Τεχνικές Βελτιστοποίησης – Εργασία 3η

Θωμάς Κυριάκος Πραβινός

ΑΕΜ: 9937

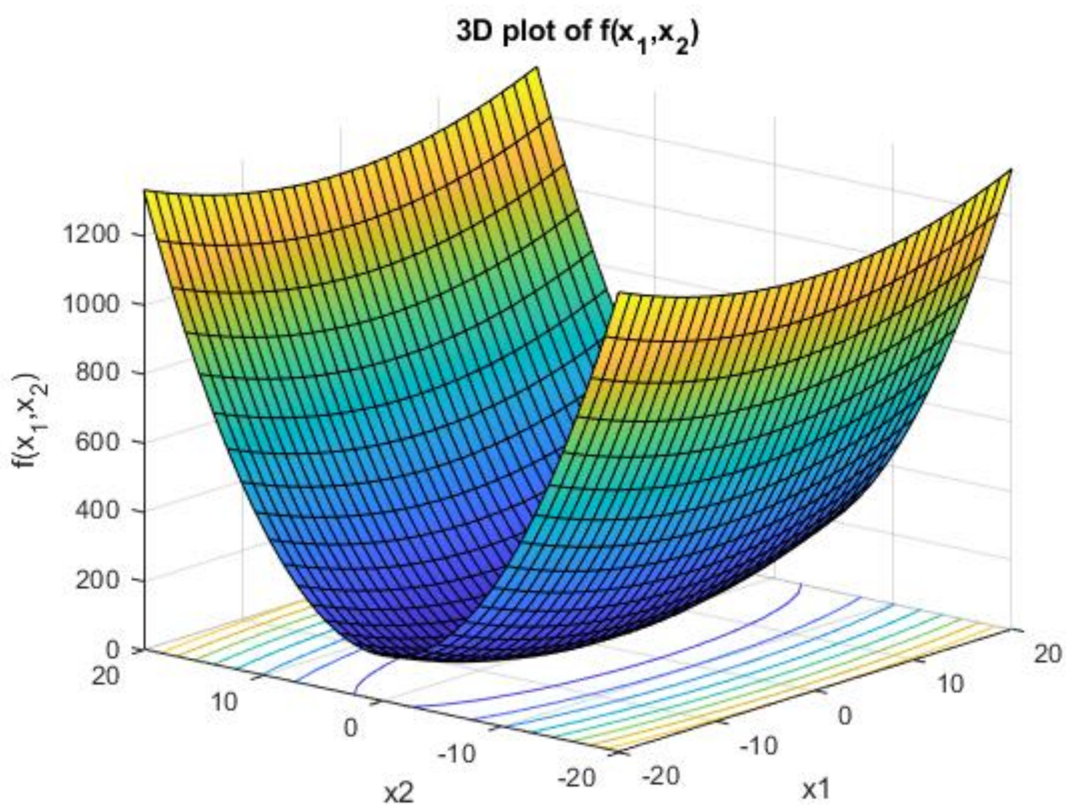
Χειμερινό Εξάμηνο, 2023-24

Εισαγωγή

Στη 3η εργαστηριακή άσκηση θα ασχοληθούμε με την μέθοδο της Μέγιστης Καθόδου με προβολή και πιο συγκεκριμένα για την συνάρτηση:

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ \ f(x) = \frac{1}{3}x_1^2 + 3x_2^2, \ \ x = [x_1 \, x_2]^T.$$

Τρισδιάστατη απεικόνιση:



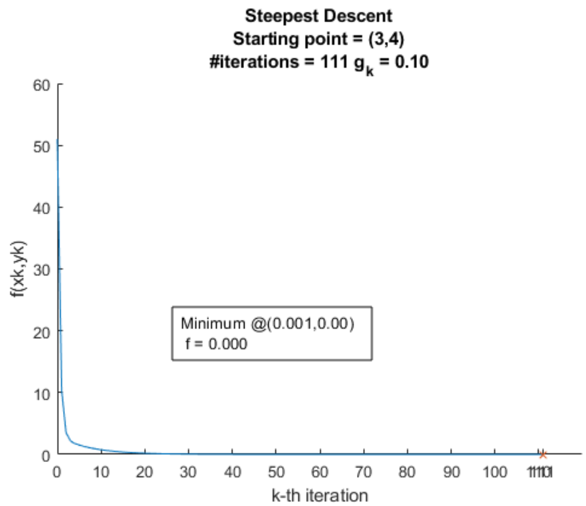
Από την τρισδιάστατη αναπαράσταση της συνάρτησης παρατηρούμε πώς το γεωμετρικό της σχήμα είναι ένα ελλειπτικό παραβολοειδές ενώ μπορούμε να δούμε και πως εμφανίζει ελάχιστο στο (0,0).

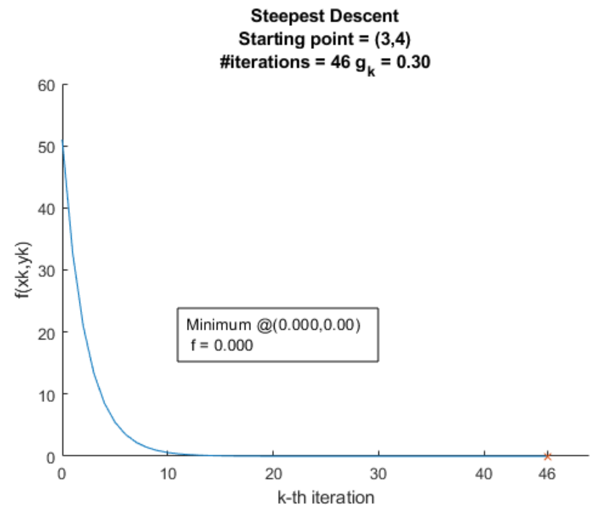
Θέμα 1

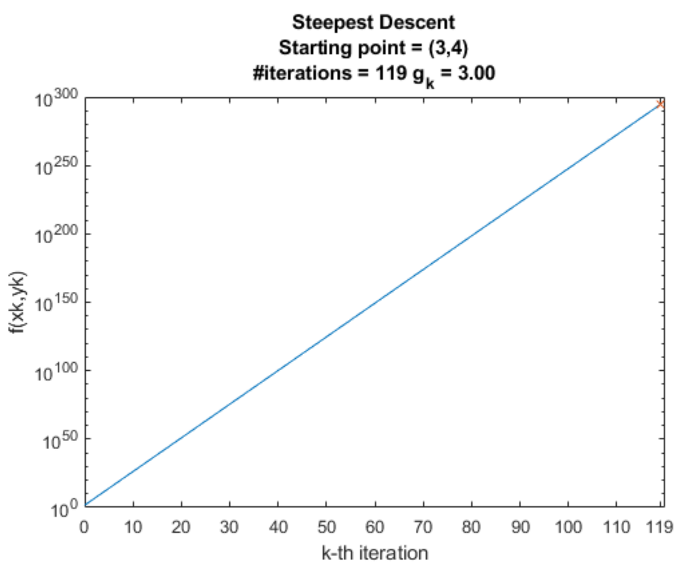
Στο 1ο θέμα της εργασίας καλούμαστε να χρησιμοποιήσουμε στην συνάρτηση την μέθοδο της Μέγιστης Καθόδου που υλοποιήσαμε στην $2^η$ εργασία. Προσπαθούμε λοιπόν να ελαχιστοποιήσουμε την f με ακρίβεια ε = 0.01 και διαφορετικά βήματα:

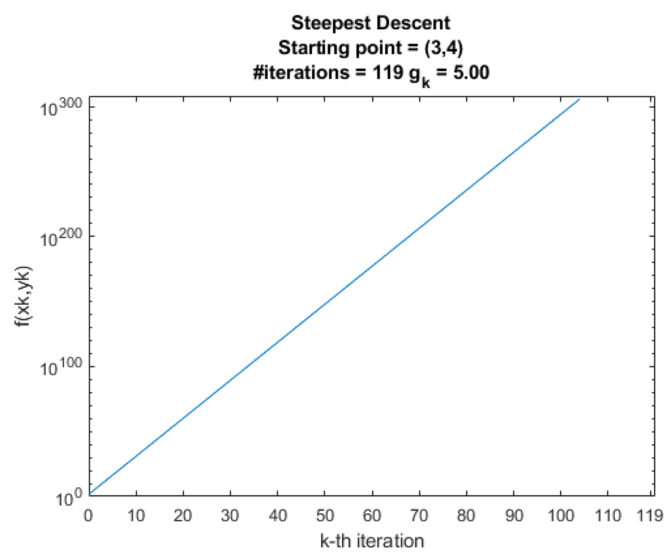
i. $γ_κ = 0.1$
ii. $γ_κ = 0.3$
iii. $γ_κ = 3$
iv. $γ_κ = 5$

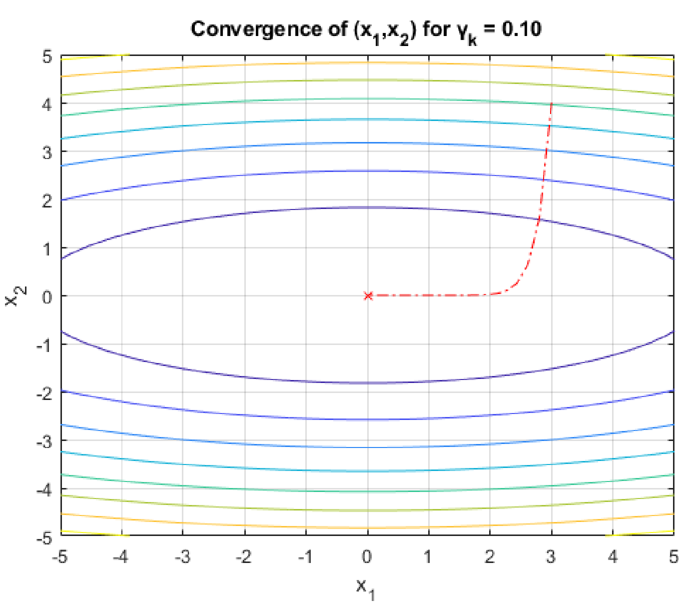
Σαν σημείο εκκίνησης επιλέγω αυθαίρετα το (3,4) και προκύπτουν τα 4 παρακάτω διαγράμματα για κάθε μία από τις τιμές του $γ_κ$. Για να μπορέσει η μέθοδος να τερματίσει τέθηκαν σαν μέγιστο όριο οι 100 επαναλήψεις αλλιώς ο αλγόριθμος έτρεχε ασταμάτητα. Στις 2 πρώτες περιπτώσεις η μέθοδος βρίσκει το ελάχιστο με καλή ακρίβεια, αντίθετα στις 2 τελευταίες περιπτώσεις για πιο μεγάλα $γ_κ$ η μέθοδος αποκλίνει από το ελάχιστο, ενώ οι τιμές της συνάρτησης παρουσιάζουν εκθετική αύξηση. Για αυτό τον λόγο στα 2 τελευταία διαγράμματα οι τιμές της f παρουσιάζονται σε λογαριθμική κλίμακα για να γίνεται εύκολα κατανοητό το διάγραμμα.

