هندسه تحلیلی:

نرم چیست؟

نرم تابعی است که مشخصه‌های زیر را دارد:

1. نرم‌ها مقادیری نامنفی هستند. اگر نرم‌ها را به عنوان طول در نظر بگیریم، می‌توان به سادگی دید که چرا نمی‌توانند منفی شوند.
2. نرم‌ها صفر هستند، اگر و فقط اگر بردار صفر باشد.
3. نرم‌ها از **نامساوی مثلثی** تبعیت می‌کنند.
4. نرم یک بردار ضرب در یک اسکالر، برابر با ضرب قدر مطلق این اسکالر در نرم بردار است. ||k·u||=|k|·||u||||k·u||=|k|·||u|| :

نرم xx را معمولاً با نماد ||x||||x|| نشان می‌دهند.

اما نامساوی مثلثی چیست؟ نامساوی مثلثی بیان می‌کند که نرم مجموع چند بردار، کوچک‌تر یا مساوی با مجموع نرم‌های این بردارها است.

||u+v||≤||u||+||v||

محاسبه نرم p

در این بخش، نحوه به دست آوردن نرم p بردار را بیان می‌کنیم. گام‌های محاسبه نرم p به صورت زیر است:

1. قدر مطلق هر درایه را حساب کنید.
2. مقادیر به دست آمده را به توان p برسانید.
3. همه قدر مطلق‌های به توان p رسیده را با هم جمع کنید.
4. نتیجه نهایی را به توان 1/p برسانید.

موارد بالا را می‌توان با فرمول زیر بیان کرد:

$$||x||_p = (\sum_i |x_i|^p)^{1/p}$$

برای موارد گوناگون، نرم‌های مختلفی تعریف شده است که در ادامه، مهم‌ترین آن‌ها را بیان خواهیم کرد.

نرم L0

اگر هر عددی را به توان 0 برسانیم، حاصل آن برابر با 1 خواهد شد (به جز 0 که حاصل آن برابر با صفر است). بنابراین، حاصل این نرم، متناظر با تعداد عناصر غیرصفر در بردار است. البته این مورد، در واقع یک نرم نیست، زیرا اگر بردار را در α ضرب کنیم، عدد تغییری نخواهد کرد (قانون ۴ بالا).

نرم L1(نرم منهتن)

اگر p=1، آنگاه نرم برابر با مجموع قدر مطلق‌ها خواهد بود:

$$||x||_1 = \sum_i |x_i|$$

نرم اقلیدسی (نرم L2)

نرم اقلیدسی نرم pبا p=2است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$||x||_2 = (\sum_i x_i^2)^{1/2} \Leftrightarrow \sqrt{\sum_i x_i^2}$$

ضرب داخلی:

Let $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, and $\mathbf{w}$ be vectors in $\mathbb{R}^n$, and let c be a scalar. Then

a. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$

b. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$

c. $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v})$

d. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$, and $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ if and only if $\mathbf{u} = \mathbf{0}$

$$(c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_p\mathbf{u}_p) \cdot \mathbf{w} = c_1(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{w}) + \cdots + c_p(\mathbf{u}_p \cdot \mathbf{w})$$

Definition 3.2. Let V be a vector space and $\Omega : V \times V \to \mathbb{R}$ be a bilinear mapping that takes two vectors and maps them onto a real number. Then

- Ω is called *symmetric* if $\Omega(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \Omega(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ for all $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$, i.e., the order of the arguments does not matter.
- Ω is called *positive definite* if

$$\forall \boldsymbol{x} \in V \backslash \{\mathbf{0}\} : \Omega(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) > 0, \quad \Omega(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0. \tag{3.8}$$

Definition 3.3. Let V be a vector space and $\Omega : V \times V \to \mathbb{R}$ be a bilinear mapping that takes two vectors and maps them onto a real number. Then

- A positive definite, symmetric bilinear mapping $\Omega : V \times V \to \mathbb{R}$ is called an *inner product* on V. We typically write $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ instead of $\Omega(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.
- The pair $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ is called an *inner product space* or (real) *vector space with inner product*. If we use the dot product defined in (3.5), we call $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ a *Euclidean vector space*.

