

# 波浪能最大输出功率设计模型及求解

沈继红<sup>1</sup>, 蔡志杰<sup>2</sup>, 周双红<sup>1</sup>, 郑雄波<sup>1</sup>

(1. 哈尔滨工程大学 数学科学学院, 黑龙江 哈尔滨 150001; 2. 复旦大学 数学科学学院, 上海 200433)

**摘 要:** 对波浪能最大输出功率设计问题分别给出了双体单自由度运动和双体两自由度运动的波浪能装置的运动模型, 对线性模型和非线模型分别采用解析方法和数值方法进行求解. 根据能量转换原理确定了波浪能装置的功率优化目标函数, 应用粒子群方法对目标函数进行了优化, 得到了最大输出功率和最优阻尼系数. 最后, 总结了问题的求解要点.

**关键词:** 波浪能装置; 输出功率; 最优阻尼系数

中图分类号: O29

文献标志码: A

文章编号: 2095-3070(2023)01-0025-10

DOI: 10.19943/j.2095-3070.jmmia.2023.01.04

## 1 问题背景的提出

2022 年高教社杯全国大学生数学建模竞赛 A 题<sup>[1]</sup>是针对一种双体波浪能装置(图 1)在波浪中做单自由度与两自由度运动的动力学行为进行分析, 建立装置的运动模型, 并对两种情况下系统阻尼系数进行优化设计, 使得该装置输出功率达到最大.

该赛题旨在引导学生通过机理模型来研究影响该型波浪能装置能量转换与系统阻尼之间的关系, 进而推动研究波浪能装置能量转换与系统阻尼及刚度之间的关系, 探索真实装置高效能量转换机制, 因此题目由易到难设置了如下 4 个问题:

**问题 1** 针对图 1 所示的装置, 假设装置在波浪作用下, 建立浮子和振子沿垂直于水面做垂荡运动的运动模型, 同时分别对阻尼系数为常值和非线性的模型进行求解.

**问题 2** 针对问题 1 所建的波浪能装置的运动模型, 以装置的平均输出功率最大为目标, 建立阻尼系数为常值和给定非线性形式优化模型.

**问题 3** 如图 2 所示, 此时波浪能装置的 PTO(power take off)系统阻尼器由旋转阻尼器和直线阻尼器组成. 假设波浪能装置在波浪的作用下, 浮子与振子做垂荡和纵摇运动, 建立装置的运动模型, 并在给定的旋转阻尼器和直线阻尼器阻尼系数的情况求解装置的运动模型.

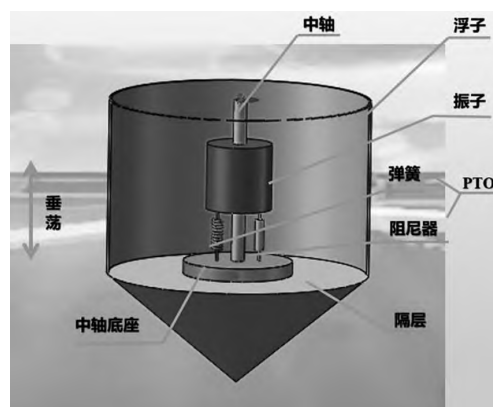


图 1 波浪能装置示意图

收稿日期: 2023-02-07

基金项目: 国家自然科学基金(52071094)

通讯作者: 周双红, E-mail: zhoushuanghong@hrbeu.edu.cn

引用格式: 沈继红, 蔡志杰, 周双红, 等. 波浪能最大输出功率设计模型及求解[J]. 数学建模及其应用, 2023, 12(1): 25-34.

SHEN J H, CAI ZH J, ZHOU SH H, et al. Mathematical model and solution of design of the maximum output power of wave energy (in Chinese)[J]. Mathematical Modeling and Its Applications, 2023, 12(1): 25-34.