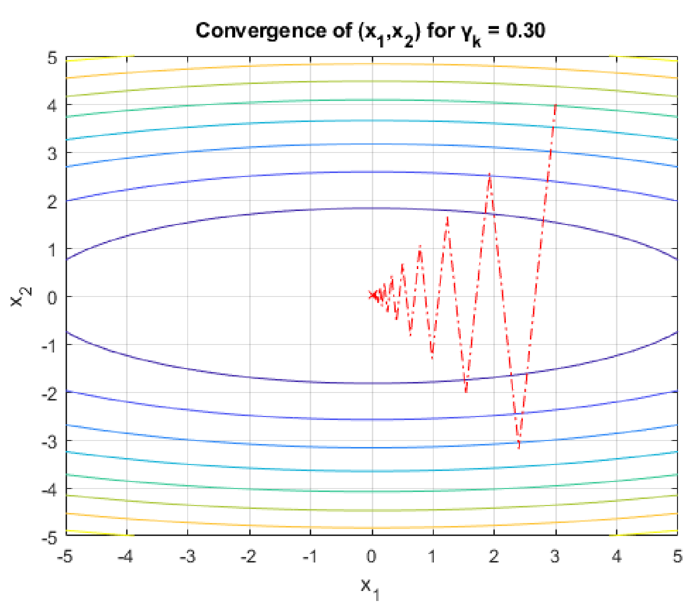

Steepest Descent
Starting point = (3,4)
#iterations = 111 g$_k$ = 0.10
f(xk,yk)
Minimum @(0.001,0.00)
f = 0.000
k-th iteration


Steepest Descent
Starting point = (3,4)
#iterations = 46 g$_k$ = 0.30
f(xk,yk)
Minimum @(0.000,0.00)
f = 0.000
k-th iteration


Steepest Descent
Starting point = (3,4)
#iterations = 119 g$_k$ = 3.00
f(xk,yk)
k-th iteration


Steepest Descent
Starting point = (3,4)
#iterations = 119 g$_k$ = 5.00
f(xk,yk)
k-th iteration