  We will refer to these spaces as inner product spaces in this book.

Example 3.3 (Inner Product That Is Not the Dot Product)

An inner product is a generalization of the dot product. In a vector space, it is a way to multiply vectors together, with the result of this multiplication being a scalar.

ماتریس متقارن

اگر Mماتریس متقارن باشد، حتما با ترانهاده خودش برابر است. یعنی رابطه زیر برای ماتریس متقارن Mبرقرار است.

$$M^T = M$$

ماتریس معین مثبت

ماتریس Mکه متقارن و مربعی $n \times n$ است را معین مثبت می‌نامیم اگر برای هر بردار ستونی غیرصفر z با n سطررابطه زیر برقرار باشد:

$$M \text{ positive definite} \quad \Longleftrightarrow \quad z^{\mathsf{T}} M z > 0 \text{ for all } z \in \mathrm{R}^n \setminus \circ$$

همانطور که در رابطه بالا مشاهده می‌کنید، در تعریف ماتریس معین مثبت، از یک بردار دلخواه zاستفاده شده است که همه عناصر آن صفر نیستند. در نتیجه این بردار دارای یک جهت است. وقتی که ماتریس Mرا در بردار zضرب می‌کنیم، جهت بردار zرا تغییر داده‌ایم. واضح است که ماتریس Mروی بردار zاثر کرده و با تبدیل صورت گرفته، بردار حاصل یا Mzتغییر جهت داده است.

اگر ماتریس M معین مثبت باشد، می‌توان نتیجه گرفت که با ضرب این ماتریس در بردار z میزان تغییر جهت در بردار حاصل، کمتر از $\pi/2$است. به تصویر زیر دقت کنید. به این ترتیب به نظر می‌رسد جهت بردار عکس نخواهد شد. یعنی زاویه بین بردار z و تبدیل یافته آن که با Mz نشان داده می‌شود، کمتر از $\pi/2$است. در نتیجه $\cos\theta$ منفی نخواهد شد. به این ترتیب رابطه z^TMzهمیشه مثبت است.

If $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ is symmetric, positive definite, then

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \hat{\boldsymbol{x}}^\top \boldsymbol{A} \hat{\boldsymbol{y}} \tag{3.14}$$

defines an inner product with respect to an ordered basis B, where $\hat{\boldsymbol{x}}$ and $\hat{\boldsymbol{y}}$ are the coordinate representations of $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ with respect to B.

Theorem 3.5. *For a real-valued, finite-dimensional vector space V and an ordered basis B of V, it holds that $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ is an inner product if and only if there exists a symmetric, positive definite matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ with*

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \hat{\boldsymbol{x}}^\top \boldsymbol{A} \hat{\boldsymbol{y}} \,. \tag{3.15}$$

The following properties hold if $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ is symmetric and positive definite:

- The null space (kernel) of $\boldsymbol{A}$ consists only of $\boldsymbol{0}$ because $\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} > 0$ for all $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$. This implies that $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ if $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$.
- The diagonal elements a_{ii} of $\boldsymbol{A}$ are positive because $a_{ii} = \boldsymbol{e}_i^\top \boldsymbol{A} \boldsymbol{e}_i > 0$, where $\boldsymbol{e}_i$ is the ith vector of the standard basis in $\mathbb{R}^n$.

زاویه بین بردار ها و بردار های اورتوگونال

$$\cos \omega = \frac{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle}{\|\boldsymbol{x}\| \, \|\boldsymbol{y}\|} \,.$$

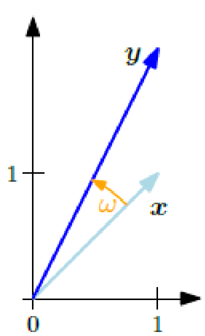
تعامد بردارها

فرض کنید $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_m\}$ مجموعه بردارهایی در R^n باشند. این مجموعه بردار را «مجموعه متعامد» (rthogonal Set
دارای تعامد می‌نامیم اگر شرایط زیر برقرار باشد:

۱. $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = 0$ برای هر $i \neq j$
۲. $\vec{u}_i \neq \vec{0}$ برای هر i

اگر یک مجموعه بردار متعامد داشته باشیم و آن‌ها را به گونه‌ای نرمالیزه یا بهنجار کنیم که طول آن‌ها برابر با یک باشد، مج
حاصل «مجموعه یکامتعامد» (Orthonormal Set) از بردارها خواهد بود. این مجموعه را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

Figure 3.5 The angle ω between two vectors $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ is computed using the inner product.



orthogonal

مجموعه یکا متعامد بردارها

مجموعه بردارهای $\{\overrightarrow{w}_1, \cdots, \overrightarrow{w}_m\}$ را مجموعه یکا متعامد می‌گوییم اگر

$$\overrightarrow{w}_i \cdot \overrightarrow{w}_j = \delta_{ij} = \{\begin{matrix} 1 \text{ if } i = j \\ 0 \text{ if } i \neq j \end{matrix}$$

لازم به ذکر است که همه مجموعه‌های یکامتعامد، متعامد نیز هستند، اما عکس این گفته لزوماً صحیح نیست؛ زیرا بردارها ممکن است بهنجار نباشند. برای بهنجار کردن بردارها، لازم است هرکدام از آن‌ها را بر طولش تقسیم کنیم.

بهنجار کردن یک مجموعه بردار متعامد

بهنجار کردن یک مجموعه فرایند تبدیل یک مجموعه بردار متعامد (اما غیر یکامتعامد) به یک مجموعه یکامتعامد است. اگر $\{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_k\}$ یک زیرمجموعه متعامد از R^n باشد، آنگاه، مجموعه

$$\left\{\frac{1}{\|\overrightarrow{u}_1\|}\overrightarrow{u}_1, \frac{1}{\|\overrightarrow{u}_2\|}\overrightarrow{u}_2, \ldots, \frac{1}{\|\overrightarrow{u}_k\|}\overrightarrow{u}_k\right\}$$

ماتریس متعامد

در جبر خطی، به ماتریسی متعامد گفته می‌شود که درایه‌های آن به‌صورت حقیقی بوده و سطرها و ستون‌های آن نیز به شکل بردارهایی عمود و یکه باشند. بنابراین می‌توان گفت اگر ماتریسی همچون Q متعامد باشد، می‌توان رابطه زیر را برای آن بیان کرد:

$$Q^{\mathrm{T}}Q = QQ^{\mathrm{T}} = I$$

توجه داشته باشید که در رابطه فوق T نشان‌دهنده ترانهاده ماتریس بوده و I نیز بیان‌کننده ماتریس همانی است. با توجه به رابطه فوق می‌توان گفت ترانهاده یک ماتریس متعامد، برابر با ماتریس معکوس همان ماتریس است. شکل ریاضیاتی این گزاره به‌صورت زیر است.

$$Q^{\mathrm{T}} = Q^{-1}$$

یک ماتریس متعامد حتما دارای ماتریس معکوس نیز هست. هم‌چنین دترمینان هر ماتریس معکوس یکی از اعداد ± 1 است. ماتریس متعامد نوعی خاص از ماتریس یکانی محسوب می‌شود. ضرب کردن ماتریسی همچون Q در بردارهایی فرضی همچون u و v، تغییری در حاصل‌ضرب نهایی ایجاد نخواهد کرد. بنابراین می‌توان رابطه زیر را بیان کرد:

$$\mathrm{u} \cdot \mathrm{v} = (Q\mathrm{u}) \cdot (Q\mathrm{v})$$

پایه اورتوگونال:

DEFINITION An **orthogonal basis** for a subspace W of $\mathbb{R}^n$ is a basis for W that is also an orthogonal set.

