

# 集合论

你野爹

2023 年 3 月 13 日

## 目录

1 一点介绍	2
2 集合之间的运算和性质	2
3 映射	5
4 关系	6

## 1 一点介绍

What is algebra? 我们专业的人现在可能会说“不知道”，并且以后也可能维持这个不知道的状态；而有的人会说，这是数学的两个基础课程之一，另外一个数学分析；但是有的人会说，给定一个集合  $A$ ,  $A$  上的一个 algebra 是  $A$  的幂集的子集  $\mathcal{A}$ , 满足对于任意的  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{A}$  都有  $\alpha_1 \cup \alpha_2 \in \mathcal{A}, \alpha_1 \cap \alpha_2 \in \mathcal{A}$ , 且  $A, \emptyset \in \mathcal{A}$ .

Algebra 是一种代称，大部分的基础代数课程可以称为“群环模域”课，这是在说，这门课的主要内容为这四个单字，他们是四种代数结构。那么什么是代数结构，sa, 谁知道呢？人连集合的定义都说得不明不白，怎能说清别的呢？当我说出“集合以及集合上的代数运算”的时候，是否有意识到，仅为都合之意，才说其为“集合上的”？或许我们可以说，代数结构是，满足某些运算性质的 collection. 这么说是否严谨一些呢？我们后面将会意识到，代数结构的性质，出自于代数结构的定义，也即，其满足的运算性质。

可能会有人想到，“终究是错付了人”，也许是对的，代数这样重要的课程，落得这般境地，可称可悲，着实引人唏嘘。错付了人呐。

**伽罗瓦** 可否有人听闻过伽罗瓦？伽罗瓦开创了群论，证明了五次方程五根式解。当我们认为数学均是和数字打交道的时候，面对这个问题，指定是摸不着头脑。一般的五次方程长这个样子： $ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$ , 没有一个数字。更难的是：如何证明不存在？存在的话简单，我们找到那个根式就行了。可是不存在呢？

## 2 集合之间的运算和性质

虽然我们还是无法准确地说出集合定义，但是我们有两种朴素的描述方法。

**定义 2.1** (Set). 我们说一些元素放在一起便是集合；或者是满足一些性质的元素的全体

$$A = \{a \mid P(a)\} \quad (1)$$

或者说，我们将某些东西用  $\{\}$  框起来便是集合。我们常用大写字母来表示集合。

*Remark 2.2.* 人们常用  $\mathbb{Z}$  来表示  $\{\dots, -1, 0, 1, 2, \dots\}$  — 整数集，这是二十世纪的布尔巴基的著作之中使用的符号，之后得到了流传，类似的符号还有  $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  分别表示自然数集，有理数集，实数集，复数集。总之你可以多用 `\mathbb{}` 字体。

**定义 2.3** (属于).  $a \in A$  是说,  $a$  是  $A$  的一个元素, 也可以说  $a$  是  $A$  的一个成员.

尽管说我不能将  $\in$  的定义说清楚, 但是, 差不多就行.

**定义 2.4** (subset).  $A \subseteq B$  是说  $A$  是  $B$  的子集,  $A \subsetneq B$  意指  $A$  是  $B$  的真子集. 对于前者来说:

$$A \subseteq B \iff \forall a \in A (a \in B) \quad (2)$$

对于后者来说:

$$A \subsetneq B \iff (\forall a \in A (a \in B)) \wedge (\exists a' \in A (a' \notin B)) \quad (3)$$

$A \subsetneq B$  就是说  $A$  是  $B$  的子集, 但是  $A \neq B$ .

*Remark 2.5.* 我们现在有三种符号  $\subseteq, \subset, \subsetneq$ , 都可以说是包含于的二元运算符<sup>1</sup>,  $\subsetneq$  并没有歧义, 表示的是“真包含”的意思,  $\subset$  既可以指“包含”也可以指“真包含”, 得看他怎么说的.

