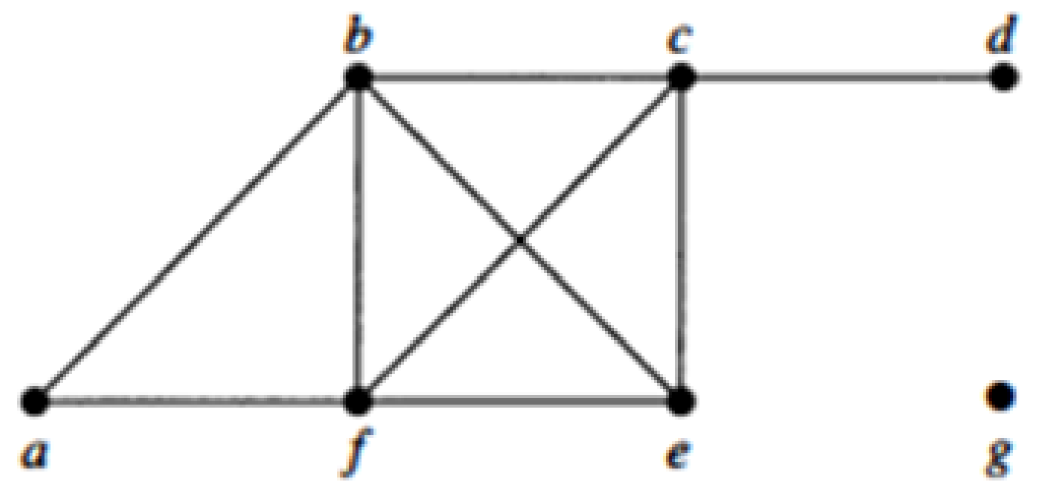
Dua simpul(Vertice) U dan v dalam grafik G yang tidak terarah (undirected) disebut berdekatan (atau tetangga) di G jika u dan v adalah titik akhir dari tepi G. Jika e dikaitkan dengan {u, v}, tepi e disebut incident dengan simpul u dan v. Tepi e juga dikatakan menghubungkan/connectu dan v. Simpul u dan v adalahdisebut titik akhir/endpoint dari tepi yang terkait dengan {u, v}.

Untuk melacak berapa banyak tepi yang terjadi pada vertex, terdapat definisi berikut.

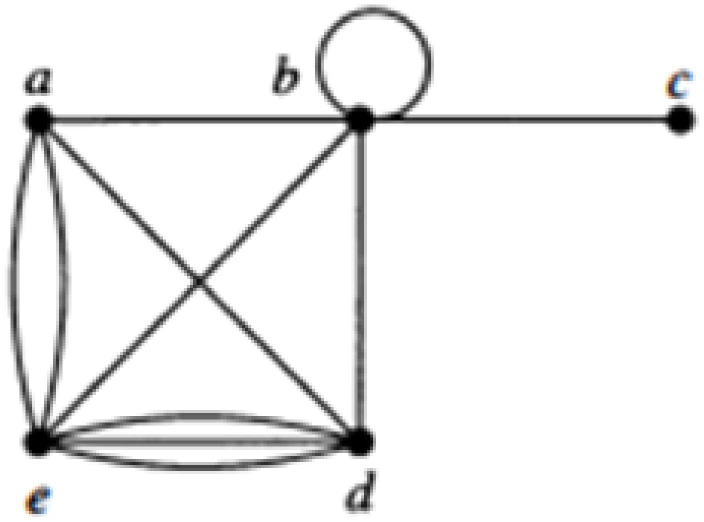
Tingkat(degree) verteks dalam grafik yang tidak terarah adalah jumlah tepi yang menyertainya (ncident), kecuali bahwa loop di vertex berkontribusi dua kali pada degree vertex tersebut. Degree verteks v dilambangkan dengan deg(v).

Terminologi Graph

Contoh:



G



H

Berapa degree dari vertex dalam grafik G dan H yang ditampilkan pada gambar diatas?

?

Solution: In G, deg(a) = 2, deg(b) = deg(c) = deg(f) = 4, deg(d) = 1, deg(c) = 3, and deg(g) = 0. In H, deg(a) = 4, deg(b) = deg(c) = 6, deg(c) = 1, and deg(d) = 5

Terminologi Graph

HANDSHAKE THEOREM

Ambil G = (V, E) menjadi grafik tidak terarah dengan e Tepi. Kemudian

$$2e = \sum_{v \in V} \deg(v).$$

(Note that this applies even if multiple edges and loops are present.)

Contoh:

EXAMPLE 3

How many edges are there in a graph with 10 vertices each of degree six?

Solution: Because the sum of the degrees of the vertices is $6 \cdot 10 = 60$, it follows that $2e = 60$. Therefore, $e = 30$. ◀

Grafik yang tidak terarah memiliki jumlah simpul(vertix) genap dengan derajat(degree) ganjil.

Terminologi Graph

Ketika (u, v) adalah tepi grafik G dengan tepi terarah, u dikatakan berdekatan dengan v dan v dikatakan berdekatan dari u. Verteks u disebut verteks awal dari (u, v), dan v disebut Terminal atau simpul akhir dari (U, V). Verteks awal dan verteks terminal dari loop adalah sama.

Dalam grafik dengan tepi terarah, derajat dalam derajat verteks v, dilambangkan dengan deg-(v), adalah angkanya tepi dengan v sebagai simpul terminalnya. Tingkat keluar dari v, dilambangkan dengan deg + (v), adalah jumlah tepi dengan v sebagai verteks awalnya. (Perhatikan bahwa loop pada titik berkontribusi 1 untuk baik in-degree maupun out-degree dari vertex ini.)

Terminologi Graph

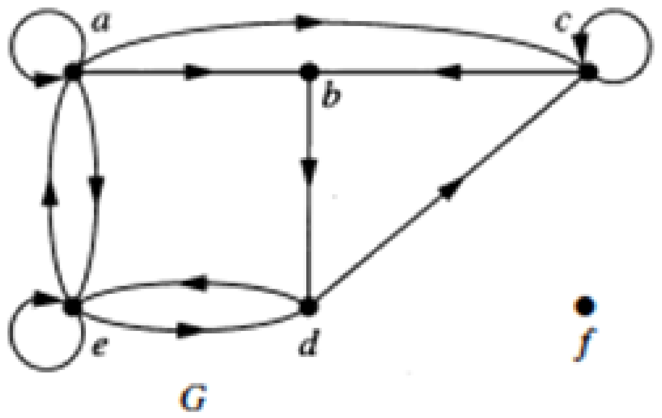


FIGURE 2 **The Directed Graph *G*.**

EXAMPLE 4 Find the in-degree and out-degree of each vertex in the graph G with directed edges shown in Figure 2.

Solution: The in-degrees in G are $\deg^-(a) = 2$, $\deg^-(b) = 2$, $\deg^-(c) = 3$, $\deg^-(d) = 2$, $\deg^-(e) = 3$, and $\deg^-(f) = 0$. The out-degrees are $\deg^+(a) = 4$, $\deg^+(b) = 1$, $\deg^+(c) = 2$, $\deg^+(d) = 2$, $\deg^+(e) = 3$, and $\deg^+(f) = 0$. ◀

Bipartite Graph

Grafik sederhana G disebut bipartit jika set verteksnya V dapat dipartisi menjadi dua terputus-putus mengatur VI dan V2 sedemikian rupa sehingga setiap tepi dalam grafik menghubungkan verteks di VI dan verteks di V2 (sehingga tidak ada tepi di G yang menghubungkan dua simpul di VI atau dua simpul di V2). Ketika ini kondisi memegang, kami memanggil pasangan (VI . V2) bipartisi dari himpunan verteks V dari G.

Contoh

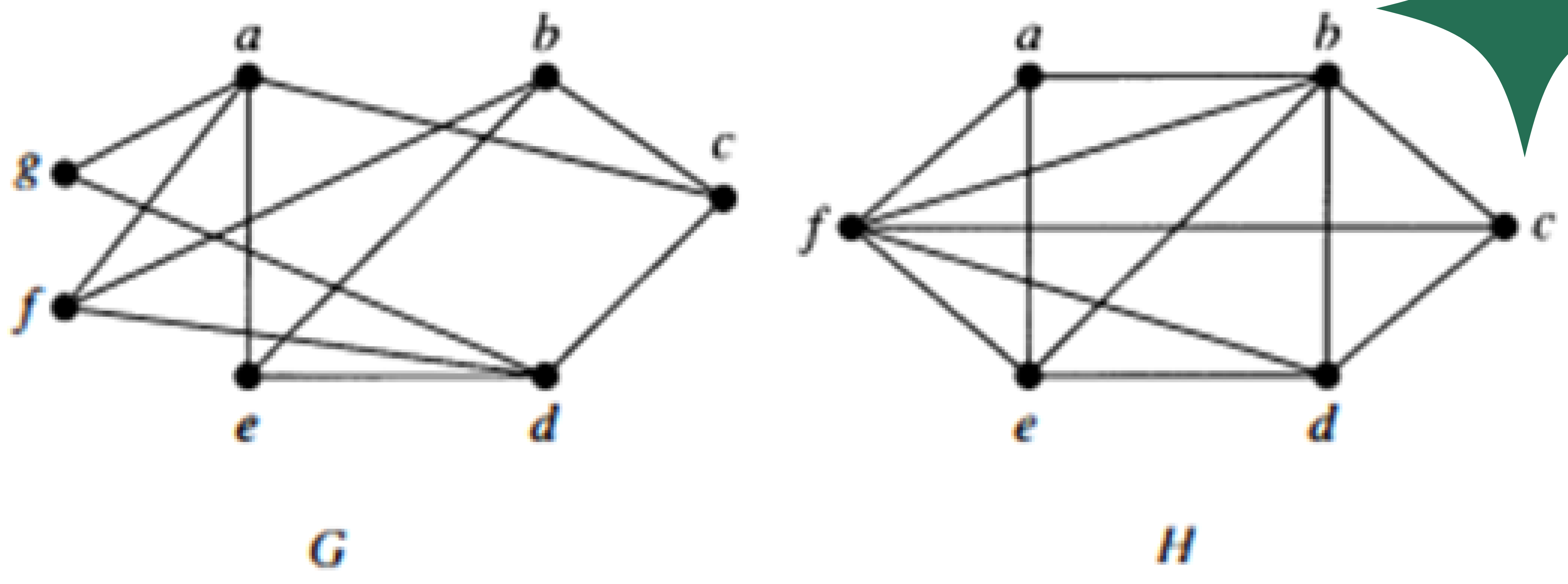


FIGURE 8 The Undirected Graphs G and H.

? Apakah G dan H bipartite?

Answer

Graph G adalah bipartit karena himpunan titiknya merupakan gabungan dari dua himpunan lepas, {a , b, d} dan {c, e, j, g}, dan setiap sisi menghubungkan sebuah simpul di salah satu himpunan bagian ini ke sebuah simpul di himpunan bagian lainnya bagian. (Perhatikan bahwa untuk G menjadi bipartit, tidak perlu setiap simpul di {a , b, d} bertetangga ke setiap simpul di {c, e, j, g}. Misalnya, b dan g tidak bertetangga.) Graph H tidak bipartit karena himpunan simpulnya tidak dapat dipartisi menjadi dua himpunan bagian bahwa tepi tidak menghubungkan dua simpul dari subset yang sama. (Pembaca harus memverifikasi ini dengan mempertimbangkan simpul a, b, dan j.)

Membangun Graph Baru dari yang lama/Sudah ada

subgraf dari graf $G = (V, E)$ adalah graf $H = (W, F)$, dengan $W \subseteq V$ dan $F \subseteq E$. A subgraf H dari G adalah subgraf yang tepat dari G jika $H \neq G$.

9.3

Sub Materi:
Representing Graphs and Graph Isomorphism

Representasi Graph

Representasi Graph membicarakan tentang berbagai cara untuk memvisualisasikan graph.

Isomorfisme Graph

Keadaan dimana dua graph memiliki bentuk yang sama bila digambarkan.

Menggunakan Adjecency List

Dalam adjacency list, kita menuliskan suatu vertex (poin) terhubung dengan vertex apa saja dalam bentuk tabel.

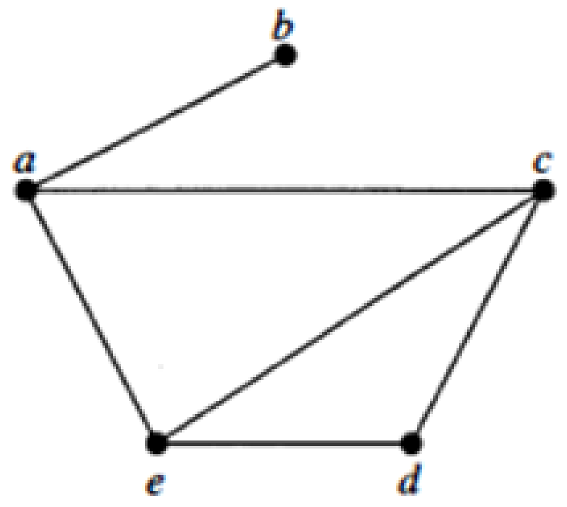


FIGURE 1 **A Simple Graph.**

TABLE 1 An Adjacency List for a Simple Graph.

Vertex	*Adjacent Vertices*
a	*b, c, e*
b	*a*
c	*a, d, e*
d	*c, e*
e	*a, c, d*

EXAMPLE 1 Use adjacency lists to describe the simple graph given in Figure 1.

Berikut merupakan contoh adjaceny list dengan kaitan berarah:

EXAMPLE 2 Represent the directed graph shown in Figure 2 by listing all the vertices that are the terminal vertices of edges starting at each vertex of the graph.

Solution: Table 2 represents the directed graph shown in Figure 2. ◀

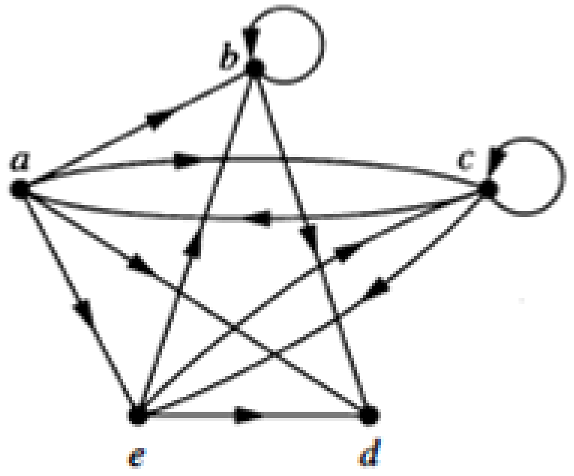


FIGURE 2 A Directed Graph.

TABLE 2 An Adjacency List for a Directed Graph.

Initial Vertex	*Terminal Vertices*
a	b, c, d, e
b	b, d
c	a, c, e
d	
e	b, c, d

Menggunakan Adjacency Matrix

Menggunakan adjacency list bisa jadi rumit bila vertex yang dimiliki graph ada terlalu banyak. Untuk menyederhanakan, kita dapat merepresentasikan isi graph dengan Matrix

Cara pengisian :

Misal G = (V, E) adalah graph sederhana dimana |V| = n. Misal vertex-vertex dalam G dinamai v1, v2, v3, ..., vn. Adjacency matrix dari G, dengan melihat urutan pengurutan vertex tadi, adalah matrix biner dengan ukuran n x n (1 bila vertex terhubungan dengan vertex i, 0 bila vertex tidak terhubung).

If (vi, vj adalah edge dalam G) { a ij = 1}
else { a ij = 0}

Berikut merupakan contoh dari penggunaan adjacency matrix:

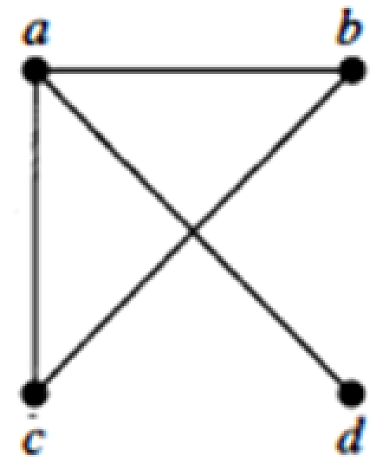


FIGURE 3
Simple Graph.