Convergence of (x_1,x_2) for γ_k = 0.10
x_2
x_1


Convergence of (x_1,x_2) for γ_k = 0.30
x_2
x_1

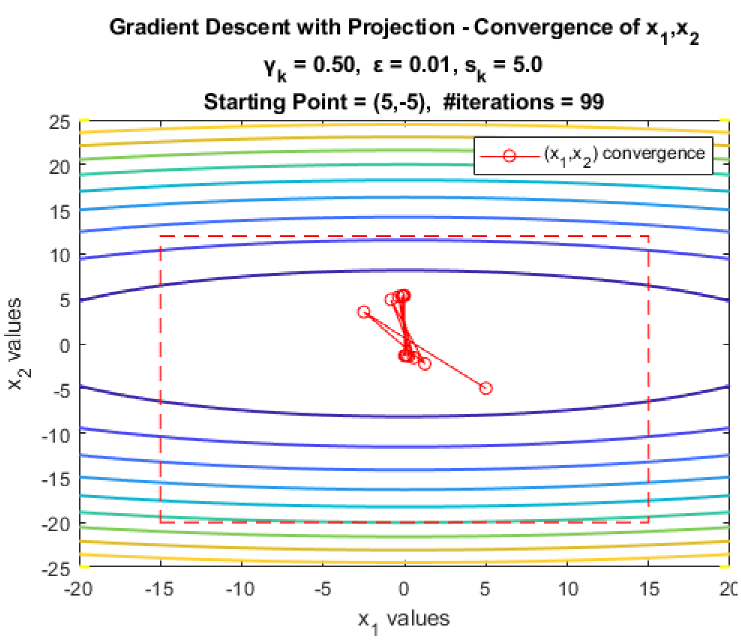
Θέμα 2

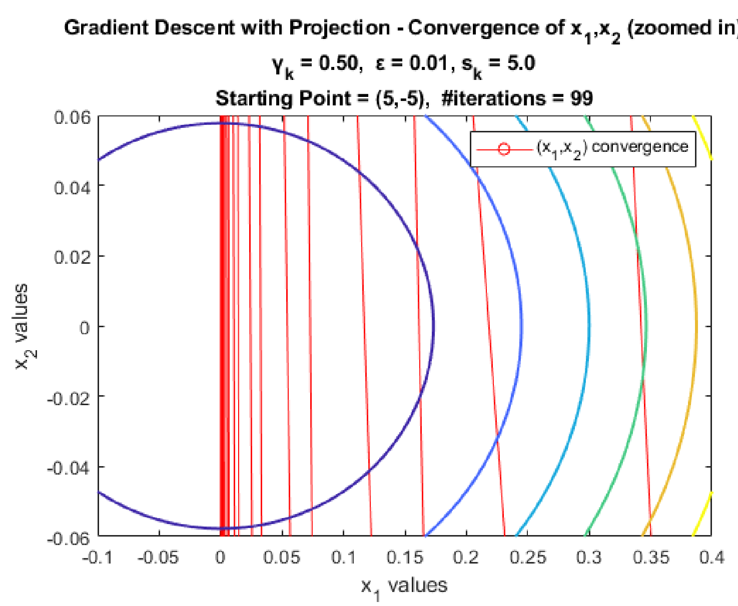
Η μέθοδος Μέγιστης Καθόδου παρότι είναι ένας χρήσιμος αλγόριθμος στον τομέα της ελαχιστοποίησης αντιμετωπίζει προβλήματα όταν το πρόβλημα που προσπαθούμε να επιλύσουμε θέτει περιορισμούς, παραδείγματος χάριν όταν το διάνυσμα μας x_k πρέπει να βρίσκεται συνεχώς εντός ενός κυρτού συνόλου $X \subset R2$. Αυτό το πρόβλημα έρχεται να λύσει η μέθοδος μέγιστης καθόδου με προβολή η οποία ξεκινά με ένα εφικτό σημείο και συνεχίζει με τον αλγόριθμο της μέγιστης καθόδου έως ότου βρει μη εφικτό σημείο x_k οπότε και βρίσκει την προβολή αυτού στο κυρτό σύνολο X και επαναλαμβάνει την ίδια διαδικασία.

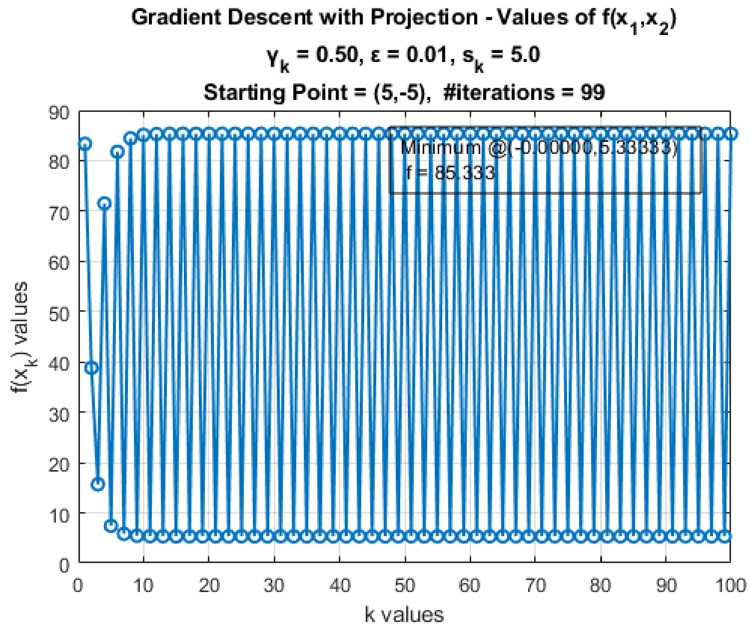
Για την συνέχεια της εργασίας ισχύουν οι παρακάτω περιορισμοί για τα x_1,x_2: $-10 \leq x_1 \leq 5$ και $-8 \leq x_2 \leq 12$

Τέτοιοι περιορισμοί δημιουργούν παραλληλόγραμμα που φράζουν εσωτερικά τους τις τιμές της συνάρτησης.