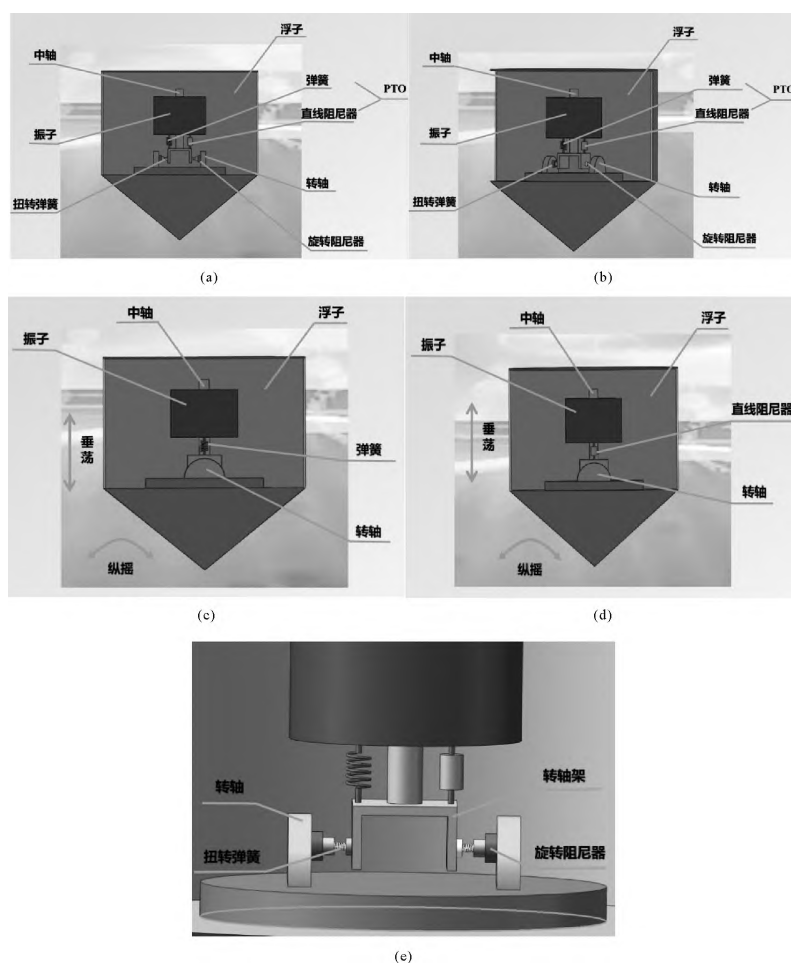


图 2 波浪能装置不同侧面的示意图

问题 4 针对问题 3 所建的模型，以装置的平均功率最大为目标，建立确定直线阻尼器和旋转阻尼器最优阻尼系数的数学模型，并进行最优参数求解。

对上述问题进行建模分析时，作如下假设：

- 1) 假设海水是无粘且无旋的；
- 2) 对于中轴，底座，隔层与 PTO 的质量和各种摩擦忽略不计；
- 3) 假设海浪的波呈周期变化且为正弦运动。

本题的分析与建模需要考虑刚体的受力，同时也需要考虑流体动力学的相关知识，其中流体动力学的受力，题目给出了相应的近似结果，表 1 和表 2 为求解上述 4 个问题相应的水动力系数和装置的物理参数。

表 1 各问题对应的水动力系数表

问题	问题 1	问题 2	问题 3	问题 4
入射波浪频率/ $s^{-1}$	1.4005	2.2143	1.7152	1.9806
垂荡附加质量/kg	1335.535	1165.992	1028.876	1091.099
纵摇附加转动惯量/ $kg \cdot m^2$	6779.315	7131.29	7001.914	7142.493
垂荡兴波阻尼系数/ $(N \cdot s/m)$	656.3616	167.8395	683.4558	528.5018
纵摇兴波阻尼数/ $N \cdot m \cdot s$	151.4388	2992.724	654.3383	1655.909
垂荡激励力振幅/N	6250	4890	3640	1760
纵摇激励力矩振幅/ $N \cdot m$	1230	2560	1690	2140

## 2 双体单自由度模型及求解

### 2.1 双体单自由度模型

不妨假设初始时刻振子与浮子平衡于静水中, 以各自的平衡位置作为原点, 向上为正方向, 建立相应坐标系, 如图 3 所示. 则初始时刻浮子位移  $z_f$ 、浮子速度  $\dot{z}_f$ 、振子位移  $z_v$ 、振子速度  $\dot{z}_v$  可分别设为  $z_f(0)=0$ ,  $\dot{z}_f(0)=0$ ,  $z_v(0)=0$ ,  $\dot{z}_v(0)=0$ .

在波浪作用下, 浮子开始运动, 通过弹簧和阻尼, 浮子运动带动振子运动. 浮子在周期微幅波作用下的合力主要包括波浪激励力、兴波阻尼力、附加惯性力、静水恢复力以及浮子与振子之间的弹簧和阻尼构成 PTO 系统的作用力, 即浮子受到的合力可表示为

$$F_f = f_d \cos \omega t - \lambda_h \dot{z}_f - m_a \ddot{z}_f - k_s z_f - k_l(z_f - z_v) - \lambda_l(\dot{z}_f - \dot{z}_v), \quad (1)$$

其中:  $f_d$  为波浪垂荡激励力振幅;  $\lambda_h$  为垂荡兴波阻尼系数;  $m_a$  为浮子的附加质量;  $k_s$  为静水恢复力系数;  $k_l$  为直线弹簧刚度;  $\lambda_l$  为直线阻尼器阻尼系数.

静水恢复力为浮子重力与浮力的合力, 静水恢复力系数为

$$k_s = \rho g S_w, \quad (2)$$

其中:  $S_w$  为浮子的水线面积;  $\rho$  为海水密度;  $g$  为重力加速度, 通过估算水线面为圆柱部分的水线面积.

振子受到的作用力来自于弹簧和直线阻尼器构成的 PTO 系统和重力, 由于以平衡点为原点, 弹簧的弹力与振子重力相互抵消, 因此振子受到的合力  $F_z$  为

$$F_z = -k_l(z_v - z_f) - \lambda_l(\dot{z}_v - \dot{z}_f). \quad (3)$$

由牛顿第二定律, 双体波浪能装置在海水做垂荡运动的动力学模型为

$$\begin{cases} (m_f + m_a) \ddot{z}_f + \lambda_l(\dot{z}_f - \dot{z}_v) + \lambda_h \dot{z}_f + k_l(z_f - z_v) + k_s z_f = f_d \cos \omega t, \\ m_v \ddot{z}_v + \lambda_l(\dot{z}_v - \dot{z}_f) + k_l(z_v - z_f) = 0, \\ z_f(0) = 0, \dot{z}_f(0) = 0, z_v(0) = 0, \dot{z}_v(0) = 0, \end{cases} \quad (4)$$

其中:  $\lambda_l = 10\,000 \text{ N} \cdot \text{s/m}$  表示直线阻尼器阻尼系数, 为常数;  $\lambda_l = c |\dot{z}_f - \dot{z}_v|^\alpha$  表示直线阻尼器系数, 为非线性;  $c$ 、 $\alpha$  为常数.

