

zuoye3

Your mother

2022 年 12 月 18 日

1. 使用演绎定理在 Propositional Calculus 中证明

$$(1) \vdash (B \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)$$

$$(2) \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

$$(3) \vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$$

$$(4) \vdash \neg(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)$$

Solution. (1)

$$\begin{aligned} & \vdash (B \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B) \\ \Leftrightarrow & (B \rightarrow A) \vdash (\neg A \rightarrow \neg B) \\ \Leftrightarrow & (B \rightarrow A), \neg A \vdash \neg B \end{aligned}$$

$$(1) \quad \neg A \rightarrow (A \rightarrow \neg B) \quad (\text{thm 6})$$

$$(2) \quad \neg A \quad (\text{已知})$$

$$(3) \quad A \rightarrow \neg B \quad (\text{rmp})$$

$$(4) \quad B \rightarrow A \quad (\text{已知})$$

$$(5) \quad B \rightarrow \neg B \quad ((4), (3), \text{thm 8})$$

$$(6) \quad (B \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg B \quad (\text{thm 10})$$

$$(7) \quad \neg B \quad (\text{rmp})$$

(2)

$$\begin{aligned} & \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C) \\ \Leftrightarrow & (A \rightarrow B) \vdash (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C) \\ \Leftrightarrow & (A \rightarrow B), (B \rightarrow C) \vdash (A \rightarrow C) \\ \Leftrightarrow & (A \rightarrow B), (B \rightarrow C), A \vdash C \end{aligned}$$

- | | | |
|-----|-------------------|-------|
| (1) | A | (已知) |
| (2) | $A \rightarrow B$ | (已知) |
| (3) | B | (rmp) |
| (4) | $B \rightarrow C$ | (已知) |
| (5) | C | (rmp) |

(3)

$$\begin{aligned} & \vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A \\ \Leftrightarrow & (A \rightarrow B) \rightarrow A \vdash A \end{aligned}$$

- | | | |
|-----|--|-----------------|
| (1) | $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ | (thm 6) |
| (2) | $(A \rightarrow B) \rightarrow A$ | (已知) |
| (3) | $\neg A \rightarrow A$ | ((1),(2),thm 8) |
| (4) | $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$ | (反证法) |
| (5) | A | ((3),(4),rmp) |

(4)

$$\begin{aligned} & \vdash \neg(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A) \\ \Leftrightarrow & \neg(A \rightarrow B) \vdash (B \rightarrow A) \end{aligned}$$

- | | | |
|-----|--|-----------|
| (1) | $B \rightarrow (A \rightarrow B)$ | (A1) |
| (2) | $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow \neg B$ | (逆否) |
| (3) | $\neg B \rightarrow (B \rightarrow A)$ | (thm 6) |
| (4) | $\neg(A \rightarrow B)$ | (已知) |
| (5) | $\neg B$ | ((2),rmp) |
| (6) | $B \rightarrow A$ | ((3),rmp) |

2. 将 A3 换为 $(\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A)$, 设这个得到的系统为 PC_1 , 证明

$$(1) \vdash_{PC} (\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A)$$

$$(2) \vdash_{PC_1} (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$$

Solution. 1.

- (1) $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)$ (thm 1)
- (2) $\neg A \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg B)$ (rmp, thm 3)
- (3) $\neg A \rightarrow (B \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow \neg B))$ (rmp, thm 15)
- (4) $(\neg A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow \neg B))$ (rmp, A2)
- (5) $(\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A)$ (thm 8, A3)

2. 因为 PC 之中的 thm 3 以及 thm 8 的证明并没有使用到 A3, 那么在 PC_1 之中也显然成立.

- (1) $((\neg A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow A)$ (thm 1)
- (2) $(\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$ (rmp, thm 3)
- (3) $B \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$ (A1)
- (4) $B \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$ ((2),(3),thm 8)
- (5) $((\neg A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow (B \rightarrow A)$ (rmp, thm 3)
- (6) $(\neg A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A$ (A3')
- (7) $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow A)$ (rmp, thm 3)
- (8) $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$ ((5),(7),thm 8)