P5

1. Prove $A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$$\begin{aligned} & \forall x \in A \cup (B \cap C) && (1) \\ \iff & \forall x (x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) && (2) \\ \iff & \forall x ((x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)) && (3) \\ \iff & \forall x (x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)) && (4) \end{aligned}$$

3. Prove $|A \cup B| + |A \cap B| = |A| + |B|$

证明. 由基数的定义出发: $X \cap Y = \varnothing$ 的时候, 有

$$|X \cup Y| = |X| + |Y| \tag{5}$$

成立. 对于 A, B, 有

$$|A \cup B| = |A - B| + |B - A| + |A \cap B| \tag{6}$$

成立. 并且 $|A| = |A - B| + |A \cap B|$ 也成立. 就有

$$\begin{aligned} |A \cup B| + |A \cap B| &= |A - B| + |A \cap B| + |B - A| + |A \cap B| && (7) \\ &= |A| + |B| && (8) \end{aligned}$$

成立. □

P11

5.

证明.

$$f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, x \mapsto x + 1 \tag{9}$$

$$g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, x \mapsto x - 1 \tag{10}$$

f, g 是两个双射. □

$\circ$	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6
φ_1	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6
φ_2	φ_2	φ_1	φ_5	φ_6	φ_3	φ_4
φ_3	φ_3	φ_4	φ_1	φ_2	φ_6	φ_5
φ_4	φ_4	φ_3	φ_6	φ_5	φ_1	φ_2
φ_5	φ_5	φ_6	φ_2	φ_1	φ_4	φ_3
φ_6	φ_6	φ_5	φ_4	φ_3	φ_2	φ_1

图 1: M 的置换乘法表

P15

2.

证明. 设 $F^{n\times n}$ 表示数域 F 上的 n 阶方阵的全体. $A, B \in F^{n\times n}$

$$f\colon F^{n\times n} \times F^{n\times n}, (A, B) \mapsto f(A, B) = A + B + I \tag{11}$$

$$g\colon F^{n\times n} \times F^{n\times n}, (A, B) \mapsto I \tag{12}$$

□

3.

证明.

$$|T(M)| = |A|^{|A|} = 27 \tag{13}$$

$$|S(M)| = |A|! = 6 \tag{14}$$

图 1是置换的乘法表. □

P19

2.1.

证明. 不满足结合律.

$$1 \circ (2 \circ 3) = 1^2 + (2^2 + 3^2)^2 = 170 \neq 34 = 3^2 + (1^2 + 2^2) = (1 \circ 2) \circ 3 \quad (15)$$

满足交换律

$$a \circ b = a^2 + b^2 = b^2 + a^2 = b \circ a \quad (16)$$

$a^2 + b^2 = b^2 + a^2$ 成立是因为加法满足交换律. □

2.2

证明. 满足结合律:

$$\begin{aligned}(a \circ b) \circ c &= (a + b - ab) + c - (a + b - ab)c \\ &= a + b + c - ab - ac - bc + abc\end{aligned}$$

同时,

$$\begin{aligned}a \circ (b \circ c) &= a + (b + c - bc) - a(b + c - bc) \\ &= a + b + c - bc - ab - ac + abc\end{aligned}$$

所以

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) \quad (17)$$

成立.

满足交换律, 因为

$$a \circ b = a + b - ab = b + a - ba = b \circ a \quad (18)$$

中间的等号成立是因为加法和乘法满足交换律. □

P23

1.1. 是自同态, 因为

$$f(ab) = |ab| = |a||b| = f(a)f(b) \quad (19)$$

f 不是满的, 因为实数域 $\mathbb{R}$ 上, 不存在数使得其绝对值为负数.

1.2 不是自同态.

$$f(ab) = 2ab \neq 2a \times 2b = f(a)f(b) \tag{20}$$

1.3 是自同态.

$$f(ab) = (ab)^2 = a^2b^2 = f(a)f(b) \tag{21}$$

不是满的, 因为 $\mathbb{R}$ 上不存在平方为负数的数.

1.4 不是自同态.

$$f(ab) = -ab \neq (-a)(-b) = f(a)f(b) \tag{22}$$