EXAMPLE 3 Use an adjacency matrix to represent the graph shown in Figure 3.

Solution: We order the vertices as a, b, c, d. The matrix representing this graph is

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Kolom dan baris dari adjacency matrix tergantung pada urutan vertexnya, sehingga akan ada n! Jumlah matrix yang dapat terbentuk dari satu graph. Pada graph tidak berarah, matrix adjacency yang terbentuk akan bersifat simetris. Karena, a ij == a ji apabila v ij dan v ji terhubung.

Matrix dalam adjacency matrix bisa jadi bukan matrix 1-0 bila edge dapat berulang-ulang/lebih dari satu.

EXAMPLE 5

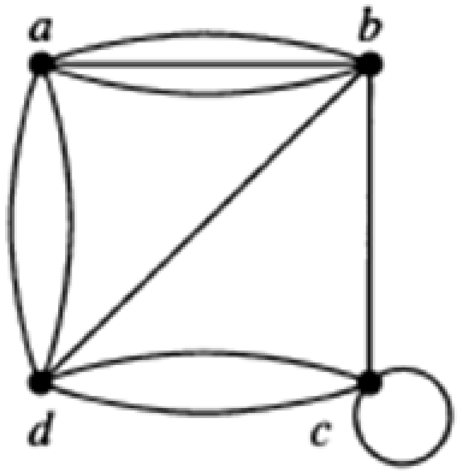


FIGURE 5
A Pseudograph.

Use an adjacency matrix to represent the pseudograph shown in Figure 5.

Solution: The adjacency matrix using the ordering of vertices a, b, c, d is

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Adjacency matrix juga dapat digunakan untuk merepresentasikan directed multigraphs. Sama halnya dengan graph berarah, matrix yang dihasilkan tidak harus simetris dan/atau matrix 1-0.

Kasus penggunaan metode representasi graph

Adjacency List disarankan apabila graph tidak memiliki terlalu banyak edge (sparse), misal dari satu vertex tidak terhubungan lebih dari c, dimana c adalah sebuah konstanta jauh lebih kecil dari n.,

Namun, bila graphnya padat (tidak sparse), lebih disarankan memakai adjacency matrix

Menggunakan Incidence Matrix

Cara lain untuk merepresentasikan graph adalah dengan menggunakan incidence matrix.

Misal G = (V, E) adalah graph sederhana tidak berarah, v1, v2, v3, …, vn adalah vertex-vertexnya dan e1, e2, e3, …, em adalah edge-edgenya.
M adalah incidence matrixnya. M berukuran n x m dan nilai-nilai pada matrix mengikuti aturan
If (vi adalah anggota edge ej) {m ij = 1}
Else { m ij = 0}

Berikut merupakan contoh penggunaan incidence Matrix:

EXAMPLE 6 Represent the graph shown in Figure 6 with an incidence matrix.

Solution: The incidence matrix is

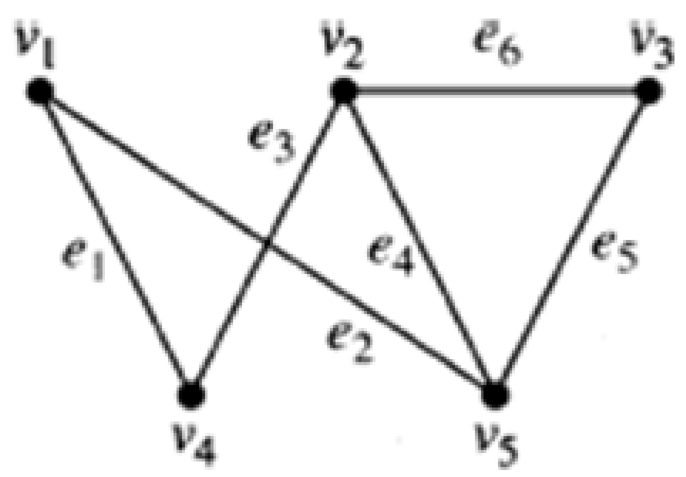


FIGURE 6 An Undirected Graph.

$$
\begin{array}{c}
 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}.
$$

Incidence matrix juga dapat digunakan untuk merepresentasikan graph yang memiliki multiple edges dan loop

EXAMPLE 7 Represent the pseudograph shown in Figure 7 using an incidence matrix.

Solution: The incidence matrix for this graph is

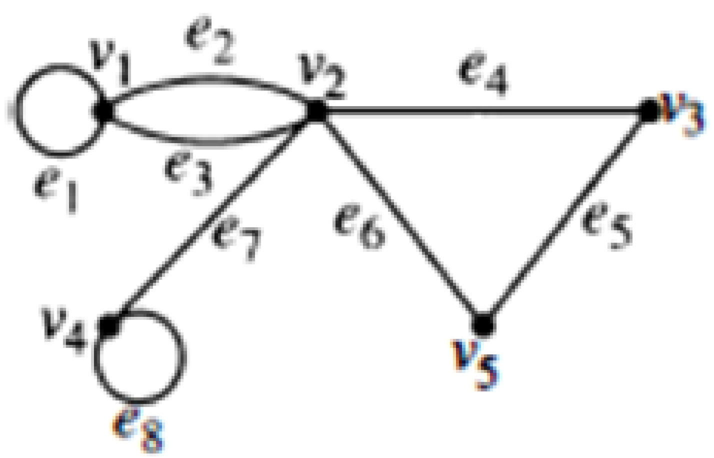


FIGURE 7
A Pseudograph.

$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0
\end{bmatrix} \end{array}.$$

Isomorfisme dalam Graph

Isomorfisme adalah kasus dimana dua graph dapat memiliki gambar yang sama.

DEFINITION 1 The simple graphs $G_1 = (V_1, E_1)$ and $G_2 = (V_2, E_2)$ are *isomorphic* if there is a one-to-one and onto function f from V_1 to V_2 with the property that a and b are adjacent in G_1 if and only if $f(a)$ and $f(b)$ are adjacent in G_2, for all a and b in V_1. Such a function f is called an *isomorphism.**

Artinya, saat dua graph isomorfik, ada cara dimana satu graph dapat dibentuk menjadi graph lainnya tanpa merusak relasi antar vertexnya.

Berikut merupakan contoh Isomorfisme:

EXAMPLE 8

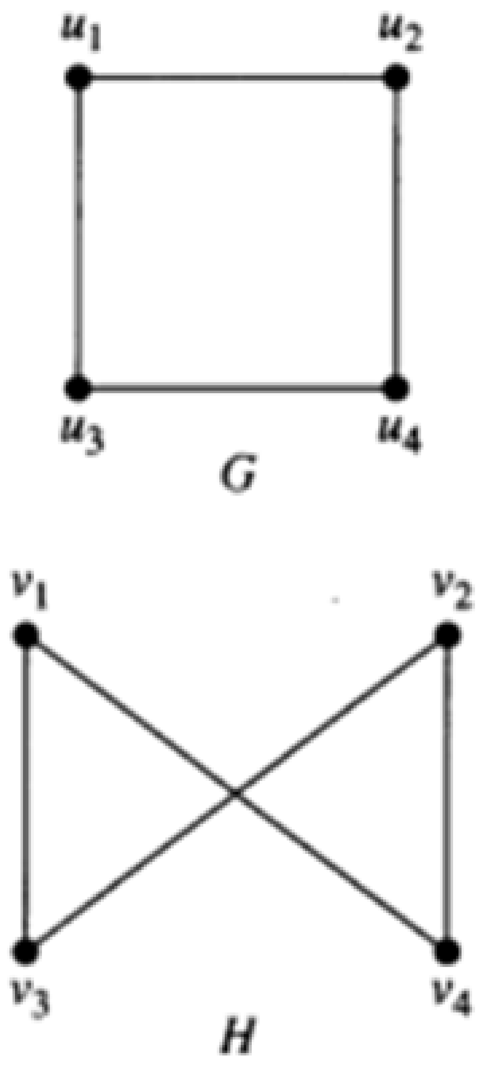


FIGURE 8 The Graphs G and H.

Show that the graphs $G = (V, E)$ and $H = (W, F)$, displayed in Figure 8, are isomorphic.

Solution: The function f with $f(u_1) = v_1$, $f(u_2) = v_4$, $f(u_3) = v_3$, and $f(u_4) = v_2$ is a one-to-one correspondence between V and W. To see that this correspondence preserves adjacency, note that adjacent vertices in G are u_1 and u_2, u_1 and u_3, u_2 and u_4, and u_3 and u_4, and each of the pairs $f(u_1) = v_1$ and $f(u_2) = v_4$, $f(u_1) = v_1$ and $f(u_3) = v_3$, $f(u_2) = v_4$ and $f(u_4) = v_2$, and $f(u_3) = v_3$ and $f(u_4) = v_2$ are adjacent in H. ◀

Kadang agak rumit untuk menentukan apakah dua graph isomorfik atau tidak, karena ada n! cara untuk menggambar graph untuk graph dengan n jumlah vertex.

Kadang tidak susah untuk menentukan bahwa dua graph bukanlah isomorfik. Caranya adalah mencari satu karakteristik yang dimiliki satu graph yang tidak dimiliki graph lainnya.

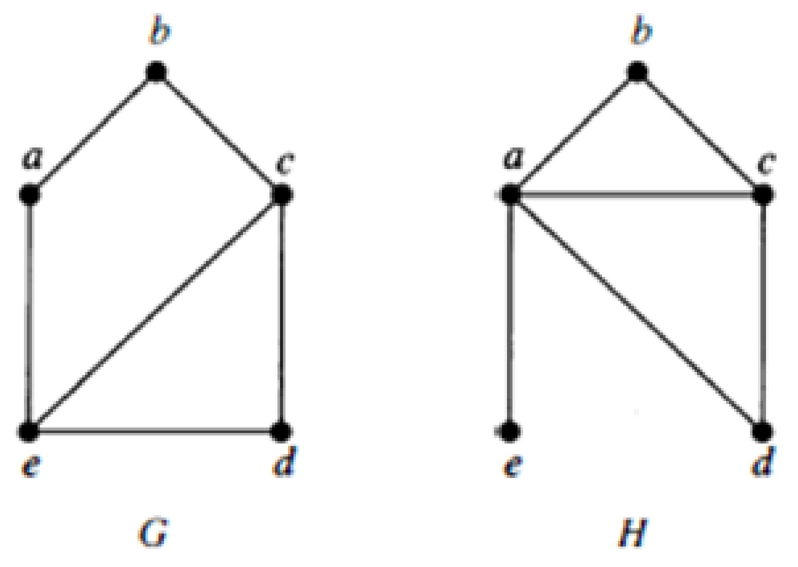


FIGURE 9 **The Graphs G and H.**

EXAMPLE 9 Show that graphs displayed in Figure 9 are not isomorphic.

Extra Examples

Solution: Both G and H have five vertices and six edges. However, H has a vertex of degree one, namely, e, whereas G has no vertices of degree one. It follows that G and H are not isomorphic. ◀

Karakteristik seperti jumlah vertex, jumlah edge, atau pangkat vertex-vertexnya dapat menjadi karakteristik mengapa dua graph sederhana bukanlah isomorfik

Berikut merupakan contoh lain cara mengetahui dua graph bukanlah isomorfik

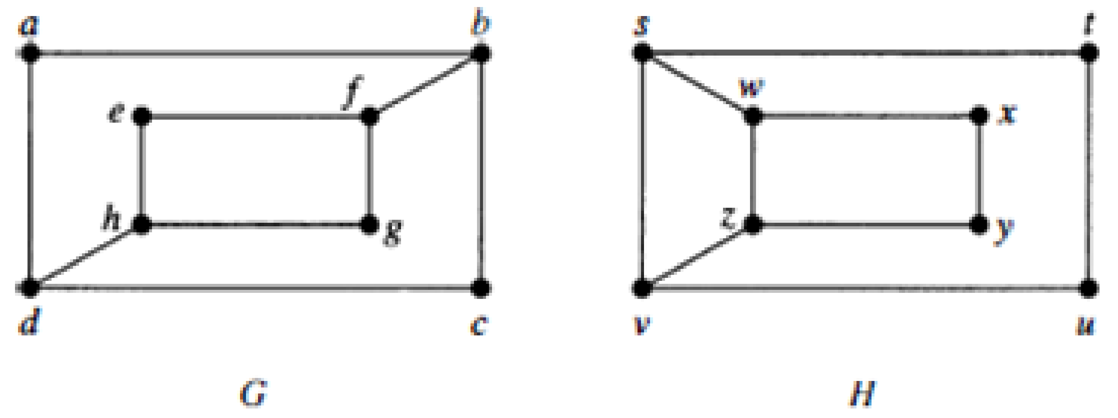
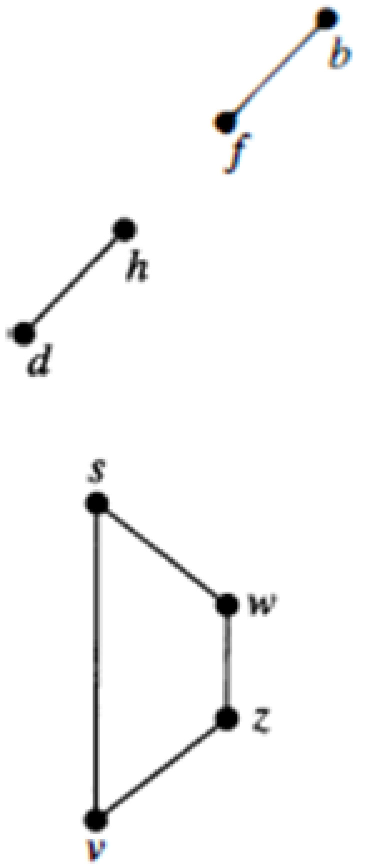


FIGURE 10 **The Graphs G and H.**

EXAMPLE 10 Determine whether the graphs shown in Figure 10 are isomorphic.



Solution: The graphs G and H both have eight vertices and 10 edges. They also both have four vertices of degree two and four of degree three. Because these invariants all agree, it is still conceivable that these graphs are isomorphic.

However, G and H are not isomorphic. To see this, note that because $\deg(a) = 2$ in G, a must correspond to either t, u, x, or y in H, because these are the vertices of degree two in H. However, each of these four vertices in H is adjacent to another vertex of degree two in H, which is not true for a in G.

Another way to see that G and H are not isomorphic is to note that the subgraphs of G and H made up of vertices of degree three and the edges connecting them must be isomorphic if these two graphs are isomorphic (the reader should verify this). However, these subgraphs, shown in Figure 11, are not isomorphic. ◀

Isomorfisme dalam Graph

Salah satu cara mudah untuk melihat dua graph isomorfik atau tidak adalah untuk dengan menggunakan adjacency matrix. Isomorfismenya dapat terlihat apabila adjacency matrix satu matrix sama dengan matrix satunya lagi saat baris dan kolom matrixnya disusun sedemikian rupa.

EXAMPLE 11 Determine whether the graphs G and H displayed in Figure 12 are isomorphic.

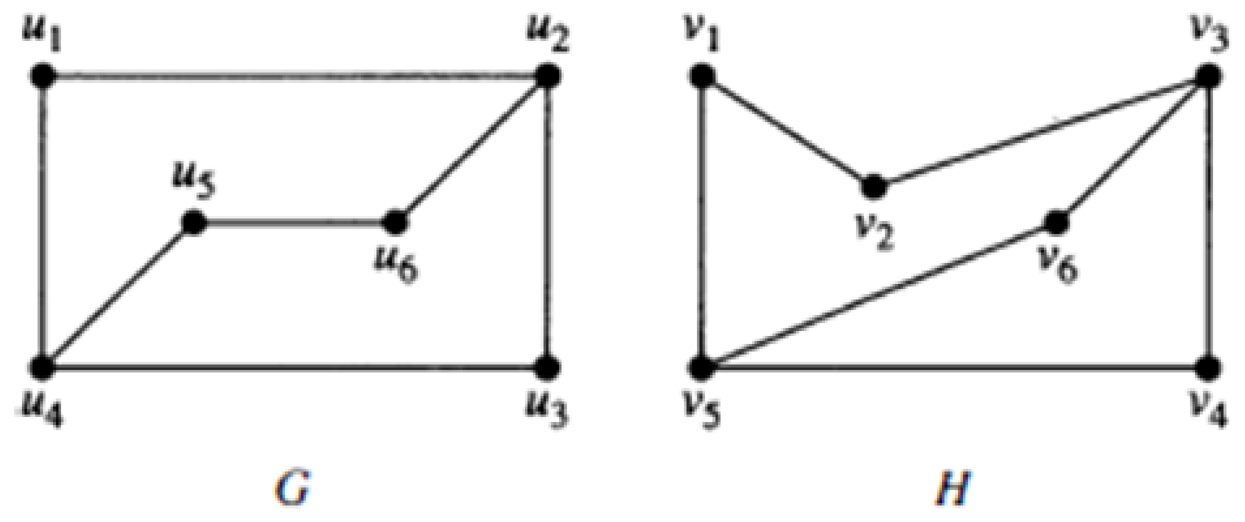


FIGURE 12 Graphs G and H.

