计算方法第一章

2023 年 8 月 19 日

基础

根的概念

简单来说，$f(x) = 0$ 的解就是根.
在这一章之中，对一维非线性方程进行根的近似求解.

根的指标

根的重数 设 $f(x)=0$ 的根为 α, 我们说 α 的重数是 m, 如果 $f(x)=(x-\alpha)^m g(x)$ 且 α 不是 $g(x)$ 的根.
如果 $m=1$ 那么 α 是单根, 否则 α 是重根.
重根具有这样良好的性质, 若是 α 是 m 重的, 那么我们有:

$$\begin{cases} f^{(j)}(\alpha)=0, & j=1,\cdots,m-1 \\ f^{m}(\alpha)\neq 0 \end{cases}$$

求法

这一章介绍这几种方法:

- 二分法
- 迭代法
  - 不动点法
  - Newton 法
  - 多点迭代法 (这个随便讲讲)

二分法

二分法 二分的思想我们是熟悉的, 早在学习快速排序的时候我们接触了这个思想, 首先给定了一个区间 $[a,b]$, f 在这个区间上是单调的, 只有一个根, 则区间 $[a,\frac{a+b}{2}]$ 和 $[\frac{a+b}{2},b]$ 之中只有一个区间有零点, 我们找出来并且命名为 $[a_1,b_1]$, 我们能够得到一个区间的序列:

$$[a,b]\supset[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\cdots$$

并且这个区间的长度趋于 0, 也就是 $\lim_{k\to\infty}[a_k,b_k]$ 之中只会有一个数字[1], 可知这个算法收敛.

[1]这是一个定理

迭代法

迭代法基础

简单来说, 迭代法就是给定了初值 x_0 和迭代公式

$$x_{k+1} = \varphi(x_k)$$

来生成一个逼近根 α 的序列 $\{ x_k \}$ 的方法, 也就是数列满足

$$\lim_{k \to \infty} x_k = \alpha$$

生成的过程描述为
Basic: 给定一个初始值 x_0
Iteration: 使用 φ 计算 x_1, 也即 $x_1 = \varphi(x_0)$, 以此类推

迭代法基础

迭代法有很多, 形如 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 的称为单点迭代, 形如

$$x_{k+1} = \varphi\underbrace{(x_k, x_{k-1}, \cdots, x_{k-n+1})}_{\text{n args}}$$

的称为多点迭代法.

每次迭代之中迭代方程都不发生改变的称为定常迭代, 否则是非定常迭代.

单点迭代法

我们要求 $f(x)$ 的根, 也就是求方程 $f(x)=0$ 的解, 我们将方程没有损失地化为 $x=\varphi(x)$ 的形式, 将 φ 用作迭代, 这就是 Picard 单点迭代法.

由 $f(x)=0$ 到 $x=\varphi(x)$ 的方法不止一种, 不同的方法之间属性不一定相同.

比如说我们求方程 $9x^2-\sin x-1=0$ 的根, 我们能够将其转换为两种等价的形式, 而它们的性质是不同的.

$$x=\frac{1}{3}\sqrt{\sin x+1}$$
$$x=\arcsin(9x^2-1)$$

迭代法的指标

$[a, b]$ 默认为定义域

Def (全局收敛)

以 $[a, b]$ 之中的任意值为初值，产生的序列都收敛于 f 的根 α，则说这个收敛法是全局收敛的.

Def (局部收敛)

将上面的 $[a, b]$ 更换为 α 附近的一个领域 $[\alpha - \delta, \alpha + \delta]$，若成立，则是局部收敛的.

迭代法的指标

Def (收敛速度)

误差为 $e_k = |\alpha - x_k|$, 我们能够得出收敛阶 p, 根据 e_k 变小的速度来判断: p 满足

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = C \neq 0$$

特别地, 如果 $p = 1$ 那么称这个收敛法是线性收敛的. 如果说 $p = 2$ 则是平方收敛的.

Def (收敛效率)

EI 记为收敛效率, 有

$$EI = p^{1/\theta}$$

其中 θ 指的是计算量, 应该是计算 $f(x)$ 的次数.

迭代法的定理

定理的证明全部不用掌握，但是需要会应用，记住例子是如何使用它们的即可.

Thm

如果

1. $\forall x, \varphi(x) \in [a, b]$
2. $\exists L < 1 \forall x\ |\varphi'(x)| \leq L < 1$

则 φ 的收敛法是全局收敛

证明.

不用管 □

迭代法的定理

Thm

如果

1. 同上
2. $\exists L < 1,\ \forall x_1, x_2 \in [a, b],\ |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$

则说迭代法是全局收敛的.

并且我们还有误差估计式:

$$|\alpha - x_k| \leq \frac{L}{1-L}|x_k = x_{k-1}|$$

以及能够用求和和放缩得到

$$|\alpha - x_k| \leq \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0|$$

迭代法的定理

Thm (局部收敛性)

道理是类似的

Thm (重根)

设根是 α, α 的收敛阶为 p 当且仅当下面的式子成立:

$$\begin{cases} \varphi^{(j)}(\alpha) = 0, & j = 1, \cdots, p-1 \\ \varphi^{(p)}(\alpha) \neq 0 \end{cases}$$

例子

求 $xe^x - 1 = 0$ 在 $[1/2, \ln 2]$ 之中的根.