### 2.2 双体单自由度模型的求解

当阻尼器系数为常数时, 式(4)对应的常微分方程组为线性的, 由题目所给的参数估计, 系统的阻尼应为强阻尼, 因此式(4)表示的方程的解应是渐近稳定, 因为方程的通解部分长时间是会衰减为零, 从而由微分方程理论知, 方程存在与激励力同频的周期特解, 因此可以认为稳态解与激励力同频. 对于真实的系统, 往往关注它的稳定行为, 因此为了研究系统的长期运动行为, 只需求出稳态解即可. 为此设模型的稳态特解为

$$z_f = A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t, \quad (5)$$

$$z_v = B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t, \quad (6)$$

其中:  $A_i, B_i (i=1, 2)$  为待定系数;  $\omega$  为波浪激励力的振动频率. 将式(5)和式(6)代入模型(4)得

表 2 装置对应物理参数表

参数	取值
浮子质量/kg	4866
浮子底半径/m	1
浮子圆柱部分高度/m	3
浮子圆锥部分高度/m	0.8
振子质量/kg	2433
振子半径/m	0.5
振子高度/m	0.5
海水的密度/(kg/m <sup>3</sup> )	1025
重力加速度/(m/s <sup>2</sup> )	9.8
弹簧刚度/(N/m)	80 000
弹簧原长/m	0.5
扭转弹簧刚度/N · m	250 000
静水恢复力矩系数/N · m	8890.7

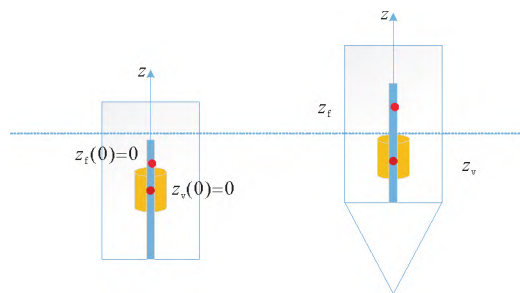


图 3 运动位移示意图

$$\begin{cases} [-(m_f+m_a)\omega^2+k_l+k_s]A_1+(\lambda_l\omega+\lambda_h\omega)A_2-k_lB_1-\lambda_l\omega B_2=f_d, \\ -(\lambda_l+\lambda_h)\omega A_1+[-(m_f+m_a)\omega^2+k_l+k_s]A_2+\lambda_l\omega B_1-k_lB_2=0, \\ -k_lA_1-\lambda_l\omega A_2-(m_v\omega^2-k_l)B_1+\lambda_l\omega B_2=0, \\ \lambda_l\omega A_1-k_lA_2-\lambda_l\omega B_1-(m_v\omega^2-k_l)B_2=0. \end{cases} \quad (7)$$

代入相关参数求解上述方程组, 得到  $A_i, B_i (i=1, 2)$ , 便获得振动系统在稳态情况的运动规律. 如果想要观察初始时刻振动系统的运动情况, 对于直线阻尼器阻尼系数  $\lambda_l$  为线性或非线性的情况都可以应用数值方法进行求解. 具体做法是将模型(4)进行降阶, 化为一阶微分方程组:

$$\begin{cases} \dot{z}_v = v_v, \\ \dot{z}_f = v_f, \\ \dot{v}_v = -\frac{1}{m_v}\lambda_l(v_v-v_f) - \frac{k_l}{m_v}(z_v-z_f), \\ \dot{v}_f = \frac{1}{m_f+m_a}[-\lambda_h v_f + \lambda_l(v_v-v_f) - k_s z_f + k_l(z_v-z_f) + f_d \cos \omega t], \\ z_f(0)=0, v_f(0)=0, z_v(0)=0, v_v(0)=0. \end{cases} \quad (8)$$

运用 Matlab 中的 ode45 进行求解. 表 3 和表 4 分别记录了线性和非线性阻尼系数情况下几个时刻浮子与振子的垂荡位移和速度. 当  $\lambda_l=10\ 000\ \text{N}\cdot\text{m/s}$  时, 系统的运动如图 4 所示; 当  $\lambda_l=10\ 000|v_f-v_v|^{0.5}$  时, 系统的运动如图 5 所示.

表 3 线性阻尼系数时浮子与振子的垂荡位移和速度表

时间/s	浮子		振子	
	位移/m	速度/(m/s)	位移/m	速度/(m/s)
10	-0.1906	-0.6406	-0.2116	-0.6936
20	-0.5905	-0.2405	-0.6341	-0.2723
40	0.2855	0.3134	0.2966	0.3333
60	-0.3144	-0.4791	-0.3314	-0.5156
100	-0.0836	-0.6041	-0.0840	-0.6430

表 4 非线性阻尼系数时浮子与振子的垂荡位移和速度表

时间/s	浮子		振子	
	位移/m	速度/(m/s)	位移/m	速度/(m/s)
10	-0.2058	-0.6528	-0.2346	-0.6982
20	-0.6113	-0.2542	-0.6608	-0.2759
40	0.2687	0.2958	0.2803	0.3139
60	-0.3273	-0.4913	-0.3493	-0.5241
100	-0.0883	-0.6097	-0.0938	-0.6496

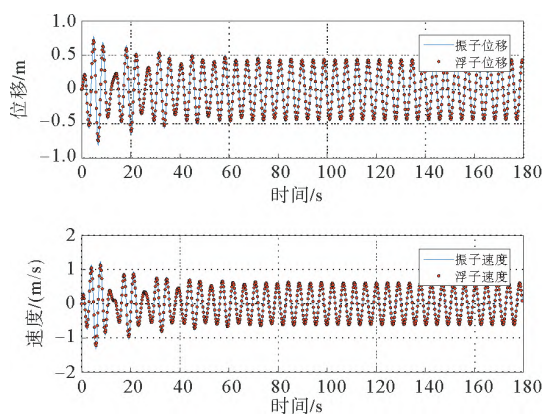
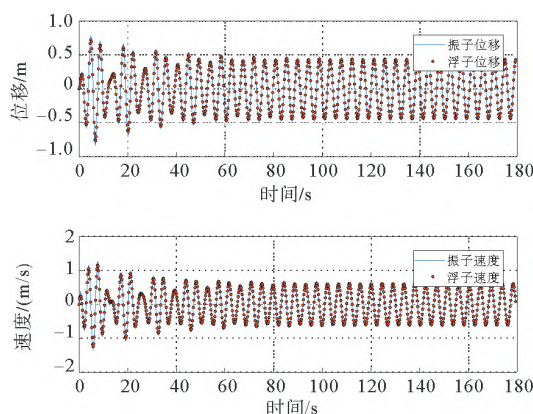
图 4 阻尼为  $10\ 000\ \text{N}\cdot\text{s/m}$  时波浪能装置的运动