Solution: Both G and H have six vertices and seven edges. Both have four vertices of degree two and two vertices of degree three. It is also easy to see that the subgraphs of G and H consisting of all vertices of degree two and the edges connecting them are isomorphic (as the reader should verify). Because G and H agree with respect to these invariants, it is reasonable to try to find an isomorphism f.

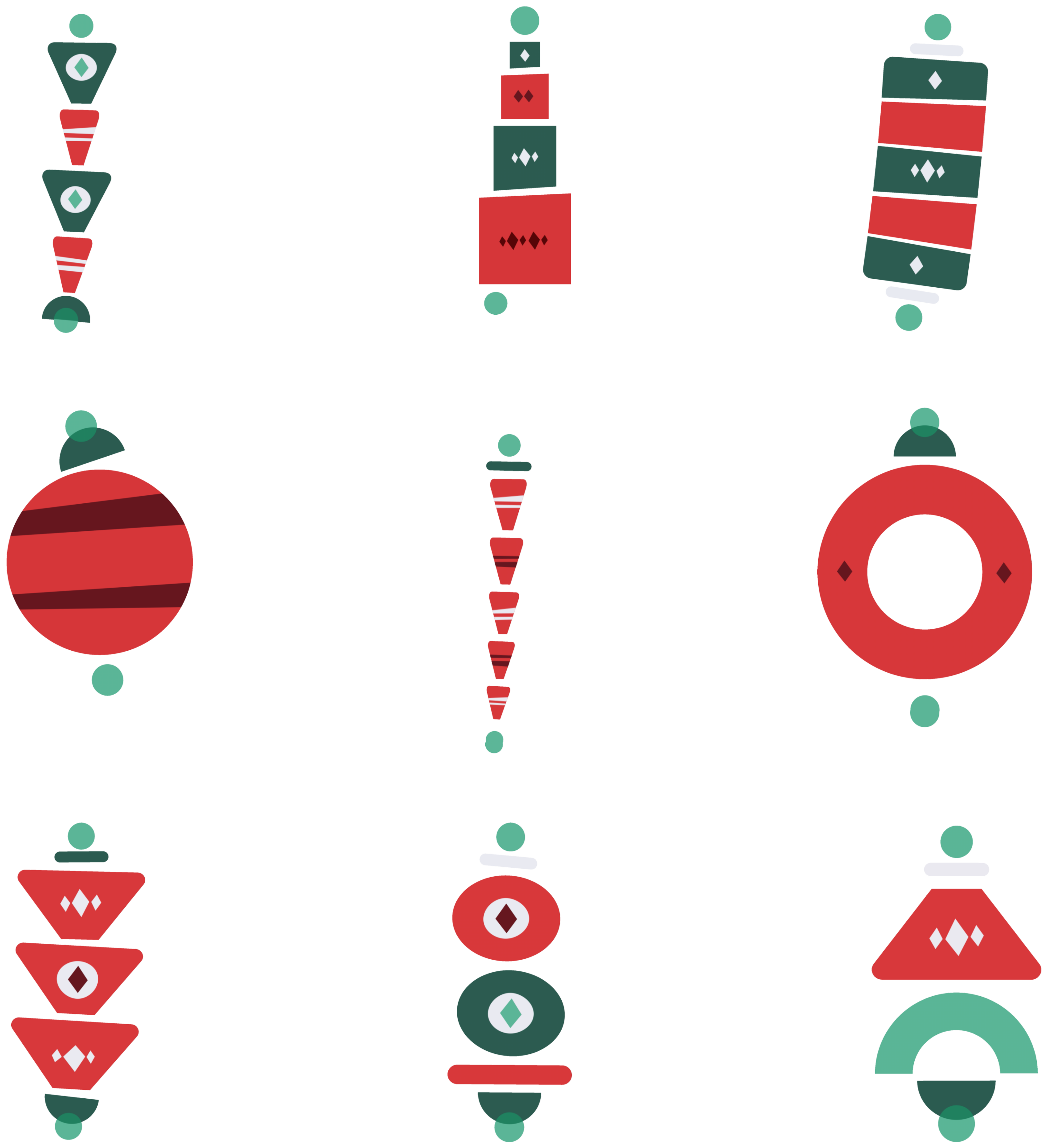
We now will define a function f and then determine whether it is an isomorphism. Because $\deg(u_1) = 2$ and because u_1 is not adjacent to any other vertex of degree two, the image of u_1 must be either v_4 or v_6, the only vertices of degree two in H not adjacent to a vertex of degree two. We arbitrarily set $f(u_1) = v_6$. [If we found that this choice did not lead to isomorphism, we would then try $f(u_1) = v_4$.] Because u_2 is adjacent to u_1, the possible images of u_2 are v_3 and v_5. We arbitrarily set $f(u_2) = v_3$. Continuing in this way, using adjacency of vertices and degrees as a guide, we set $f(u_3) = v_4$, $f(u_4) = v_5$, $f(u_5) = v_1$, and $f(u_6) = v_2$. We now have a one-to-one correspondence between the vertex set of G and the vertex set of H, namely, $f(u_1) = v_6$, $f(u_2) = v_3$, $f(u_3) = v_4$, $f(u_4) = v_5$, $f(u_5) = v_1$, $f(u_6) = v_2$. To see whether f preserves edges, we examine the adjacency matrix of G,

$$\mathbf{A}_G = \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_H = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} v_6 & v_3 & v_4 & v_5 & v_1 & v_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_6 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_1 \\ v_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Because $\mathbf{A}_G = \mathbf{A}_H$, it follows that f preserves edges. We conclude that f is an isomorphism, so G and H are isomorphic. Note that if f turned out not to be an isomorphism, we would *not* have established that G and H are not isomorphic, because another correspondence of the vertices in G and H may be an isomorphism. ◀

9.4 CONNECTIVITY



Konektivitas

Banyak masalah dapat dimodelkan dengan jalan yang terbentuk antar vertex. Seperti, masalah apakah bisa sebuah pesan diantar antar dua komputer dapat dipelajari dengan model graph.

PATHs

Path adalah sebuah sekuens yang bermuda dari suatu vertex, lalu bergerak melalui edge, dari satu vertex ke vertex lainnya.

PATHs

DEFINITION 1 Let n be a nonnegative integer and G an undirected graph. A *path* of *length* n from u to v in G is a sequence of n edges $e_1, \ldots, e_n$ of G such that e_1 is associated with $\{x_0, x_1\}$, e_2 is associated with $\{x_1, x_2\}$, and so on, with e_n associated with $\{x_{n-1}, x_n\}$, where $x_0 = u$ and $x_n = v$. When the graph is simple, we denote this path by its vertex sequence $x_0, x_1, \ldots, x_n$ (because listing these vertices uniquely determines the path). The path is a *circuit* if it begins and ends at the same vertex, that is, if $u = v$, and has length greater than zero. The path or circuit is said to *pass through* the vertices $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ or *traverse* the edges $e_1, e_2, \ldots, e_n$. A path or circuit is *simple* if it does not contain the same edge more than once.

PATHs

Contoh

Misal n merupakan integer positif. Path merupakan berjarak n merupakan urutan dari suatu vertex u ke vertex v dalam graph G dengan edge e1, e2, e3, …., en, dimana e1 merupakan hubungan (x0, x1), e2 = (x1, x2), … , en = (x(n-1), xn), x0 = u, xn = v.

EXAMPLE 4 **Paths in the Hollywood Graph** In the Hollywood graph (see Example 4 in Section 9.1) two vertices *a* and *b* are linked when there is a chain of actors linking *a* and *b*, where every two actors adjacent in the chain have acted in the same movie. In the Hollywood graph, the **Bacon number** of an actor *c* is defined to be the length of the shortest path connecting *c* and the well-known actor Kevin Bacon. As new movies are made, including new ones with Kevin Bacon, the Bacon

Links

TABLE 1 The Number of Mathematicians with a Given Erdős Number (as of early 2006).

Erdős Number	*Number of People*
0	1
1	504
2	6,593
3	33,605
4	83,642
5	87,760
6	40,014
7	11,591
8	3,146
9	819
10	244
11	68
12	23
13	5

TABLE 2 The Number of Actors with a Given Bacon Number (as of early 2006).

Bacon Number	*Number of People*
0	1
1	1,902
2	160,463
3	457,231
4	111,310
5	8,168
6	810
7	81
8	14

number of actors can change. In Table 2 we show the number of actors with each Bacon number as of early 2006 using data from the Oracle of Bacon website.

Konektivitas pada graph tidak berarah

Graph tidak berarah disebut connected apabila semua vertex dapat terhubung dengan semua vertex dalam graph

EXAMPLE 5 The graph G_1 in Figure 2 is connected, because for every pair of distinct vertices there is a path between them (the reader should verify this). However, the graph G_2 in Figure 2 is not connected. For instance, there is no path in G_2 between vertices a and d. ◀

Konektivitas pada graph tidak berarah

THEOREM 1 There is a simple path between every pair of distinct vertices of a connected undirected graph.

Proof: Let u and v be two distinct vertices of the connected undirected graph $G = (V, E)$. Because G is connected, there is at least one path between u and v. Let $x_0, x_1, \ldots, x_n$, where $x_0 = u$ and $x_n = v$, be the vertex sequence of a path of least length. This path of least length is simple. To see this, suppose it is not simple. Then $x_i = x_j$ for some i and j with $0 \leq i < j$. This means that there is a path from u to v of shorter length with vertex sequence $x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_j, \ldots, x_n$ obtained by deleting the edges corresponding to the vertex sequence $x_i, \ldots, x_{j-1}$. $\triangleleft$

A **connected component** of a graph G is a connected subgraph of G that is not a proper subgraph of another connected subgraph of G. That is, a connected component of a graph G is a maximal connected subgraph of G. A graph G that is not connected has two or more connected components that are disjoint and have G as their union.

Links

Konektivitas pada graph tidak berarah

EXAMPLE 6 What are the connected components of the graph H shown in Figure 3?

Solution: The graph H is the union of three disjoint connected subgraphs H_1, H_2, and H_3, shown in Figure 3. These three subgraphs are the connected components of H. ◀

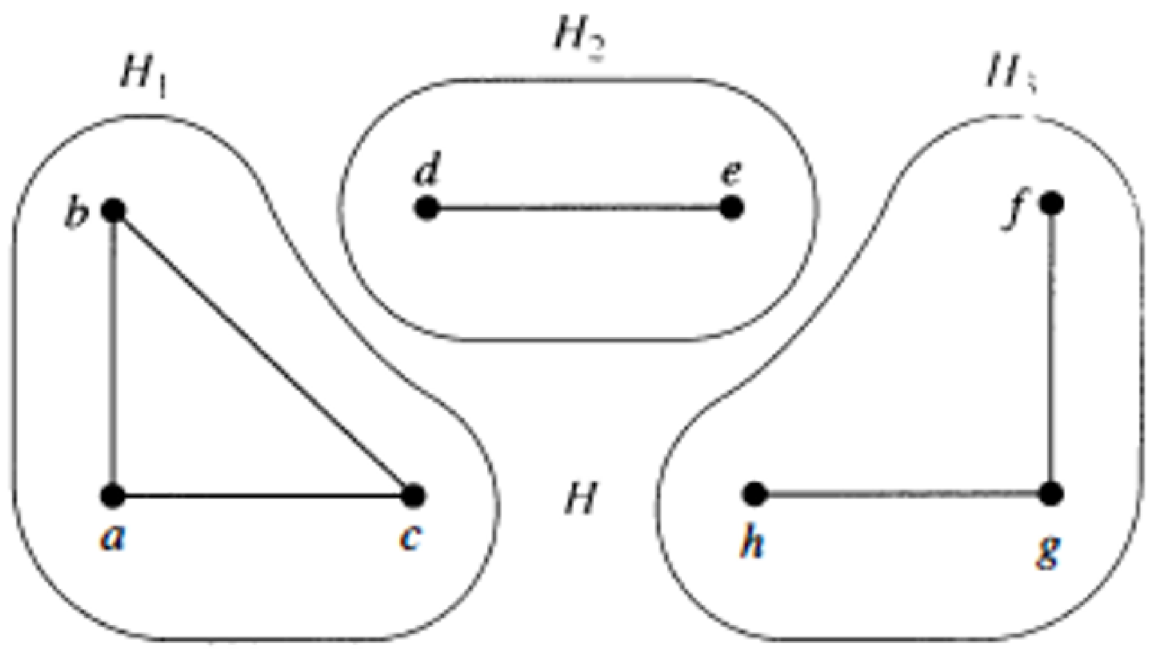


FIGURE 3 **The Graph H and Its Connected Components H_1, H_2, and H_3.**

Konektivitas pada graph berarah

Graph berarah dikatakan strongly connected bila ada path antar a ke b dan b ke a dimana a dan b adalah vertex.

Graph berarah dikatakan weakly connected bila selalu ada path untuk setiap dua vertex dalam graph

Konektivitas pada graph berarah

EXAMPLE 9 Are the directed graphs G and H shown in Figure 5 strongly connected? Are they weakly connected?

Solution: G is strongly connected because there is a path between any two vertices in this directed graph (the reader should verify this). Hence, G is also weakly connected. The graph H is not strongly connected. There is no directed path from a to b in this graph. However, H is weakly connected, because there is a path between any two vertices in the underlying undirected graph of H (the reader should verify this). ◀

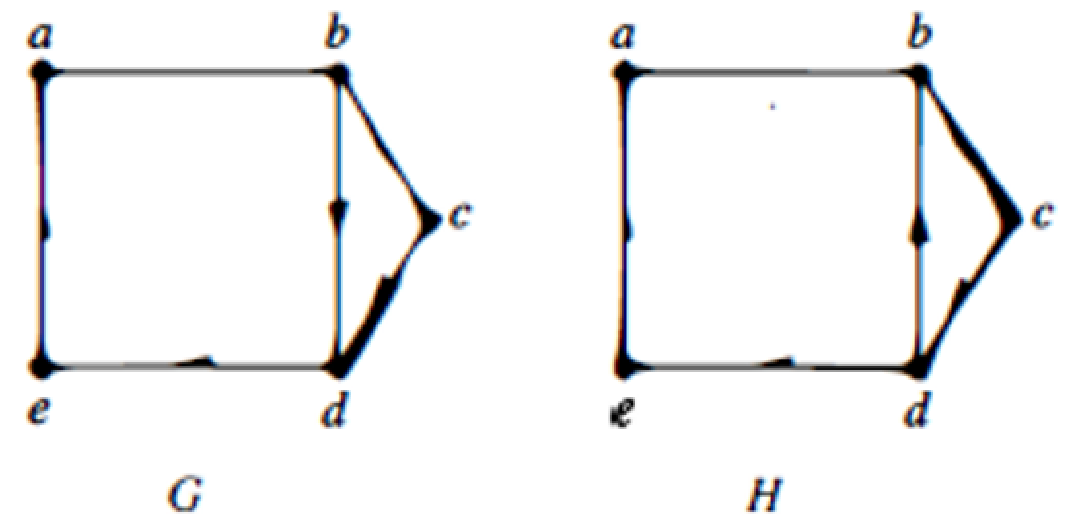
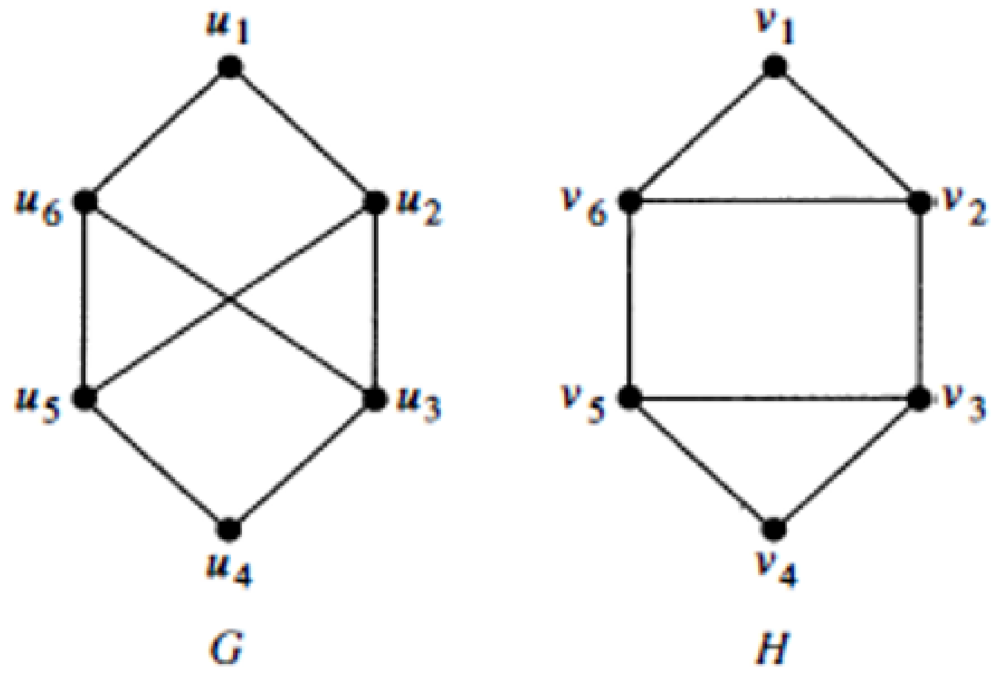


FIGURE 5 The Directed Graphs G and H.

