Iteracyjne rozwiązywanie układu równań liniowych metodą Jacobiego.

Problem

Chcemy znaleźć rozwiązanie równania różniczkowego:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = -2\alpha\frac{dT}{dx} + \beta x \tag{1}$$

które opisuje zależność temperatury T od położenia x.

Wprowadzamy siatkę, której kolejnymi węzłami są kolejne położenia x:

$$x = x_i = dx \cdot i, \qquad i = 0, 1, 2, ...n \tag{2}$$

więc nasze rozwiązanie T(x) będzie określone dla położeń węzłowych tj. $T(x_i) = T_i$.

Drugą pochodną zamieniamy na symetryczny trójpunktowy iloraz różnicowy:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1}}{dx^2} \tag{3}$$

gdzie dx oznacza krok na siatce.

Pierwszą pochodną położenia po czasie także zastępujemy ilorazem różnicowym:

$$\frac{dT}{dx} = \frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{2dx} \tag{4}$$

i wstawiamy do równania różniczkowego:

$$\frac{T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1}}{dx^2} = -\alpha\frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{dx} + \beta x_i \tag{5}$$

Ostatecznie otrzymaliśmy wzór:

$$(1 - \alpha dx)T_{i-1} - 2T_i + (1 + \alpha dx)T_{i+1} = \beta x_i dx^2 \tag{6}$$

Takie równanie można zapisać w postaci macierzowej jako równanie $AT = b$.

Aby rozwiązać równanie różniczkowe drugiego rzędu musimy podać 2 warunki początkowe/brzegowe. W naszym przypadku jest to temperatura dla $x = 0$ oraz $x = n \cdot dx$: $T_0 = T_n = 0$. Te dwa warunki dodatkowo dołączamy do naszego układu równań, który przyjmuje postać:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1-\alpha dx & -2 & 1+\alpha dx & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1-\alpha dx & -2 & 1+\alpha dx & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha dx & -2 & 1+\alpha dx & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1-\alpha dx & -2 & 1+\alpha dx \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_0 \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ \vdots \\ T_{n-1} \\ T_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta x_1 dx^2 \\ \beta x_2 dx^2 \\ \beta x_3 dx^2 \\ \vdots \\ \beta x_{n-1} dx^2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Metoda Jacobiego

Ponieważ macież układu równań $AT = b$ jest trójprzekątniowa (macierz rzadka), więc można ją przechowywac w pamięci w postaci trzech $(n+1)$ elementowych wektorów:

$$d = [1, -2, -2, ... - 2, 1] \tag{8}$$

$$u = [0, 1 + \alpha dx, 1 + \alpha dx, ...1 + \alpha dx, 0] \tag{9}$$

$$l = [0, 1 - \alpha dx, 1 - \alpha dx, ...1 - \alpha dx, 0] \tag{10}$$

(do wektora u na końcu i do wektora l na początku zostały dodane zera, aby ujednolicić indeksowanie).

Aby w metodzie Jacobiego wyznaczyć i-ty element nowego przybliżenia ($T_n[i]$) dysponując przybliżeniem z poprzedniej iteracji (wektor T_s) należy wykonać poniższą operację:

$$T_n[i] = \frac{1}{d[i]}(b[i] - u[i]T_s[i+1] - l[i]T_s[i-1]) \tag{11}$$

dla każdego $i = 1, 2, ...n - 1$. W przypadku elementów $i = 0$ oraz $i = n$ nie istnieją odpowiadające im elementy $(i - 1)$-ty oraz $(i + 1)$-ty. Musimy określić te elementy w inny sposób. Z pierwszego i ostatniego wiersza macierzy możemy odczytać, że $T[0] = T[n] = 0$ - ustawiamy te wartości na sztywno.

Powyższy schemat iterujemy aż do otrzymania zbieżności, określonej np. poprzez warunek na normę różnicy wektorów: $|T_s - T_n| < 10^{-5}$.

Zadania do wykonania

1. Proszę przyjąć parametry: $n = 500$, $dx = 0.01$, $\alpha = 1$, $\beta = 3$, a następnie znaleźć rozwiązanie układu równań iteracyjną metodą Jacobiego. (60 pkt)

2. Narysować otrzymaną zależność $T(x)$. (10 pkt)

3. Obliczyć otrzymany na końcu (po osiągnięciu zbieżności) wektor reszt: $r = b - AT$ i wyrysować $r(x)$. (20 pkt)

4. Zapisać liczbę iteracji potrzebną do otrzymania zbieżności. (10 pkt)

Do sprawozdania: proszę powtórzyć całe obliczenia (punkty 1-4) z metodą Gaussa-Seidla zamiast Jacobiego (wymaga to jedynie bardzo małej zmiany we wzorze (11), reszta programu pozostaje bez zmian). Proszę skomentować różnice według wskazówek podanych w szablonie sprawozdania.