THEOREM 5 Let $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p\}$ be an orthogonal basis for a subspace W of $\mathbb{R}^n$. For each $\mathbf{y}$ in W, the weights in the linear combination

$$\mathbf{y} = c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_p\mathbf{u}_p$$

are given by

$$c_j = \frac{\mathbf{y}\cdot\mathbf{u}_j}{\mathbf{u}_j\cdot\mathbf{u}_j} \qquad (j = 1, \dots, p)$$

PROOF As in the preceding proof, the orthogonality of $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p\}$ shows that

$$\mathbf{y}\cdot\mathbf{u}_1 = (c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_p\mathbf{u}_p)\cdot\mathbf{u}_1 = c_1(\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_1)$$

Since $\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_1$ is not zero, the equation above can be solved for c_1. To find c_j for $j = 2, \dots, p$, compute $\mathbf{y}\cdot\mathbf{u}_j$ and solve for c_j. ■

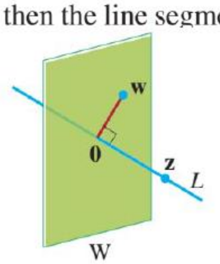
مکمل متعامد:

If a vector $\mathbf{z}$ is orthogonal to every vector in a subspace W of $\mathbb{R}^n$, then $\mathbf{z}$ is said to be **orthogonal to** W.

The set of all vectors $\mathbf{z}$ that are orthogonal to W is called the **orthogonal complement** of W

$$W^{\perp}$$

EXAMPLE 6 Let W be a plane through the origin in $\mathbb{R}^3$, and let L be the line through the origin and perpendicular to W. If $\mathbf{z}$ and $\mathbf{w}$ are nonzero, $\mathbf{z}$ is on L, and $\mathbf{w}$ is in W, then the line segment from $\mathbf{0}$ to $\mathbf{z}$ is perpendicular to the line segment from $\mathbf{0}$ to



$$L = W^{\perp} \quad \text{and} \quad W = L^{\perp}$$

ضرب داخلی توابع:

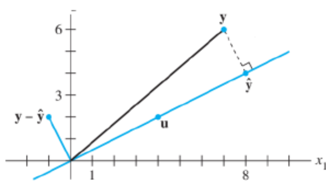
An inner product of two functions $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ and $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ can be defined as the definite integral

$$\langle u, v \rangle := \int_a^b u(x)v(x)dx \tag{3.37}$$

Orthogonal Projection:

Given a nonzero vector $\mathbf{u}$ in $\mathbb{R}^n$, consider the problem of decomposing a vector $\mathbf{y}$ in $\mathbb{R}^n$ into the sum of two vectors, one a multiple of $\mathbf{u}$ and the other orthogonal to $\mathbf{u}$. We wish to write

$$\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}} + \mathbf{z} \tag{1}$$



$$\hat{\mathbf{y}} = \alpha\mathbf{u} \qquad \mathbf{z} = \mathbf{y} - \alpha\mathbf{u}$$

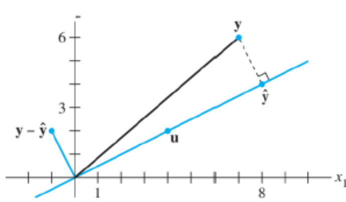
$$0 = (\mathbf{y} - \alpha\mathbf{u})\cdot\mathbf{u} = \mathbf{y}\cdot\mathbf{u} - (\alpha\mathbf{u})\cdot\mathbf{u} = \mathbf{y}\cdot\mathbf{u} - \alpha(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})$$

$$\alpha = \frac{\mathbf{y}\cdot\mathbf{u}}{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}} \text{ and } \hat{\mathbf{y}} = \frac{\mathbf{y}\cdot\mathbf{u}}{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}\mathbf{u}.$$

The vector $\hat{\mathbf{y}}$ is called the **orthogonal projection of y onto u**, and the vector $\mathbf{z}$ is called the **component of y orthogonal to u**.

subspace L spanned by **u**

Sometimes **y**O is denoted by proj$_L$ **y** and is called the **orthogonal projection of y onto** L. That is,



$$\boxed{\hat{\mathbf{y}} = \text{proj}_L\, \mathbf{y} = \frac{\mathbf{y}\cdot\mathbf{u}}{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}\mathbf{u}}$$