Paths dan isomorfisme

EXAMPLE 12 Determine whether the graphs G and H shown in Figure 6 are isomorphic.

Solution: Both G and H have six vertices and eight edges. Each has four vertices of degree three, and two vertices of degree two. So, the three invariants—number of vertices, number of edges, and degrees of vertices—all agree for the two graphs. However, H has a simple circuit of length three, namely, v_1, v_2, v_6, v_1, whereas G has no simple circuit of length three, as can be determined by inspection (all simple circuits in G have length at least four). Because the existence of a simple circuit of length three is an isomorphic invariant, G and H are not isomorphic. ◀



Menghitung path antar vertex

THEOREM 2 Let G be a graph with adjacency matrix $\mathbf{A}$ with respect to the ordering $v_1, v_2, \ldots, v_n$ (with directed or undirected edges, with multiple edges and loops allowed). The number of different paths of length r from v_i to v_j, where r is a positive integer, equals the (i, j)th entry of $\mathbf{A}^r$.

EXAMPLE 14 How many paths of length four are there from a to d in the simple graph G in Figure 8?

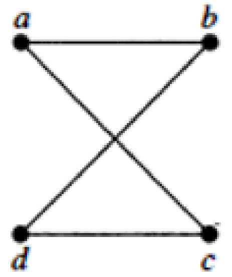


FIGURE 8 The Graph *G*.

Solution: The adjacency matrix of G (ordering the vertices as a, b, c, d) is

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Hence, the number of paths of length four from a to d is the $(1, 4)$th entry of $\mathbf{A}^4$. Because

$$\mathbf{A}^4 = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix},$$

Extra Examples

there are exactly eight paths of length four from a to d. By inspection of the graph, we see that a, b, a, b, d; a, b, a, c, d; a, b, d, b, d; a, b, d, c, d; a, c, a, b, d; a, c, a, c, d; a, c, d, b, d; and a, c, d, c, d are the eight paths from a to d. ◀

Theorem 2 can be used to find the length of the shortest path between two vertices of a graph (see Exercise 46), and it can also be used to determine whether a graph is connected (see Exercises 51 and 52).

9.5
Euler dan Hamilton Paths

Istilah

Vertex : Titik simpul dari suatu graf

Edge (Sisi) : Jalur yang saling menghubungkan 2 vertex

Sirkuit Euler (Circuit) : Sirkuit yang menggunakan setiap edge graf tepat satu kali. Sirkuit Euler berawal dan berakhir pada simpul yang sama.

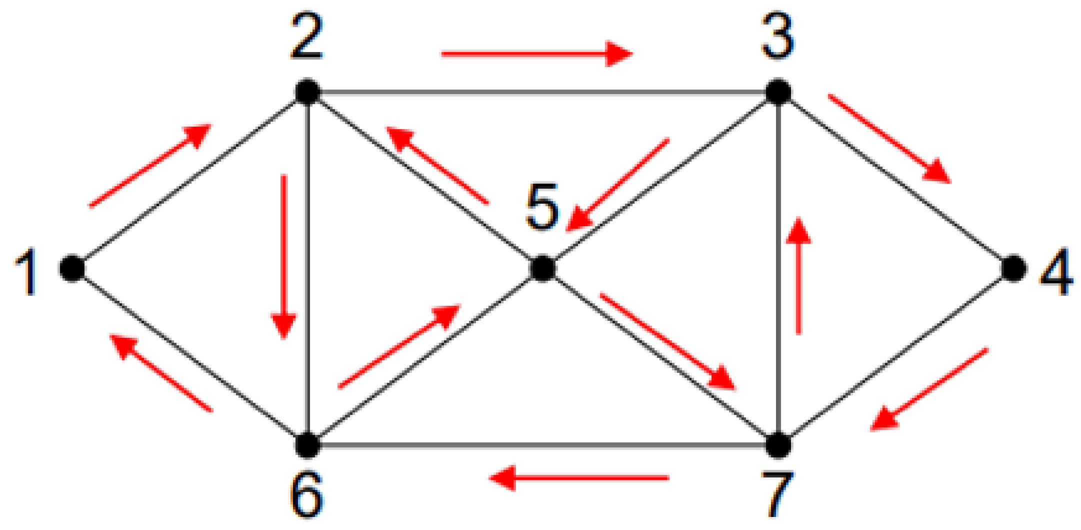
Lintasan Euler (path) : Lintasan yang menggunakan setiap edge graf tepat satu kali. Berawal dan berakhir pada simpul yang berbeda.

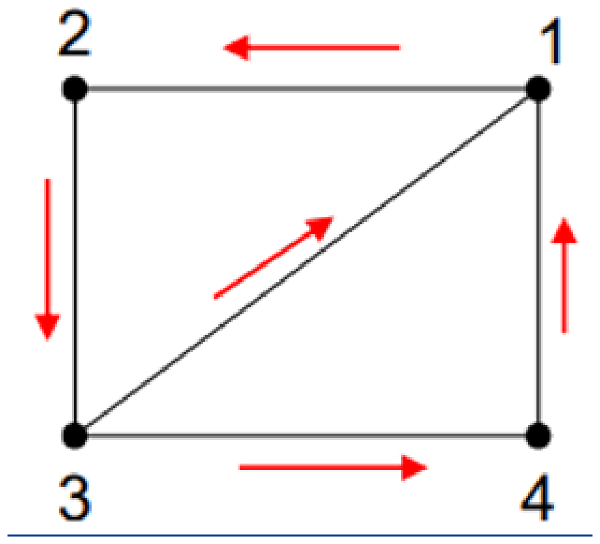
Derajat vertex : Jumlah sisi yang terhubung dengan vertex tersebut

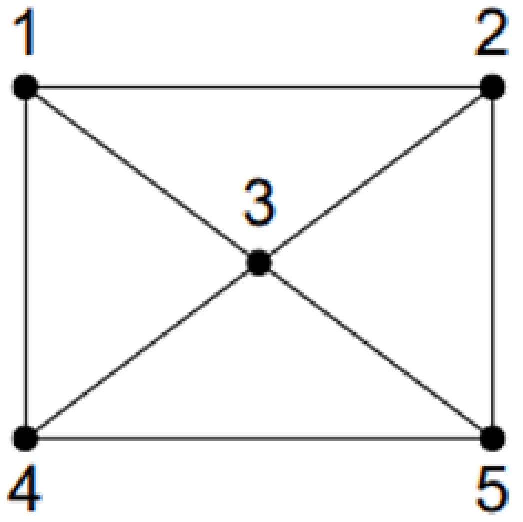
Undirected Graf

Istilah graf euler dapat dispesifikasikan menjadi 3 jenis, yaitu :

1. Eulerian graph : Graf yang memiliki sirkuit euler ⇒ G1
2. Graf semi euler : Graf yang hanya memiliki lintasan euler ⇒ G2
3. Non-euler graf : Graf yang tidak ditemukan lintasan maupun sirkuit euler ⇒ G3







Undirected Graf

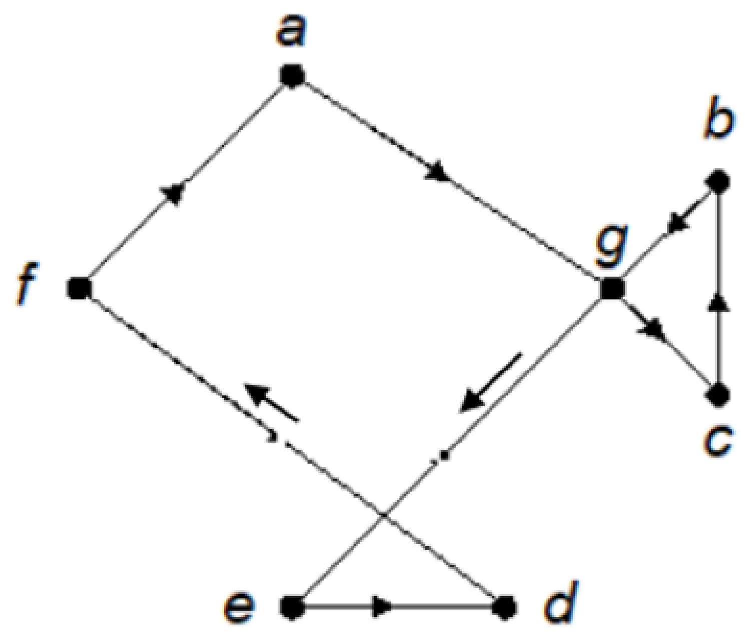
Dengan cara lain, ketiga jenis tersebut bisa diklasifikasikan berdasarkan derajat ganjilnya :

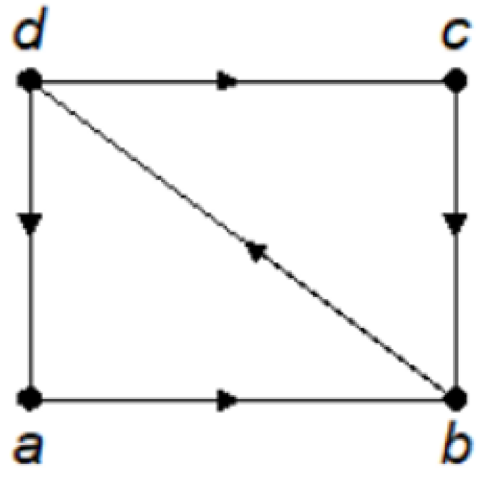
1. Eulerian graph : Graf yang memiliki 0 derajat ganjil
2. Graf semi euler : Graf yang memiliki 2 derajat ganjil
3. Non-euler graf : Graf yang memiliki 1 atau lebih dari 2 derajat ganjil

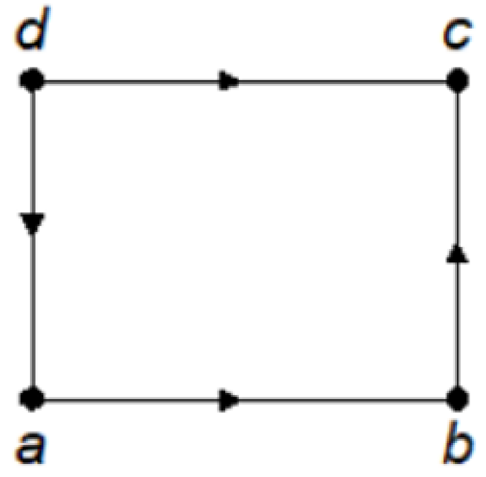
Directed Graf

Graf berarah G memiliki sirkuit Euler jika dan hanya jika G terhubung dan setiap simpul memiliki derajat-masuk dan derajat-keluar sama.

G memiliki lintasan Euler jika dan hanya jika G terhubung dan setiap simpul memiliki derajat- masuk dan derajat-keluar sama kecuali dua simpul, yang pertama memiliki derajat-keluar satu lebih besar derajat-masuk, dan yang kedua memiliki derajat-masuk lebih besar 1 dari derajat- keluar.





