算法第四章作业

210110531　　　毛翰翔

2022 年 10 月 10 日

1. 在一条直线上有 n 堆石子，每堆有一定的数量，每次可以将两堆相邻的石子合并，合并后放在两堆的中间位置，合并的费用为两堆石子的总数。求把所有石子合并成一堆的最小花费 (定义 dp[i][j] 为第 i 堆石子到第 j 堆合并的最小花费)。

(1) 写出该问题的递推方程。(10 分)

(2) 有 5 堆石子 (n=5)，每堆石子大小分别为 <1,3,5,2,4>, 求出把所有石子合并成一堆的最小花费 (要求写出运算矩阵)。(10 分)

(3) 写出该问题的伪代码。(10 分)

(1)：记 $n[i]$ 是第 i 堆石头的数量, 并且 $weight[i][j]$ 是 i 到 j 的石头数量之和.

有:

$$\mathrm{dp}[i][j]=\begin{cases}0 & i=j\\ \min_{i\le k\le j-1}\{\mathrm{dp}[i][k]+\mathrm{dp}[k+1][j]\}+weight[i][j]\end{cases}$$

(2)：

	1	2	3	4	5
1	0	4	13	22	34
2		0	8	17	28
3			0	7	17
4				0	6
5					0

所以答案是 34

(3)

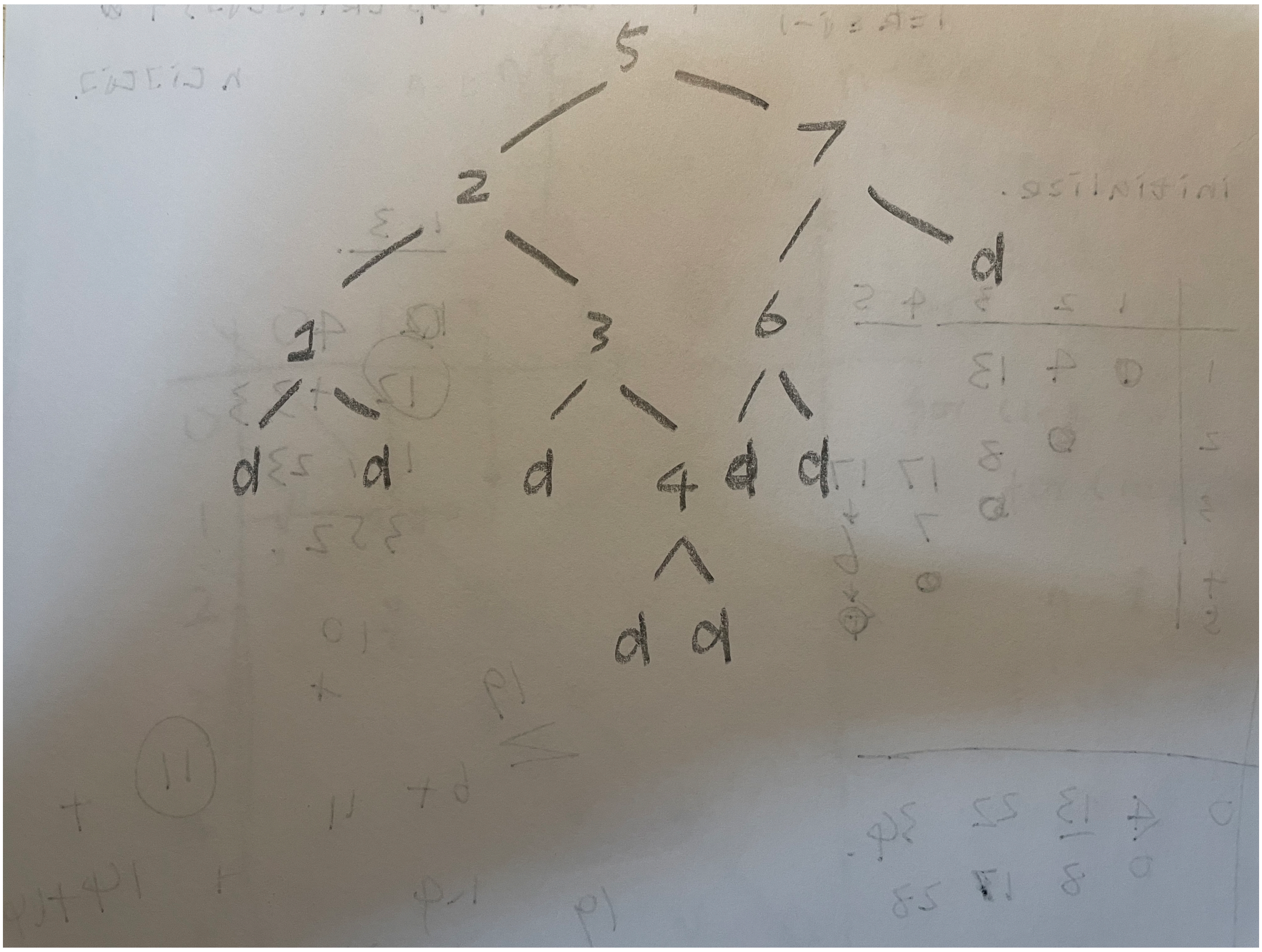
```
int dp () {
    for (int i = 1 ; i <= n ; i++) {
        dp [i][i] = 0;
    }
    //
    min = +infty;
    for (int i = 1; i <= n ;i++) {
        for (int j = i ; j <= n ; j ++){
            if (i != j) {
                for (int k = i ; k <= j -1 ;k++)
                if (dp[i][k] + dp[k+1][j] < min)
                    min = dp[i][k] + dp[k+1][j];
                dp[i][j] = min + weight [i][j];
            }
```

```c
            }
        }
        printf("%d", dp[1][n]);
    }
```