**定义 2.6** (equal).  $A = B$  的定义如下:

$$A = B \iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A \quad (4)$$

$A \neq B$  定义为  $\neg(A = B)$ , 于是我们知道:

$$A \neq B \iff \exists a \in A (a \notin B) \vee \exists b \in B (b \notin A) \quad (5)$$

**定义 2.7** (交和并). 我们学过的, 交的定义为:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\} \quad (6)$$

并的定义完全类似

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\} \quad (7)$$

**定义 2.8** (Power). 我们断言, 对于任意一个集合, 存在其幂集, 记为  $P(A)$  或者是  $\mathfrak{P}(A)$  或者是  $2^A$ , 其定义为

$$\mathfrak{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\} \quad (8)$$

**定义 2.9** (Product). 乘积的定义并不好说. 我们当然可以引入有序对的说法, 可是, 有序对真的是 product 的本质吗? 关注两个集合的 product 的势, 其为两个集合的势的乘积. 好吧, 我有点搞不懂.

---

<sup>1</sup>运算符并不是真的指‘运算’

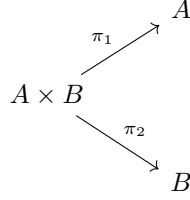


图 1: Commutative Diagram about Product

我们尝试着探索一下什么是乘积. 首先我们介绍常规的乘积: 我们规定一个神奇的东西称为**有序对**, 其一般表示为  $(a, b)$ , 有序对这个名字说明,  $(a, b)$  和  $(b, a)$  不同.  $A \times B$  定义为:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\} \quad (9)$$

其与  $B \times A$  是不同的. 我们这里引入图 1.  $\pi_1$  和  $\pi_2$  是两个投影映射, 其定义为

$$\pi_1: A \times B \rightarrow A, (a, b) \mapsto a \quad (10)$$

我们能够看出,  $A \times B$  是将两个集合硬搞在一起的方法. 我们还有另一种搞在一起的方法:  $A \coprod B^2$ . Coprod 也称为直和. 我们说一下这个东西的构造方法就知道这个是什么了:

$$A \coprod B = A \times \{0\} \cup B \times \{1\}, \quad 0, 1 \notin A, B \quad (11)$$

不管  $A$  和  $B$  之间有没有公共元素, 我们生硬地将他们**加在一起**. 我们指出, 无论是  $(a, b)$  还是  $A \times \{0\}$  都是**构造方法**. 左  $a$  右  $b$  或者是上  $a$  下  $b$  都是一样的. 并且我们说不定可以断言,  $A \times B$  和  $B \times A$  说不定是差不多. 这里举例说明, 当我们平常使用乘积符号的时候, 常有  $\mathbb{R}^n$ , 我们这个时候强调, 乘积不满足交换律, 但是我们不应该将每一个  $\mathbb{R}$  看作是同一个东西, 他们终究是不同的, 就好像我可以声明三个 `int` 型变量  $a, b, c$  一般,  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  的本质是**编号为  $a$  的  $\mathbb{R}$  的那个量为  $x$ , 编号为  $b$  的那个量为  $y$** .

简单来说, 乘积的顺序其实并不重要, 可我们在写的时候为了规范就得注重乘积的顺序, 但是我们应当记住, 乘积不满足交换律, 这不是乘积的本质内容. 我们观察图 2, 知道 product 和 coprod 一样, 两个元素之间的结合是任意的.

*Remark 2.10.*  $A_1 \times A_2 \times \dots$  表示为  $\prod_{i \in \mathbb{N}} A_i$

---

<sup>2</sup>coprod 的符号不知道为什么有点大, 不太好哦

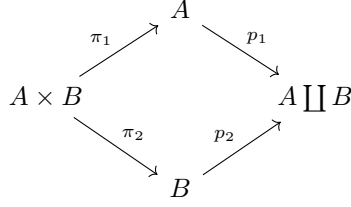


图 2: Commutative Diagram about Coproduct

### 3 映射

人们常说, 映射是一个对应法则. 我说, 这是什么几把. 别 tm 复读别人瞎几把说的定义. 我说, 一个映射, 或者说函数, 先要给定函数的值域和定义域, 函数将定义域之中的元素射到值域中的元素上. 我们这样表示: 设  $f$  是函数

$$f: X \rightarrow Y, x \mapsto f(x) \quad (12)$$

这就是说,  $f(x) \in Y$   $f(x)$  是  $Y$  之中的一个元素. 这便是一个函数. 你尽可以认为什么“允许多对一, 不允许一对多”完全是扯淡.