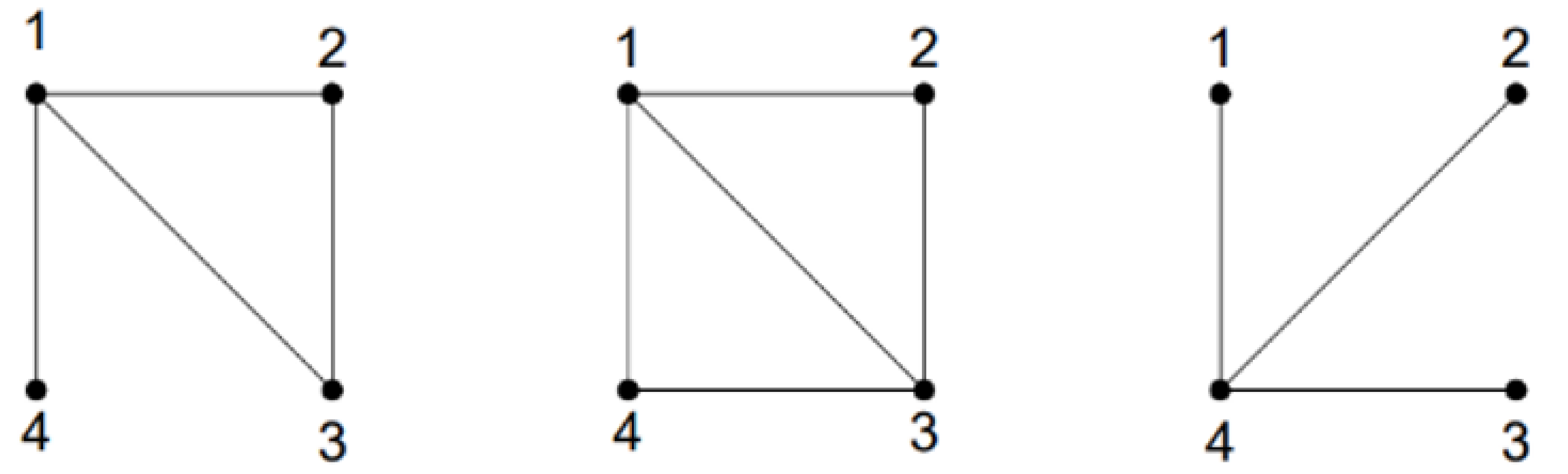


Lintasan dan Sirkuit Hamilton

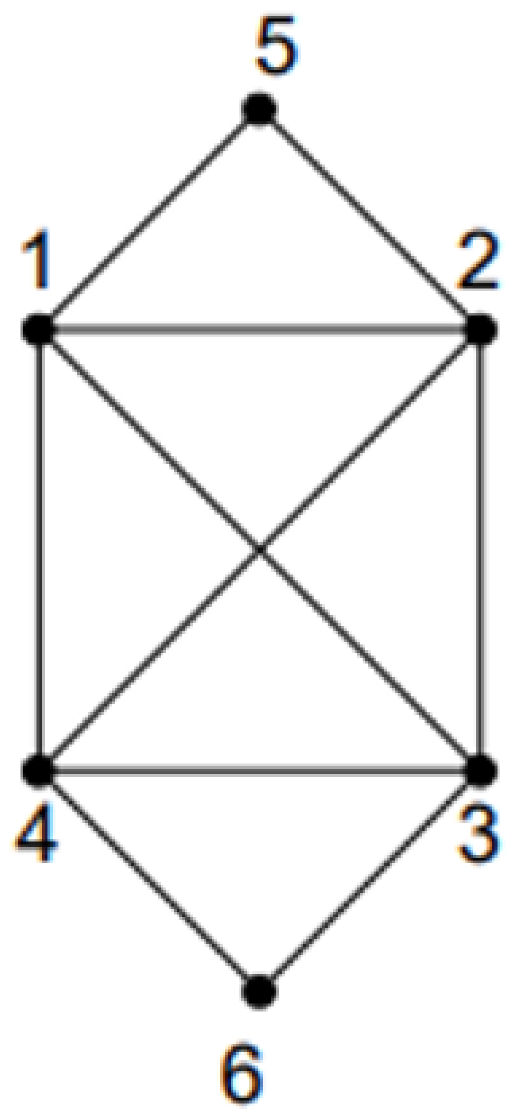
ISTILAH

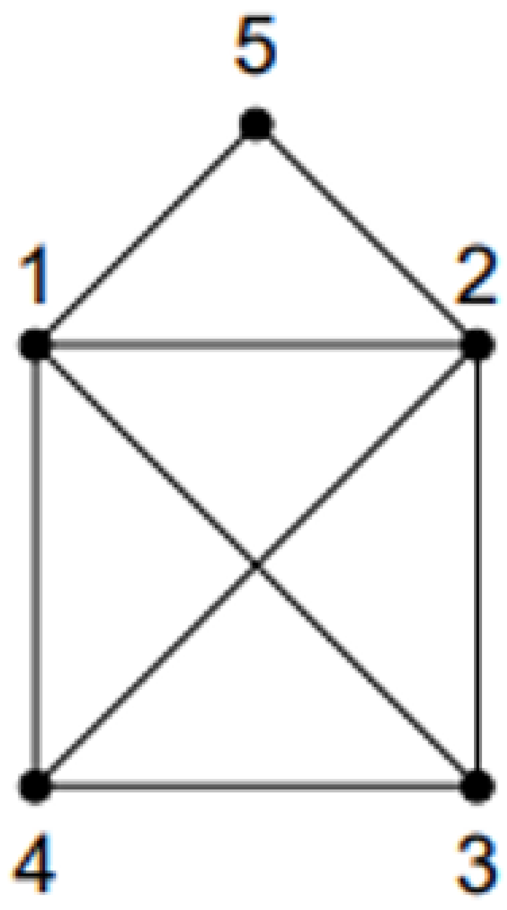
Lintasan Hamilton : Lintasan yang melalui tiap vertex di dalam graf tepat satu kali. Berawal dan berakhir pada simpul yang berbeda

Sirkuit Hamilton : Sirkuit yang melalui tiap vertex di dalam graf tepat satu kali. Berawal dan berakhir pada simpul yang sama



Beberapa graf dapat mengandung sirkuit Euler dan sirkuit Hamilton sekaligus, mengandung sirkuit Euler tetapi tidak mengandung sirkuit Hamilton, dan kombinasi lainnya.





9.6
Shortest-Path Problems

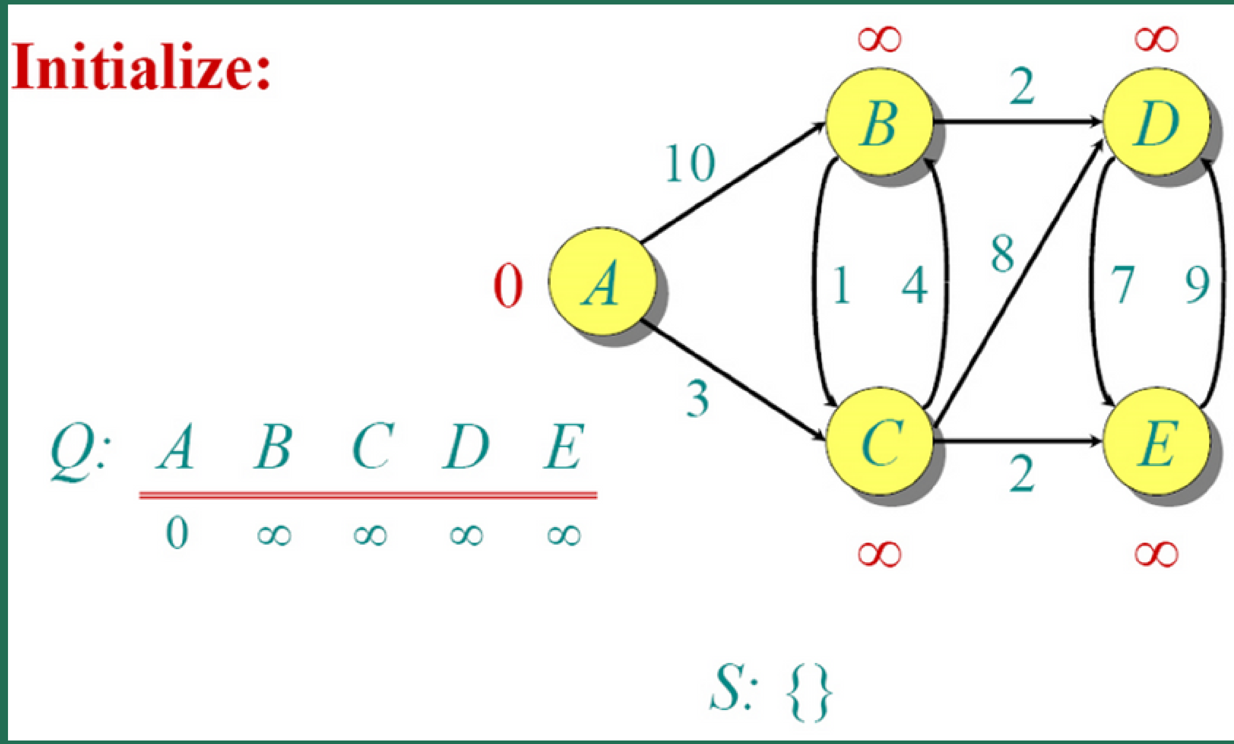
Shortest-Path Problems

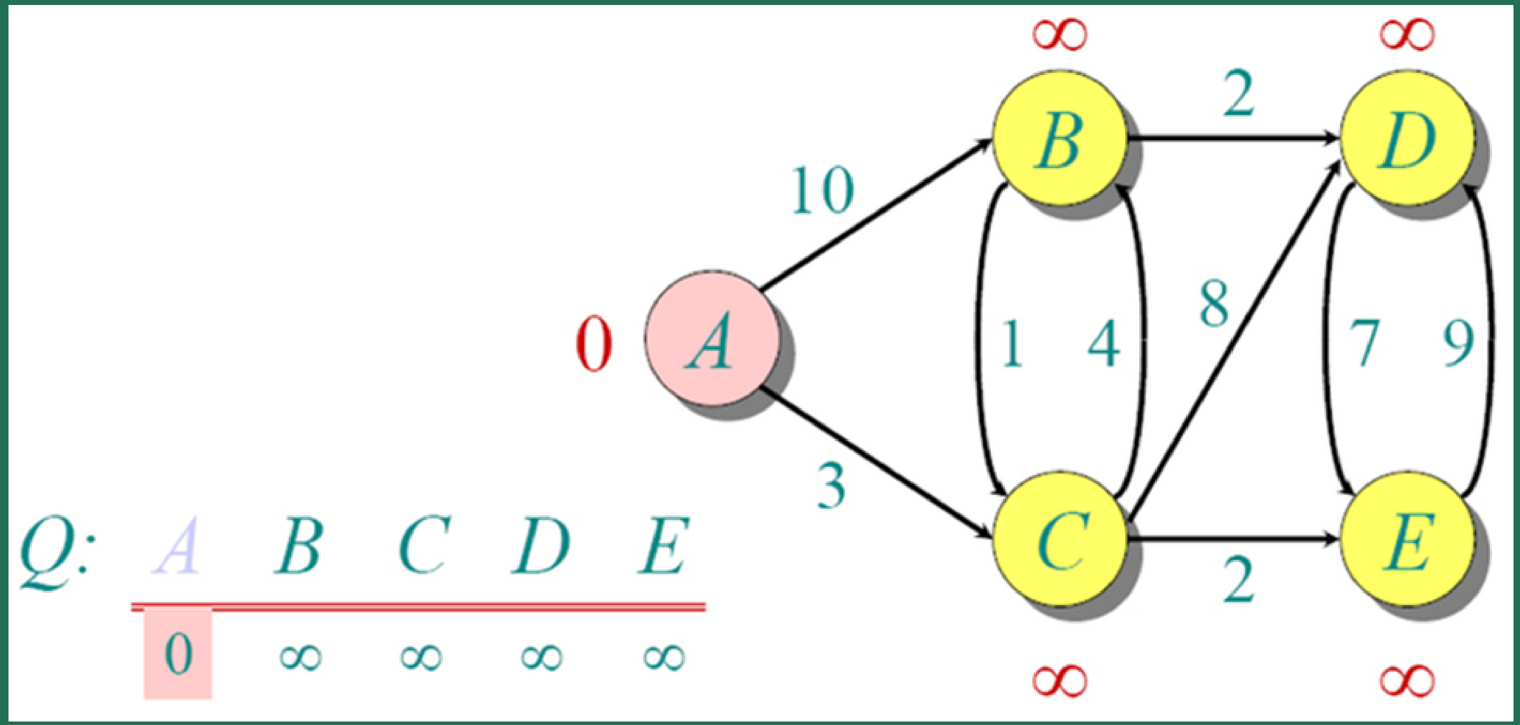
Shortest Path Problem adalah sebuah permasalahan untuk menemukan sebuah jalan antara 2 vertex, dimana weight dari unsur pokok diminimalisasi. Salah satu contoh dari shortest path problem yang paling sering dibahas adalah Travelling Salesman Problem, dimana permasalahan tersebut adalah permasalahan untuk menemukan jarak terpendek untuk memutari semua vertex yang ada dan kemudian kembali pada titik awal pencarian rute

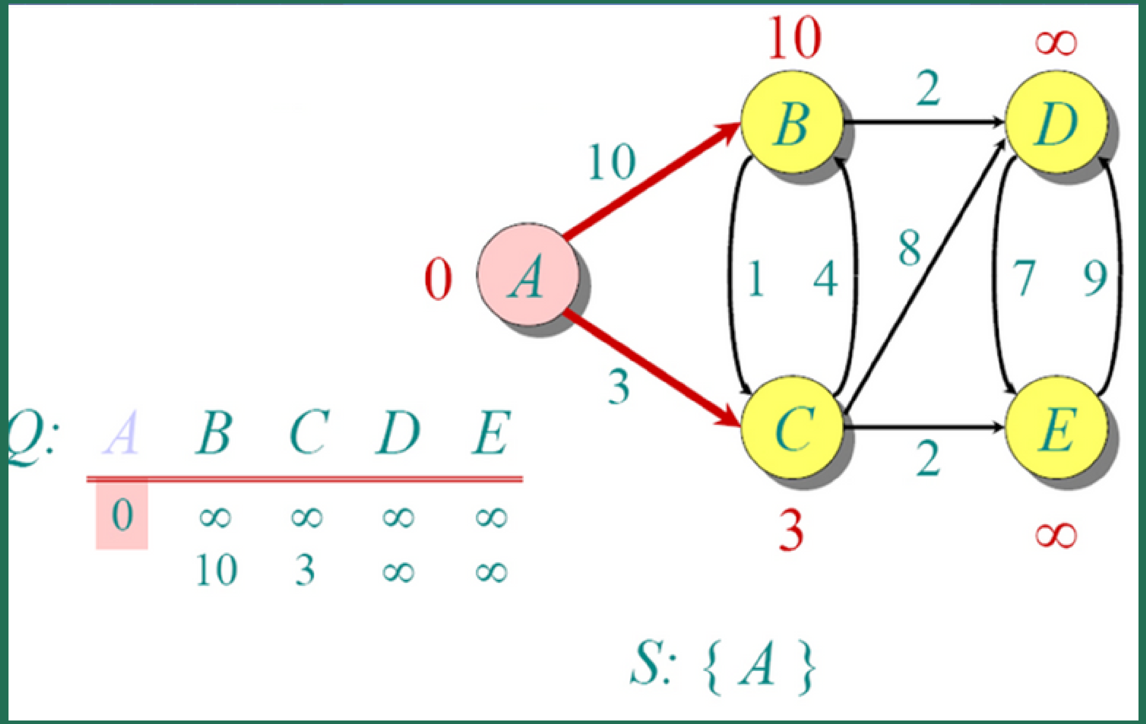
Shortest Path Algorithm

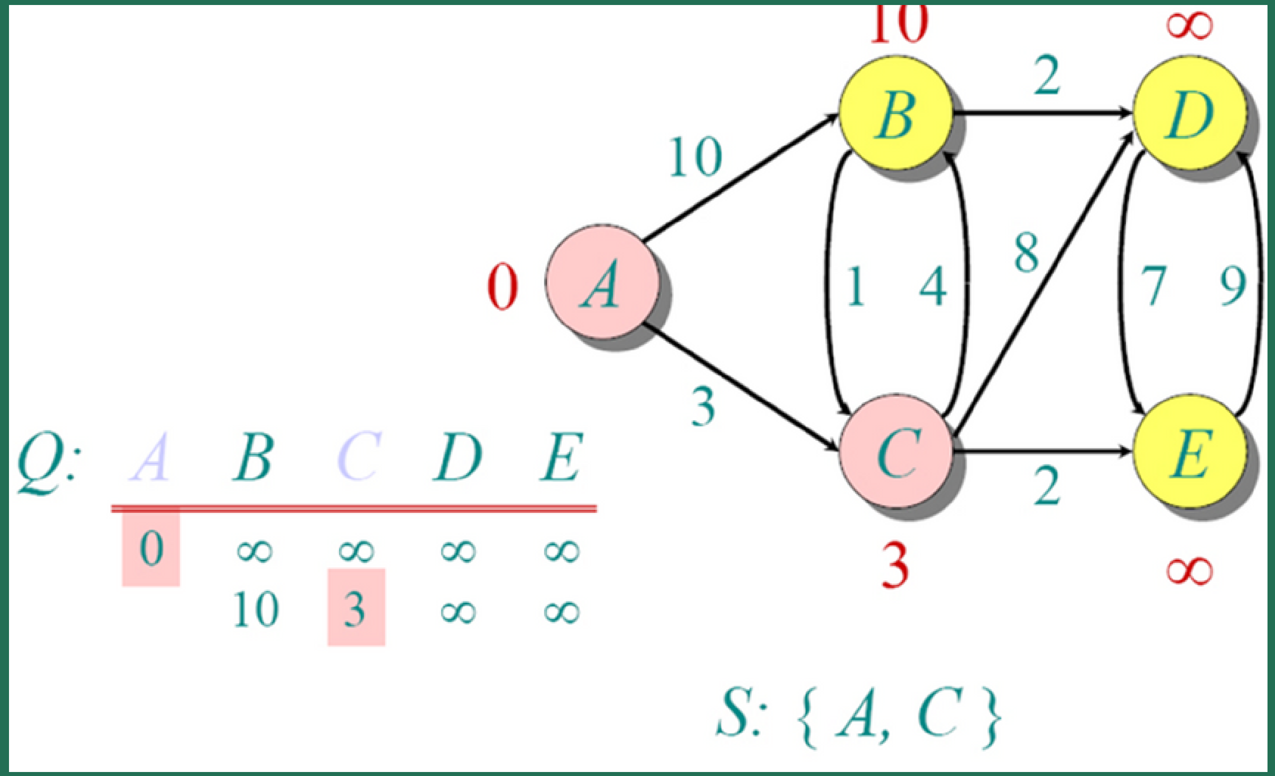
Algoritma Dijkstra : suatu algoritma untuk menemukan jalur terpendek antara dua simpul mana pun dari suatu graf.

