Mata Kuliah Metode Numerk

dosen: Ino Suryana, M.Kom

Kuliah 1:

-Aturan Kuliah

-Buku Referensi

-Definisi

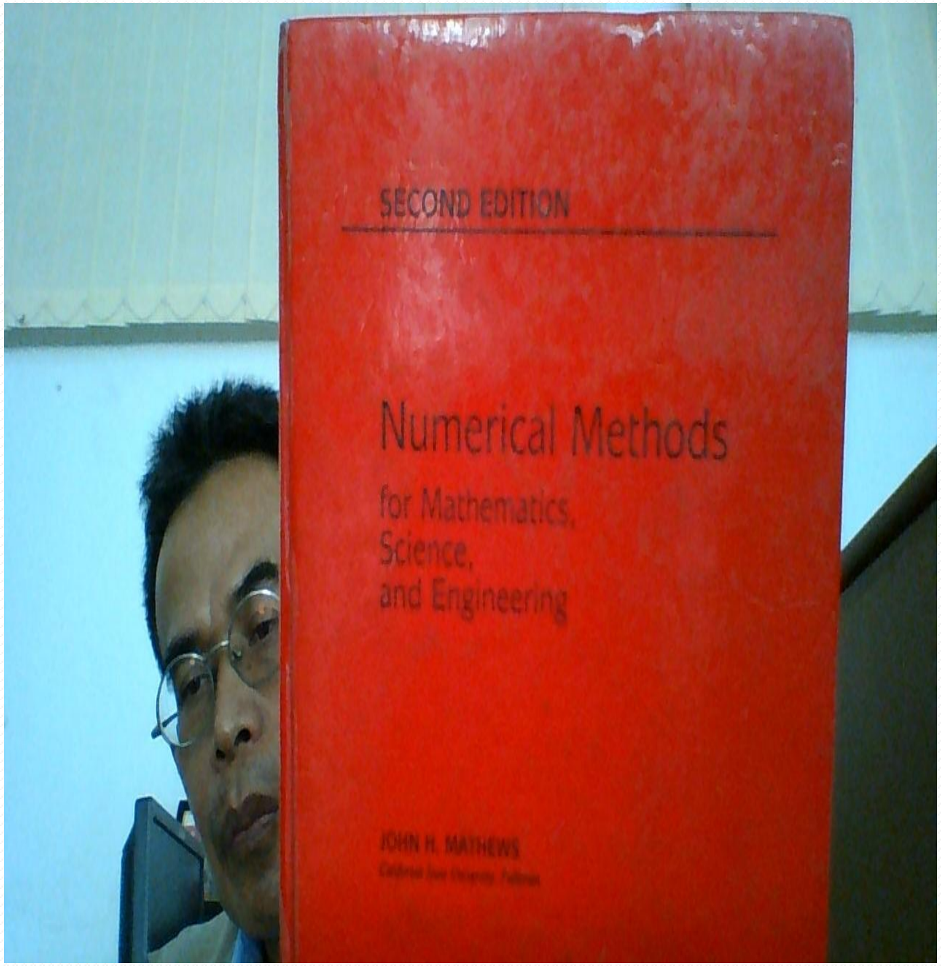
S-1 Teknik Informatika Unpad

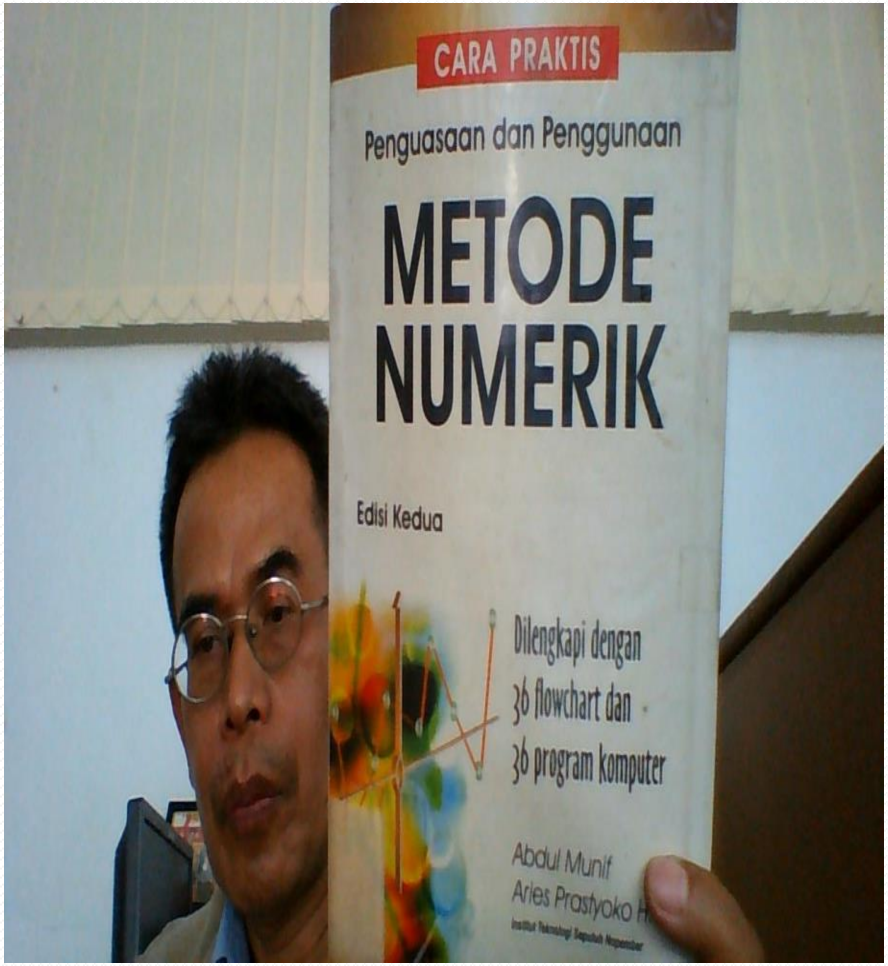
Aturan dalam Perkuliahan

- Kuliah >= 80% hadir. < 80%→UAS ndak bisa.
- TIDAK terlambat; boleh =< 15 menit.
- Tes : QUIZ 10%, Praktikum 20%, UTS 25%, UAS 25%
- Tugas 20%: perorangan (PR)

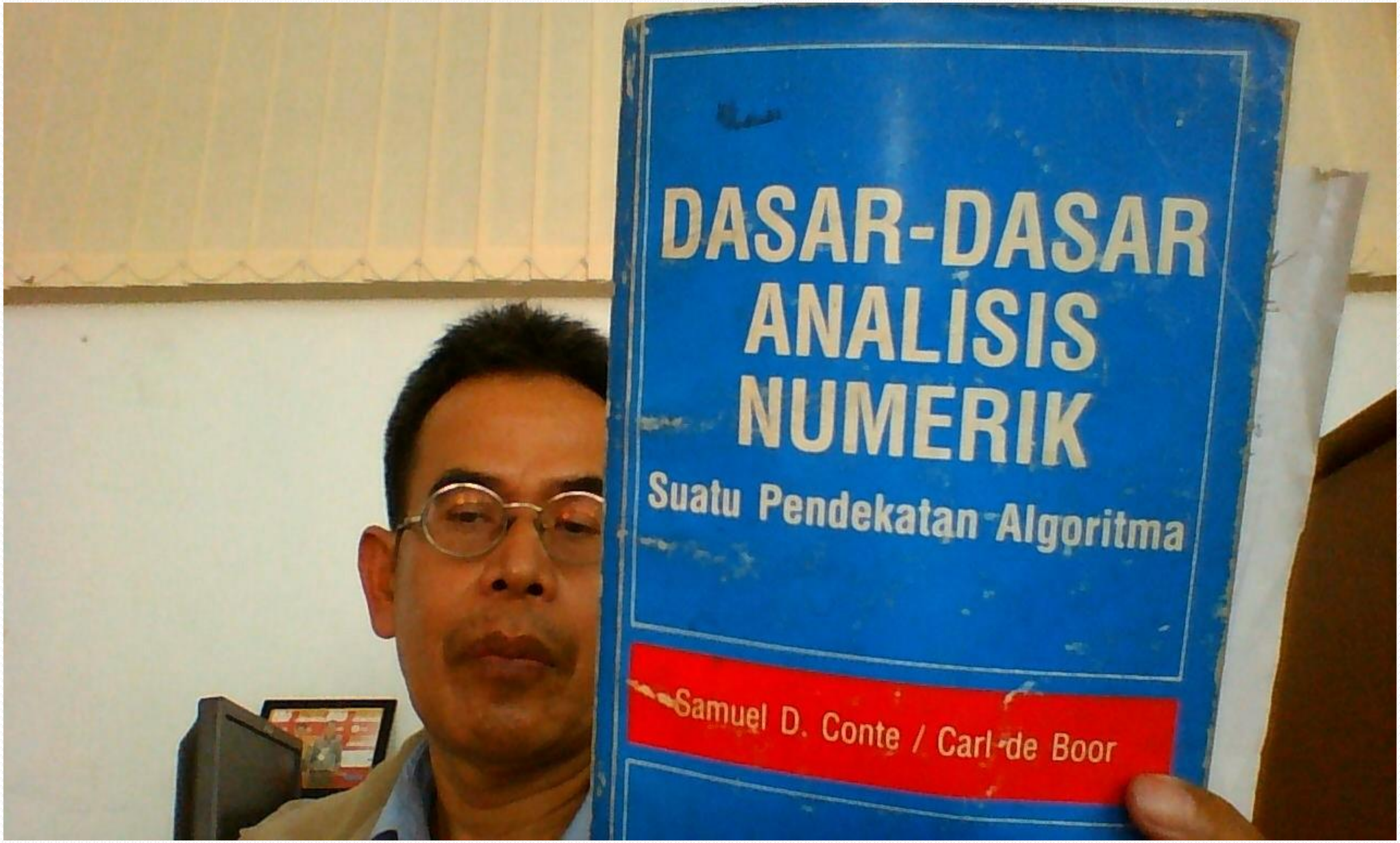
  Kelompok → presentasi (opsional)
- Nama mhs terdaftar dalam DHMD (Daftar Hadir Mahasiswa dan Dosen)
- Materi={ → Pustaka refer ke MATERI.}
- Pustaka : Modul Kuliah dan ***text book*** → ***next slide***.

Pustaka (#1/2)


SECOND EDITION
Numerical Methods
for Mathematics,
Science,
and Engineering
JOHN H. MATHEWS


CARA PRAKTIS
Penguasaan dan Penggunaan
METODE
NUMERIK
Edisi Kedua
Dilengkapi dengan
36 flowchart dan
36 program komputer
Abdul Munif
Aries Prastyoko H

Pustaka (#2/2)



dan Modul bahan Ajar

Definisi :

1. Metode Numerik adalah pengkajian tentang teori dasar perhitungan sehingga hasil perhitungannya memiliki kualitas yang baik.
2. Metode numerik adalah teknik dimana masalah matematika diformulasikan sedemikian rupa sehingga dapat diselesaikan oleh pengoperasian aritmatika.
3. Metode Numerik adalah metode yang digunakan untuk menyelesaikan masalah matematika secara numerik (angka) yaitu dengan cara diformulasikan sehingga dapat dibuat algoritmanya dan ditulis dalam bahasa pemrograman yang dapat dimengerti oleh komputer.

Bahasan MatKul Metoda Numerik

1. Konsep Dasar Metode Numerik
2. Perhitungan Galat
3. Penyelesaian Persamaan non-linear
4. Pencarian akar Real dari Polinom
5. Matriks dan sistem Persamaan Linear
6. Interpolasi dan Hampiran Polinom
7. Turunan Numerik
8. Integrasi Numerik
9. Solusi Persamaan Diferensial Biasa

Kuliah 1 Selesai
Trim's Banyak

2nd session:
Next week

Mata Kuliah
Metode Numerk
dosen: Drs. Ino Suryana, M.Kom

Penyelesaian Persamaan Tak Linear

(Metoda Tertutup)

S-1 Teknik Informatika Unpad

Bentuk fungsi tak (non)-linier

- Fungsi polinom: $P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \quad ; n \geq 2$
- Fungsi transenden: trigonometri, eksponensial, logaritma.
- Fungsi campuran: transenden dan polinom.