The Orthogonal Decomposition Theorem

Let W be a subspace of $\mathbb{R}^n$. Then each $\mathbf{y}$ in $\mathbb{R}^n$ can be written uniquely in the form

$$\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}} + \mathbf{z} \tag{1}$$

where $\hat{\mathbf{y}}$ is in W and $\mathbf{z}$ is in $W^{\perp}$. In fact, if $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p\}$ is any orthogonal basis of W, then

$$\hat{\mathbf{y}} = \frac{\mathbf{y}\cdot\mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 + \cdots + \frac{\mathbf{y}\cdot\mathbf{u}_p}{\mathbf{u}_p\cdot\mathbf{u}_p}\mathbf{u}_p \tag{2}$$

and $\mathbf{z} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}$.

If $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p\}$ is an orthogonal basis for W and if $\mathbf{y}$ happens to be in W, then the formula for $\text{proj}_W\, \mathbf{y}$ is exactly the same as the representation of $\mathbf{y}$ given in Theorem 5 in Section 6.2. In this case, $\text{proj}_W\, \mathbf{y} = \mathbf{y}$.

If $\mathbf{y}$ is in $W = \text{Span}\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p\}$, then $\text{proj}_W\, \mathbf{y} = \mathbf{y}$.

The corresponding *projection error* is the norm of the difference vector between the original vector and its projection onto U, i.e.,

If $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p\}$ is an orthonormal basis for a subspace W of $\mathbb{R}^n$, then

$$\text{proj}_W\, \mathbf{y} = (\mathbf{y}\cdot\mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{y}\cdot\mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 + \cdots + (\mathbf{y}\cdot\mathbf{u}_p)\mathbf{u}_p \tag{4}$$

If $U = [\,\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{u}_p\,]$, then

$$\text{proj}_W\, \mathbf{y} = UU^T\mathbf{y} \quad \text{for all } \mathbf{y} \text{ in } \mathbb{R}^n \tag{5}$$

Suppose U is an $n \times p$ matrix with orthonormal columns, and let W be the column space of U. Then

$$U^TU\mathbf{x} = I_p\mathbf{x} = \mathbf{x} \quad \text{for all } \mathbf{x} \text{ in } \mathbb{R}^p \qquad \text{Theorem 6}$$

$$UU^T\mathbf{y} = \text{proj}_W\, \mathbf{y} \quad \text{for all } \mathbf{y} \text{ in } \mathbb{R}^n \qquad \text{Theorem 10}$$

الگوریتم گرام اشمیت:

The Gram–Schmidt Process

Given a basis $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p\}$ for a nonzero subspace W of $\mathbb{R}^n$, define

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= \mathbf{x}_1 \\
\mathbf{v}_2 &= \mathbf{x}_2 - \frac{\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 \\
\mathbf{v}_3 &= \mathbf{x}_3 - \frac{\mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2 \\
&\vdots \\
\mathbf{v}_p &= \mathbf{x}_p - \frac{\mathbf{x}_p \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{x}_p \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2 - \cdots - \frac{\mathbf{x}_p \cdot \mathbf{v}_{p-1}}{\mathbf{v}_{p-1} \cdot \mathbf{v}_{p-1}}\mathbf{v}_{p-1}
\end{aligned}$$

Then $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ is an orthogonal basis for W. In addition

$$\operatorname{Span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\} = \operatorname{Span}\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\} \qquad \text{for } 1 \le k \le p \tag{1}$$

فضای آفین:

ابتدا صفحه تصویری را تعریف می کنیم:

فرض کنیم مجموعه ای از خطوط و نقاط در صفحه داریم که در۴ اصل زیر صدق می کنند:

۱ -از هر ۲ نقطه دقیقا یک خط می گذرد.

۲ -هر ۲ خط همدیگر را در فقط یک نقطه قطع می کنند.

۳ -۴ نقطه وجود دارند که هیچ ۳ تایی روی یک خط قرار ندارند.