图 5 阻尼非线性时波浪能装置的运动

由上述结果对比, 在问题 1 的参数条件下该非线性阻尼系数对振动系统运动的影响和线性阻尼系数的情况基本一致.

### 3 单自由度最大输出功率设计模型

#### 3.1 单自由度最大输出功率优化模型

单自由度运动波浪能装置获能由直线阻尼器完成. 由实际的物理意义, 在周期波浪持续稳定的激励下, 系统将会在长时间后进入稳定运动状态. 因此, 系统的瞬时功率为

$$p(t) = \lambda_1 (\dot{z}_f - \dot{z}_v)^2. \quad (9)$$

以直线阻尼器在一个较长时间内的最大平均输出功率为目标函数, 以直线阻尼器阻尼系数为决策变量, 则最大输出功率优化模型为

$$p_{\max} = \arg \max_{\lambda_1} \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} p(t) dt$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} (m_f + m_a) \ddot{z}_f + \lambda_1 (\dot{z}_f - \dot{z}_v) + \lambda_h \dot{z}_f + k_1 (z_f - z_v) + k_s z_f = f_d \cos \omega t, \\ m_v \ddot{z}_v + \lambda_1 (\dot{z}_v - \dot{z}_f) + k_1 (z_v - z_f) = 0, \\ z_f(0) = 0, \dot{z}_f(0) = 0, z_v(0) = 0, \dot{z}_v(0) = 0. \end{cases} \quad (10)$$

其中,  $T_1$  为一个较长时间段.

### 3.2 阻尼系数为常数情况下的优化模型求解

当阻尼系数为常数的情况下, 波浪装置的运动模型为线性系统, 根据 2.2 节中的分析, 波浪能装置的平均功率可以用一个稳态周期内的平均功率进行表示, 因此功率的优化可以用解析的方法进行求解. 系统的稳态解如式(5)与式(6)所示, 则直线阻尼器的瞬时输出功率

$$p(t) = \lambda_1 (\dot{z}_f - \dot{z}_v)^2 = \lambda_1 (-A_1 \omega \sin \omega t + A_2 \omega \cos \omega t + B_1 \omega \sin \omega t - B_2 \omega \sin \omega t)^2 =$$

$$\lambda_1 \omega^2 [(A_1^2 - A_1 B_1 + B_1^2) \sin^2 \omega t + (A_2^2 + B_2^2 - 2A_2 B_2) \cos^2 \omega t +$$

$$(2A_1 B_2 - 2A_1 A_2 + 2A_2 B_1 - 2B_1 B_2) \sin \omega t \cos \omega t], \quad (11)$$

则直线阻尼器在一个稳定周期的平均输出功率

$$\bar{p}(\lambda_1) = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{\lambda_1 \omega^2}{T} \int_0^T (A_1^2 - A_1 B_1 + B_1^2) \sin^2 \omega t + (A_2^2 + B_2^2 - 2A_2 B_2) \cos^2 \omega t dt$$

$$= \frac{\lambda_1 \omega^2}{T} \left[ (A_1^2 - A_1 B_1 + B_1^2) \int_0^T \sin^2 \omega t dt + (A_2^2 + B_2^2 - 2A_2 B_2) \int_0^T \cos^2 \omega t dt \right]$$

$$= \frac{\lambda_1 \omega^2}{2} (A_1^2 + A_2^2 - 2A_1 B_1 - 2A_2 B_2 + B_1^2 + B_2^2) = \frac{\lambda_1 \omega^2}{2} [(A_1 - B_1)^2 + (A_2 - B_2)^2]. \quad (12)$$

其中:  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ;  $A_i, B_i (i=1, 2)$  为方程组(7)的解. 所以该问题的优化问题转换为求解函数  $\bar{p}(\lambda_1)$  在

$[0, 100\ 000]$  上的最值问题. 利用高等数学函数求最值的方法解得  $\bar{p}_{\max} = 229.005\text{ W}$ ,  $\lambda_{\text{opt}} = 37\ 250\text{ N} \cdot \text{s/m}$ .

### 3.3 阻尼系数为非线性情况下的优化模型求解

当阻尼器系数为  $\lambda_1 = k |v_f - v_v|^\alpha$  的非线性形式时, 方程的求解就不能用解析的方法进行了, 此时选择数值方法进行优化. 要考察装置输出功率, 所以需要获得稳定的输出功率. 虽然振动系统是非线性的, 但是根据给定的参数可以估计系统满足渐近稳定的条件. 因此, 这里通过较长时间的平均功率的计算来刻画系统的功率输出, 将模型(10)具体化.