Contoh (bentuk persamaan):

1. $\cos x + 1 - x = 0$
2. $x^2 - e^x = 0$
3. $\cos x - \sin x - 2 = 0$
4. $x^2 + 1 - \ln x = 0$

PENYELESAIAN PERSAMAAN TAK LINEAR (BAB-3)

Ada dua macam metode pencarian akar : (yg dibahas)

1. Metode Tertutup, terdiri dari :
   a. Metode Bisection (bagi dua)-Manual, Prog (soal&metoda bisection)->output
   b. Metode Regula falsi (Posisi Palsu)
2. Metode terbuka, terdiri dari :
   a. Metode Newton-Raphson
   b. Metode Sekan

1. Metode Bisection (bagi dua) – dari Bolzano

- Secara umum, jika $f(x)$ bernilai real dan kontinu pada selang $[a, b]$ dengan $f(a).f(b) < 0$, maka ada peluang paling sedikit terdapat satu akar real pada interval tersebut. Ujung-ujung selang, yaitu a dan b disebut dengan tebakan awal
- Interval $[a, b]$ dibagi dua menjadi interval $[a, c]$ dan
- $[c, b]$ dengan

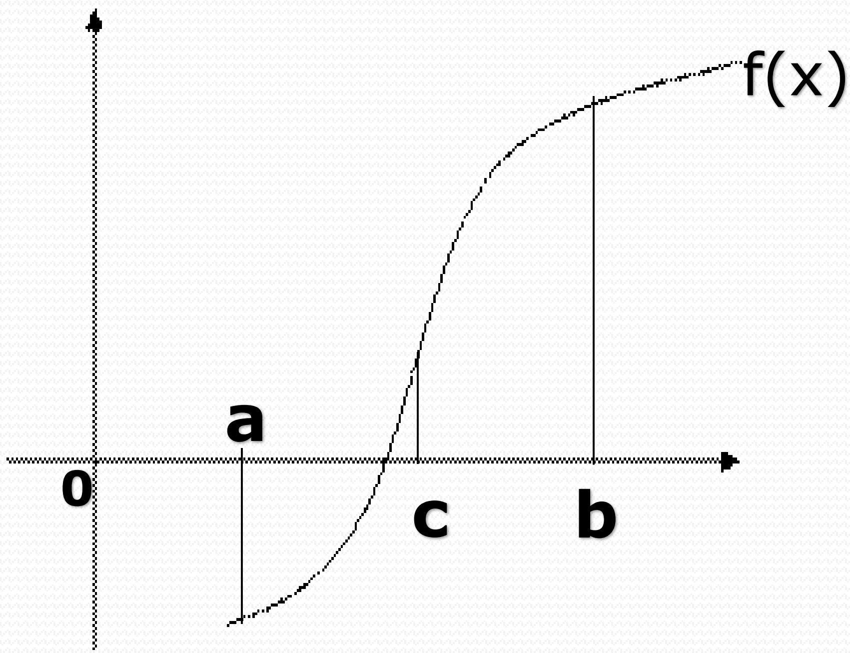
$$c = \frac{a+b}{2}$$

Pengujian selang :

- $f(a).f(c) > 0 \rightarrow$ akar berada pada $[c, b]$
- $f(a).f(c) = 0 \rightarrow$ akar $= c$
- $f(a).f(c) < 0 \rightarrow$ akar berada pada $[a, c]$

atau

- $f(c).f(b) > 0 \rightarrow$ akar berada pada $[a, c]$
- $f(c).f(b) = 0 \rightarrow$ akar $= c$
- $f(c).f(b) < 0 \rightarrow$ akar berada pada $[c, b]$



- Tebakan awal $x_1=a \rightarrow f(a)<0$, dan $x_2=b \rightarrow f(b)>0$.
- Pada daerah f(a) dan f(b) ada TITIK x* dimana $f(x^*)=0$.
- Pada daerah tersebut terdapat nilai jawab.
- $c=(a+b)/2 \rightarrow f(c)$ = hitung!
- f(c) untuk menentukan interval yang baru, … dst.

Contoh: Cari satu nilai x pada $f(x)=x^3 - 7x + 1$, sehingga $f(x)\simeq 0$

- Metoda Bisection (bagi dua): Cari nilai x1 dan x2 sehingga f(x1).f(x2)<0.
- Ambil (sembarang), misal

Iterasi 1:

- x1=a=0 → f(0) = 1

  x2=b=1 → f(1) = 1^3 -7*1 +1

  = -5

Nilai x ada diantara 0 dan 1.

c1=(0+1)/2 = 0,5

f(c1)= 0,5^3 –7*0,5 +1 = -2,375

- f(a). f(c1) < 0; akar pada interval baru a=0; b=c1=0,5; [0, 0,5]

Iterasi 2:

c2=(0+0,5)/2 = 0,25

f(c2)= 0,25^3 – 7*0,25 +1

= -0,7344

f(a).f(c2)<0

Nilai akar di x1=a=0, b=c2=0,25. Interval [0, 0,25]

Galat hampiran:

$$\varepsilon_a = \left|\frac{c_2 - c_1}{c_2}\right| x100\%$$

= |(0 – 0,25)/0,25|*100%

= 100%

Iterasi 3:

c3=(0+0,25)/2 = 0,125.
f(c3)=f(0,125)=0,12695

f(c2).f(c3)<0
Akar pada [0,125, 0,25]=[c3, c2]
Galat = |(0,125 – 0,25)/0,125|*100% = 100%

Iterasi 4:

C4= (0.125 + 0,25)/2

= 0,1875

F(c4)=-0,3059; f(c3).f(c4)<0

Akar pada [c3, c4]=[0,125, 0,1875]

Galat =|(c4-c3)/c3|*100%

=|(0,1875-0,125)/0,125|*100%

=50%

Iterasi berikutnya!!!.
Berakhir |x1-x2|<Relatif (bena)
atau $|f(x^*=c_i)| < \text{Tol. Tol}=10^{-5}$

SOAL (Gunakan Metoda Bisection)

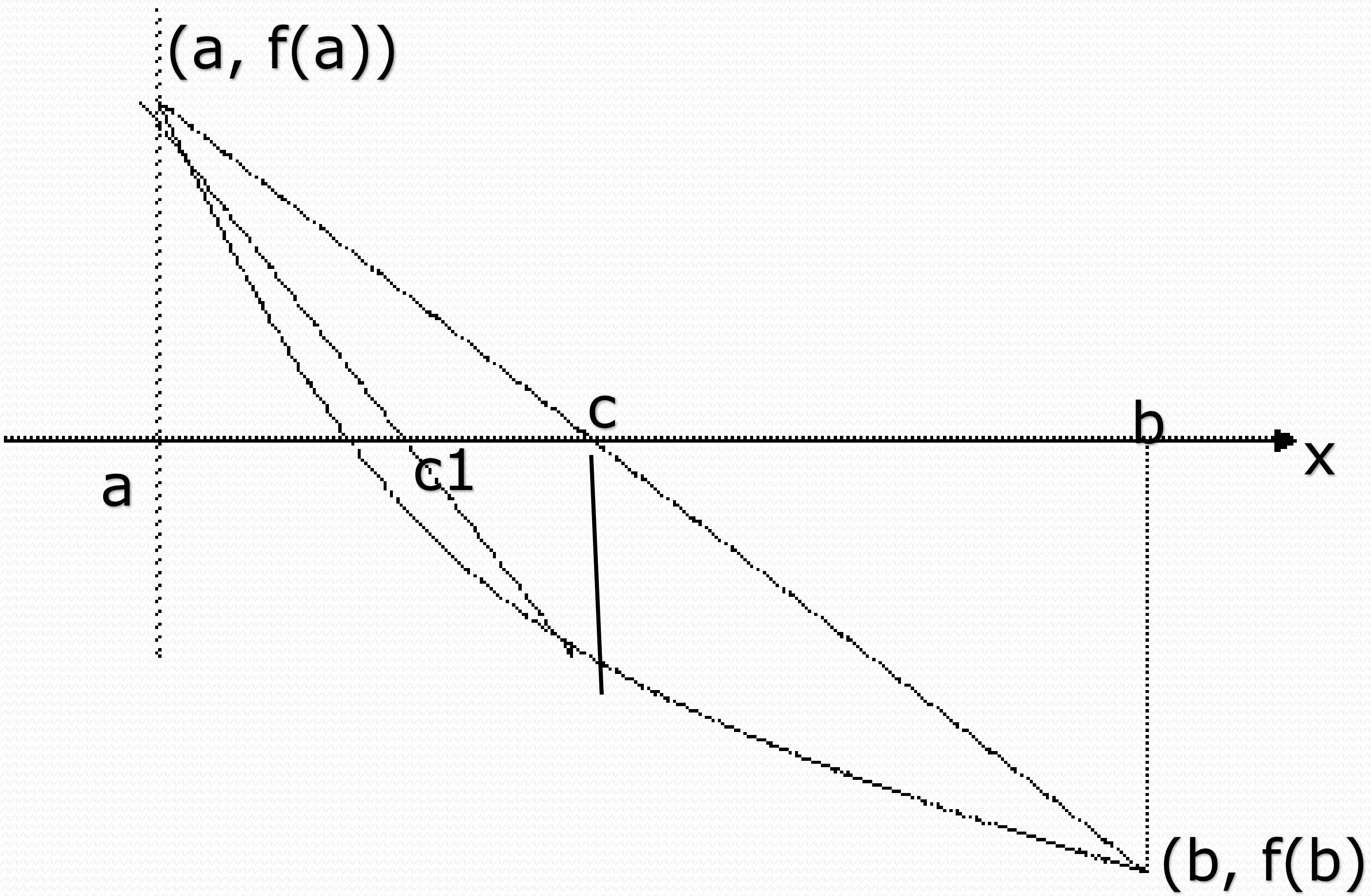
Tentukan nilai x dalam interval yang ditentukan untuk persamaan

1. $\cos x + 1 - x = 0$ pada [0,8, 1,6] dengan x dalam radian.
2. $\ln x - 5 + x = 0$ pada [3,2, 4,0].
3. $x^2 - 10x + 23 = 0$ pada [3,2, 4,0].

Pustaka: John H Meathew, 1992. 2nd ed, Numerical Methods for Mathematics, Science, and Engineering, page 63.

3. Metode Posisi Palsu (Regula Falsi)

- Metode posisi palsu akan lebih cepat memberikan hasil. Dasar dari metode ini adalah teorema harga antara yaitu "bila f kontinu di $[a, b]$ dan $\boldsymbol{f(a).f(b) < 0}$, maka ada $x^* \in [a, b]$ sehingga $f(x^*) = 0$. Pada metode ini nilai akar dihampiri oleh fungsi linear (garis lurus), nilai hampiran akan berupa perpotongan garis lurus melalui $(a, f(a))$ dan $(b, f(b))$ dengan sumbu x.



Metoda Regula Falsi

a. Buat pers garis (a, f(a)) – (b, f(b));
b. Cari titik potong dengan sumbu x.

Metode Posisi Palsu (Regula Falsi)

- Persamaan garis yang melalui titik $(a, f(a))$ dan $(b, f(b))$ diberikan oleh

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a}$$

perpotongan degan sumbu $X \rightarrow y = 0$, $x = c$

$$c = a - f(a)\,\frac{b - a}{f(b) - f(a)}$$

Metode Posisi Palsu (Regula Falsi)

Atau
$$\frac{y - f(b)}{f(a) - f(b)} = \frac{x - b}{a - b}$$

diperoleh perpotongan dengan sumbu X → $y = 0$, $x = c$

$$c = b - f(b)\ \frac{a - b}{f(a) - f(b)}$$

Metode Posisi Palsu (Regula Falsi)

atau - diulang

$$c = b - f(b)\,\frac{b-a}{f(b)-f(a)}$$

Iterasi dihentikan apabila telah dipenuhi

$$\left|\frac{c_{k+1}-c_k}{c_{k+1}}\right| < \varepsilon \text{ atau } f(c) \leq \text{Toleransi}$$

Metoda memberikan nilai yang lebih cepat konvergensinya dibandigkan dengan metoda bisection.