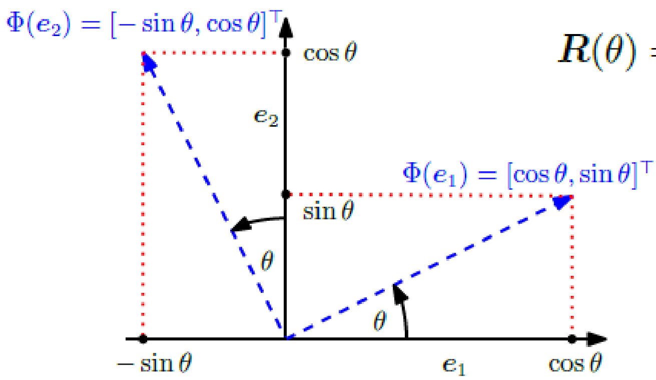
در این صورت به مجموعه این خطوط و نقاط **صفحه تصویری** گفته می شود . در ضمن از

این ۳ اصل اصل زیر هم نتیجه می شود:

۴ ۴- خط وجود دارند که هیچ ۳ تایی از یک نقطه عبور نمی کنند.

حال اگر تعداد نقاط صفحه تصویری متناهی باشد به آن صفحه **تصویری متناهی (صفحه آفین)** گفته می شود.

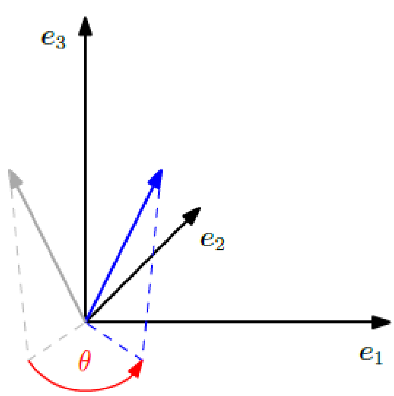
<u>Rotations:</u>



$$\boldsymbol{R}(\theta) = \begin{bmatrix}\Phi(\boldsymbol{e}_1) & \Phi(\boldsymbol{e}_2)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

3.9.1 Rotations in $\mathbb{R}^2$

R3:



$$\boldsymbol{R}_3(\theta) = \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Rotations in* n *Dimensions:

$$
\boldsymbol{R}_{ij}(\theta) := \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_{i-1} & \boldsymbol{0} & \cdots & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \cos\theta & \boldsymbol{0} & -\sin\theta & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_{j-i-1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \sin\theta & \boldsymbol{0} & \cos\theta & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \cdots & \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_{n-j} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \tag{3.80}
$$

for $1 \leqslant i < j \leqslant n$ and $\theta \in \mathbb{R}$. Then $\boldsymbol{R}_{ij}(\theta)$ is called a *Givens rotation*. Essentially, $\boldsymbol{R}_{ij}(\theta)$ is the identity matrix $\boldsymbol{I}_n$ with

$$
r_{ii} = \cos\theta\,, \quad r_{ij} = -\sin\theta\,, \quad r_{ji} = \sin\theta\,, \quad r_{jj} = \cos\theta\,. \tag{3.81}
$$

In two dimensions (i.e., $n = 2$), we obtain (3.76) as a special case.

3.9.4 Properties of Rotations

Rotations exhibit a number of useful properties, which can be derived by considering them as orthogonal matrices (Definition 3.8):

- Rotations preserve distances, i.e., $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{R}_\theta(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{R}_\theta(\boldsymbol{y})\|$. In other words, rotations leave the distance between any two points unchanged after the transformation.
- Rotations preserve angles, i.e., the angle between $\boldsymbol{R}_\theta\boldsymbol{x}$ and $\boldsymbol{R}_\theta\boldsymbol{y}$ equals the angle between $\boldsymbol{x}$ and $\boldsymbol{y}$.
- Rotations in three (or more) dimensions are generally not commutative. Therefore, the order in which rotations are applied is important, even if they rotate about the same point. Only in two dimensions vector rotations are commutative, such that $\boldsymbol{R}(\phi)\boldsymbol{R}(\theta) = \boldsymbol{R}(\theta)\boldsymbol{R}(\phi)$ for all $\phi, \theta \in [0, 2\pi)$. They form an Abelian group (with multiplication) only if they rotate about the same point (e.g., the origin).