决策变量为比例系数  $k$  和幂指数  $\alpha$ , 则得到优化模型可以改写为

$$p_{\max} = \arg \max_{k, \alpha \in U} \frac{1}{1000T} \int_0^{1000T} p(t) dt$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \dot{z}_v = v_v, \\ \dot{z}_f = v_f, \\ \dot{v}_z = -\frac{1}{m_v} \lambda_1 (v_v - v_f) - \frac{k_1}{m_v} (z_v - z_f), \\ \dot{v}_f = \frac{1}{m_f + m_a} [-\lambda_h v_f + \lambda_1 (v_v - v_f) - k_s z_f + k_1 (z_v - z_f) + f_d \cos \omega t], \\ p(t) = \lambda_1 (\dot{z}_f - \dot{z}_v)^2, \\ z_f(0) = 0, z_v(0) = 0, v_f(0) = 0, v_v(0) = 0, \\ \lambda_1 = k |v_f - v_v|^\alpha, \\ k \in [0, 10\ 000], \alpha \in [0, 1]. \end{cases} \quad (13)$$

对该优化问题, 本文采用粒子群方法进行求解. 考虑到阻尼系数的取值区间较广, 采用粒子群算法, 通过选取多个起始点, 进行迭代, 具有更好的全局适应性; 同时, 通过在迭代过程中, 动态调整惯性权重的大小, 可以兼顾全局搜索和局部搜索性能. 通过随机选取阻尼系数的初值以及幂的初值来初始化二维粒子. 首先按照前面介绍的粒子群算法的思想, 需要定义全局最优位置和全局最优值, 分别记为  $g$  和  $g_{\text{best}}$ . 同时也需要定义个体最优位置和个体最优值, 分别记为  $p$  和  $p_{\text{best}}$ .

不妨设初始化了  $N$  个粒子, 在一次迭代过后, 这些粒子都会有更新后的取值, 记为  $x(j) = (k_j, \alpha_j)$ , 其中  $1 \leq j \leq N$ ,  $k_j$  为比例系数,  $\alpha_j$  为幂指数. 根据每一个粒子的取值, 通过问题 1 建立的微分方程, 都可以求解得到浮子与振子的位移和速度, 进而得到对应的输出功率.

通过比较各个比例系数以及相应的幂指数求解得到最大输出功率, 选择最大的输出功率与全局最优值  $g_{\text{best}}$  比较, 进而对  $g$  和  $g_{\text{best}}$  进行更新; 同时考虑单个粒子, 该粒子的当前值求解得到的输出功率, 与该粒子的历史最优值  $p_{\text{best}}$  进行比较, 并对  $p$  和  $p_{\text{best}}$  进行更新. 更新完全局最优位置以及个体最优位置后, 就可以进行下一步迭代:

$$v(j) = \omega v(j) + c_1 r(p(j) - x(j)) + c_2 r(g - x(j)), \quad x(j) = x(j) + v(j), \quad (14)$$

其中:  $\omega$  为惯性权重,  $c_1, c_2$  为学习因子, 这三者均为设定参数;  $r$  为  $0 \sim 1$  之间的随机数;  $v(j)$  为引入的中间变量, 为了更清晰地反映粒子位置的变化量.

为保证粒子可以在极值点附近做精细搜索, 考虑采用动态惯性权重. 基于动态惯性权重, 在迭代过程中, 随着迭代次数的增加, 逐步减小惯性权重, 从而兼顾全局搜索和局部搜索性能. 采用如下定义的动态惯性权重

$$\omega = \omega_{\max} - (\omega_{\max} - \omega_{\min})t/T_{\max}, \quad (15)$$

其中:  $\omega_{\max} = 0.8$ ,  $\omega_{\min} = 0.2$ ;  $t$  为当前迭代次数;  $T_{\max}$  为总迭代次数, 学习因子定义为 1.5. 初始化粒子个数  $N = 120$ , 迭代次数  $T_{\max} = 90$ , 时间区间选为  $900T \sim 1000T$ , 得到系统的最大输出功率和最优参数分别为  $p_{\max} = 230.965 \text{ W}$ ,  $k_{\text{opt}} = 97.969 \text{ N} \cdot \text{s/m}$ ,  $\alpha_{\text{opt}} = 0.4130$ .

## 4 双体两自由度模型及求解

### 4.1 双体两自由度模型

首先, 为了描述系统本身的特点和运动规律, 需要建立坐标系. 为了分析方便, 这里只建立一个绝对坐标系, 即以装置中轴线与海平面的交点为坐标原点, 竖直向上为  $z$  轴正方向, 浮子摇荡所在的平面为  $x-z$  平面, 如图 6 所示.

为了解决双体两自由度的运动方程, 同时为了避免繁琐的牛顿力学的方法, 这里采用拉格朗日分析力学的方法. 首先确定描述浮子运动的广义坐标. 浮子在水中

做垂荡和纵摇运动, 因此需要确定浮子质心  $C_f$  坐标  $(x_f, z_f)$ , 设浮子质心与铰接  $O$  的距离为  $l$  (确定), 同时为了确定浮子纵摇, 选取浮子轴线与  $z$  轴夹角为  $\theta_f$ , 则铰接点  $O(x_0, z_0)$  为

$$(x_0, z_0) = (x_f + l \sin \theta_f, z_f - l \cos \theta_f). \quad (16)$$

为了进一步描述振子的运动, 引入振子质心  $C_v(x_v, z_v)$  与铰接点间距离  $r$ , 振子轴线与  $z$  轴夹角为  $\theta_v$ , 则

$$(x_v, z_v) = (x_0 - r \sin \theta_v, z_0 + r \cos \theta_v). \quad (17)$$

选取动力系统的广义坐标  $q_a = (x_f, z_f, \theta_f, r, \theta_v)^T$ .