Contoh 1: (Posisi Palsu=Regula Falsi)

- Fungsi f(x) = cos x – sin x

Nilai akar dicari pada interval [0, 1], gunakan metoda posisi palsu untuk

a. Akar persamaan sampai 3 iterasi.
b. Hitung f(c3)
c. Hitung $\left|\frac{c_3 - c_2}{c_3}\right|$

- Jawab

Iterasi 1:

a=0, b=1 dan f(x) = cos x – sin x

f(a) = cos 0 – sin 0 = 1

f(b) = cos 1 – sin 1 = - 0,301169

c1=b – f(b)*(b-a)/(f(b)-f(a))

c1=1–(-0,301169)*(1-0)/(-0,301169-1)

= 1 – 0,2384 = 0,76854

f(c1) = 0,02384

f(a).f(c1) > 0 → akar di [c1, b]

Iterasi 2: c1=a= 0,76854; b=1

c2=1-(-0,301169)*(1-0,76854)/(-0,301169- 0,02384)

=0,78551797; **f(c2)=-0,00016943**

- f(c1).f(c2)<0 → akar pada [c1, c2], maka a=c1, b=c2.
- Iterasi 3:

a= c1 = 0,76854,

f(a) = 0,02384.

b= c2 = 0,78551797

f(b)= - 0,00016943

c3 = 0,78539816

Akar pada #it3 =0,78539816

b). f(c3) = 7,9689x10^{-9}

c). $\left|\dfrac{c_3 - c_2}{c_3}\right| = -0{,}00015$

Contoh 2: Metoda Regula Falsi

	f(x) = x^3 - 7x + 1			
#it	a=x1	b=x2	f(x1)	f(x2)
0	0	1	1	-5
	0.16666667		-1.6204E-01	
1	0	0.16666667	1	-0.162037037
	0.14342629		-1.0336E-03	
2	0	0.14342629	1	-0.001033627
	0.1432782		-6.0836E-06	
3	0	0.1432782	1	-6.08357E-06
	0.14327733		-3.5787E-08	
4	0	0.14327733	1	-3.57867E-08
	0.14327732		-2.1052E-10	

SOAL (Gunakan Metoda Regula Falsi)

Tentukan nilai c_0, c_1, c_2, dan c_3 dalam interval yang ditentukan untuk persamaan

1. $\cos x + 1 - x = 0$ pada [0,8, 1,6] dengan x dalam radian.

2. $\ln x - 5 + x = 0$ pada [3,2, 4,0].

3. $x^2 - 10x + 23 = 0$ pada [6,0, 6,8].

Pustaka: John H Meathew, 1992. 2nd ed, Numerical Methods for Mathematics, Science, and Engineering, page 64.

Soal-soal (metoda Tutup):

1. Tentukan nilai akar dari persamaan nonlinier berikut menggunakan metoda Tabulasi hingga diperoleh error 10^{-5}.

   a. $2 - 3x + \sin x = 0$ b. $e^x - x - 2 = 0$

2. Tentukan harga pendekatan dari akar persamaan $x^2 - e^{-x} = 0$ di $[0,1]$ dengan metode bagi dua.

   a. pada iterasi ketiga berapakah harga a_3 dan b_3

   b. pada iterasi ke-5 berapakah harga x_5 dan $f(x_5)$

   c. carilah harga *N*, sehingga $|b_N - a_N| \le 10^{-3}$

   d. carilah harga *N* dan harga x_{N0} sehingga $|\varepsilon| = \left|\dfrac{c^* - c_N}{c_N}\right|$

3. Ingin dicari harga pendekatan dari akar-akar persamaan $x = \cos x$ di $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ dengan metode regula palsi, carilah:

   a. $a_3\ dan\ \ b_3$ pada iterasi ke-3

   b. x_5 dan $f(x_5)$ pada iterasi ke-5

   c. $\left|\dfrac{x_5 - x_4}{x_5}\right|$

4. Tentukan banyaknya akar pada persamaan $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ untuk $x > 0$.

Sesi 3 SELESAI
Terima Kasih

Assalamu ‘alaikum wr wb.

Universitas Padjadjaran

Mata Kuliah 3: Metode Numerik
Dosen: Ino Suryana, M.Kom

Penyelesaian Persamaan Tak Linier
(SESI 2)

S-1 Teknik Informatika

BENTUK FUNGSI NON-LINIER - REVIEW

- Fungsi polinom: $P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \quad ; n \geq 2$
- Fungsi transenden: trigonometri, eksponensial, logaritma.
- Fungsi campuran: transenden dan polinom.

Contoh (betuk persamaan):

1. $x \sin x = 0$
2. $x^2 - e^x = 0$
3. $\cos x - \sin x - 2 = 0$
4. $x^2 + 1 - \ln x = 0$

PENYELESAIAN PERSAMAAN TAK LINEAR (BAB-3)

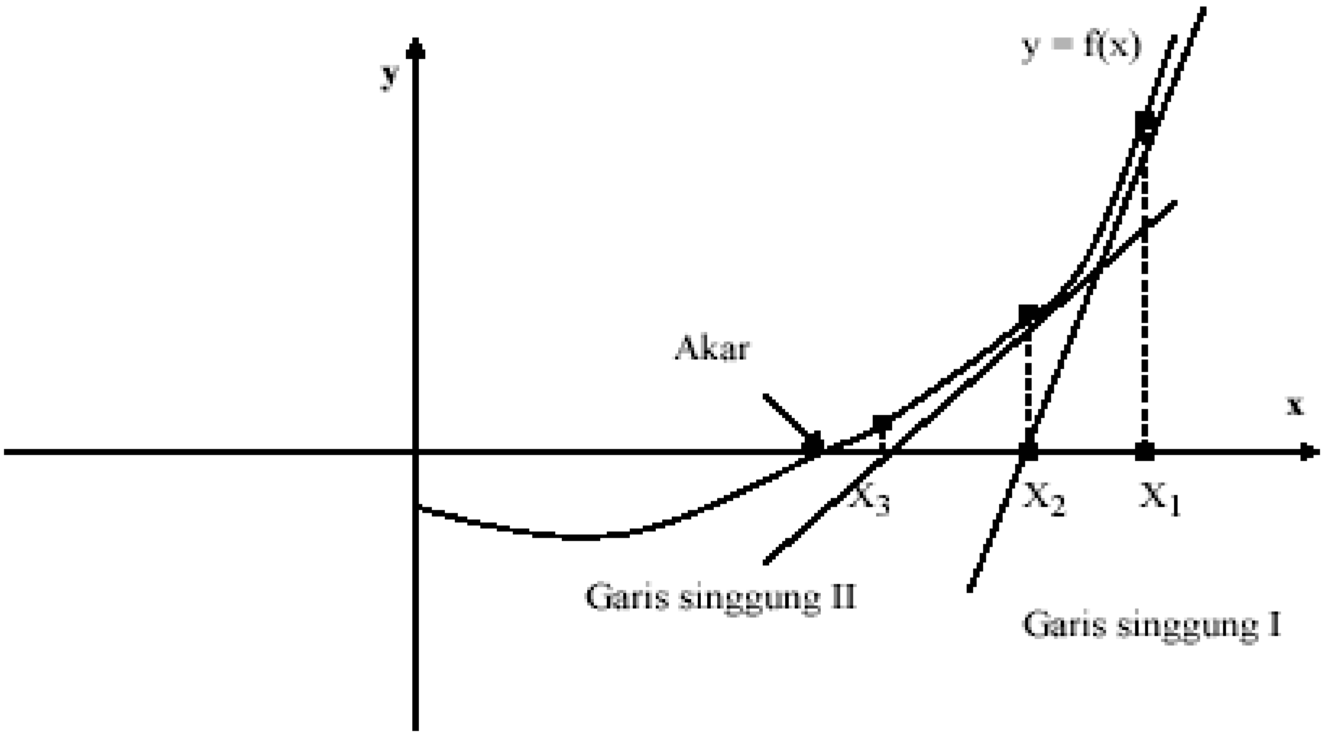
Ada dua macam metode pencarian akar :

1. Metode Tertutup → sudah dijelaskan. Selanjutnya ke…
2. Metode terbuka, terdiri dari:
   a. Metode Newton-Raphson
   b. Metode Sekan (*Secant*)

METODE NEWTON-RAPHSON

Dasar dari metode Newton-Raphson adalah fungsi *f*(*x*) dihampiri oleh garis lurus, yakni garis singgung. Hampiran akar berupa perpotongan garis singgung dengan sumbu *X*.

Metode Newton - Raphson



METODE NEWTON RAPHSON (lanjutan)

- Persamaan garis singgung melalui titik $(X_1, f(X_1))$ adalah: $y - f(X_1) = f'(X_1) \cdot (X - X_1)$

  dgn $f'(X_1)$ = gradien garis singgung
- Garis memotong sumbu x di $(X_2, 0)$ maka diperoleh:

$$0 - f(X_1) = f'(X_1) . (X_2 - X_1)$$

$$X_2 .f'(X_1) - X_1.f'(X_1) = - f'(X_1)$$

$$X_2 = X_1 - f(X_1)/ f'(X_1)$$

METODE NEWTON RAPHSON (lanjutan)

- Secara rekurensi, persamaan dinyatakan menjadi:

$$X_{i+1} = X_i - f(X_1)/\ f'(X_1)$$

untuk i = 1, 2, 3, …

f'(X_i): turunan pertama f(X) pada x = x_i.

- Rumus umum:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},\ k = 1,2,\ldots.$$

dengan syarat x_0: $|(f(x_0).f''(x_0))/(f'(x_0))^2| < 1$

CONTOH

- a. $f(x) = e^x - 3x = 0$; b. $f(x) = e^x - 3x^2 = 0$.
- Jawab a:

Cari x_0 , shg syarat x_0: $|(f(x_0).f''(x_0))/(f'(x_0))^2| < 1$ dipenuhi

$f'(x) = e^x - 3$, $f''(x) = e^x$

Misal $x_0 = 0 \rightarrow |(f(x_0).f''(x_0))/(f'(x_0))^2| = |0*1/-2^2| = 0 < 1$

$f(0)=e^0 - 0 = 1$, $f'(0)= e^0 - 3 = -2$, $f''(0) = e^0 = 1$

- $x_0 = 0$; $X_{i+1}= X_i - f(X_i)/ f'(X_i)$
- x1 = 0 – (1/-2) = ½

  f(½) = e^(½) – 3* ½ = 0.148721

  f'(½) = e^(½) – 3 = -1.35128
- x2 = 0.5 - 0.148721/ -1.35128 = 0.61006
- dan seterusnya sehingga dapat dibuat Tabelnya ...

