**TU Berlin – FG Angewandte Mathematik**
Prof. Dr. Gabriele Steidl
Dr. Johannes Hertrich, Jonas Bresch, Viktor Stein

**Numerische Mathematik I**
Wintersemester 2023/24

# Übung 3 - Das Newton-Verfahren

## 1 Wiederholung - Das Newton Verfahren

Seien $n \in \mathbb{N}$, $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *stetig differenzierbar* und es existiere eine Lösung $x^* \in \mathbb{R}^n$ der *nichtlinearen* Gleichung

$$F(x^*) = 0. \tag{1.1}$$

Unser **Ziel** ist es, ein solches $x^*$ zu finden.

Ein klassische Herangehensweise ist die *Approximation* der möglicherweise sehr komplizierten Funktion $F$. Eine Taylorentwicklung erster Ordnung von $F$ in $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ergibt

$$0 = F(x^*) = F(x_0) + \boldsymbol{J}_F(x_0) \cdot (x^* - x_0) + \mathcal{O}(\|x^* - x_0\|_2^2).$$

Ist $\boldsymbol{J}_F(x_0)$ invertierbar und $\|x^* - x_0\|_2$ hinreichend klein, dann können wir die nur ungefähr geltende Gleichung

$$0 = F(x_0) + \boldsymbol{J}_F(x_0) \cdot (x^* - x_0) \tag{1.2}$$

nach dem gesuchten $x^*$ auflösen:

$$\text{(1.2)} \iff x^* = x_0 - \big(\boldsymbol{J}_F(x_0)\big)^{-1} \cdot F(x_0)$$

Diese Überlegung liefert die folgende algorithmische Idee zum rekursiven Bestimmen von $x^*$:

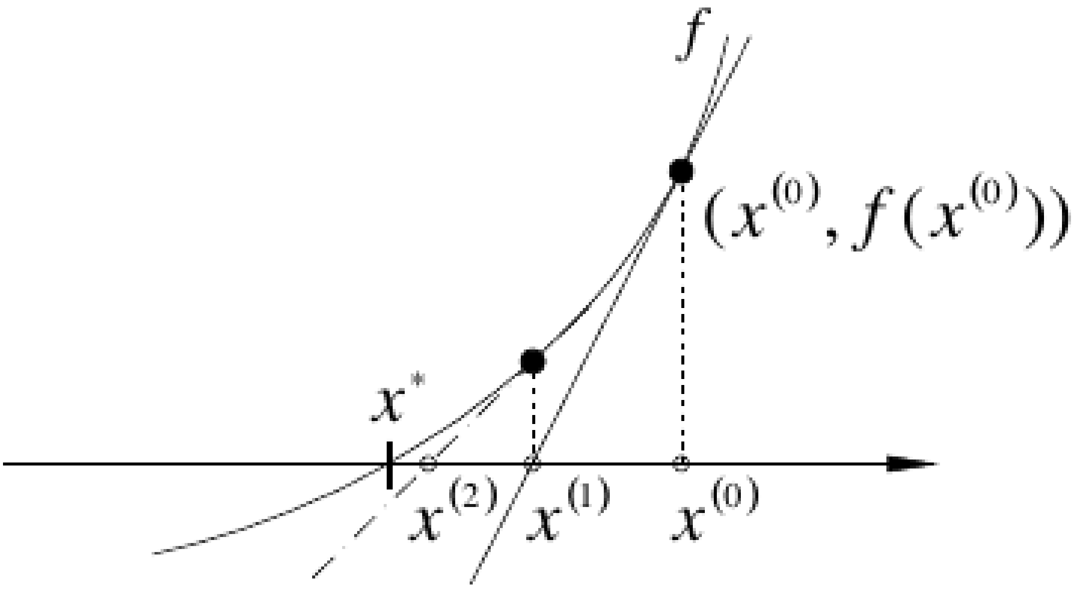
$$\text{wähle } x^{(0)} \in \mathbb{R}^d, \text{dann } x^{(k+1)} := x^{(k)} - \big(\boldsymbol{J}_F(x^{(k)})\big)^{-1} \cdot F(x^{(k)}) \qquad \forall k \in \mathbb{N},$$

unter der Bedingung, dass $\big(\boldsymbol{J}_F(x^{(k)})\big)^{-1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ existiert.