**定义 3.1** (Image). 函数的 image 记为  $\text{Im}(A)$ , 定义为  $\text{Im}(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$

**定义 3.2** (inverse). 函数  $f$  的逆记为  $f^{-1}$ , 我可以将其定义为函数, 你看就行了.

$$f^{-1}: \mathfrak{P}(B) \rightarrow \mathfrak{P}(A), \mathcal{B} \mapsto f^{-1}(\mathcal{B}) \quad (13)$$

为了方便, 对于单元集, 我们将  $\{ \}$  省略, 也就是将  $f^{-1}(\{b\})$  简写为  $f^{-1}(b)$ . 逆的定义也好写:

$$f^{-1}(\mathcal{B}) = \{x \mid f(x) \in \mathcal{B}\} \quad (14)$$

*Remark 3.3.* 函数的逆以后会经常用到, 或者说, 对于某些人来说会经常用到.

**性质 3.4** (逆的性质). 逆具有良好的性质,

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in \Lambda} A_i\right) = \bigcup_{i \in \Lambda} f^{-1}(A_i) \quad f^{-1}\left(\bigcap_{i \in \Lambda} A_i\right) = \bigcap_{i \in \Lambda} f^{-1}(A_i) \quad (15)$$

以后会用到的. 现在没什么用, 我只是显摆一下.

**定义 3.5** (one-one, onto). 单射 (one-one), 满射 (onto) 是两种函数. One-one 是说, 不同元素射到不同元素上, onto 是说, 值域里的所有元素都被射了, .viz 设  $f: A \rightarrow B$

$$\forall a_1, a_2 (a_1 \neq a_2 \implies f(a_1) \neq f(a_2)) \quad (16)$$

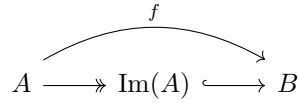


图 3: Commutative diagram about a function

对于后者则是

$$\forall b \in B(f^{-1}(\{b\}) \neq \emptyset) \quad (17)$$

既是单射又是满射的函数称为双射.

**定义 3.6** (inverse 的另一个定义). 函数  $f: A \rightarrow B$  的逆  $f^{-1}$  的定义为  $f^{-1}: B \rightarrow A, b \mapsto a$ , 其中  $f(a) = b$ . 不难知道  $f^{-1}$  存在当且仅当  $f$  是双的. 这个定义的好处在于, 考虑  $S$  上的变换构成的集合  $T(S)$ , 对于  $f \in T(S)$  来说, 如果逆存在, 则  $f^{-1} \in T(S)$ .

**定义 3.7** (满射, 单射的符号). 如图 3 所示, 两个箭头的为满射, 有一个勾的为单射.

*Remark 3.8.* 图 3 展示了什么叫函数.  $\text{Im}(A)$  的定义请见定义 3.1.

## 4 关系

关系的定义乍一看比较生硬, 但...我也觉得生硬, 不知道该怎么搞.

**定义 4.1** (relation). 集合  $S$  上的二元关系是  $R \in P(S \times S)$ . 如果说  $(a, b) \in R$  那么称呼  $a, b$  满足关系  $R$ , 记为  $aRb$ .

关系有许多性质, 据此我们进行关系的分类. 但是我们只需要关注一个, 等价关系. 我们有一种比较自然但是有些局限的定义法.

**定义 4.2** (equivalent relation). 对于一个  $X$  上的等价关系  $R$  来说, 存在一个函数  $f: X \rightarrow Y$ , 有  $aRb \iff f(a) = f(b)$ .  $a, b$  等价也可以记为  $a \sim b$ .

**定义 4.3** (equivalent class). 我知道定义. 这里就不说了.

**Example 4.4.** 设  $R$  是  $\mathbb{Z}$  上的关系, 定义为

$$aRb \iff a \equiv b \pmod{n} \quad (18)$$

那么  $R$  是等价关系. 由我们的定义, 这是显然的, 设函数  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto x \bmod n$ , 那么  $aRb \iff f(a) = f(b)$

**定义 4.5** (classification). 对于一个集合  $S$ , 其一个划分为  $\{S_i\}_{i \in \Lambda}$ . 有

$$\bigcup_{i \in \Lambda} S_i = S \quad (19)$$

其中  $S_i$  两两不相交.

我们设  $[b] = \{a \mid a \sim b\}$ , 能够知道  $\{[b] \mid b \in X\}$  是一个划分. 这是一个定理来着, 但实际上挺简单. 稍微验证一下就行.

或者, 根据定义, 我们有  $\{f^{-1}(\{b\}) \mid b \in Y\}$  是一个划分. 能够知道, 如果说  $f$  是一个满射, 那么划分之内的非空集合的个数为  $|Y|$ .