Metode Newton-Raphson

a. $f(x) = e^x - 3x = 0$

$f'(x) = e^x - 3$

i	x	f(x)	f'(x)
1	0.5	0.14872	-1.35128
2	0.61006	0.01036	-1.15946
3	0.61900	7.37E-05	-1.14294
4	0.61906	3.86E-09	-1.14282

Jadi x =0.61906

SOAL DAN LATIHAN (METODE N-R)

b. $f(x) = e^x - 3x^2 = 0$

1. $f(x) = x^3 - 3x - 2$
2. $f(x) = 2 - 3x + \sin x$
3. $x^3 - 3x + 1 = 0$
4. $e^x - 2x + 21 = 0$
5. $e^x - 3x = 0$
6. $f(x) = (x + 9/x)/2 = 0$
7. $f(x) = 2x^3/(3x^2 - 9) = 0$

METODE SEKAN (*Secant*)

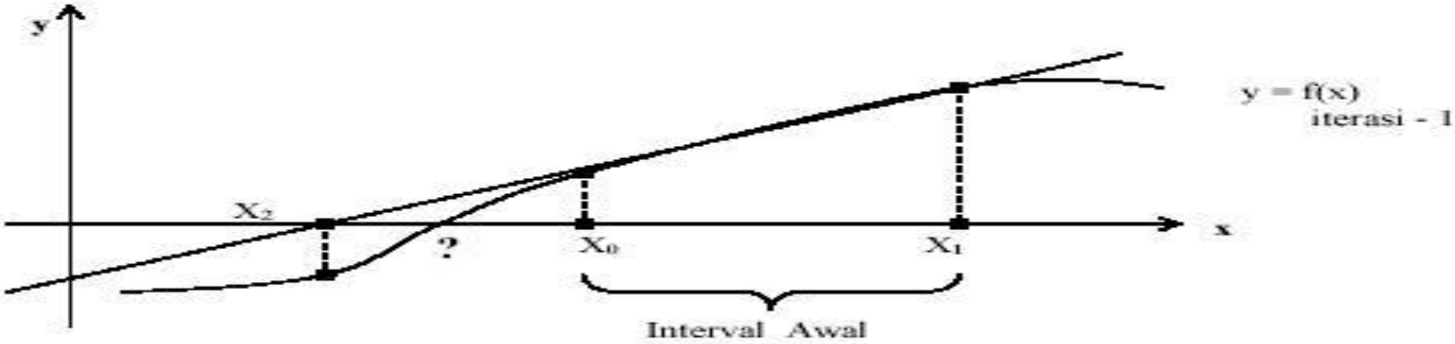
- Disebut juga Metode Interpolasi Linear
- Dalam prosesnya tidak dilakukan penjepitan akar atau dpl $[X_0, X_1]$ tidak harus mengandung akar yang akan dicari.
- Sehingga $f(x_0)$ dan $f(x_1)$ bisa bertanda sama, atau $f(a) \times f(b)$ tidak harus negatif. Mirip metoda REGULA FALSI, bedanya REGULA FALSI $f(a) \times f(b)$ harus negatif.
- Untuk mencari X_2, sama dengan metode REGULA FALSI

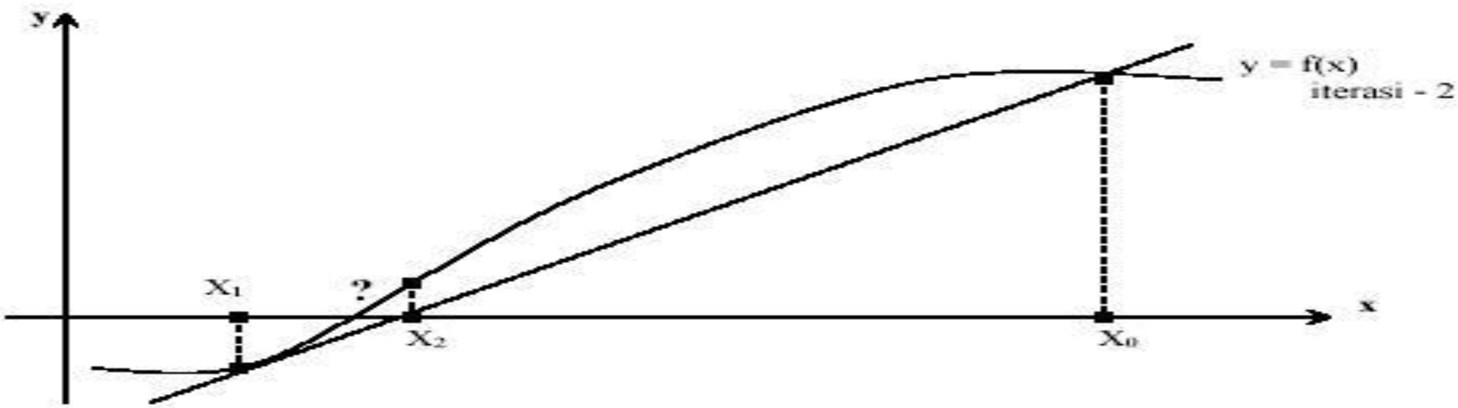
METODE SEKAN (lanjutan)

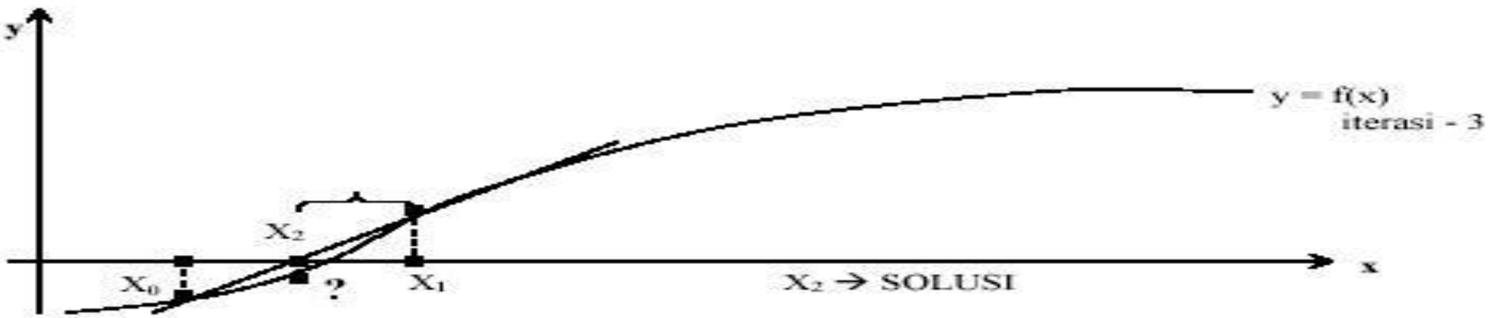
- Untuk iterasi berikutnya akan diperoleh interval baru $[X_0, X_1]$ dengan cara pergeseran: $X_0 \leftarrow X_1$, $X_1 \leftarrow X_2$.
- Iterasi berlangsung sampai batas maksimum (MAX) atau sampai dipenuhinya batas Toleransi (T):

$$\left| \underbrace{(X_1 - X_2)/X_1}_{\text{Nilai kesalahan relatif}} \right| \leq T$$

Metode SEKAN







METODE SEKAN (*Secant*)

- Rumus Umum:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},\ k = 1,2,....$$

$f'(x_k)$ diaproksimasi dengan $f'(x_k) = (f(x_k) - f(x_{k-1}))/(x_k - x_{k-1})$, sehingga rumus menjadi

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}\quad ;\quad k = 1,2,3$$

CONTOH

$f(x) = x^5 - 3x + 1 = 0;$

Jawab:

- **It #1 :** Ambil $x_0 = 0$ dan $x_1 = 0,5$ →

  f(0) = (0)^5 – 3*0 + 1 = 1

  f(0,5) = (0,5)^5 – 3*0,5 + 1 = - 0.46875

Rumus Umum : $$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \quad ; \quad k = 1,2,3$$

- x2=0,5 – (-0,46875 *(0,5 - 0))/(-0,46875 – 1)=0,340426
- **It #2 : x0=0,5 dan x1=** 0.340426
  f(0,5) = -0,46875
  f(0,340426) = (0,340426)^5 – 3*(0,340426) + 1 = - 0,016705
- x2[2]= 0,334529. Seterusnya dapat dibuat Tabel …

Metode Sekan				
	$f(x) = x^5 - 3x + 1$			
#i	x[i]	x[i+1]	f(x[i])	f(x[i+1])
0	0	0.5	1	-0.46875
1	0.5	0.340426	-0.46875	-0.016705
2	0.340426	0.334529	-0.016705	0.000603
3	0.334529	0.334734	0.000603	-4.46E-07
		x=	0.334734	

ALGORITMA METODE SEKAN

- INPUT X_0, X_1, T, Max, F(x)
- i = 0
- Found = false
- REPEAT

  i = i + 1

  $X_2 = X_1 - F(X_1)*(X_1 - X_0)/(F(X_1) - F(X_0))$

  $X_0 = X_1$

  $X_1 = X_2$

ALGORITMA METODE SEKAN (lanjutan)

IF $|(X_0 - X_1)/X_0| \leq T$ OR $i = Max$ THEN

Found = true

ENDIF

- UNTIL (Found = true)
- OUTPUT (X_2)

SOAL

1. $f(x)= x^5 + x^3 + 1$. Tentukan x0 dan x1 sng nila awal!
2. $f(x)= x^3 – x – 3$ dengan x0=1,7 dan x1=1,67
3. $f(x)= x^3 – x + 2$ dengan x0=-1,5 dan x1=-1,52

- Menggunakan metoda sekan, cari x sehingga f(x)≈0.

Bab-3 Selesai
Trim's Banyak

4^{th} session:
Next week

Universitas Padjadjaran

Mata Kuliah: Metode Numerik

Dosen: Ino Suryana, M.Kom

Pencarian Akar Real Polinom

S-1 Teknik Informatika

PENGERTIAN

- Polinom dengan derajat n dengan koefisien real ditulis sebagai fungsi berbentuk :

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

dengan a_0, a_1, a_2, . . ., a_n bilangan real dan $a_n \neq 0$

- Metode paling efisien untuk pencarian akar polinom adalah **metode horner**, nama lainya metode perkalian bertingkat (*nested multiplication*).
- Penulisan polinom $P_n(x)$ dalam Metode Horner

$$P_n(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \ldots + x(a_{n-1} + a_n x)\ldots.))$$

CONTOH

- Polinom bentuk Umum

a. $P_3(x) = -3 + 4x + 2x^2 + 5x^3$

b. $P_6(x) = 4x + 3x^2 - 6x^5 + 9x^6$

- Polinom bentuk Horner

a. $P_3(x) = -3 + x(4 + x(2 + 5x))$

b. $P_6(x) = 0 + 4x + 3x^2 + 0x^3$
$+ 0x^4 - 6x^5 + 9x^6$

$= 0 + x(4 + x(3 + x(0 + x(0 +$
$x(-6 + 9x)))))$

$= x(4 + x(3 + x(x(x(-6 + 9x)))))$

$= x(4 + x(3 + x^3(-6 + 9x)))))$

PROSES DEFLASI

- Proses deflasi adalah proses pencarian seluruh akar polinom dengan cara mereduksi pangkat dari polinom tersebut (metoda titik tetap).

$$x_{r+1} = g(x_r)$$

- Proses ini dibentuk atas pemanfaatan metode horner.
- Contoh

$$P(x) = -3 + 2x + 4x^2 - 6x^3$$

atau

$$P(x) = -3 + x(2 + x(4 - 6x))$$

PROSES DEFLASI (lanjutan)

Dari

$$P(x) = -3 + x(2 + x(4 - 6x))$$

- Buat barisan b_0, b_1, b_2, b_3 dengan

$$b_3 = -6 (koefisien \;\; x^3 \;\; dalam\; P(x))$$

$$b_2 = 4 + b_3 x$$

$$b_1 = 2 + b_2 x$$

$$b_0 = -3 + b_1 x$$

(ke kolom kanan)

- Sehingga dapat dibuktikan balik, didapat

$$\begin{aligned} P(x) &= -3 + x(2 + x(4 - 6x)) \\ &= -3 + x(2 + x(4 - b_3 x)) \\ &= -3 + x(2 + b_2 x) \\ &= -3 + b_1 x \\ &= b_0 \end{aligned}$$

BANYAK OPERASI MENGHITUNG NILAI $P_n(x_0)$

a. Perlu **n kali** **penjumlahan** dan **(2n – 1) kali** perkalian pada bentuk

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

b. Perlu n kali penjumlahan dan **n kali perkalian** pada bentuk

$$P_n(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \ldots + x(a_{n-1} + a_n x)\ldots))$$

- Bagaimana membuktikanya ?

BUKTI MENGHITUNG BANYAK OPERASI

- Kedua polinom $P_n(x)$ memilki (n+1) suku : a_0, a_1x, a_2x^2, …, a_nx^n yang antar suku dihubungkan dengan operator **TAMBAH**. Jadi jelas ada n operasi tambah.
- ATAU pada

  a_1 → 1 operasi tambah

  a_2 → 1 operasi tambah

  dst sampai

  a_n → 1 operasi tambah

Dijumlah a_1 sp a_n = n operasi tambah

- Banyak Op Per**kali**an pada

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

- Suku #perkalian

a_0	-
a_1x	**1** $(a_1 * x)$
a_2x^2	2 $(a_2 * x * x)$
a_3x^3	2 $(a_3 * (x^2) * x)$
dst	
a_nx^n	n $(a_n * (x^{n-1}) * x)$

Sn = 1 + 2 + 2 + …+ 2

= 1 + 2(n-1) = 2n - 1

CONTOH 1 : (hitung nilai Pn(x*), x*=nilai diketahui

- Polinom $P(x) = -3 + 2x + 4x^2 - 6x^3 + 5x^4$,
  hitung P(-2) **tanpa** perpangkatan!
- **Penyelesaian**
  Bentuk barisan b_0, b_1, b_2, b_3, b_4 sebagai berikut
  $b_4 = 5$
  $b_3 = -6 + b_4 x = -6 + 5(-2) = -16$
  $b_2 = 4 + b_3 x = 4 + (-16)(-2) = 36$
  $b_1 = 2 + b_2 x = 2 + 36(-2) = -70$
  $b_0 = -3 + b_1 x = -3 + (-70)(-2) = 137$
- **Jadi** P(-2) = 137.