#### 1) 系统动能

根据振子和浮子质心  $C_v$  和  $C_f$  坐标, 可得振子和浮子的速度  $(\dot{x}_v, \dot{z}_v)$  和  $(\dot{x}_f, \dot{z}_f)$ , 根据柯西尼定理, 振子的动能等于振子质心处的动能加上振子在质心系下的动能, 即

$$T_v = \frac{1}{2} m_v (\dot{x}_v^2 + \dot{z}_v^2) + \frac{1}{2} I_v \dot{\theta}_v^2, \quad (18)$$

其中, 转动惯量  $I_v = \frac{1}{12} m_v H_v^2 + \frac{1}{4} m_v R_v^2$ ,  $m_v$  为振子质量. 浮子动能需要考虑附加动能, 因此浮子的动能

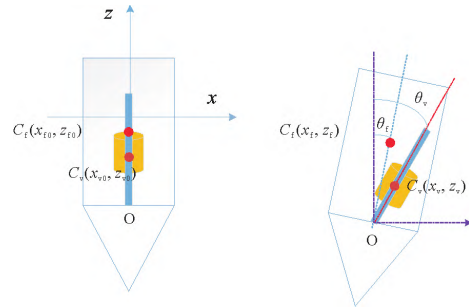


图 6 运动示意图

$$T_f = \frac{1}{2}(m_f + m_a)(\dot{x}_f^2 + \dot{z}_f^2) + \frac{1}{2}(I_f + I_a)\dot{\theta}_f^2, \quad (19)$$

其中, 浮子转动惯量  $I_f$  分为 3 个部分, 即圆柱上底面  $S_1$ 、侧面  $S_2$  及锥面  $S_3$  的所描述质量的转动惯量, 则其对应的转动惯量分别为

$$\begin{aligned} I_{f1} &= \rho_0 \int_{S_1} [(x - x_f)^2 + (y - y_f)^2 + (z - z_f)^2] dS, \\ I_{f2} &= \rho_0 \int_{S_2} [(x - x_f)^2 + (y - y_f)^2 + (z - z_f)^2] dS, \\ I_{f3} &= \rho_0 \int_{S_3} [(x - x_f)^2 + (y - y_f)^2 + (z - z_f)^2] dS, \end{aligned}$$

其中:  $(x_f, y_f, z_f)$  为浮子质心;  $\rho_0 = m_f / (\sigma_{S_1} + \sigma_{S_2} + \sigma_{S_3})$ ,  $\sigma_{S_i}$  ( $i=1, 2, 3$ ) 为对应曲面的面积;  $\dot{\theta}_f$  和  $\dot{\theta}_v$  为浮子和振子的角速度;  $I_a$  为浮子纵摇附加转动惯量;  $m_f$  为浮子质量;  $m_a$  为附加质量.

从而系统的动能为

$$T = T_f + T_v. \quad (20)$$

## 2) 系统势能

通过分析, 系统的势能分别为重力势能, 直线弹簧、扭转弹簧及水弹性势能. 浮子和振子的重力势能为

$$V_g = m_v g(z_v - z_{v0}) + m_f g(z_f - z_{f0}), \quad (21)$$

其中,  $z_{v0}$  和  $z_{f0}$  分别为振子和浮子质心的初始垂向坐标.

弹簧的弹性势能为

$$V_s = \frac{1}{2}k_t(\theta_v - \theta_f)^2 + \frac{1}{2}k_l(r - l_0)^2, \quad (22)$$

其中,  $l_0$  为弹簧原长.

水弹性势能为

$$V_w = V_s = \frac{1}{2}k_s(z_f - z_{f0})^2 + \frac{1}{2}k_m(\theta_f - \theta_{f0})^2, \quad (23)$$

其中,  $\theta_{f0}$  为浮子初始转角. 从而系统的势能为

$$V = V_g + V_s + V_w. \quad (24)$$

## 3) 耗散能

系统的耗散能由系统阻尼及流体耗散构成, 可表示为

$$\Phi = \frac{1}{2}\lambda_1(\dot{z}_f - \dot{z}_v)^2 + \frac{1}{2}\lambda_h\dot{z}_f^2 + \frac{1}{2}\lambda_t(\dot{\theta}_f - \dot{\theta}_v)^2 + \frac{1}{2}\lambda_p\dot{\theta}_f^2. \quad (25)$$

## 4) 广义力

整个系统受到的力主要来自波浪对浮子的激励, 广义力可表示为  $Q = z_f f_d \cos \omega t + \theta_f L_d \cos \omega t$ , 则由如下非保守、含耗散的朗格朗日方程对系统的运动方程求解, 即

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} - \frac{\partial L}{\partial q_a} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_a} = \frac{\partial Q}{\partial q_a}, \quad (26)$$

其中, 拉格朗日量  $L = T - V$ . 从而双体两自由度运动模型为

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} - \frac{\partial L}{\partial q_a} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_a} = \frac{\partial Q}{\partial q_a}, \\ (x_f(0), y_f(0), \theta_f(0), r(0), \theta_v(0)) = (x_{f0}, y_{f0}, \theta_{f0}, r_0, \theta_{v0}), \\ (\dot{x}_f(0), \dot{y}_f(0), \dot{\theta}_f(0), \dot{r}(0), \dot{\theta}_v(0)) = (\dot{x}_{f0}, \dot{y}_{f0}, \dot{\theta}_{f0}, \dot{r}_0, \dot{\theta}_{v0}). \end{cases} \quad (27)$$

## 4.2 双体两自由度模型

直线阻尼器阻尼系数和旋转阻尼器数给定, 求解系统的运动方程. 由于多自由度运动之间的耦合, 系统为非线性的, 因此求解该模型这里应用 Matlab 中的 ode45 进行求解. 需要对式(27)进行降阶. 将式(26)写成分量形式



