一. 问题之提出: 没有. 我们就是直接搞 tm 的大数定理, 管你丫的.

总之, 对于大数定理, 我们首先考量这个: $\frac{\mu_n}{n}$, 其中 μ_n 是指 n 次 B 实验中成功的次数, 我们有这样一个经验推断 $\frac{\mu_n}{n} \to p$, 就是说, 当我们这里进行的试验次数足够多的时候, 这个比值是趋于稳定的.

Bernoulli 给出了一个大数定理, $\forall \epsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| \geq 0\right) = 0$$

这是一个粗糙的大数定理, 另一方面, Borel 改进了这个定理:

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\mu_n}{n} = p\right) = 1$$

这其实就是说明, $\frac{\mu_n}{n}$ 是趋近于一个常值函数的 (a.s.), 这称为是强大数定理. 随后我们有中心极限定理, 用语更加精确地描述概率分布, 以及揭露了其和正态分布的关系.

$$\lim_{n\to\infty} P(\xi < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\ \mathrm{d}t$$

其中, xi 是一个标准化的随机变量, 将 μ_n 标准化为 $\xi_n = \frac{\mu_n - E}{\sigma}$ 而这就是 de Moivre Laplace 定理.

二. 1. chebyshev 大数定理设 $\{X_i\}$ 是不相关的, 并且 $\sup_i D(X_i) \leq C$ 那么 $\forall \epsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_i X_i - \frac{1}{n}E\ X_i\right| < \epsilon\right) = 1$$

证明比较简单. 使用 chebyshev 不等式就能够证明

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_i X_i - \frac{1}{n}\sum E\ X_i\right| < \epsilon\right) \geq 1 - \frac{D\left(\frac{1}{n}\sum_i X_i\right)}{\epsilon^2} \geq 1 - \frac{C}{n\epsilon^2}$$

其中 $D\left(\frac{1}{n}\sum X_i\right)$ 当然是等于 $\frac{1}{n^2}\sum_i DX_i$

当 $n \to \infty$ 的时候就证明完了.

Markov 大数定理就是 chebyshev 大数定理去掉不相关的条件.

2. bernoulli and Poisson big number theorem Bernoulli : μ_n 是 n 次实验中, 成功的次数, 有 $\forall \epsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| < \epsilon\right) = 1$$

(1) 因为 $\mu_n = \sum_i X_i$, 使用 chebyshev 大数定理就能够证明. (2) 或者直接使用 chebyshev 不等式, 实际上是差不多的.

Poisson : 设事件 A 在第 k 次实验中出现的概率是 p_k, 这就有, $\forall \epsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\mu_n}{n} - \frac{\sum p_k}{n}\right| < \epsilon\right)$$