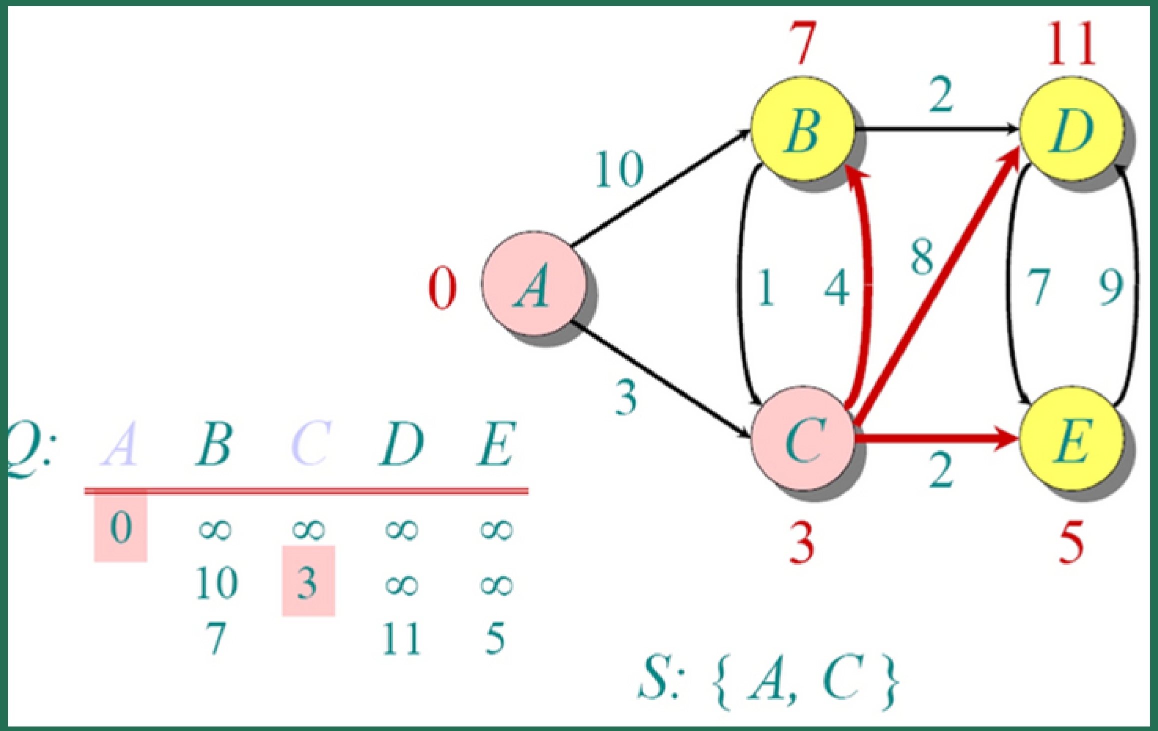
```
dist[s] ←o                                (distance to source vertex is zero)
for  all v ∈ V–{s}
        do  dist[v] ←∞                    (set all other distances to infinity)
S←Ø                                       (S, the set of visited vertices is initially empty)
Q←V                                       (Q, the queue initially contains all vertices)
while Q ≠Ø                                (while the queue is not empty)
do   u ← mindistance(Q,dist)              (select the element of Q with the min. distance)
      S←S∪{u}                             (add u to list of visited vertices)
       for all v ∈ neighbors[u]
              do  if   dist[v] > dist[u] + w(u, v)          (if new shortest path found)
                         then      d[v] ←d[u] + w(u, v)     (set new value of shortest path)
                            (if desired, add traceback code)
return dist
```

