集合论

你野爹

2023 年 3 月 13 日

目录

1 一点介绍

What is algebra? 我们专业的人现在可能会说 “不知道”, 并且以后也可能维持这个不知道的状态; 而有的人会说, 这是数学的两个基础课程之一, 另外一个是数学分析; 但是有的人会说, 给定一个集合 A, A 上的一个 algebra 是 A 的幂集的子集 $\mathcal{A}$, 满足对于任意的 $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{A}$ 都有 $\alpha_1 \cup \alpha_2 \in \mathcal{A}, \alpha_1 \cap \alpha_2 \in \mathcal{A}$, 且 $A, \varnothing \in \mathcal{A}$.

Algebra 是一种代称, 大部分的基础代数课程可以称为 “群环模域” 课, 这是在说, 这门课的主要内容为这个四个单字, 他们是四种代数结构. 那么什么是代数结构, sã, 谁知道呢? 人连集合的定义都说得不明不白, 怎能说清别的呢? 当我说出 “集合以及集合上的代数运算” 的时候, 是否有意识到, 仅为都合之意, 才说其为 “集合上的” ? 或许我们可以说, 代数结构是, 满足某些运算性质的 collection. 这么说是否严谨一些呢? 我们后面将会意识到, 代数结构的性质, 出自于代数结构的定义, 也即, 其满足的运算性质.

可能会有人想到, “终究是错付了人”, 也许是对的, 代数这样重要的课程, 落得这般境地, 可称可悲, 着实引人唏嘘. 错付了人呐.

伽罗瓦 可否有人听闻过伽罗瓦? 伽罗瓦开创了群论, 证明了五次方程五根式解. 当我们认为数学均是与数字打交道的时候, 面对这个问题, 指定是摸不着头脑. 一般的五次方程长这个样子: $ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$, 没有一个数字. 更难的是: 如何证明不存在? 存在的话简单, 我们找到那个根式就行了. 可是不存在呢?

2 集合之间的运算和性质

虽然我们还是无法准确地说出集合定义, 但是我们有两种朴素的描述方法.

定义 2.1 (Set)**.** 我们说一些元素放在一起便是集合; 或者是满足一些性质的元素的全体

$$A = \{a \mid P(a)\} \tag{1}$$

或者是说, 我们将某些东西用 $\{\}$ 框起来便是集合. 我们常用大写字母来表示集合.

Remark 2.2. 人们常用 $\mathbb{Z}$ 来表示 $\{\dots, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ — 整数集, 这是二十世纪的布尔巴基的著作之中使用的符号, 之后得到了流传, 类似的符号还有 $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ 分别表示自然数集, 有理数集, 实数集, 复数集. 总之你可以多用 `\mathbb` 字体.

定义 2.3 (属于)**.** $a \in A$ 是说, a 是 A 的一个元素, 也可以说 a 是 A 的一个成员.

尽管说我不能将 $\in$ 的定义说清楚, 但是, 差不多就行.

定义 2.4 (subset)**.** $A \subseteq B$ 是说 A 是 B 的子集, $A \subsetneq B$ 意指 A 是 B 的真子集. 对于前者来说:

$$A \subseteq B \iff \forall a \in A(a \in B) \tag{2}$$

对于后者来说:

$$A \subsetneq B \iff (\forall a \in A(a \in B)) \wedge (\exists a' \in A(a' \notin B)) \tag{3}$$

$A \subsetneq B$ 就是说 A 是 B 的子集, 但是 $A \neq B$.

Remark 2.5. 我们现在有三种符号 $\subseteq, \subset, \subsetneq$, 都可以说是包含于的二元运算符[1], $\subsetneq$ 并没有歧义, 表示的是 "真包含" 的意思, $\subset$ 既可以指 "包含" 也可以指 "真包含", 得看他怎么说的.

定义 2.6 (equal)**.** $A = B$ 的定义如下:

$$A = B \iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A \tag{4}$$

$A \neq B$ 定义为 $\neg(A = B)$, 于是我们知道:

$$A \neq B \iff \exists a \in A(a \notin B) \vee \exists b \in B(b \notin A) \tag{5}$$

定义 2.7 (交和并)**.** 我们学过的, 交的定义为:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\} \tag{6}$$

并的定义完全类似

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\} \tag{7}$$

定义 2.8 (Power)**.** 我们断言, 对于任意一个集合, 存在其幂集, 记为 $P(A)$ 或者是 $\mathfrak{P}(A)$ 或者是 2^A, 其定义为

$$\mathfrak{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\} \tag{8}$$

定义 2.9 (Product)**.** 乘积的定义并不好说. 我们当然可以引入有序对的说法, 可是, 有序对真的是 product 的本质吗? 关注两个集合的 product 的势, 其为两个集合的势的乘积. 好吧, 我有点搞不懂.