2. 若 7 个关键字的概率如下所示，求其最优二叉搜索树的结构和代价，要求必须写出递推方程。

$$e\left[i,j\right]=\begin{cases}\min_{i\leq r\leq j}\left\{e\left[i,r-1\right]+e\left[r+1,j\right]+w[i,j]\right\} & i+1\neq j\\ q_{i-1} & i+1=j\end{cases}$$

代价是 3.12




```c
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#define infty 1000
int main (){
    int n =0;
    // n for 节点的数目，有两组概率
    scanf ("%d", &n);
    // p q 我们说对于 n 个节点，将会访问到 p[n]
```

```
    // 于是分配空间的时候，必须要多一位
    int * p = (int *) malloc ( (n+1) * sizeof (int));
    int * q = (int *) malloc ( (n+1) * sizeof (int));
    // 这里就是多了一位
    // 我们的概率都是百分之几的，我直接使用 int 储存了
    for (int i = 1 ; i < n + 1 ; i++) {
        scanf ("%d", &p[i]);
    }
    for (int i = 0 ; i < n+1 ; i++) {
        scanf ("%d", &q[i]);
    }
    // 这里就是读入数据.

    int e[10][10] = {}, w[10][10] = {}, root[10][10] = {};
    for (int i = 0 ; i < 10 ; i++){
        for (int j = 0 ; j < 10;j++){
            e[i][j] = 0 ;
            root[i][j] = 0;
            w[i][j] = 0;
        }
    }

    // 将两个数组初始化
    for (int i = 1 ; i <= n + 1; i++){
        e[i][i-1] = q[i-1];
        w[i][i-1] = q[i-1];
    }
    // 处理最底的情况.
    for (int i = 1 ; i < n+1 ;i++){
        for (int j = 1 ; j <= n - i + 1 ; j++){
            // i for 一种偏移量，就是说我们是从对角线开始这样计算的，i 就是往右边便宜的程度.
            int min = infty;
            w[j][j+i-1] = w[j][j+i-2] + p[j+i-1] + q[j+i-1];
            // 为 w 赋值.
            for (int r = j ;r <= j+i -1 ; r++){
            // 开始找出最小值
                if (e[j][r-1] + e[r+1][j+i-1] + w[j][j+i-1] < min) {
                    min = e[j][r-1] +  e[r+1][j+i-1] + w[j][j+i-1];
                    root[j][j+i-1] = r;
                }
            }
            e[j][j+i-1] = min;
        }
    }
    printf("%d\n", e[1][n]);
```

```
    // 这就是结果了
}
```