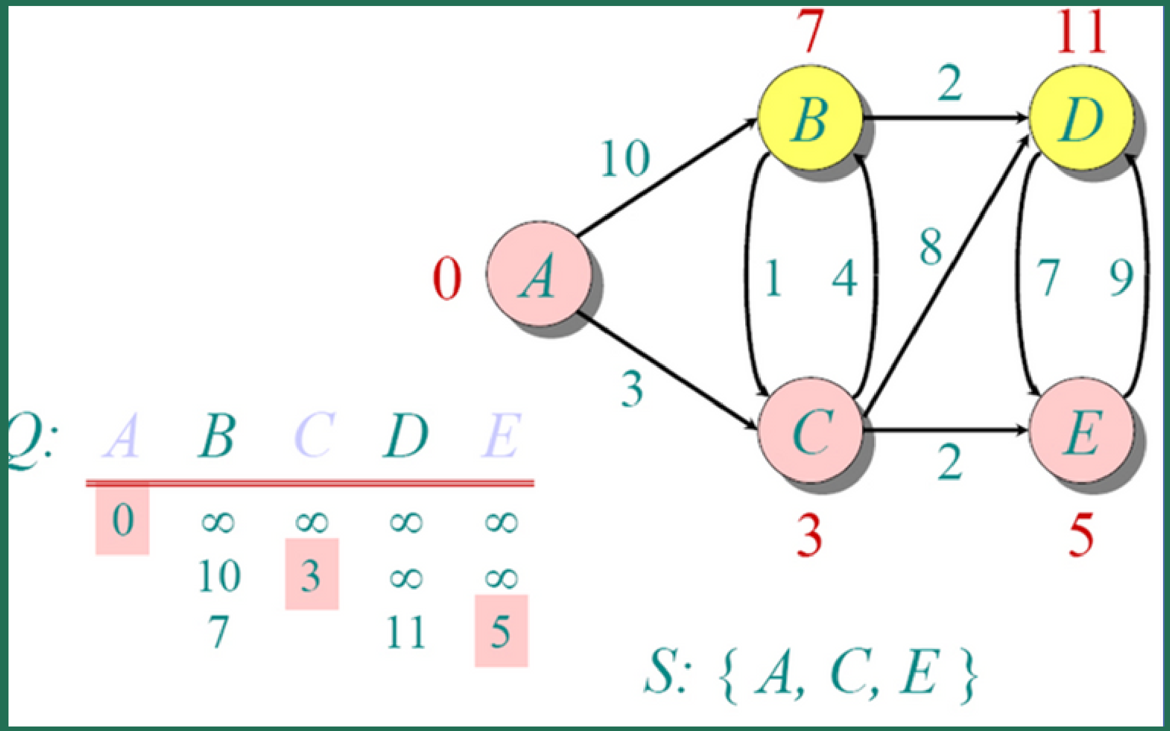

Initialize:
Q: A B C D E
0 ∞ ∞ ∞ ∞
S: {}

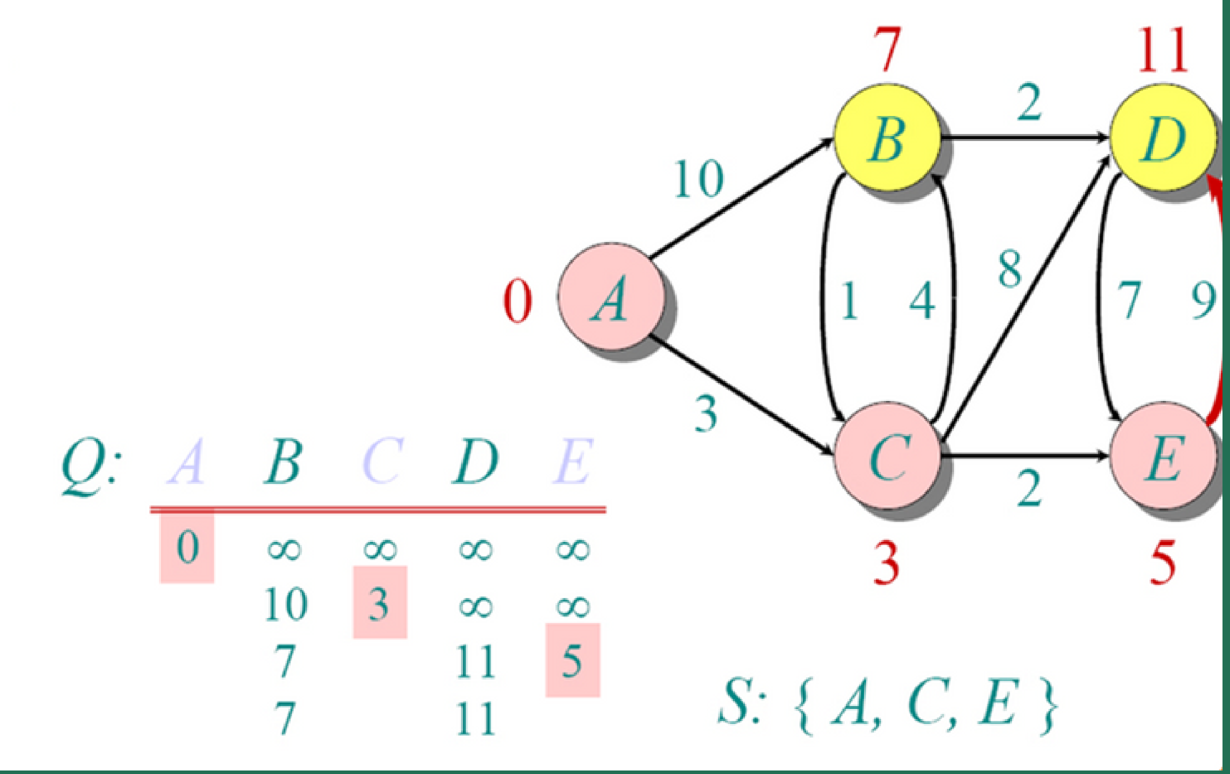

Q: A B C D E
0 ∞ ∞ ∞ ∞

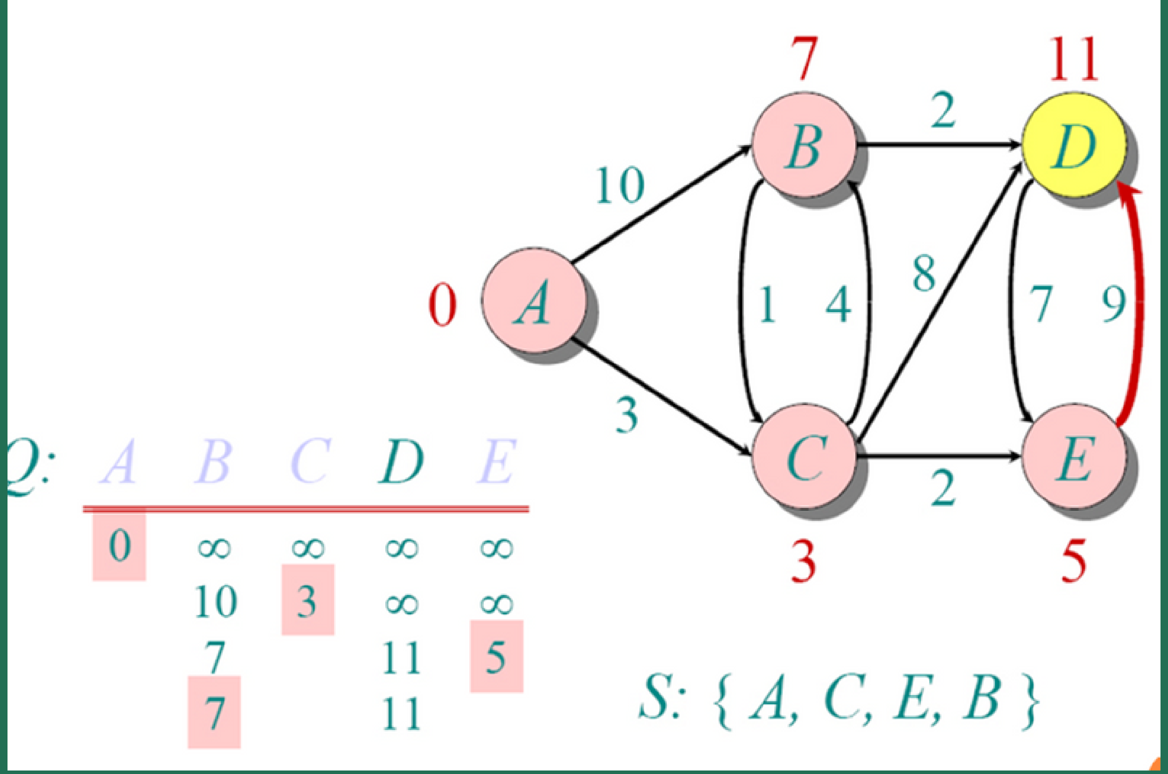

Q: A B C D E
0 ∞ ∞ ∞ ∞
10 3 ∞ ∞
S: { A }

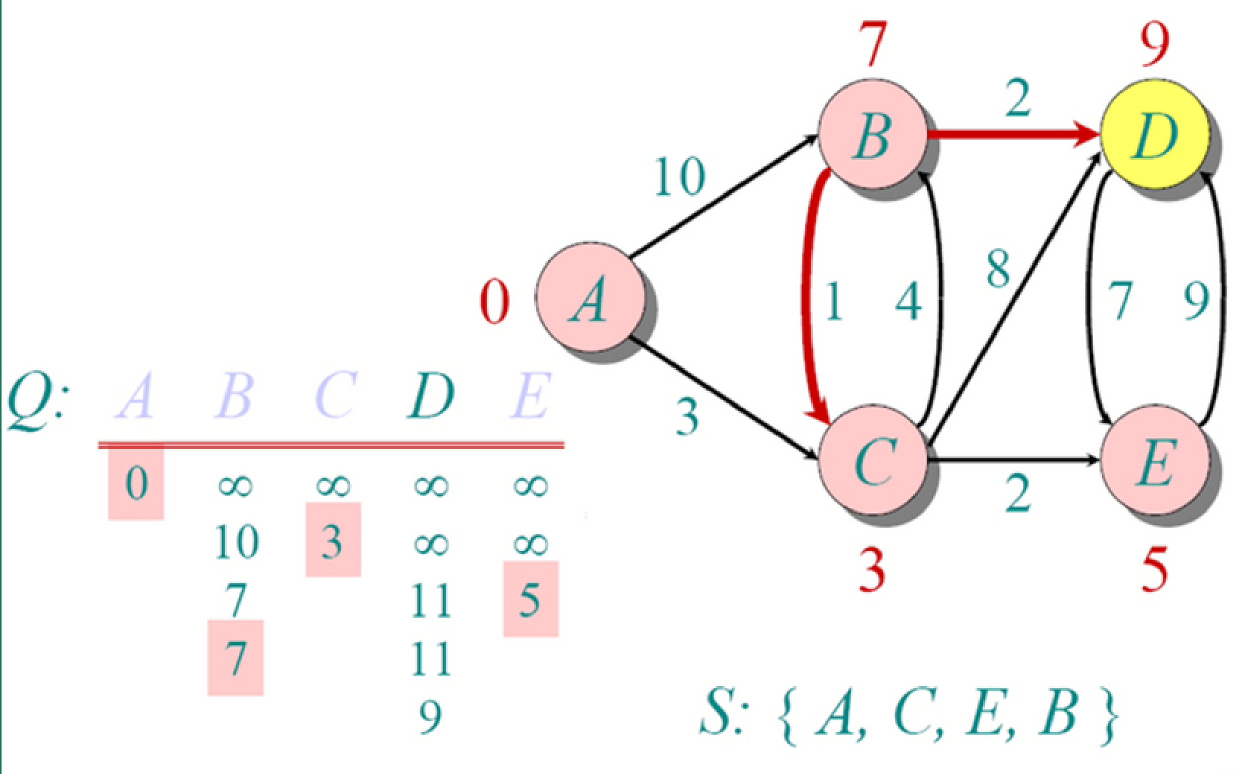

Q: A B C D E
0 ∞ ∞ ∞ ∞
10 3 ∞ ∞
S: { A, C }

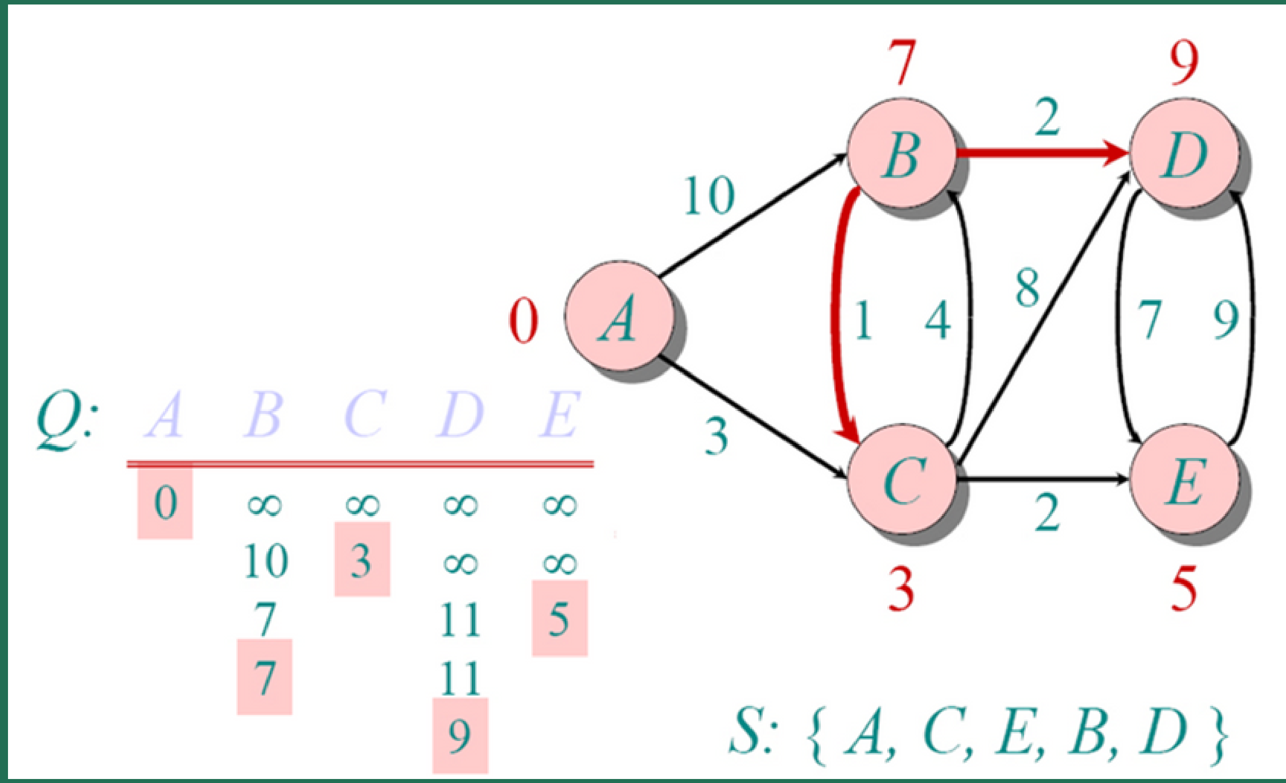

Q: A B C D E
0 ∞ ∞ ∞ ∞
10 3 ∞ ∞
7 11 5
S: { A, C }


Q: A B C D E
0 ∞ ∞ ∞ ∞
10 3 ∞ ∞
7 11 5
S: { A, C, E }


Q: A B C D E
0 ∞ ∞ ∞ ∞
10 3 ∞ ∞
7 11 5
7 11
S: { A, C, E }


Q: A B C D E
0 ∞ ∞ ∞ ∞
10 3 ∞ ∞
7 11 5
7 11
S: { A, C, E, B }


Q: A B C D E
0 ∞ ∞ ∞ ∞
10 3 ∞ ∞
7 11 5
7 11
9
S: { A, C, E, B }


Q: A B C D E
0 ∞ ∞ ∞ ∞
10 3 ∞ ∞
7 11 5
7 11
9
S: { A, C, E, B, D }

9.7 PLANAR GRAPHS

Definisi Planar Graph

Grafik disebut planar jika dapat digambar di pesawat tanpa tepi yang bersilangan (di mana persilangan tepi adalah persimpangan garis atau busur yang mewakilinya pada titik lain daripada titik akhir umum mereka). Gambar seperti itu disebut representasi planar dari grafik.

Contoh Planar Graph

CONTOH 1

Apakah K4 (ditunjukkan pada Gambar 2 dengan persilangan dua sisi) planar?
Solusi: K4 berbentuk planar karena dapat digambar tanpa persilangan, seperti ditunjukkan pada Gambar 3.

CONTOH 2

Apakah Q3, ditunjukkan pada Gambar 4, planar?
Solusi: Q3 adalah planar, karena dapat ditarik tanpa persilangan tepi, seperti yang ditunjukkan pada Gambar 5.

Kita dapat menunjukkan bahwa suatu graf adalah planar dengan menampilkan representasi planar. Lebih sulit untuk menunjukkan bahwa grafik nonplanar. Kami akan memberikan contoh untuk menunjukkan bagaimana hal ini dapat dilakukan secara ad hoc. Nanti kami akan mengembangkan beberapa hasil umum yang dapat digunakan untuk melakukan ini

Contoh Planar Graph

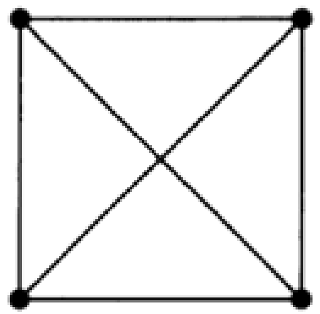


FIGURE 2 The Graph K_4.

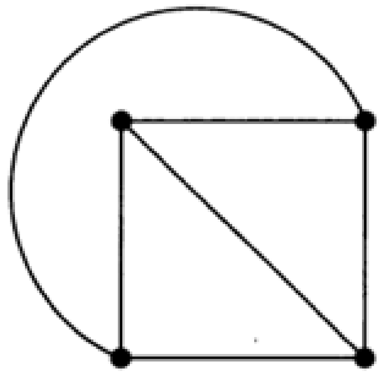


FIGURE 3 K_4 Drawn with No Crossings.

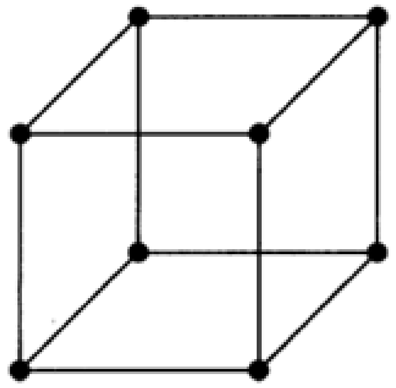


FIGURE 4 The Graph Q_3.

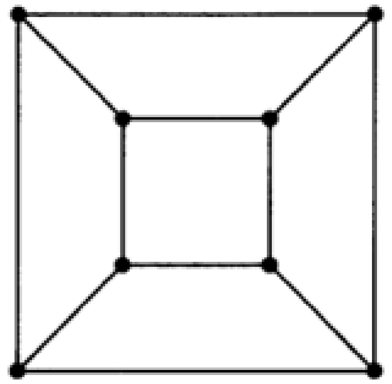


FIGURE 5 A Planar Representation of Q_3.

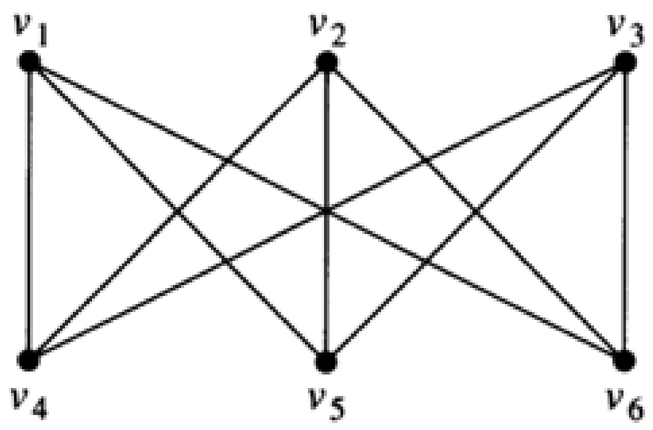


FIGURE 6 The Graph $K_{3,3}$.

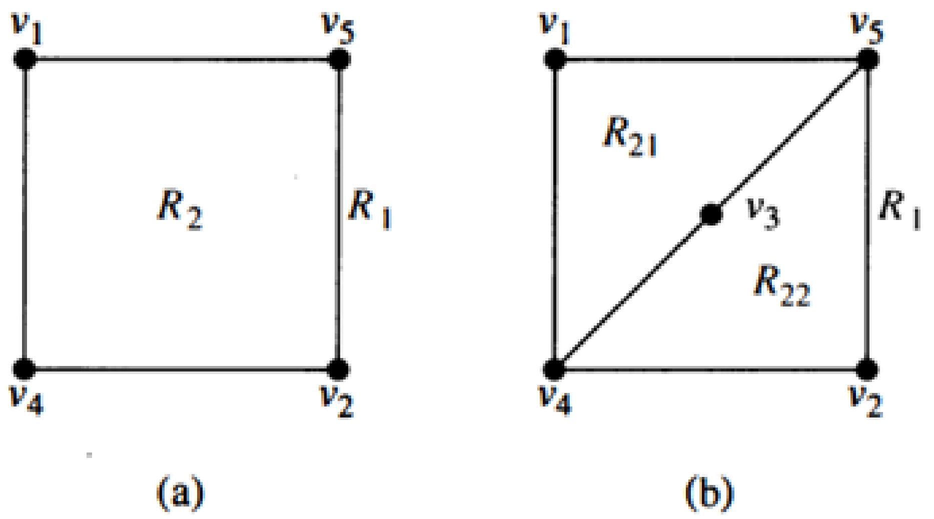


FIGURE 7 Showing that $K_{3,3}$ Is Nonplanar.

Formula Euler

Representasi planar dari grafik membagi bidang menjadi beberapa wilayah, termasuk wilayah tak terbatas. Misalnya, representasi planar dari grafik yang ditunjukkan pada Gambar 8 membagi bidang menjadi enam wilayah. Ini diberi label pada gambar. Euler menunjukkan bahwa semua representasi planar dari grafik membagi bidang menjadi jumlah daerah yang sama. Dia menyelesaikannya dengan menemukan hubungan antara jumlah daerah, jumlah simpul, dan jumlah tepi grafik planar.

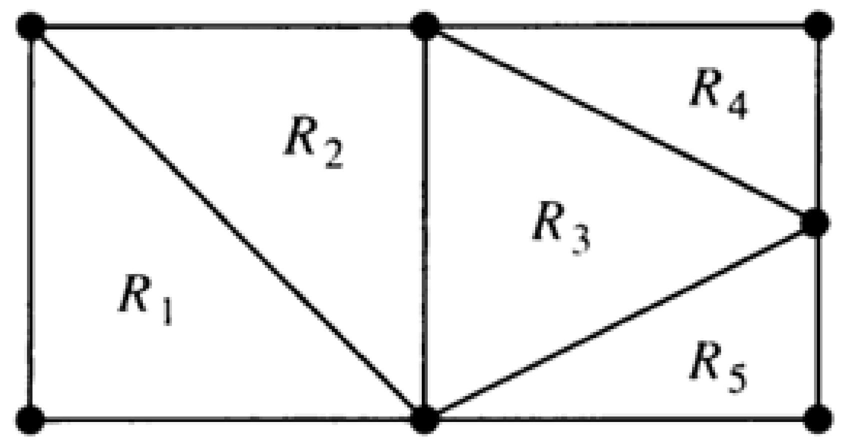


FIGURE 8 The Regions of the Planar Representation of a Graph.

Formula Euler

TEOREMA 1

Misalkan G adalah graf sederhana planar terhubung dengan e sisi dan v simpul. Biarkan r menjadi jumlah daerah dalam representasi planar dari G. Maka r = e - v + 2.

Bukti: Pertama, kita tentukan representasi planar dari G. Kita akan membuktikan teorema tersebut dengan menyusun barisan subgraf G1, G2, ••• , Ge = G, secara berturut-turut menjumlahkan sisi pada setiap tahap. Ini dilakukan dengan menggunakan definisi induktif berikut. Pilih sembarang sisi dari G untuk mendapatkan Gn-1. Dapatkan Gn dari Gn-1 dengan menambahkan sembarang sisi yang bersisian dengan sebuah simpul yang sudah ada di Gn-1, tambahkan simpul lain yang bersisian dengan sisi ini jika belum ada di Gn-1.

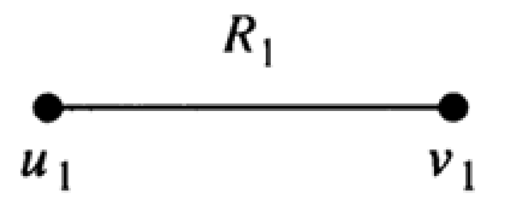


FIGURE 9 The Basis Case of the Proof of Euler's Formula.

Contoh Formula Euler

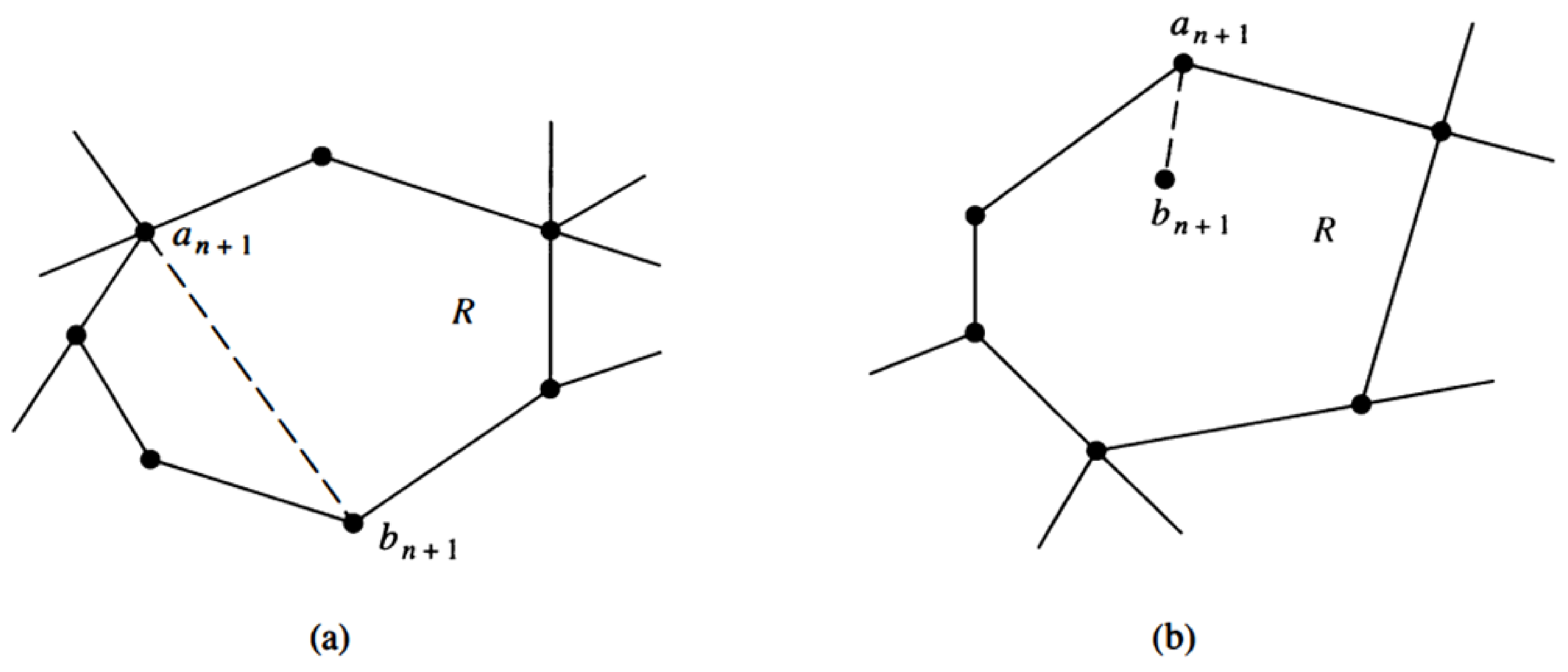


FIGURE 10 **Adding an Edge to G_n to Produce G_{n+1}.**

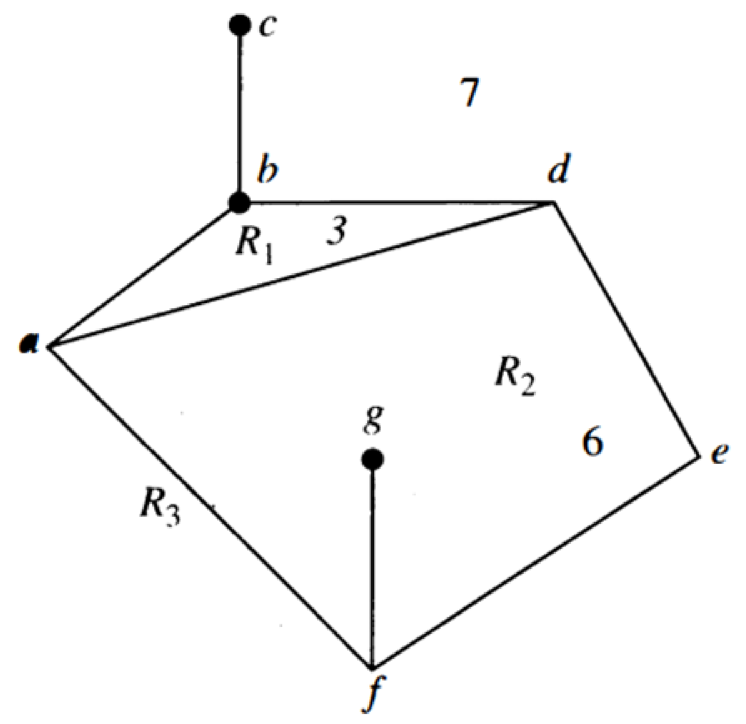


FIGURE 11 **The Degrees of Regions.**

Teorema Kuratowski

Kita telah melihat bahwa K3,3 dan K5 tidak planar. Jelas, suatu graf tidak planar jika memuat salah satu dari kedua graf ini sebagai subgraf. Anehnya, semua grafik nonplanar harus mengandung subgraf yang dapat diperoleh dari K3,3 atau K5 menggunakan operasi tertentu yang diizinkan.