[1]运算符并不是真的指 '运算'

$$
\begin{tikzcd}
 & A \\
A \times B \arrow[ur, "\pi_1"] \arrow[dr, "\pi_2"'] & \\
 & B
\end{tikzcd}
$$

图 1: Commutive Diagram about Product

我们尝试着探索一下什么是乘积. 首先我们介绍常规的乘积: 我们规定一个神奇的东西称为**有序对**, 其一般表示为 (a, b) , 有序对这个名字说明, (a, b) 和 (b, a) 不同. $A \times B$ 定义为:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, B \in b\} \tag{9}$$

其和 $B \times A$ 是不同的. 我们这里引入图 1. π_1 和 π_2 是两个投影映射, 其定义为

$$\pi_1 \colon A \times B \to A, (a, b) \mapsto a \tag{10}$$

我们能够看出, $A \times B$ 是将两个集合硬搞在一起的方法. 我们还有另一种搞在一起的方法: $A \coprod B$[2]. Coprod 也称为直和. 我们说一下这个东西的构造方法就知道这个是什么了:

$$A \coprod B = A \times \{0\} \cup B \times \{1\}, \quad 0, 1 \notin A, B \tag{11}$$

不管 A 和 B 之间有没有公共元素, 我们生硬地将他们**加在一起**. 我们指出, 无论是 (a, b) 还是 $A \times \{0\}$ 都是**构造方法**. 左 a 右 b 或者是上 a 下 b 都是一样的. 并且我们说不定可以断言, $A \times B$ 和 $B \times A$ 说不定是差不多. 这里举例说明, 当我们平常使用乘积符号的时候, 常有 $\mathbb{R}^n$, 我们这个时候强调, 乘积不满足交换律, 但是我们不应该将每一个 $\mathbb{R}$ 看作是同一个东西, 他们终究是不同的, 就好像我可以声明三个 `int` 型变量 a, b, c 一般, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ 的本质是**编号为** a 的 $\mathbb{R}$ 的那个量为 x, **编号为** b 的那个量为 y.

简单来说, 乘积的顺序其实并不重要, 可我们在写的时候为了规范就得注重乘积的顺序, 但是我们应当记住, 乘积不满足交换律, 这不是乘积的本质内容. 我们观察图 2, 知道 product 和 coprod 一样, 两个元素之间的结合是任意的.

Remark 2.10. $A_1 \times A_2 \times \dots$ 表示为 $\prod_{i \in \mathbb{N}} A_i$

[2]coprod 的符号不知道为什么有点大, 不太好哦

$$
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dr, "p_1"] & \\
A \times B \arrow[ur, "\pi_1"] \arrow[dr, "\pi_2"] & & A \coprod B \\
 & B \arrow[ur, "p_2"] &
\end{tikzcd}
$$

图 2: Commutive Diagram about Coproduct

3 映射

人们常说, 映射是一个对应法则. 我说, 这是什么几把. 别 tm 复读别人瞎几把说的定义. 我说, 一个映射, 或者说函数, 先要给定函数的值域和定义域, 函数将定义域之中的元素射到值域中的元素上. 我们这样表示: 设 f 是函数

$$f\colon X \to Y, x \mapsto f(x) \tag{12}$$

这就是说, $f(x) \in Y$ $f(x)$ 是 Y 之中的一个元素. 这便是一个函数. 你尽可以认为什么 "允许多对一, 不允许一对多" 完全是扯淡.