Στο Θέμα 2 χρησιμοποιούμε την μέθοδο μέγιστης καθόδου με προβολή με s_k = 5, γ_k = 0.5, ε = 0.01 και αρχικό σημείο εκκίνησης του αλγορίθμου το (5,-5).



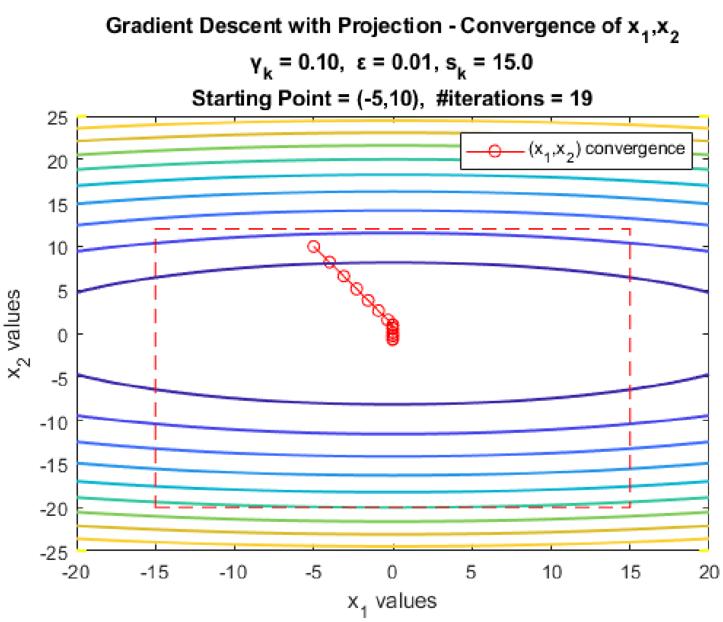


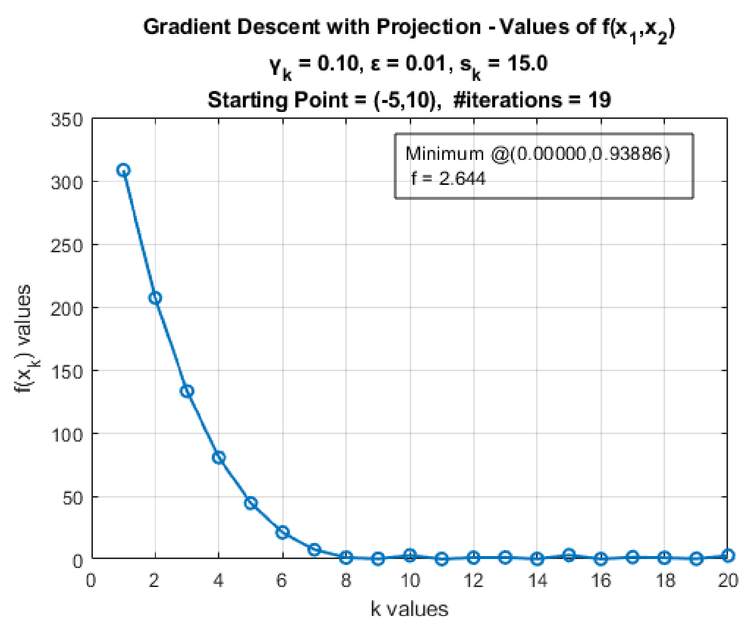


Η μέθοδος δεν συγκλίνει σε ικανοποιητικό αριθμό επαναλήψεων. Η τροποποίηση του γ_κ θα μπορούσε να επηρεάσει την σύκλιση.

Θέμα 3

Στο Θέμα 3 χρησιμοποιούμε την μέθοδο μέγιστης καθόδου με προβολή με s_k = 15, γ_k = 0.1, ε = 0.01 και αρχικό σημείο εκκίνησης του αλγορίθμου το (5,-10).