$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_f} - \frac{\partial L}{\partial x_f} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}_f} = 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_f} - \frac{\partial L}{\partial z_f} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{z}_f} = f_d \cos \omega t, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_f} - \frac{\partial L}{\partial \theta_f} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\theta}_f} = L_d \cos \omega t, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{r}} = 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_v} - \frac{\partial L}{\partial \theta_v} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\theta}_v} = 0. \end{cases} \quad (28)$$

令  $(x_f, y_f, \theta_f, r, \theta_v) = (x_1, x_3, x_5, x_7, x_9)$ ,  $(\dot{x}_f, \dot{y}_f, \dot{\theta}_f, \dot{r}, \dot{\theta}_v) = (x_2, x_4, x_6, x_8, x_{10})$ , 式(28)转换为  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10})$  的代数方程, 将  $(x_1, x_3, x_5, x_7, x_9)$  作为已知参数, 应用 Matlab 中的符号求解器将  $(x_2, x_4, x_6, x_8, x_{10})$  表示为  $(x_1, x_3, x_5, x_7, x_9)$  的表达式, 则得到式(28)的降阶方程组

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \dot{x}_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}), \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = \dot{x}_4(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}), \\ \dot{x}_5 = x_6, \\ \dot{x}_6 = \dot{x}_6(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}), \\ \dot{x}_7 = x_8, \\ \dot{x}_8 = \dot{x}_8(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}), \\ \dot{x}_9 = x_{10}, \\ \dot{x}_{10} = \dot{x}_{10}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}). \end{cases} \quad (29)$$

给定初始条件  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}) = (0, 0, -0.954, 0, 0, 0, 0.202, 0, 0, 0)$ . 应用 ode45 对式(29)对应的初值问题求解, 结果如图 7、图 8 及表 5 所示.

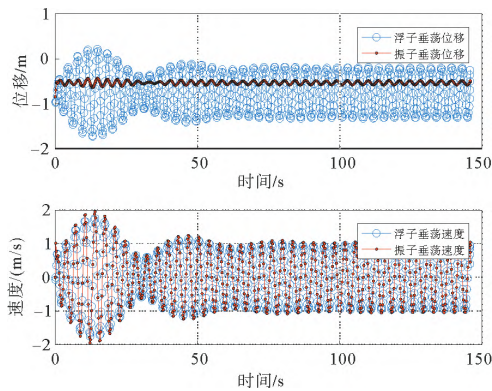


图 7 浮子和振子的垂荡位移和速度

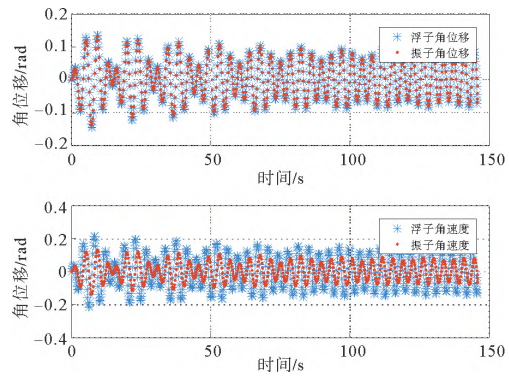


图 8 浮子和振子的角位移和角速度

表 5 几个时刻浮子和振子的垂荡速度与纵摇角速度表

时间/s	浮子		振子	
	垂荡速度/(m/s)	纵摇角速度/(rad/s)	垂荡速度/(m/s)	纵摇角速度/(rad/s)
10	1.0446	-0.1708	1.1078	-0.1658
20	-0.1681	-0.0264	-0.2146	-0.0251
40	0.8299	-0.1079	0.9282	-0.1003
60	-0.6886	0.0636	-0.7610	0.0610
100	-0.9455	0.1395	-1.0322	0.1322



## 5 两自由度最大输出功率设计模型

### 5.1 两自由度最大输出功率优化模型

两自由度波浪能装置获能由直线阻尼器和旋转阻尼器完成. 由实际的物理意义, 系统将会在长时间后进入稳定运动状态. 因此, 系统的瞬时功率为

$$p(t) = \lambda_t (\dot{\theta}_t - \dot{\theta}_v)^2 + \lambda_l \dot{r}^2, \quad (30)$$

其中,  $\lambda_t$  为旋转阻尼器的阻尼系数. 则系统阻尼在一个较长时间内的平均功率为

$$\begin{aligned} \bar{p} &= \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} p(t) dt = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} [\lambda_t (\dot{\theta}_t - \dot{\theta}_v)^2 + \lambda_l \dot{r}^2] dt \\ &= \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} [\lambda_t (x_6 - x_{10})^2 + \lambda_l x_8^2] dt, \end{aligned} \quad (31)$$

其中,  $T_1$  为一个较长的时间. 下面的计算时间长度可以取 1000 个波浪周期. 决策变量为  $\lambda_t$  和  $\lambda_l$ , 通过改变决策变量, 控制平均输出功率, 从而所要求解的优化问题的模型为

$$\begin{aligned} p_{\max} &= \arg \max_{\lambda_t, \lambda_l} \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} [\lambda_t (x_6 - x_{10})^2 + \lambda_l x_8^2] dt \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \dot{x}_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}), \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = \dot{x}_4(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}), \\ \dot{x}_5 = x_6, \\ \dot{x}_6 = \dot{x}_6(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}), \\ \dot{x}_7 = x_8, \\ \dot{x}_8 = \dot{x}_8(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}), \\ \dot{x}_9 = x_{10}, \\ \dot{x}_{10} = \dot{x}_{10}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}), \\ \lambda_t \in [0, 100\ 000], \lambda_l \in [0, 100\ 000]. \end{cases} \end{aligned} \quad (32)$$

### 5.2 两自由度最大输出功率优化模型求解

类似单自由度最大输出功率优化模型的求解方法, 仍采用粒子群算法. 同样, 为保证粒子可以在极值点附近做精细搜索, 考虑采用动态惯性权重, 以此来兼顾全局搜索和局部搜索性能. 动态规划权重选取式(15), 选取学习因子, 粒子数与问题二相同, 时间区间选  $900T \sim 1000T$ , 迭代次数为 50, 求得最大输出功率  $\bar{p}_{\max} = 345\text{ W}$ , 最优阻尼参数分别为  $\lambda_{t\text{opt}} = 44\ 780\text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$ ,  $\lambda_{l\text{opt}} = 54\ 650\text{ N} \cdot \text{s/m}$ .