Soal Polinom

I. Hitung nilai Pn(x) menggunakan cara horner

1. $P_5(x) = 2 - 3x + x^2 - 8x^4 + 5x^5$, untuk $x = 2$.
2. $P_5(x) = 1 - 5x - 6x^2 + 3x^3 + 4x^5$, untuk $x = 3$.
3. $P_4(x) = 3 - 6x^2 + 5x^3 + 3x^4$, untuk $x = -2$.
4. $P_6(x) = 2 - 5x + 3x^3 + 4x^5 + x^6$, untuk $x = 2$.

Hitung berapa banyak operasi tambah, dan kali pada masing-masing persamaan.

II. Ubah ke bentuk **horner**, dan hitung berapa banyak operasi tambah, dan kali pada masing-masing persamaan.

METODE NEWTON-RAPHSON

- **Teorema:**

Misal $P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ dengan $a_n \neq 0$.

Jika barisan $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n$ didefinisikan sebagai

$$b_n = a_n$$

$$b_k = a_k + b_{k+1} x_0, \quad 1 \leq k \leq n-1$$

Maka $P(x) = b_0 + (x - x_0) Q(x)$

Dengan i. $b_0 = P(x_0)$

ii. $Q(x) = b_1 + b_2 x + b_3 x^2 + \ldots + b_n x^{n-1}$

dpl $Q(x)$ hasil bagi $P_n(x)$ oleh $x=x_0$, dan b_0 sisanya.

CONTOH 2: (HASIL DAN SISA PEMBAGIAN)

- **Polinom** $P(x) = -3 + 2x + 4x^2 - 6x^3 + 5x^4$,

  Tentukan b_0 dan $Q(x)$ sehingga $P(x) = b_0 + (x+2)Q(x)$

- **Jawab:**

  $x+2 = 0 \rightarrow x = -2 = x_0$; $P(x)$ dibagi oleh $x_0 = -2$
  Dari **CONTOH 1** diperoleh $b_4 = 5$, $b_3 = -16$, $b_2 = 36$, $b_1 = -70$, dan $b_0 = 137$.

Jadi : $b_0 = 137$,

$Q(x) = -70 + 36x - 16x^2 + 5x^3$, dan

$P(x) = 137 + (x+2)(-70 + 36x - 16x^2 + 5x^3)$.

METODE NEWTON-RAPSON UNTUK POLINOM

- Misal x* salah satu akar dari polinom P(x). Metoda Newton dinyatakan dengan

$$x_{n+1} = x_n - \frac{P(x_n)}{P'(x_n)} \; ; n = 0,1,2,....$$

- X_0 → tebakan awal yang mendekati x*, maka ***P(x)*** dapat ditulis menjadi

P(x) turunkan terhadap x, diperoleh $P(x) = b_0 + (x - x_0)Q(x)$

$$P'(x) = (x - x_0)Q'(x) + Q(x)$$

- Jadi $P'(x_0) = Q(x_0)$, karena $x_0 \simeq x^*$ shg $x_0 - x^* = 0$

LANGKAH CARA MENCARI P'(x_n)

- Tuliskan $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$, untuk n=0, 1, 2, ... Hitung :

1. $b_n = a_n$

$b_k = a_k + b_{k+1} x_n$ untuk $k=n-1$, n-2, ..., 2, 1, 0 sehingga

$b_0 = P(x_n)$

2. $c_n = b_n$

$c_k = b_k + c_{k+1} x_n$ untuk k = n-1, n-2, ..., 3, 2, 1 sehingga

$c_1 = Q(x_n) = P'(x_n)$. Nilai $\boldsymbol{x_{n+1}}$ dihitung dengan rumus

$$x_{n+1} = x_n - \frac{b_0}{c_1}$$

Contoh ...

CONTOH 3 (AKAR POLINOM DGN METODA NEWTON)

- Tentukan nilai akar $P(x) = 12 + 4x - 15x^2 - 5x^3 + 3x^4 + x^5$

  menggunakan metoda Newton dengan tebakan awal x_0=7,5 dan ε=$10^{-5.}$

- **Jawab:**

  Polinom $P(x) = 12 + 4x - 15x^2 - 5x^3 + 3x^4 + x^5$

  Akan dihitung P(7,5) dan P'(7,5) dengan cara:

it#1: b_5 = 1

b_4 = 3 + 1(7,5) = 10,5

b_3 = -5 + (10,5)(7,5) = 73,75

b_2 = -15 + (73,5)(7,5) = 538,125

b_1 = 4 + (538,5)(7,5) = 4039,9375

b_0 = 12 + (4039,9375)(7,5) = 30311,53125

Jadi *P*(7,5) = 30311,53125 → lanjutan

CONTOH 3 (lanjutan)

$c_5 = 1$
$c_4 = 10{,}5 + 1(7{,}5) = 18$
$c_3 = 73{,}75 + 18(7{,}5) = 208{,}75$
$c_2 = 538{,}125 + (208{,}75)(7{,}5) = 2103{,}75$
$c_1 = 4039{,}9375 + (2103{,}75)(7{,}5) = 19818{,}0625$

Jadi, $P'(7{,}5) = 19818{,}0625$

- Maka $x_1 = x_0 - \dfrac{P(7{,}5)}{P'(7{,}5)}$ $= 7{,}5 - \dfrac{30311{,}53125}{19818{,}0625} = 5{,}970510$

- Selanjutnya gunakan x_1 sebagai nilai pendekatan, diperoleh:

CONTOH 3 (JAWAB it#2)

- X_1 = 5,970510

$b_5 = 1$

$b_4 = 3 + 1(5{,}970510) = 8{,}970510$

$b_3 = -5 + (8{,}970510)(5{,}970510) = 48.558520$

$b_2 = -15 + (48.558520)(5{,}970510) = 274.919127$

$b_1 = 4 + (274.919127\ )(5{,}970510) = 1645.407398$

$b_0 = 12 + (1645.407398)(5{,}970510) = 9835.921325$

Jadi $P(5{,}970510) = 9835.921325$ → lanjutan

CONTOH 3 (lanjutan)

$c_5 = 1$

$c_4 = 8{,}970510 + 1(5{,}970510) = 14.941020$

$c_3 = 48.558520 + 14.941020(5{,}970510) = 137.764029$

$c_2 = 274.919127 + 137.764029(5{,}970510) = 1097.440640$

$c_1 = 1645.407398 + 1097.440640(5{,}970510) =$
8197.687714

Jadi, $P'(5{,}970510) = 8197.687714$

- Maka $x_2 = x_1 - P(5{,}970510)/P'(5{,}970510)$

  $= 5{,}970510 - (9835.921325/8197.687714)$

  $= 4.7706691$

- Teruskan gunakan x_2 sebagai nilai pendekatan hingga $\varepsilon = 10^{-5.}$

SOAL

Cari akar polinom berikut menggunakan Metoda Newton-Raphson (disingkat Metoda Newton).

1. $x^4 - 2x^2 - 18 = 0$
2. $x^3 – 1,25x – 3,7 = 0$
3. $x^5 + x^3 - 1 = 0$
4. $x^4 - x^3 + 3x - 2 = 0$

Sesi ini SELESAI
Terima Kasih

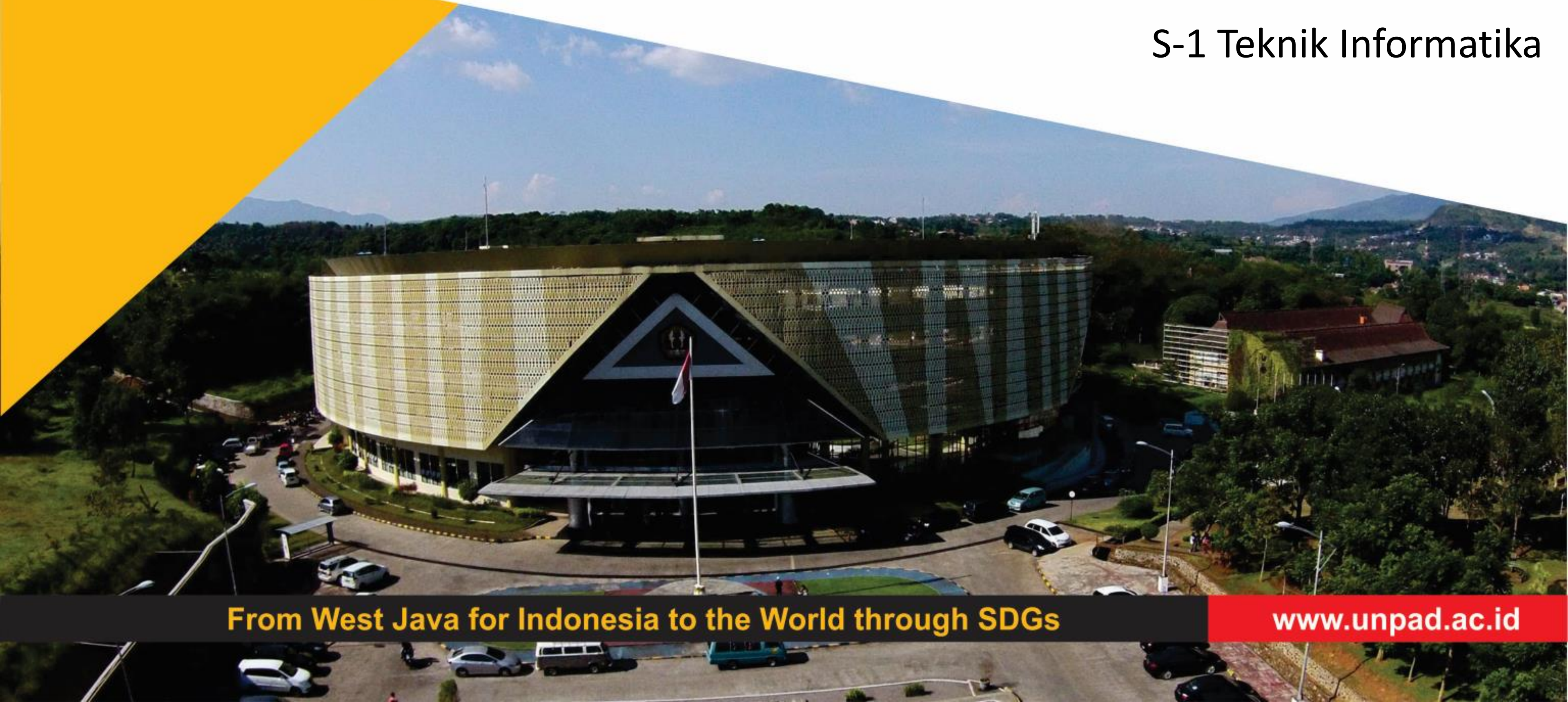
Assalamu ‘alaikum wr wb.

Universitas Padjadjaran

Mata Kuliah: Metode Numerik
Dosen: Ino Suryana, M.Kom

Matriks dan Sistem Persamaan Linear-SPL

S-1 Teknik Informatika



From West Java for Indonesia to the World through SDGs

www.unpad.ac.id

METODE YANG AKAN DIPELAJARI ADA ENAM:

- SPL dan Matriks

1. Metode Iterasi Jacoby
2. Metode Iterasi Gauss-Seidel
3. Metode Eliminasi Gauss
4. Metode Eliminasi Gauss-Jordan
5. Metode Dekomposisi LU
6. Metoda Invers

SISTEM PERSAMAAN LINEAR - SPL

Sistem persamaan linear dengan n variabel ditulis:

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&\vdots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m
\end{aligned}
$$

SPL - 1

MATRIKS

- Matriks adalah himpunan bilangan yang disusun dalam baris dan kolom.
- Simbol **nama matriks** – gunakan huruf KAPITAL

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

- A → matriks berukuran (ordo) n x m.