定义 3.1 (Image)**.** 函数的 image 记为 $\mathrm{Im}(A)$, 定义为 $\mathrm{Im}(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$

定义 3.2 (inverse)**.** 函数 f 的逆记为 f^{-1}, 我可以将其定义为函数, 你看就行了.

$$f^{-1}\colon \mathfrak{P}(B) \to \mathfrak{P}(A), \mathcal{B} \mapsto f^{-1}(\mathcal{B}) \tag{13}$$

为了方便, 对于单元集, 我们将 $\{\}$ 省略, 也就是将 $f^{-1}(\{b\})$ 简写为 $f^{-1}(b)$. 逆的定义也好写:

$$f^{-1}(\mathcal{B}) = \{x \mid f(x) \in \mathcal{B}\} \tag{14}$$

Remark 3.3. 函数的逆以后会经常用到, 或者是说, 对于某些人来说会经常用到.

性质 3.4 (逆的性质)**.** 逆具有良好的性质,

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{i \in \Lambda} A_i\Big) = \bigcup_{i \in \Lambda} f^{-1}(A_i) \qquad f^{-1}\Big(\bigcap_{i \in \Lambda} A_i\Big) = \bigcap_{i \in \Lambda} f^{-1}(A_i) \tag{15}$$

以后会用到的. 现在没什么用, 我只是显摆一下.

定义 3.5 (one-one, onto)**.** 单射 (one-one), 满射 (onto) 是两种函数. One-one 是说, 不同元素射到不同元素上, onto 是说, 值域里的所有元素都被射了, .viz 设 $f\colon A \to B$

$$\forall a_1, a_2 (a_1 \neq a_2 \implies f(a_1) \neq f(a_2)) \tag{16}$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, two heads] \arrow[rr, bend left, "f"] & \mathrm{Im}(A) \arrow[r, hook] & B
\end{tikzcd}$$

图 3: Commutive diagram about a function

对于后者则是

$$\forall b \in B(f^{-1}(\{b\}) \neq \varnothing) \tag{17}$$

既是单射又是满射的函数称为双射.

定义 3.6 (inverse 的另一个定义)**.** 函数 $f\colon A \to B$ 的逆 f^{-1} 的定义为 $f^{-1}\colon B \to A, b \mapsto a$, 其中 $f(a) = b$. 不难知道 f^{-1} 存在当且仅当 f 是双的. 这个定义的好处在于, 考虑 S 上的变换构成的集合 $T(S)$, 对于 $f \in T(S)$ 来说, 如果逆存在, 则 $f^{-1} \in T(S)$.

定义 3.7 (满射, 单射的符号)**.** 如图 3 所示, 两个箭头的为满射, 有一个勾的为单射.

Remark 3.8. 图 3展示了什么叫函数. $\mathrm{Im}(A)$ 的定义请见定义 3.1.

4 关系

关系的定义乍一看比较生硬, 但...我也觉得生硬, 不知道该怎么搞.

定义 4.1 (relation)**.** 集合 S 上的二元关系是 $R \in P(S \times S)$. 如果说 $(a, b) \in R$ 那么称呼 a, b 满足关系 R, 记为 $a\mathrm{R}b$.

关系有许多性质, 据此我们进行关系的分类. 但是我们只需要关注一个, 等价关系. 我们有一种比较自然但是有些局限的定义法.

定义 4.2 (equivalent relation)**.** 对于一个 X 上的等价关系 R 来说, 存在一个函数 $f\colon X \to Y$, 有 $a\mathrm{R}b \iff f(a) = f(b)$. a, b 等价也可以记为 $a \sim b$.

定义 4.3 (equivalent class)**.** 我知道定义. 这里就不说了.

Example 4.4. 设 R 是 $\mathbb{Z}$ 上的关系, 定义为

$$a\mathrm{R}b \iff a \equiv b \pmod n \tag{18}$$

那么 R 是等价关系. 由我们的定义, 这是显然的, 设函数 $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, x \mapsto x \bmod n$, 那么 $a\mathrm{R}b \iff f(a) = f(b)$

定义 4.5 (classification)**.** 对于一个集合 S, 其一个划分为 $\{S_i\}_{i\in\Lambda}$. 有

$$\bigcup_{i\in\Lambda} S_i = S \tag{19}$$

其中 S_i 两两不相交.

我们设 $[b] = \{a \mid a \sim b\}$, 能够知道 $\{[b] \mid b \in X\}$ 是一个划分. 这是一个定理来着, 但实际上挺简单. 稍微验证一下就行.

或者, 根据定义, 我们有 $\{f^{-1}(\{b\}) \mid b \in Y\}$ 是一个划分. 能够知道, 如果说 f 是一个满射, 那么划分之内的非空集合的个数为 $|Y|$.