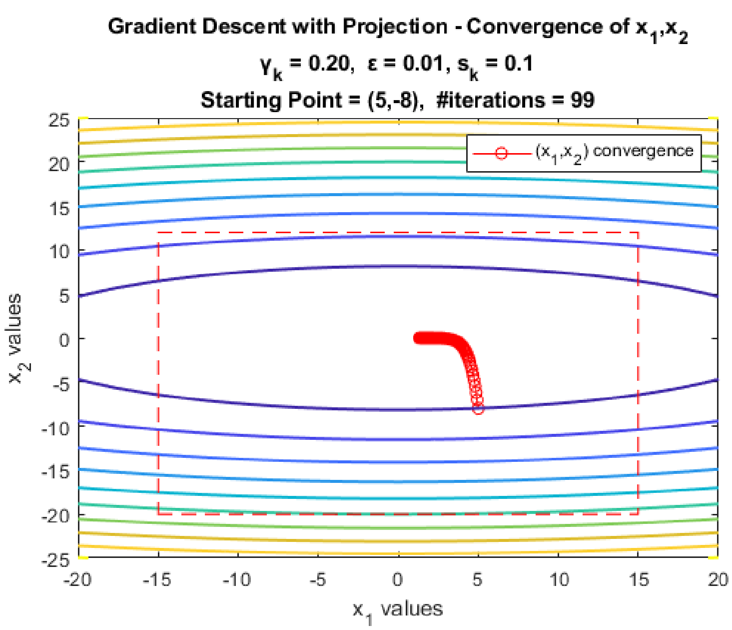


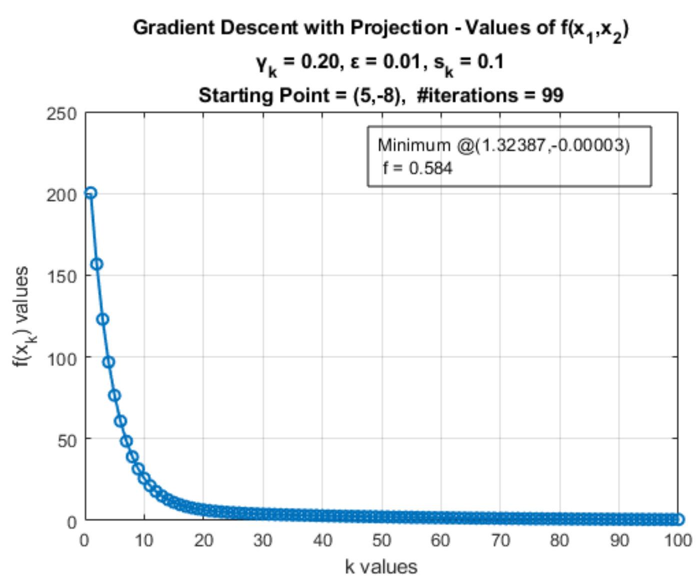


Η μέθοδος συγκλίνει και σε ικανοποιητικό αριθμό επαναλήψεων.

Θέμα 4

Στο Θέμα 3 χρησιμοποιούμε την μέθοδο μέγιστης καθόδου με προβολή με $s_k = 0.1$, $\gamma_k = 0.2$, $\varepsilon = 0.01$ και αρχικό σημείο εκκίνησης του αλγορίθμου το (8,-10). Πριν δοκιμάσουμε να τρέξουμε τον αλγόριθμο για τις παραπάνω αρχικές συνθήκες παρατηρούμε πως η τιμή $x_1 = 8$ και η τιμή $x_2 = -10$ δεν ανήκουν στο κυρτό σύνολο των περιορισμών που ορίσαμε παραπάνω. Η πρώτη κλήση του αλγορίθμου θα χρησιμοποιήσει την προβολή στο X οπότε το αρχικό σημείο θα γίνει το (5,-8) οδηγώντας δηλαδή τον αλγόριθμο μέσα στο διάστημα των περιορισμών έστω και αν αυτό είναι στο όριο του.





Η μέθοδος συγκλίνει σε αργό ρυθμό.