3. 编程题：兑换零钱问题（40 分）

题目描述：

给定不同面额的硬币 coins 和一个总金额 amount。编写一个函数来计算可以凑成总金额所需的最少的硬币个数。如果没有任何一种硬币组合能组成总金额，返回-1。(提示：你可以认为每种硬币的数量是无限的)。

首先分析优化解的结构, 类似的, 我们用矩阵 dp 来记录最优解, 其中第一个指标指的是使用的硬币的种类, 第二指标是指总额. 硬币的种数按照升序排列, 就是说 n 种硬币指前 n 个面值最小的硬币. 于是我们可以将问题划分为几个子问题

如果说当前 i 硬币并没有使用, 那么问题的解就是 $dp[i-1][j]$, 如果说当前 i 硬币使用了 k 个, 那么问题的解是 $dp[i-1][j-kv_i]+k$

就有:

$$dp[i][j] = \min_{1\le k\le \lfloor j/v_i \rfloor} \{dp[i-1]\,[j]\,, dp[i-1][j-kv_i]+k\}$$

接着定义最初的解: 当种数为 1 的时候. 如果说不能凑出来, 则 $j \bmod v_1 \neq 0$, 此时定义 $dp[1][j]=+\infty$. 问题就能解决了. 最后如果 $dp[n][\text{amount}]$ 是正无穷的话, 则说明不能凑出来, 返回 -1 即可

综上就是:

$$dp\,[i]\,[j] = \begin{cases} 0 & j=0 \\ j/v_i & i=1, j \bmod v_i = 0 \\ +\infty & i=1, j \bmod v_i \neq 0 \\ \min\limits_{1\le k\le \lfloor j/v_i \rfloor} \{dp\,[i-1]\,[j]\,, dp\,[i-1]\,[j-kv_i]+k\} & i\neq 1 \end{cases}$$

```c
#define infty 10000
int main (){
    int n =0, amount = 0, min = infty;
    scanf("%d %d", &n, &amount);
    // 读取 n amount
    int ** dp = (int **) malloc (n*amount * sizeof (int));
    int * v = (int *) malloc ((n+1) * sizeof (int));
    // 分配矩阵 dp 和向量 v
    // 分别储存最优解, 和每种硬币的面额

    for (int i = 1 ; i <= n ; i++){
        scanf ("%d" , &v [i]);
    }
    // 读取面额

    for (int i = 1; i <= n ; i++){
        dp[i][0] = 0;
    }
    // amount 为 0 的时候的初始化.
```

```
    for (int i = 1 ; i <= amount ; i++){
        if (i % v[1] != 0)
        dp[1][i] = infty;
        else
        dp[1][i] = i / v[1];
    }
    // 只使用了一种硬币的情况.
    for (int i = 2 ; i <= n ; i++){
        for (int j = i ; j<= amount ; j++){
            // 开始处理一般矩阵的成员
            min = dp[i-1,j] ;
            // 先赋值，以此避免在 v[i] > j 的情况下访问数组.
            if (v[i] <= j){
                for (int k = 1; k <= j / v[i]; k++){
                    // k 就是使用了硬币的个数，从 1 开始计数
                    if (dp[i-1][j - k * v[i]] + k < min)
                        min = dp[i-1][j - k * v[i]] + k ;
                }
                dp[i][j] = min;
                // 将最小的值放入 dp [i][j]
            }
        }
    }
    if (dp[n][amount] == infty)
        return -1;
    else
        return dp[n][amount];
}
```