

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Факультет компьютерных систем и сетей

Кафедра электронных вычислительных машин

Дисциплина: Моделирование

ОТЧЕТ
по лабораторной работе № 5
на тему
ПОСТРОЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ
НЕПРЕРЫВНО-СТОХАСТИЧЕСКОЙ СМО
ВАРИАНТ № 4

Студент:

П.В. Сякачѳв

Проверила:

Ю.О. Герман

МИНСК 2022

1. Цель работы

Изучить методы аналитического моделирования поведения непрерывно-стохастической СМО.

2. Задание

Произвести аналитический расчет вероятностей для графа

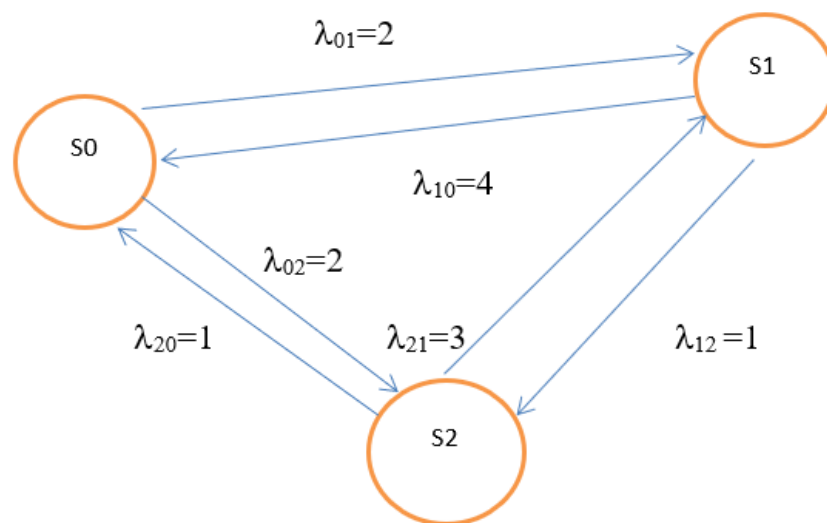


Рисунок 2.1 – граф СМО

3. Ход работы

Количество систем линейных дифференциальных уравнений зависит от количества состояний системы, в данном случае имеется три состояния, следовательно уравнений необходимо на одно меньше, то есть два уравнения. Интенсивности переходов запишем со знаком плюс в случае перехода в состояние, минус – перехода из состояния.

$$\begin{aligned}\frac{dp_0(t)}{dt} &= 4 \times p_1(t) + p_2(t) - 4 \times p_0(t), \\ \frac{dp_1(t)}{dt} &= 2 \times p_0(t) + 3 \times p_2(t) - 5 \times p_1(t)\end{aligned}$$

Теперь составим нормировочное уравнение, которое представляет из себя точно верное утверждение. Очевидно, что сумма вероятностей состояний системы в момент времени t будет равна единице:

$$p_0(t) + p_1(t) + p_2(t) = 1$$

Пусть начальным состоянием системы считается p_0 :

$$\begin{aligned} p_0(0) &= 1, \\ p_1(0) &= 0, \\ p_2(0) &= 0 \end{aligned}$$

Из нормировочного уравнения можно выразить $p_2(t)$:

$$p_2(t) = 1 - p_0(t) - p_1(t)$$

Теперь можно подставить p_2 в дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{dp_0(t)}{dt} &= 1 + 3 \times p_1(t) - 5 \times p_0(t), \\ \frac{dp_1(t)}{dt} &= 3 - p_0(t) - 8 \times p_1(t) \end{aligned}$$

Решение в общем виде имеет вид:

$$\begin{aligned} p_0(t) &= a + be^{kt} \\ p_1(t) &= c + de^{ht} \end{aligned}$$

Возьмём производную по t :

$$\begin{aligned} \frac{dp_0(t)}{dt} &= bk \times e^{kt} \\ \frac{dp_1(t)}{dt} &= dh \times e^{ht} \end{aligned}$$