PENYAJIAN SPL

- SPL-1 dapat dituliskan sebagai **AX = b**, dengan A ={a_{ij}, i=1,2, …,m; j=1,2,…,n} (matriks sistem), X=(x_1, x_2, …, x_m)^T dan b=(b_1, b_2, …, b_m)^T, secara lengkap:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

MATRIKS LENGKAP

- SPL Ax = b.
- Matriks [Ab] → MATRIKS LENGKAP

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

MACAM-MACAM MATRIKS

1. Matriks diagonal
2. Matriks satuan/ Identitas
3. Matriks segitiga
   a. Matriks segitiga Atas
   b. Matriks segitiga bawah
4. Matriks Bidiagonal
   a. Matriks Bidiagonal Atas
   b. Matriks Bidiagonal Bawah
5. Matriks Tridiagonal
6. Matriks Blok Tridiagonal

CONTOH BENTUK MATRIKS

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & \dots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(a)

$$\begin{pmatrix} x & x & \dots & 0 \\ x & x & x & \dots \\ \dots & x & x & x \\ 0 & \dots & x & x \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} x & 0 & \dots & 0 \\ x & x & 0 & \dots \\ \dots & x & x & 0 \\ 0 & \dots & x & x \end{pmatrix}$$

(c)

CONTOH BENTUK MATRIKS

$$
\begin{bmatrix}
d_1 & p_6 & & p_5 & p_1 & & & & \\
p_2 & d_2 & p_6 & -p_1 & p_5 & p_1 & & & \\
 & p_2 & d_3 & & -p_1 & p_5 & & & \\
p_3 & -p_1 & & d_4 & p_6 & & p_5 & p_1 & \\
p_1 & p_3 & -p_1 & p_2 & d_5 & p_6 & -p_1 & p_5 & p_1 \\
 & p_1 & p_3 & & p_2 & d_6 & & -p_1 & p_5 \\
 & & & p_1 & p_3 & & d_7 & p_6 & \\
 & & & p_1 & p_3 & -p_1 & p_2 & d_8 & p_6 \\
 & & & & p_1 & p_3 & & p_2 & d_9
\end{bmatrix}
$$

(d)

1. METODE ITERASI JACOBY

SPL-1 syarat $a_{kk} \neq 0$, k = 1, 2, 3,..., n, maka persamaan iterasi Jacoby ditulis sebagai

$$x_1^{(k+1)} = \frac{b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - \ldots - a_{1n}x_n^{(k)}}{a_{11}}$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - \ldots - a_{2n}x_n^{(k)}}{a_{22}}$$

dan seterusnya,

$$x_n^{(k+1)} = \frac{b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \ldots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k)}}{a_{nn}}$$

$$dengan \quad k = 0,1,2,3,\ldots$$

LANGKAH PENCARIAN NILAI X

Iterasi dimulai dengan memberikan tebakan awal untuk x, misal

$$x_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix}$$

Iterasi dihentikan dengan menggunakan rumus hampiran galat relatifnya, yaitu

METODE ITERASI JACOBY (LANJUTAN)

Iterasi dihentikan dengan menggunakan rumus hampiran galat relatifnya, yaitu

$$\left| \frac{x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}}{x_i^{(k+1)}} \right| < \varepsilon \quad , \forall i = 1,2,3,\ldots.,n$$

Rumus umum iterasi nilai x:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}}{a_{ii}}, \quad k = 0,1,2,3,\ldots$$

2. METODE ITERASI GAUSS-SEIDEL

Bentuk SPL-1 berikut:

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&\vdots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m
\end{aligned}
$$

dengan syarat $a_{kk} \neq 0$, k = 1, 2, 3,..., n, maka persamaan iterasinya ditulis sebagai

METODE GAUSS-SEIDEL

Persamaan Iterasinya:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - \ldots - a_{1n}x_n^{(k)}}{a_{11}}$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \ldots - a_{2n}x_n^{(k)}}{a_{22}}$$

dan seterusnya, sehingga Rumus Umumnya :

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}}{a_{ii}}, \quad k = 0,1,2,3,\ldots$$

CONTOH (PENYELESAIAN ITERASI JACOBY)

Tentukan penyelesaian SPL berikut

$$4x - y + z = 7$$

$$4x - 8y + z = -21$$

$$-2x + y + 5z = 15$$

dengan metode iterasi Jacoby

Persamaan Iterasinya :

CONTOH ITERASI JACOBY

Persamaan iterasinya:

$$x = \frac{7 + y - z}{4}$$

$$y = \frac{-21 - 4x - z}{-8}$$

$$z = \frac{15 + 2x - y}{5}$$

Dengan nilai awal $P_0 = (x_0, y_0, z_0) = (1, 2, 2)$

Kunci Solusi sejatinya = (2,4,3)

PENYELESAIAN :

Iterasi 1:

$$X = \frac{7 + 2 - 2}{4} = 1{,}75$$

$$Y = \frac{21 + 4(1) + 2}{8} = 3{,}375$$

$$Z = \frac{15 + 2(1) - 2}{5} = 3{,}000$$

Iterasi 2

Iterasi 2 :

$$X = \frac{7 + 3{,}375 - 3{,}000}{4} = 1{,}84375$$

$$Y = \frac{21 + 4(1{,}75) + 3{,}000}{8} = 3{,}875$$

$$Z = \frac{15 + 2(1{,}75) - 3{,}375}{5} = 3{,}025$$

Dan seterusnya [it#3 = {...}

CONTOH METODE ITERASI JACOBY

Sampai pada iterasi ke 19 didapat :

X = 2,000000

Y = 4,000000

Z = 3,000000

CONTOH METODE ITERASI GAUSS-SEIDEL

Tentukan penyelesaian dari SPL :

$$4x - y + z = 7$$

$$4x - 8y + z = -21$$

$$-2x + y + 5z = 15$$

Gunakan metode iterasi Gauss-Seidel

PENYELESAIAN

Persamaan iterasinya :

$$x = \frac{7 + y - z}{4}$$

$$y = \frac{-21 - 4x - z}{-8}$$

$$z = \frac{15 + 2x - y}{5}$$

Dengan nilai awal

$$P_0 = (x_0, y_0, z_0) = (1, 2, 2)$$

PENYELESAIAN ITERASI GAUSS-SEIDEL

Iterasi 1:

$$x = \frac{7+2-2}{4} = \frac{7}{4}$$

$$y = \frac{-21-4\left(\frac{7}{4}\right)-2}{-8} = \frac{30}{8} = \frac{15}{4}$$

$$z = \frac{15+2\left(\frac{7}{4}\right)-\left(\frac{15}{4}\right)}{5} = \frac{59}{20}$$

CONTOH GAUSS-SEIDEL

Iterasi 2:

$$x = \frac{7 + \frac{15}{4} - \frac{59}{20}}{4} = \frac{39}{20}$$

$$y = \frac{-21 - 4\left(\frac{39}{20}\right) - \frac{59}{20}}{-8} = \frac{635}{160} = \frac{127}{32}$$

$$z = \frac{15 + 2\left(\frac{39}{20}\right) - \frac{127}{32}}{5} = \frac{2389}{800}$$

dst sampai nilai konvergen

3. METODE ELIMINASI GAUSS

- Target proses: Ubah **Matriks Lengkap** menjadi matriks **segitiga atas** menggunakan operasi baris elementer (*OBE*)
- Langkah-langkahnya
  i. Tahap 1 → tahap penghilangan
  ii. Tahap 2 → tahap penyulihan/substitusi mundur

CONTOH

a. Matriks Lengkap SPL

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 12 \\ -2 & 9 & 1 & 9 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -5 & -4 & -3 \\ 0 & 13 & 7 & 19 \end{pmatrix}$$

(**a**) (**b**)

b. OBE: $R_2 - 3/1\ R_1$ dan R_3 - $-2/1R_1$ hasilnya (**b**)

c. OBE: R_3-(-13/5)R_2 dari (b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -5 & -4 & -3 \\ 0 & 13 & 7 & 19 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -5 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -\frac{17}{5} & \frac{56}{5} \end{pmatrix}$$

(b) (c)

Substitusi mundur:

x_3 = (56/5)(–5/17) = -56/17

$$x_2 = \frac{-3 + 4(-56/17)}{-5} = 55/17$$

x_1 = 5 – 2(55/17) – (-56/17) = 31/17

4. METODE ELIMINASI GAUSS-JORDAN

- Caranya: Ubah matriks lengkap menjadi bagian matriks sistem berupa **matriks Identitas** dengan melakukan OBE.

  Ax = b; (Ab)→(Ib*); b*→nilai b baru.

- Cara ini relative lama, karena banyak operasi kali dan bagi.

5. Metode Dekomposisi LU

- Cara: Ubah bentuk matriks sistem (koefisien) A menjadi matriks segitiga atas (*Upper* matrix), dan membentuk matriks segitiga bawah (*Lower* matrix)
- Bentuk vektor matriks (matriks H') dari matriks hasil (matriks H) dengan aturan tertentu.
- Kelebihan: sangat efektif untuk menyelesaikan SPL berordo tinggi, walau cara penyelesaianya cukup kompleks.

CARA PENYELESAIAN

- **Langkah 1:** Buat SPL ke dalam bentuk A.x = H.
- **Langkah 2:** Mencari matriks segitiga bawah (matriks L) dan matriks segitiga atas (matriks U) dari matriks koefisien A.
- Misalkan A_{3x3}

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{23} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$l_{i,j}$ dan $u_{i,j}$ dicari dengan rumus

- $l_{i1} = a_{i1}$
- $u_{1j} = a_{1j}/l_{11} = a_{1j}/a_{11}$
- $l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{lk} \cdot u_{kj}$
- $u_{ij} = \dfrac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj}}{l_{ii}}$

dengan i = 1, 2, 3, …, n dan j = 2, 3, 4, …, n.

Mencari vektor matriks hasil (H')

- $h'_1 = h_1 / l_{11}$
- $h'_j = \dfrac{h_i - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot h'_k}{l_{ii}}$

• **Langkah 3 :** membentuk *augmented* matriks UH' dan mencari solusi $x_{\mathbf{i}}$

- $x_n = h'_n$
- $x_j = h'_j - \sum_{k=j+1}^{n} u_{jk} \cdot x_k$

CONTOH (SPL – DEKOMPOSISI LU)

- Selesaikan SPL

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14$$
$$x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 36$$

- **Langkah 1:** Ubah ke bentuk A.x = H

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 14 \\ 36 \end{bmatrix}$$

Langkah 2 : menentukan nilai-nilai elemen matriks L dan matriks U

- Pada j=1 diperoleh $l_{11}=a_{11}=1$; $l_{21}=a_{21}=1$; $l_{31}=a_{31}=1$.
- Pada i=1 diperoleh $\mathbf{u_{11}} = 1$; $\mathbf{u_{12}}=a_{12}/a_{11}=1$; $\mathbf{u_{13}}=a_{13}/a_{11}=1$.
- $l_{22} = a_{22} - \sum_{k=1}^{1} l_{ik} \cdot u_{kj} = a_{22} - l_{21} * u_{12} = 2-1*1 = 1$
- $l_{32} = a_{32} - \sum_{k=1}^{1} l_{ik} \cdot u_{kj} = a_{32} - l_{31} * u_{12} = 4-1*1 = 3$

- $u_{23} = \dfrac{a_{23} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj}}{l_{22}} = \dfrac{a_{23} - l_{21} \cdot u_{13}}{l_{22}} = \dfrac{3-1*1}{1} = 2$

- $l_{33} = a_{33} - \sum_{k=1}^{2} l_{ik} \cdot u_{kj} = a_{33} - (l_{31} * u_{13} + l_{32} * u_{23})$

  $= 9 - (1*1 + 3*2) = 2$

- Jadi L= $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$; U= $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- Bentuk LH' = H

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h'_1 \\ h'_2 \\ h'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 14 \\ 36 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{h'_1} = 6;$

$\boldsymbol{h'_2} = (h_2 - l_{21} * h'_1)/l_{22} = (14 - 1*6)/1 = 8;$

$\boldsymbol{h'_3} = (h_3 - (l_{31} * h'_1 + l_{32} * h'_2))/l_{33} = (36 - (1*6 + 3*8))/2 = 3$

- Jadi H' = [6 8 3]^T.

