我们这边的题型是如何判定一个语言不是正则的. 既然他这么问了, 那么他大概率不是正则的.

1 泵引理

所用到的方法便是下面介绍的泵引理. 需要注意到, 符合泵引理的语言不一定是正则的, 但不满足的一定不是正则的, 也就是说, 泵引理实际上是正则的必要条件.

鸽巢原理 原理应该很简单, 之前在其他地方也有涉及[1], 其实是一个挺有意思的定理.

泵引理

定理 1.1. 对于一个正则语言 L, 存在 N 使得对于长度大于等于 N 的语句, i.e. $\{w \mid |w| \geq N$, 可以分为三个部分 xyz, i.e. $w = xyz$, 并且满足:

1. $y \neq \epsilon$
2. $|xy| \leq N$
3. $xy^*z \in L$

我们使用泵引理和反证法, 一般是, 给定一个 N, 找出一个 w, 其不满足上面的第三条.

证明 证明需要用到前面的定理. 考虑这个语言对应的正则表达式, 还有其对应的 DFA. 并且给 DFA 的状态编号. 设 $w = a_1a_2a_3 \ldots a_m, m \geq N$, $q_i = \hat{\delta}(q_0, a_1 \ldots a_i)$. q_i 代表的是, DFA 接收到 w 的前 i 字母的时候所处于的状态. 这个证明的重点在于: 使用鸽巢原理知道, 当输入长度为 N 的时候,

[1]比如说, 线性代数之中有一题: 证明对于一个 n 阶方阵, 存在 $k \leq n$ 使得 $r(A^k) = r(A^{k+1}) = r(A^{k+2}) = \ldots$

至少存在一对 $i, j, i \neq j$ 使得 $q_i = q_j$. 若是将状态考虑为点, 将状态的转移看作边, 则输入可视为图. 由上面的讨论知道, 该图一定有圈. 卧槽, 讨论很几把麻烦.

通过泵引理证明某些语言并不是正则的. 证明思路上面已经讲过了: 我们使用泵引理和反证法, 一般是, 给定一个 N, 找出一个 w, 其不满足上面的第三条. 下面给出一些例题:

Example 1.2. 证明 $L_{01} = \{0^n1^n \mid n \geq 0\}$ 不是正则的.

Example 1.3. 证明 $L = \{0^i1^j \mid i > j\}$ 不是正则的.

Example 1.4. 证明 $L = \{a^{n!} \mid n \geq 0\}$ 不是正则的.

2 运算的封闭性

正则语言再某些运算之后的道德新语言仍然是正则的. 称正则语言再这些运算下封闭.

并补交差反转同态逆同态

3 判定正则语言

三个判定问题:

w 是否属于描述的语言

语言是否为空是否为无穷的.

语言的等价性问题.

对于非空的, 检查全部长度小于 n 串.

是否为无穷, 检查全部长度有 n 到 $2n-1$ 的串.

4 DFA 的最小化

最小化

将冗余的状态消除

$\hat{\delta}(p,w) \in F \iff \hat{\delta}(q,w) \in F$

不等价

对于两个状态 p,q , 存在一个 w 使得, $\hat{\delta}(p,w), \hat{\delta}(q,w)$ 其中一个属于 F, 而另一个不是.

4.1 填表算法:

1. 基础: $p \in F, q \notin F$ then p,q 不等价.
2. 对于 $a \in \Sigma$ if $r = \delta(p,a), s = \delta(q,a)$ 不等价, 那么 p,q 不等价.

和那个数字逻辑里面的差不多. 但是严谨一点.

我们这里有四个步骤.

1 首先考虑基础, 初始化

2 其次考虑经过 0 到达终态和非终态的状态对. 就是说, 将所有状态分为三类: 1. 输入为 0 不发生状态转移的; 2. 输入为 0 到达终态的; 3. 不能到达终态的. 考虑后面两类, $\{D,F\} \times \{A,B,E,G,H\}$, 其中 $\times$ 是一个直积.

3 类似的, 考虑经过 1 到达终态和非终态的状态对.

4 最后进行对所有空余进行验证, 卧槽, 真几把麻烦.

Remark 4.1. 对于状态对, 比如说 (A,E), 考虑 $(\delta(A,0), \delta(E,0) = (B,H))$ 这是说, (A,E) 不等价取决于 (B,H) 是否等价.

考虑 (B,H) , $(\delta(B,0), \delta(H,0)) = (G,G)$, $(\delta(B,1), \delta(H,1)) = (C,C)$ 终态相等, 也是等价的标志. 那么 B,H 等价.

于是 A,E 也是等价的.

我们进行总结, 如果说有两对, 或者以上的状态对, 其等价性相互依赖, 那么可以断言这些状态对等价. □