Das Newton-Verfahren wird abgebrochen, sobald eine der folgenden Bedingung erfüllt ist:

1. die Iteration stagniert, das heißt
$$\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_2 < \delta,$$
2. die Funktionswerte verschwinden, das heißt
$$\|F(x^{(k)})\|_2 < \varepsilon,$$
3. oder die maximale Anzahl an Iterationen erreicht ist, das heißt
$$k > K.$$

Hierbei sind $\delta, \varepsilon > 0$ und $K \in \mathbb{N}$ geeignete Konstanten.




Im Eindimensionalen, das heißt für $d = 1$, existiert die folgende Veranschaulichung dieses Verfahrens: anstatt die gesamte Funktion $F$ nullzusetzen, linearisieren am Punkt $x^{(k)}$ wir die Funktion $F$, das heißt wir betrachten die lineare Taylor-Approximation $x \mapsto F(x^{(k)}) + \boldsymbol{J}_F(x^{(k)}) \cdot (x - x^{(k)})$ und berechnen ihre Nullstelle.

Da das Invertieren von Matrizen schlecht konditioniert und zeitaufwändig ist, ersetzen wir die obige Rekursion durch die folgenden beiden Schritte:

1. Löse das lineare Gleichungssystem $\boldsymbol{J}_F(x^{(k)})d^{(k)} = -F(x^{(k)})$ nach $d^{(k)}$ auf.
2. Setze $x^{(k+1)} := x^{(k)} + d^{(k)}$.

# 2 Anwendungen des Newton-Verfahrens

## 2.1 Die $d$-te Einheitswurzel

Das Newton-Verfahren kann auch auf komplexe differenzierbare Funktionen $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ angewendet werden. Ein besonders simples Beispiel ist das Finden einer $d$-ten Einheitswurzel, das heißt einer Lösung von

$$z^d = 1 \qquad \text{bzw.} \qquad z^d - 1 = 0.$$

Die Newton-Iteration ist dann

$$z^{(k+1)} := z^{(k)} - \frac{(z^{(k)})^d - 1}{d\,(z^{(k)})^{d-1}} = \frac{1}{d}\left((d-1)\,z^{(k)} + \frac{1}{(z^{(k)})^{d-1}}\right).$$

## 2.2 Nichtlineare Optimierung

Das Newton-Verfahren kann auch für das Finden eines Minimums $x^* \in \mathbb{R}^n$ einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion $G\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ verwendet werden, indem das Newton-Verfahren auf den Gradienten angewendet wird, das heißt wir wählen $F := \nabla G$ und erhalten wie oben

$$\nabla G(x) \approx \nabla G(x^{(k)}) + H_G(x^{(k)})(x - x^{(k)}) = 0.$$

Umstellen liefert die Newton-Iteration

$$x^{(k+1)} := x^{(k)} - \big(H_G(x^{(k)})\big)^{-1} \nabla G(x^{(k)}).$$

Alternative kann man, um ein Minimum von $G$ zu finden, eine Taylor-Entwicklung zweiter Ordnung aufschreiben:

$$G(x) \approx G(x^{(k)}) + \nabla G(x^{(k)})(x - x^{(k)}) + \tfrac{1}{2}\,(x - x^{(k)})^\mathsf{T} H_G(x^{(k)})(x - x^{(k)}) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d. \tag{2.1}$$

Nun setzen wir die Ableitung nach $x$ von der *Approximation* von $G$ auf der rechten Seite von (2.1) gleich Null:

$$\nabla G(x^{(k)}) + H_G(x^{(k)})(x - x^{(k)}) = 0.$$

Umstellen liefert die Newton-Iteration

$$x^{(k+1)} := x^{(k)} - \big(H_G(x^{(k)})\big)^{-1} \nabla G(x^{(k)}).$$

Dieser Ansatz erfordert, dass $H_G(x^{(k)})$ positiv definit ist!

Letztlich ist es wichtig anzumerken, dass deswegen das Newton-Verfahren nur zu stationären Punkten (z.B. auch Maxima oder Sattelpunkten) konvergiert.