- **Langkah 3 :** Menyusun *augmented* matriks UH', hasilnya

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{x_3} = h'_3 = 3;$
- $\mathbf{x_2} = (h'_2 - u_{23} * x_3)/u_{22} = (8 - 2*3)/1 = \mathbf{2};$
- $\mathbf{x_1} = (h'_1 - u_{12} * x_2 + u_{13} * x_3)/u_{11} = (6 - 1*2 + 1*3)/1 = \mathbf{1}.$
- Jadi **x = [1 2 3]**.

6. METODA INVERS

- Caranya: Ubah matriks sistem menjadi matriks Identitas dengan cara mencari invers matriks A.

  $Ax = b \rightarrow (AA^{-1})x = A^{-1}b.$

- Cara ini tidak bagus, karena mencari invers matriks 'SULIT' dan memerlukan biaya relative mahal.

LATIHAN

Selesaikan SPL berikut:

No 1 eleminasi Gauss

1. $$4x_1 - x_2 + x_3 = 8$$
   $$2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 3$$
   $$x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 11$$

2. $$4x_1 + x_2 + 2x_3 = 9$$
   $$2x_1 + 4x_2 - x_3 = -5$$
   $$x_1 + x_2 - 3x_3 = -9$$

LATIHAN SPL

No 3 dekomposisi LU

3.
$$x_1 + x_2 + 3x_4 = 4$$
$$2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1$$
$$3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = -3$$
$$-x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 4$$

4.
$$x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -8$$
$$2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = -20$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = -2$$
$$x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 4$$

Sesi 6 SELESAI
Terima Kasih

Assalamu ‘alaikum wr wb.

Universitas Padjadjaran

Mata Kuliah: Metode Numerik
Dosen: Ino Suryana, M.Kom

Interpolasi

S-1 Teknik Informatika

MATERI

Metoda Interpolasi yang Dibahas:

A. Interpolasi Lagrange
   - Kasus Linear
   - Kasus kuadratik
   - Kasus Kubik

B. Interpolasi Beda Terbagi Newton

C. Interpolasi Beda Terbagi Newton-Gregory

INTERPOLASI

Definisi :

Fungsi $f(x)$ berupa tabulasi dihampiri oleh fungsi lain yang lebih sederhana dan lebih mudah untuk diintegralkan atau didiferensialkan

Contoh :

$f(x) \approx P_n(x)$ dimana $P_n(x)$ berupa suatu polinom

INTERPOLASI (LANJUTAN)

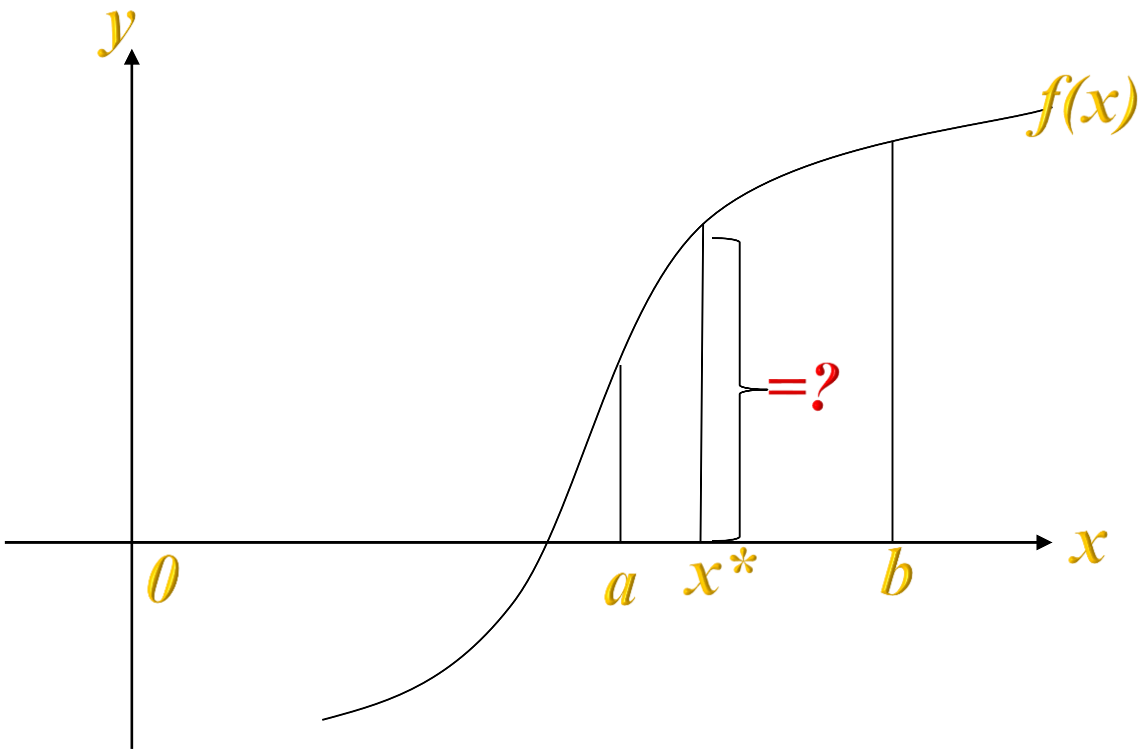
- Interpolasi dari himpunan titik yang diketahui, dicari suatu polinom yang menghampiri fungsi yang berhubungan dengan titik-titik tersebut, untuk menaksir nilai yang tidak diketahui.

- Pada interval [a, b] terdapat nilai-nilai $a \le x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n \le b$ dan $\{y_i\}$ dengan hubungan $y_i = f(x_i)$.

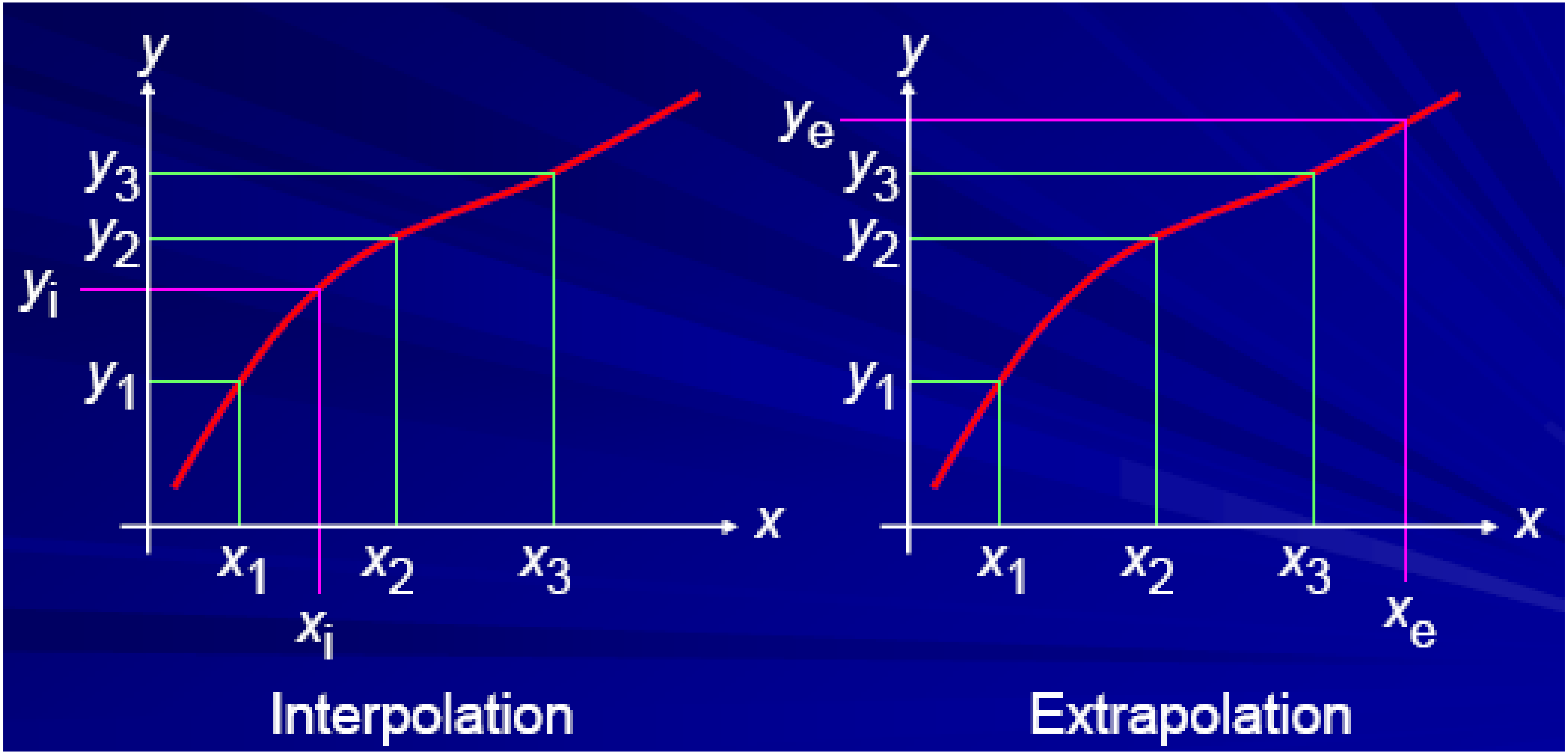
- **Interpolasi** : Tentukan nilai $f(x^*)$ dengan $x_i < x^* < x_{i+1}$; $i=0, 1, 2, \ldots, n$.

- Ekstrapolasi → menaksir nilai f(x*) dengan x* ada diluar nilai interval [a, b], dan x*>b.

Interpolasi secara grafik: Tentukan nilai f(x*) untuk *a* < *x** < *b* ?



GRAFIK PERBEDAAN INTERPOLASI DAN EKSTRAPOLASI



METODA: INTERPOLASI LAGRANGE

- **Kasus Linear**

Ada dua titik (x_0, y_0) dan (x_1, y_1). Melalui kedua titik ini dibuat suatu polinom dengan derajat satu (linier), yaitu $P_1(x)$.

$$P_1(x) \equiv y = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1$$

maka

$$P_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1$$

dapat ditlulis menjadi:

$$P_1(x) = l_0.\alpha_0 + l_1.\alpha_1$$

dengan $\alpha_i = y_i$, $l_0(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)}$, dan $l_0(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)}$

INTERPOLASI LAGRANGE

- **Kasus kuadratik:**

Ada 3 titik $(x_0, y_0), (x_1, y_1)\ dan\ (x_2, y_2)$ dapat dibuat polinom derajat (orde) 2

$$P_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} y_1$$

$$+ \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} y_2$$

dengan

$$l_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)},$$

$$l_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}, \text{ dan}$$

$$l_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

Sehingga polinom orde 2 ditulis menjadi

$P_2(x) = l_0.y_0 + l_1.y_1 + l_2.y_2$

Secara singkat polinom orde 2dapat ditulis juga :

$$P_2(x) = \sum_{i=0}^{2} l_i(x) \, . y_i$$

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{2} \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right)$$

Kasus Kubik:

Ada 4 titik $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)\ dan\ (x_3, y_3)$ maka bentuk polinom derajat 3 :

$$P_3(x) = \sum_{i=0}^{3} l_i(x) \, . y_i$$

Untuk (n+1) titik dapat dibuat polinom derajat n ditulis :

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x)\,.\,y_i$$

atau

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) y_i$$

CONTOH:

- Tentukan nilai fungsi f(x) untuk x=1,03 menggunakan interpolasi linier, kuadrat dan kubik, serta x=2,05 menggunakan metoda Lagrange kubik dari Tabel !

n	x	f(x)
0	1,0	0,00000
1	1,2	0.26254
2	1,5	0.91230
3	1,9	2.31709
4	2,1	3.27194

- Jawab:

Jawab: a. Kasus Linier

- Untuk x=1,03, perlu dua titik (x_0, y_0) dan (x_1, y_1) masing-masing (1, 0) dan (1.2, 0.26254). Melalui kedua titik dibuat polinom orde 1

$$P_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1$$

dengan x=1,03.