1. 建立迭代函数 $\varphi(x) = e^{-x}$
2. 考察 $\varphi(x)$ 的值域. 因为 $\varphi'(x)$ 在区间内小于零, 于是只看端点 $\varphi \in [\varphi(\ln 2), \varphi(\frac{1}{2})]$
因为 $\varphi(\ln 2) = \frac{1}{2}, \varphi(1/2) < 1/2$, 于是满足条件一的定理.
3. 对 φ' 的值域进行验证:

$$|\varphi'(x)| = |-e^{-x}| \leq e^{-\frac{1}{2}} < 1$$

于是满足条件

例子

问 $x = 4 - 2^x$ 能否使用? 若是不能, 请将其改写为能够使用迭代法进行求解的形式.

例子

我们有 $F(x) = x + c(x^2 - 3)$，问 c 取什么值的时候迭代法

$$x_{k+1} = F(x_k)$$

有局部收敛性?

解.

我们使用前面的定理能够知道，我们只需要 F 在 α 处的导数小于 1 即可. 明显 $x = F(x)$ 有两个解 $\alpha_1 = -\sqrt{3}$, $\alpha_2 = \sqrt{3}$, $F'(x) = 1 + 2cx$ 在这两处的值为

$$F'(\alpha_1) = 1 - 2\sqrt{3}c, \quad F'(\alpha_2) = 1 + 2\sqrt{3}c$$

让它们的绝对值小于 1 就行. 并且！导数值还是零的时候，收敛阶更大 $\square$

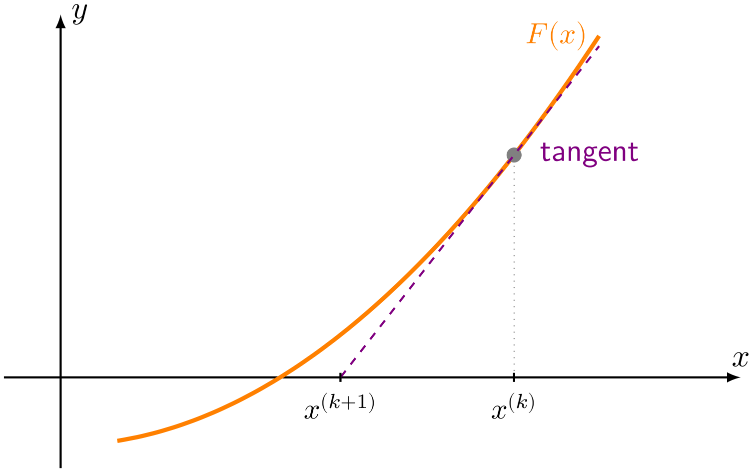
牛顿法

定义和指标

简单来说，求 $f(x)$ 的零点，牛顿法就是

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

定义和指标



定义和指标

为了知道牛顿法的收敛阶，我们使用前面的那个定理，考察 $\varphi^{(j)}$ 是否为零. 已知 $\varphi(x) = x - f(x)/f'(x)$，我们有

$$\varphi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

这里分情况讨论，若是 α 为 f 的单根，也就是 $f(\alpha) = 0$，$f'(\alpha) \neq 0$，那么 $\varphi'(\alpha) = 0$，也就是说，收敛阶至少为 2.

定义和指标

如果说 α 是 f 的重根, 也就是 $f(\alpha)=0$, $f'(\alpha)=0$, 我们假设 α 是二重的, 那么 $f''(\alpha)\neq 0$, 然后, 为了求出 $\varphi'(\alpha)$ 的值, 应当使用洛必达法则

$$\varphi'(\alpha)=\frac{f'(x)f''(x)+f(x)f'''(x)}{2f'(x)f''(x)}=\frac{1}{2}+\frac{f(x)f'''(x)}{2f'(x)f''(x)}$$

对于后面的一坨依然能够使用洛必达法则, 总之 $\varphi'(\alpha)$ 是不为 0 的. 我们知道了如果 α 是 f 的单根, 则牛顿法的收敛阶是 1.

牛顿法的定理

Thm

若

- $f(a)f(b) < 0$
- $f'(x)$
- 凹凸性不发生变化, 也即, $f''(x)$ 不变号
- $f''(x_0)f(x_0) > 0$

那么牛顿法全局收敛.

例子

使用牛顿法求解 a 的倒数 $1/a$，计算过程之中不能出现除法，并且此方法在 $(0, 2/a)$ 上全局收敛.

解.

考虑方程 $f(x) = 1/x - a$，能够得到牛顿法的公式：

$$x_{k+1} = x_k(2 - ax_k)$$

极为吊诡的是，这个等式刚好能够化为

$$1 - ax_{k+1} = (1 - ax_k)^2$$

于是有

$$1 - ax_k = (1 - ax_0)^{2^k}$$

接下一页 $\square$

例子

解.

若是要让我们的算法收敛, 那么我们说 $1 - ax_k$ 应该为趋近于 0, 那么只需要让 $1 - ax_0$ 的绝对值小于 1 即可.

也就是 $x_0 \in (0, 2/a)$, 满足题意. □

其它方法

简化牛顿法

为了避免计算 $f'(x)$, 因为有点难算, 于是我们用常数 C 代替, 也就是

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{C}$$

一般我们取 C 为 $f'(x_0)$.

牛顿下山法

我们引入标量 λ 来优化性能, 也即

$$x_{k+1} = x_k - \lambda \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

λ 的取值是我们定的, 虽然不知道怎么定, 但是这个方法能够优化性能, 可以使原来不收敛的方法变得收敛.

多点迭代法弦截法

弦截法是多点迭代法，其中的 φ 函数有两个参数，也就是

$$x_{k+1} = \varphi(x_k, x_{k-1})$$

弦截法的几何意义是，将 x_k, x_{k-1} 连线，这个直线的零点就是 x_{k+1}. 此方法的收敛阶为

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$