我们首先会是定义期望, 个人思考了一会这个期望之定义的动机, 目前认为, 这个定义是和 Lebesgue-Stieljes 积分息息相关的.

一上来, 我们能够定义简单函数的积分, 就是离散随机变量的期望, 我们说对于离散随机变量 X , 存在划分 $\{\Lambda_n\}$ 和数列 $\{b_n\}$, 使得 $X = \sum_{i=1}^{n} b_i 1_{\Lambda_i}$ [1]

那么

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} b_i P(\Lambda_i)$$

对于一般函数, 假设是正值函数, 定义划分 $\{\Lambda_{mn}\}, \Lambda_{mn} = \left\{\omega : \frac{n}{2^m} \leq X(\omega) < \frac{n+1}{2^m}\right\}$

据此构造一个随机变量序列, 记为 $X_m = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{n}{2^m} 1_{\Lambda_{mn}}$ 我们有 $X_m(\omega) - X(\omega) \leq \frac{1}{2^m}$, 因此我们说,

$$\lim_{m\to\infty} X_m = X$$

我们现在用 X_m 的期望的极限值来定义 X 的期望值.

$$E(X) = \lim_{m\to\infty} E(X_m)$$

如果 LHS 不是 ∞.

上面就是期望值的定义, 我觉得这是从 Lebesgue-Stieljes 积分出发的, 这样的定义之下, 可以将期望写为 LS 积分.

$$E(X) = \int_\Omega X(\omega) P(\mathrm{d}\omega) \quad \text{简写为} \quad \int_\Omega X \ \mathrm{d}P$$

前面说 X 是正值函数, 对于一般函数, 我们只需要分别取正值部分和负值部分, 记为 X^+ 和 $-X^-$, 然后 $E(X) = E(X^+) - E(X^-)$.

对于 $(\mathcal{U}, \mathcal{B}, m)$ [2]上的随机变量, 将 X 换为 f , ω 为 x, 就有

$$\int_a^b f(x) m(\mathrm{d}x) = \int_a^b f(x) \ \mathrm{d}x$$

LHS 是 Lebesgue 积分.

1 一些性质

接下来我们介绍一些性质, 其中有非常重要的定理, 但是我们的书中并没有给出证明. 当然我们的读者可以很容易在网上找到这些性质的证明, 但我还是认为, 这些证明虽然说比较偏分析, 但还是有必要掌握的, 至少说, 我们把它抄录在这里, 读者能够读个几遍, 能够看懂.

定理 1 (Absolute integrability)**.** *$\int_\Lambda \ \mathrm{d}P$ 是有限的, iff*

$$\int_\Lambda |X| \ \mathrm{d}P < \infty$$

定理 2 (linearity)**.**

$$\int_\Lambda (aX + bY) \ \mathrm{d}P = a\int_\Lambda X \ \mathrm{d}P + b\int_\Lambda Y \ \mathrm{d}P$$

就如同极限的可加性的定义, 最好 LHS 都是有定义的.

[1] 1_{Λ_i} 的定义在上一节已经给出了

[2] 就是 $[0,1]$ 上的均匀分布

定理 3 (additivity over sets). *if* Λ_n *是不相交的, 那么*

$$\int_{\bigcup \Lambda_n} X \, \mathrm{d}P = \sum^{n} \int_{\Lambda_n} X \, \mathrm{d}P$$

定理 4 (positivity). *if* $X \geq 0$ *a.e. on* Λ *, 那么*

$$\int_{\Lambda} X \, \mathrm{d}P \geq 0$$

定理 5 (monotonicity). *如果* $X_1 \leq X \leq X_2$ *a.e. on* Λ*, 那么*

$$\int_{\Lambda} X_1 \, \mathrm{d}P \leq \int_{\Lambda} X \, \mathrm{d}P \leq \int_{\Lambda} X_2 \, \mathrm{d}P$$

定理 6. *...*

省略啦, 烦死了捏.

2 一个定理的证明

定理 7.

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(|X| \geq n\right) \leq E\left(|X|\right) \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P\left(|X| \geq n\right)$$

证明. 我们进行一个划分, $\Lambda_n = \{\omega : n \leq |X\left(\omega\right)| < n+1\}$

使用 mean value thm 就有

$$\sum_{n=1}^{\infty} nP\left(\Lambda_n\right) \leq E(|X|) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(n+1\right) P(\Lambda_n) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} nP(\Lambda_n)$$

接下来证明

$$\sum_{n=1}^{\infty} nP\left(\Lambda_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P\left(|X| \geq n\right)$$

Λ_n 可以写为 $X \in [n, \infty) - X \in [n+1, \infty)$, 于是

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} nP\left(\Lambda_n\right) &= \sum_{n=1}^{N} n\Big(P(|X| \geq n) - P\left(|X| \geq n+1\right)\Big) \\ &= \sum_{n=1}^{N} P(|X| \geq n) - NP(|X| \geq N+1)\end{aligned}$$

只需要证明 $\lim\limits_{N\to\infty} NP(|X \geq N+1|) = 0$ 就行了. 实际上这是显然的, 只需要注意到

$$NP\left(|X| \geq N+1\right) \leq \int_{|X| \geq N+1} |X| \, \mathrm{d}P$$

LHS 是趋于零的, 因为积分是收敛的. □

3 几个有名的不等式

3.1 Holder Minkowski 不等式

3.2 Jensen 不等式

φ 是一个凸函数, 那么

$$E\left(\varphi\left(x\right)\right) \leq \varphi(E(X))$$

3.3 chebyshev 不等式

φ 是一个增函数, 那么

$$P\left(X \geq u\right) \leq \frac{E\left(\varphi(X)\right)}{\varphi(u)}$$

证明.

$$E\left(X\right) = \int_{\Omega} \varphi\left(X\right)\ \mathrm{d}P \geq \int_{\{|X| \geq u\}} \varphi\left(X\right)\ \mathrm{d}P \geq \varphi(u)P(|X| \geq u)$$

换一下位置不等式就证明完了. □

当 $\varphi\left(x\right) = x^2$ 将 X 换为 $X - E\left(X\right)$ 时, 就能够得到基础概率论中的 chebyshev 不等式

$$P\left(X - E\left(X\right) \geq u\right) \leq \frac{\mathrm{var}\left(X\right)}{u^2}$$