Воспользуемся граничными условиями. Для $t=0$:

$$\begin{aligned} p_0(t) = 1 &= a + b \\ p_1(t) = 0 &= c + d \end{aligned}$$

Получаем:

$$\begin{aligned} a &= b - 1 \\ c &= -d \end{aligned}$$

Для $t = \infty$ вероятности состояний следует найти для установившегося режима. Для этого производные приравняем 0 и имеем алгебраическую систему:

$$\begin{aligned} 0 &= 4 \times p_1(\infty) + p_2(\infty) - 4 \times p_0(\infty), \\ 0 &= 2 \times p_0(\infty) + 3 \times p_2(\infty) - 5 \times p_1(\infty), \\ 1 &= p_0(\infty) + p_1(\infty) + p_2(\infty) \end{aligned}$$

Подставим:

$$p_2(\infty) = 1 - p_0(\infty) - p_1(\infty)$$

Получим:

$$\begin{aligned} 0 &= 1 - 5 \times p_0(\infty) + 3 \times p_1(\infty), \\ 0 &= 3 - p_0(\infty) - 8 \times p_1(\infty) \end{aligned}$$

$$p_0(\infty) = \frac{17}{43}$$

$$p_1(\infty) = \frac{14}{43}$$

$$\begin{aligned} \frac{17}{43} &= a + be^{kt} \\ \frac{14}{43} &= c + de^{ht} \end{aligned}$$

Здесь члены e^{kt} (e^{ht}) стремятся к 0 при t стремящемся к бесконечности (полагаем k и h отрицательными). Получаем:

$$\begin{aligned} a &= \frac{17}{43}, b = \frac{26}{43} \\ c &= \frac{14}{43}, d = -\frac{14}{43} \end{aligned}$$

Остается найти значения k и h :

$$\begin{aligned} p_0(t) &= a + be^{kt} = \frac{17}{43} + \frac{26}{43}e^{kt} \\ p_1(t) &= c + de^{ht} = \frac{14}{43} - \frac{14}{43}e^{ht} \end{aligned}$$

Подставим в дифференциальные уравнения полученные значения:

$$\begin{aligned}\frac{dp_0(t)}{dt} &= 1 + 3 \times p_1(t) - 5 \times p_0(t), \\ \frac{dp_1(t)}{dt} &= 3 - p_0(t) - 8 \times p_1(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{30}{43}ke^{kt} &= 1 + 3\left(\frac{14}{43} - \frac{14}{43}e^{ht}\right) - 5\left(\frac{17}{43} + \frac{26}{43}e^{kt}\right) \\ -\frac{14}{43}he^{ht} &= 3 + \frac{17}{43} + \frac{26}{43}e^{kt} - 8\left(\frac{14}{43} - \frac{14}{43}e^{ht}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{30}{43}ke^{kt} &= -\frac{42}{43}e^{ht} - \frac{130}{43}e^{kt} \\ -\frac{14}{43}he^{ht} &= \frac{34}{43} + \frac{26}{43}e^{kt} + \frac{112}{43}e^{ht}\end{aligned}$$

Нужно найти h и k . Для этого нужно задать два любых момента времени t (если достаточно одного, то и хватит). Зададим $t=0$:

$$\begin{aligned}\frac{30}{43}k &= -\frac{42}{43} - \frac{130}{43} \\ -\frac{14}{43}h &= \frac{34}{43} + \frac{26}{43} + \frac{112}{43}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k &= -\frac{86}{15}, \\ h &= -\frac{86}{7}\end{aligned}$$

Все коэффициенты найдены. Получили окончательно:

$$\begin{aligned}p_0(t) &= \frac{17}{43} + \frac{26}{43}e^{-\frac{86}{15}t}, \\ p_1(t) &= \frac{14}{43} - \frac{14}{43}e^{-\frac{86}{7}t}, \\ p_2(t) &= \frac{12}{43} - \frac{26}{43}e^{-\frac{86}{15}t} + \frac{14}{43}e^{-\frac{86}{7}t}\end{aligned}$$