## 6 竞赛题目评述

2022 年全国大学生数学建模竞赛 AA 题来源于工程领域的实际问题, 涉及海洋可再生能源开发技术. 题目针对一种双体波浪能装置获能优化问题进行建模分析, 包括单双体自由度运动耦合、双体两自由度运动耦合建模分析, 同时考虑了动态规划的优化问题. 主要考察学生对实际物理过程的简化及建模仿真能力, 以及对单参数、双参数动态优化问题的求解能力. 下面给出建模的要点.

1) 本赛题的建模主要应用的是刚体动力学知识, 和经典的刚体力学有区别的地方是该题目还涉及流体动力学的内容, 因此建模时需要流体动力学相关概念的理解, 以及将赛题中流体动力学相关近似的正确运用.

2) 建立单自由度波浪装置运动的模型相对来说较为容易, 但也需要顾及浮子与振子的耦合, 浮子与流体的耦合. 该模型的求解分两种情况, 即阻尼器系数为常量和阻尼系数为非线性. 当阻尼器系数为

常量时, 振动系统为线性的, 可应用微分方程理论和其他的工具(傅里叶变换)等解析方法对模型和优化求解, 但本次竞赛完成的论文中应用解析方法进行求解的不是很多. 当阻尼器系数为非线性时, 模型求解需要应用数值方法处理, 优化可以借助现有的优化工具.

3) 本赛题的难点在于问题 3, 该题受力分析对象为两个, 运动自由度也是两个, 如果应用牛顿力学的方法进行受力分析, 比较繁琐. 作者认为把波浪能装置作为一个系统, 应用拉格朗日分析力学的方法, 从能量的角度对问题进行分析更简洁, 免去了多个坐标系建立和复杂几何关系的分析. 论文集中有少许便采用此法进行建模分析, 结果也是正确的.

4) 问题 3 和问题 4 的模型是非线性的, 如果采用龙格库塔法进行求解, 需要得到一阶显式微分方程组, 但是模型耦合得比较严重, 因此可以采用符号运算求解器对代数方程求解. 通过对论文集的阅读, 总体来说, 问题 3 的完成度较差.

5) 关于多参数动态规划的优化问题, 现有的方法也比较多, 可以设计计算效率更好的优化策略.

## 7 有待进一步深入研究的问题

赛题 A 来自于工程实践, 清洁能源开发是解决碳达峰战略的重要途径, 海洋波浪能的开发利用是一项重要技术. 本赛题虽然由易到难设置了一种波浪能装置两自由度运动耦合建模分析, 但实际探究高效波浪能装置的能量捕获技术要更复杂, 实际装置考虑的运动自由度和系统参数更多, 如多体波浪能装置在非规则波、更多自由度运动、非线性阻尼、弹簧刚度及摩擦约束等条件下耦合运动模型和能量优化问题仍需要进一步研究.

## 参考文献

- [1] 全国大学生数学建模竞赛组委会. 2022 年高教社杯全国大学生数学建模竞赛赛题[EB/OL]. [2023-01-05]. [http://www.mcm.edu.cn/html\\_cn/node/5267fe3e6a512bec793d71f2b2061497.html](http://www.mcm.edu.cn/html_cn/node/5267fe3e6a512bec793d71f2b2061497.html).
- [2] 中国大学生在线. 2022 年全国大学生数学建模竞赛论文展示[EB/OL]. [2023-01-05]. <https://dxs.moe.gov.cn/zx/hd/sxjm/sxjmlw/2022qgdxssxjmslwzs/>.

## Mathematical Model and Solution of Design of the Maximum Output Power of Wave Energy

SHEN Jihong<sup>1</sup>, CAI Zhijie<sup>2</sup>, ZHOU Shuanghong<sup>1</sup>, ZHENG Xiongbo<sup>1</sup>

(1. College of Mathematical Sciences, Harbin Engineering University, Harbin, Heilongjiang 150001, China;

2. College of Mathematical Sciences, Fudan University, Shanghai 200433, China)

**Abstract:** Under the assumption of the question, the motion models of two body single freedom and two body two freedom of wave energy device are given respectively. The linear model and non-linear model are solved by analytical method and numerical method. According to the energy conversion principle, the power optimization objective functions of the wave energy device are determined. The particle swarm optimization method are used to optimize the objective functions, and the maximum output powers and the optimal damping coefficients are obtained. Finally, the key points of solving the problem are summarized.

**Key words:** wave energy device; output power; optimal damping coefficient

## 作者简介

沈继红(1966—), 男, 博士, 教授, 研究领域包括计算数学、应用数学及运筹学与控制论方面, 目前重点在优化算法及系统建模方面从事研究工作.

蔡志杰(1968—), 男, 博士, 教授, 主要研究方向为工业应用数学.

周双红(1981—), 男, 硕士, 讲师, 研究领域包括流体计算、可靠性分析与信号处理.

郑雄波(1979—), 男, 博士, 教授, 主要研究方向为波浪能利用技术、流体动力学和海洋环境数值模拟.