➢ Jadi f(1,03) = ((1.03 – 1.2)/ (1 – 1.2))*0 + ((1.03 – 1)/ (1.2 – 1))*0.26254 = 0.03938

Nilai f(1,03) = 0,03938.

b. Kasus Kuadrat

- Perlu tiga titik yaitu (x_0, y_0), (x_1, y_1), dan (x_2, y_2) yang masing-masing (1, 0), (1.2, 0.26254), dan (1.5, 0.91230).

$$P_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} y_2$$

- Jadi f(1.03) = (((1.03 – 1.2) (1.03 – 1.5))/((1 – 1.2)(1 – 1.5)))*0 + (((1.03 – 1)(1.03 – 1.5))/((1.2 – 1)(1.2 – 1.5)))*0.26254 + (((1.03 – 1)(1.03 – 1.2))/((1.5 – 1)(1.5 – 1.2)))*0.91230 = 0,03068

c. Kasus Kubik

- Perlu empat titik yaitu (1, 0), (1.2, 0.26254), dan (1.5, 0.91230), dan (1.9, 2.31709).
- Bentuk polinom yang dipakai

$$P_3(x) = \frac{(x - x_1(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} y_1$$

$$+ \frac{(x - x_0(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_0 - x_1)(x_0 - x_3)} y_2 + \frac{(x - x_0)(x - x_1(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} y_3$$

- Hitung f(1,03) untuk x=1,03 dan f(2,05) untuk x=2,05 sendiri !

B. INTERPOLASI BEDA TERBAGI NEWTON (*divided-difference*)

- **Kasus Linier**

$$p_1(x) = y_0 + \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}(x - x_0)$$

- Bentuk persamaan ini dapat ditulis :

$$p_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0)$$

dengan $a_0 = y_0 = f(x_0)$, dan (1)

$$a_1 = \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)} = f[x_1, x_0]$$ (2) –>**beda terbagi I.**

atau ditulis kembali

$$p_1(x) = f(x_0) + f[x_1, x_0](x - x_0)$$

Kasus Kuadrat

- $$P_2(x) = P_1(x) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

  dengan $$a_2 = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0}$$ -- beda terbagi kedua.

- Selanjutnya untuk kasus Kubik (analog kasus Kuadrat)

$$P_3(x) = P_2(x) + f[x_3, x_2, x_1, x_0](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

dengan $$f[x_3, x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_3, x_2, x_1] - f[x_2, x_1, x_0]}{x_3 - x_0} = a_3$$

a_3 disebut beda terbagi ketiga.

- beda terbagi ke-n ditulis (untuk Pn(x))

$$f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0] = \frac{f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1] - f[x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_0]}{x_n - x_0}$$

Tabel beda terbagi disajikan berikut ini.

x_k	$f(x_k)$	$f[,]$	$f[,,]$	$f[,,,]$	$f[,,,,]$
x_0	$f(x_0)$				
		$f[x_1,x_0]$			
x_1	$f(x_1)$		$f[x_2,x_1,x_0]$		
		$f[x_2,x_1]$		$f[x_3,x_2,x_1,x_0]$	
x_2	$f(x_2)$		$f[x_3,x_2,x_1]$		$f[x_4,x_3,x_2,x_1,x_0]$
		$f[x_3,x_2]$		$f[x_3,x_2,x_1,x_0]$	
x_3	$f(x_3)$		$f[x_4,x_3,x_2]$		
		$f[x_4,x_3]$			
x_4	$f(x_4)$				

CONTOH

- Carilah nilai fungsi f(x) untuk x=1,03 menggunakan interpolasi linier, kuadrat dan kubik, dan untuk x=2,05 menggunakan interpolasi kubik metoda Beda Terbagi (*Divided Difference*) dari tabel di kolom kanan.

n	x	f(x)
0	1.0	0.00000
1	1.2	0.26254
2	1.5	0.91230
3	1.9	2.31709
4	2.1	3.27194

Jawab:

1. buat tabel beda terbagi sebagai berikut

n	x	f(x)	f[,]	f[, ,]	f[, , ,]	f[, , , ,]
0	1.0	0.00000				
1	1.2	0.26254	1.31270			
2	1.5	0.91230	2.16587	1.706333		
3	1.9	2.31709	3.51198	1.923012	0.240754	
4	2.1	3.27194	4.77425	2.103792	0.200866	-0.03626

a. **Kasus Linear**

$P_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0)$ **dengan $a_0 = f(x_0) = 0$, dan**

$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f[x_1, x_0]$ **= 1,31270. Jadi f(1,03) = 0+1,31270*(1,03-1) = 0,03938.**

b. Kasus Kuadrat

- $$P_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$
  $$P_2(x) = P_1(x) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$
- Dengan $$a_2 = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = f[x_2, x_1, x_0]$$

  a_2 =1.706333, dan **{P1(x) = 0,03938}.**

- Jadi f(1,03) = {0 + 1.31270*(1,03 – 1)} + 1.706333*(1,03 – 1) (1,03 – 1,2) = **0,03938 +** 1.706333*(1,03 – 1) (1,03 – 1,2) = **0.03068**
- Teruskan sendiri untuk kasus **kubiknya**!.

METODA BEDA TERBAGI NEWTON-GREGORY

- Pada polinom beda terbagi Newton, jarak antara titik data adalah sama (*h*).
- Titik-titik $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ dan

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots = x_n - x_{n-1} = h.$$

- Jika nilai fungsi $x=x_i$ dinotasika $f_i=f(x_i)$ maka beda terbagi Newton adalah:

$$f[x_1, x_0] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f_1 - f_0}{h}$$

$$f[x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{2!h^2}$$

BEDA TERBAGI NEWTON-GREGORY

- $$f\left[x_3, x_2, x_1, x_0\right] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{3h}$$

$$= \frac{f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0}{6h^3}$$

$$= \frac{f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0}{3!\,h^3}$$

dan seterusnya.

- **Operator Beda Maju**

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$ **, selanjutnya**

OPERATOR BEDA MAJU (LANJUTAN)

- $$\Delta^2 f_i = \Delta(\Delta f_i) = \Delta(f_{i+1} - f_i) = \Delta f_{i+1} - \Delta f_i$$
  $$= (f_{i+2} - f_{i+1}) - (f_{i+1} - f_i) = f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i$$
  $$\Delta^3 f_i = \Delta(\Delta^2 f_i)$$
- Secara umum dinyatakan dengan

  $\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$; dan $\Delta^{K+1} f_i = \Delta(\Delta^K f_i)$
- Jadi rumusnya

$$f[x_1, x_0] = \frac{f_1 - f_0}{h} = \frac{\Delta f_0}{h}$$

$$f[x_2, x_1, x_0] = \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{2!h^2} = \frac{\Delta^2 f_0}{2!h^2}$$, dan

OPERATOR BEDA MAJU (LANJUTAN)

- $$f[x_3, x_2, x_1, x_0] = \frac{f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0}{3!h^3} = \frac{\Delta^3 f_0}{3!h^3}$$

  dst sehingga operator ke-k adalah

  $$f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0] = \frac{\Delta^k f_0}{k!h^k}$$

- Maka persamaan polinom interpolasi beda maju ditulis menjadi

$$P_n(x) = f_0 + \frac{\Delta f_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 f_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \ldots. +$$

$$+ \frac{\Delta^N f_0}{N!h^N}(x - x_0)\ldots(x - x_{N-1})$$

TABEL BEDA MAJU N-G

x	$f(x)$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$	$\Delta^5 f$
x_0	f_0					
		Δf_0				
x_1	f_1		$\Delta^2 f_0$			
		Δf_1		$\Delta^3 f_0$		
x_2	f_2		$\Delta^2 f_1$		$\Delta^4 f_0$	
		Δf_2		$\Delta^3 f_1$		$\Delta^5 f_0$
x_3	f_3		$\Delta^2 f_2$		$\Delta^4 f_1$	
		Δf_3		$\Delta^3 f_2$		
x_4	f_4		$\Delta^2 f_3$			
		Δf_4				
x_5	f_5					

BENTUK LAIN RUMUS BEDA MAJU N-G

- Titik-titik dengan JARAK SAMA dinyatakan sebagai $x_i = x_0 + i*h$.
- x yang diinterpolasi adalah $x = x_0 + s*h$, s bilangan Real, maka rumus beda maju Newton-Gregory dalam parameter s :

$$P_n(x) = f_0 + \frac{s}{1!}\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \ldots + \frac{s(s-1)(s-2)\ldots(s-n+1)}{n!}\Delta^n f_0$$

- Dalam bentuk binomial

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{s}{k} \Delta^k f_0$$

OPERATOR BEDA MUNDUR NEWTON-GREGORY

- Operator beda terbagi mundur Newton-Gregory didefinisikan:

$$\nabla f(x) = f(x) - f(x-h)$$

$$\nabla f_i = f_i - f_{i-1}$$

$$\nabla^2 f_i = \nabla(\nabla f_i) = \nabla(f_i - f_{i-1}) = \nabla f_i - \nabla f_{i-1}$$

$$= (f_i - f_{i-1}) - (f_{i-1} - f_{i-2}) = f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}$$

- Secara umum ditulis

$$\nabla f_i = f_i - f_{i-1}$$

$$\nabla^{K+1} f_i = \nabla(\nabla^K f_i), \quad K = 0,1,2,\ldots.$$

CONTOH (INTERPOLASI BEDA MAJU N-G)

- Perhatikan tabel beda maju N-G berikut

x_i	$f(x_i)$	delta fi	delta^2 fi	delta^3 fi	delta^4 fi
0,0	1,0000				
1,0	0,5403	-0,4597			
2,0	-0,4161	-0,9564	-0,4967		
3,0	-0,9899	-0,5738	0,3826	0,8793	
4,0	-0,6536	0,3363	0,9101	0,5275	-0,3518

- Nilai f(x) di x=0,6 adalah (**h=1**, dan gunakan **orde 3**):

f(0,6)=1,0 + -0,4597*(0,6 – 0) +(-0,4967/2!)*(0,6 – 0)*(0,6 – 1) + (0,8793/3!)*(0,6 – 0)*(0,6 – 1)*(0,6 – 2) = 0,8330. **[Gunakan varb s !]**

Gunakan orde 4 untuk hitung f(0,6), dan orde 2 dan 3 untuk f(1,8) !

SOAL 1

n	x	f(x)
1	0,1	0,003
2	0,3	0,067
3	0,5	0,148
4	0,7	0,248
5	0,9	0,370
6	1,1	0,518

Lihat Tabel disamping

a. Carilah nilai f(0,26) menggunakan metoda Lagrange, dan metoda *Newton-Gregory Forward* dari tabel masing-masing orde 2 dan 3!

b. Carilah nilai f(0,45) menggunakan metoda *Newton-Gregory Forward* orde 1 dan 3!

SOAL 2

n	X	f(x)
0	-1,0	1,5
1	0,0	3,0
2	2,0	6,0
3	3,5	8,0
4	4,0	16,0

Lihat Tabel di kiri :

a. Carilah nilai f(-0,6) menggunakan metoda Lagrange, dan metoda beda terbagi Newton dari tabel masing-masing orde 2 dan 3!

b. Carilah nilai f(0,75), dan f(3,0) menggunakan metoda beda terbagi Newton orde 1 dan 3!

Soal 3

n	x	f(x)
0	0	1,0
1	0,5	1,2
2	1,0	1,7
3	1,5	1,4
4	2,0	1,1
5	3,0	1,8

a. Interpolasi nilai f(2,5) !

b. Untuk x=4 dan x=6 penentuan nilai fungsi mengikuti f(x) = x/2 + 0,15. Hitung nilai f(4) dan f(6)!

c. Interpolasi nilai f(x) untuk x=3,5 dan x=5!

d. Buat grafik untuk pasangan x, f(x)!

Metoda interpolasi tentukan sendiri!

Sesi ini Selesai
Trim's Banyak

See You
Next session