Jika suatu graf adalah planar, maka graf apa pun yang diperoleh dengan menghilangkan sisi {u, v} dan menambahkan simpul baru w bersama dengan sisi {u, w} dan {w, v}. Operasi semacam itu disebut subdivisi dasar. Grafik G1 = (V1, E1) dan G2 = (V2, E2) disebut homeomorfik jika dapat diperoleh dari grafik yang sama dengan urutan subdivisi elementer.

Contoh Teorema Kuratowski

Tunjukkan bahwa grafik G1, G2, dan G3 yang ditampilkan pada Gambar 12 semuanya homeomorfik.

Solusi: Ketiga graf ini homeomorfik karena ketiganya dapat diperoleh dari G1 dengan subdivisi elementer. G1 dapat diperoleh dari dirinya sendiri dengan urutan kosong dari subdivisi elementer. Untuk memperoleh G2 dari G1 kita dapat menggunakan barisan subdivisi elementer berikut ini: (i) hilangkan sisi {a,c}, tambahkan simpul f, dan tambahkan sisi {a,f} dan {f,c}; (ii) hilangkan sisi {b, c}, tambahkan sisi g, dan tambahkan sisi {b, g} dan {g, c}; dan (iii) hilangkan sisi {b, g}, tambahkan sisi h, dan tambahkan sisi {g, h} dan {b, h }. Kami menyerahkan kepada pembaca untuk menentukan urutan subdivisi dasar yang diperlukan untuk mendapatkan G3 dari G1.

Contoh Teorema Kuratowski

Matematikawan Polandia Kazimierz Kuratowski mendirikan Teorema 2 pada tahun 1930, yang mencirikan graf planar menggunakan konsep homeomorfisme graf.

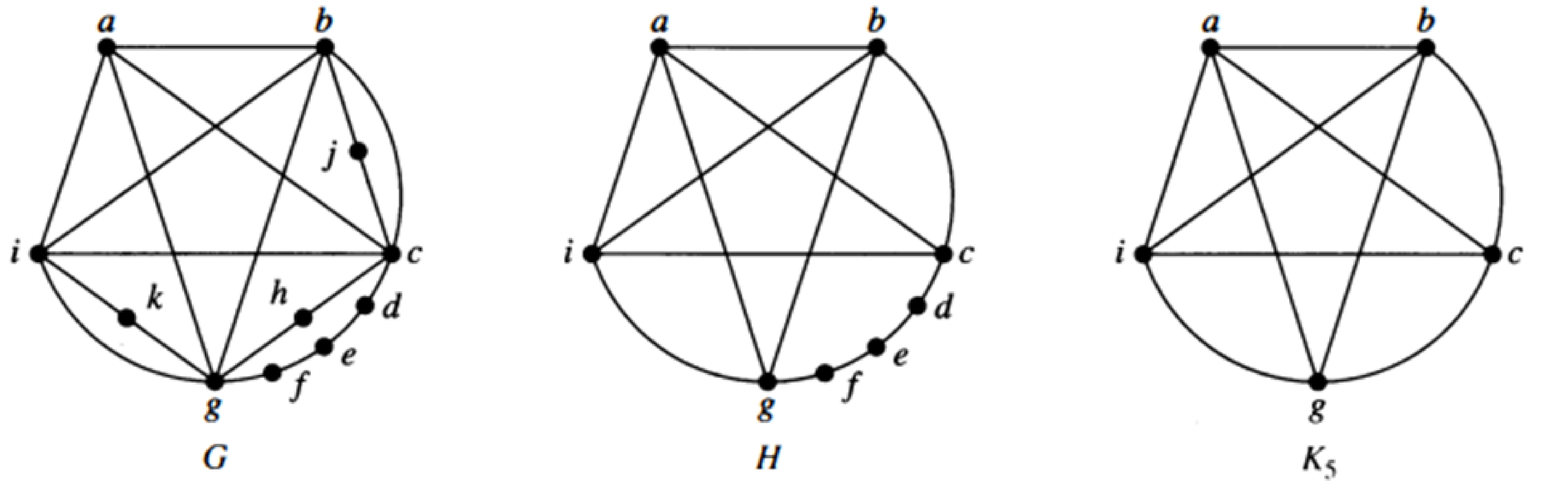


FIGURE 13 **The Undirected Graph G, a Subgraph H Homeomorphic to K_5, and K_5.**

Contoh Teorema Kuratowski

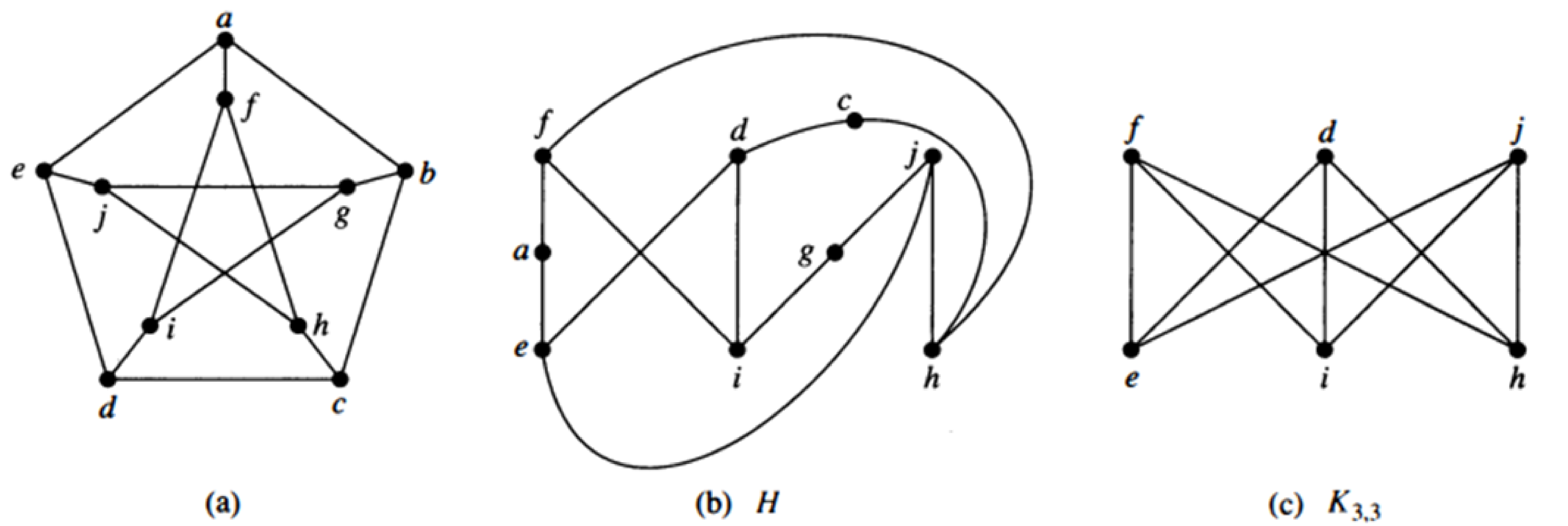


FIGURE 14 (a) The Petersen Graph, (b) a Subgraph H Homeomorphic to $K_{3,3}$, and (c) $K_{3,3}$.

9.8 Graph Coloring

Ada masalah yang berkaitan dengan pewarnaan peta wilayah, seperti peta belahan dunia menghasilkan banyak hasil dalam teori graf. Saat peta* diwarnai, dua wilayah dengan kesamaanperbatasan biasanya diberikan warna yang berbeda.

Salah satu cara untuk memastikan bahwa dua daerah yang berdekatan tidak pernah memiliki warna yang sama adalah menggunakan warna yang berbeda untuk setiap daerah.

Masalah mewarnai wilayah peta setara dengan masalah mewarnai simpul dari grafik ganda sehingga tidak ada dua simpul yang berdekatan dalam grafik ini yang memiliki warna yang sama. Kami Sekarang tentukan pewarnaan grafik.

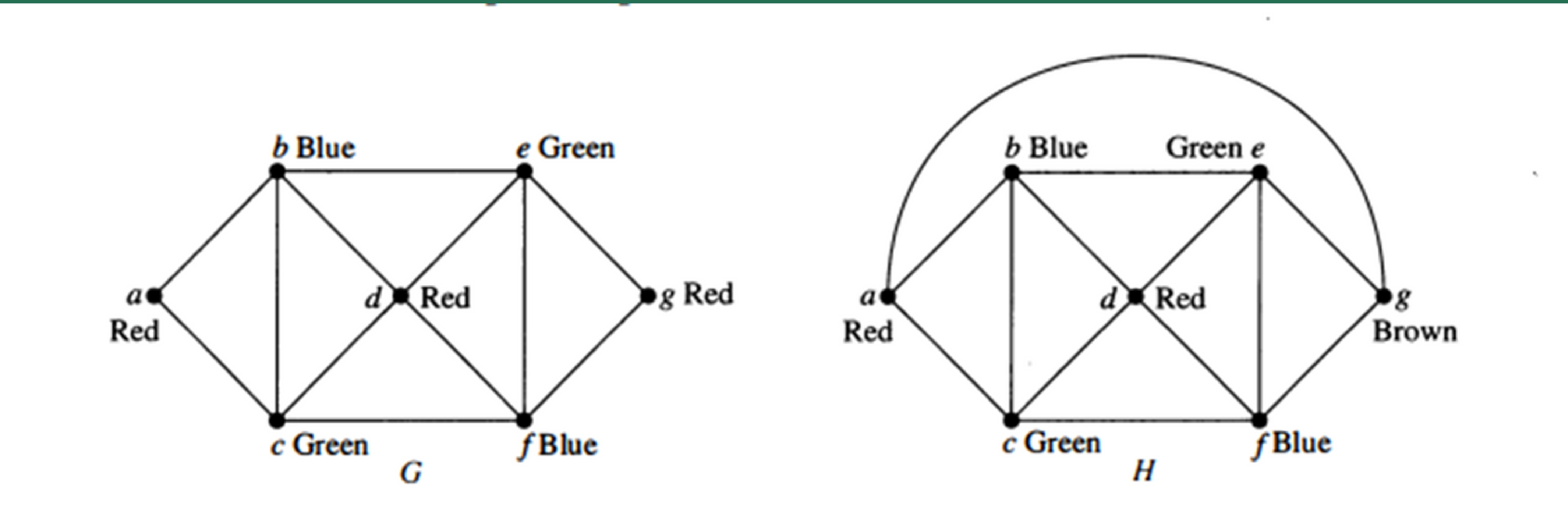
Definition 1

Pewarnaan grafik sederhana adalah penetapan warna ke setiap simpul grafik sehingga tidak ada dua simpul yang berdekatan yang diberi warna yang sama. Grafik dapat diwarnai dengan menetapkan warna yang berbeda untuk masing-masing simpulnya. Namun, untuk sebagian besar grafik, pewarnaan dapat ditemukan yang menggunakan lebih sedikit warna daripada jumlah simpul dalam grafik

Definition 2

Jumlah kromatik grafik adalah jumlah warna paling sedikit yang diperlukan untuk pewarnaan grafik ini. Bilangan kromatik grafik G dilambangkan dengan X (G). (Di sini X adalah huruf Yunani chi.)

THEOREM I



Teorema Empat Warna awalnya diajukan sebagai dugaan pada tahun 1850-an. Itu akhirnya dibuktikan oleh matematikawan Amerika Kenneth Appel dan Wolfgang Haken pada tahun 1976. Sebelum tahun 1976, banyak bukti yang salah diterbitkan, seringkali dengan kesalahan yang sulit ditemukan. Selain itu, banyak upaya-dilakukan untuk membangun contoh tandingan dengan menggambar peta yang membutuhkan lebih dari empat warna.

Contoh 1

Berapa angka kromatik dari grafik G dan H yang ditunjukkan pada Gambar 3?

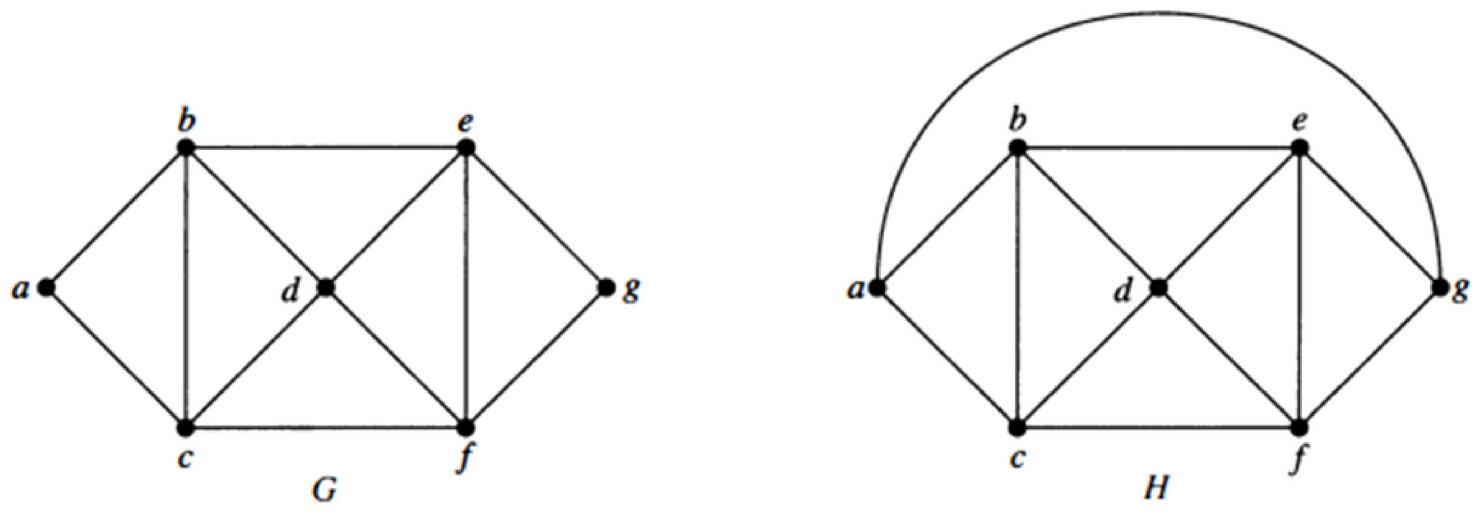


FIGURE 3 **The Simple Graphs *G* and *H*.**

Solusi: Jumlah kromatik G setidaknya tiga, karena simpul a, b, dan c harus diberi warna yang berbeda. Untuk melihat apakah G dapat diwarnai dengan tiga warna, tetapkan merah ke a, biru ke b, dan hijau ke c. Kemudian, d dapat (dan harus) berwarna merah karena berdekatan dengan b dan c. Selanjutnya, e dapat (dan harus) berwarna hijau karena hanya berdekatan dengan simpul berwarna merah dan biru, dan f dapat (dan harus) berwarna biru karena hanya berdekatan dengan simpul berwarna merah dan hijau. Akhirnya, g dapat (dan harus) berwarna merah karena hanya berdekatan dengan simpul