目录

1 DFA 和 NFA **1**

1.1 NFA 1

1.1.1 NFA 的性质 1

1.1.2 NFA 转化为 DFA 的方法 3

1.2 带空转移的 NFA 3

1.2.1 $\epsilon-$NFA 的定义 3

1.2.2 空转 NFA 的性质 4

1.2.3 空转 NFA 转换为 DFA 4

1 DFA 和 NFA

1.1 NFA

1.1.1 NFA 的性质

NFA, 可以允许多个现态, 以及一个现态可以有多个次态. 仅仅是状态转移函数的定义有着不同. 其定义如下:

$$\delta\colon Q\times\Sigma\to 2^Q \tag{1}$$

而 DFA 的状态转移函数长这个样子:

$$\delta\colon Q\times\Sigma\to Q \tag{2}$$

Example 1.1. *检测末尾为 01 的只由 0 和 1 组成的序列的 NFA. 状态转移函数如下*[1]*:*

[1]图就不画了, 真不会画

	0	1
$\rightarrow q_0$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\varnothing$	$\{q_1\}$
$^*q_2$	$\varnothing$	$\varnothing$

定义 1.2 (状态转移函数的拓展)**.** δ 可以扩展为 $\hat{\delta}\colon Q \times \Sigma^* \rightarrow 2^Q$, 定义是递归的, 如下:

$$\hat{\delta}(q, w) = \begin{cases} q & , \text{if } w = \epsilon \\ \bigcup_{p \in \hat{\delta}(q,x)} \delta(p, a) & , \text{if } w = xa \end{cases}$$

这个函数告诉了我们, 给定初态 q_0, 以及一个输入的字符串 w 之后我们的现状 (集合) 是什么.

定理 1.3 (NFA 和 DFA 之间的等价性)**.** 一个语言 L 能被 NFA 接收, 当且仅当能被 DFA 接收

证明. 我们需要证明的是: 给定一个 N, 存在一个 D 使得 $L(N) = L(D)$, 以及反过来的版本, 给定一个 D 存在一个 N 使得 $L(D) = L(N)$. 注意到 DFA 是一个 NFA 的一个特例, 于是我们能够知道: $\forall D \exists N (L(D) = L(N))$. 于是我们要证明的便是, 如果 L 能够被 NFA 接收, 那么 L 能够被 DFA 接收.

使用构造法. 给定一个 NFA , 能够构造出一个 DFA 接收 L. 这里使用的构造法称为子集构造法. 原理很简单: 对于一个 NFA, 其 '现态集合' 虽然是一个集合, 但是可以视为一个 DFA 的现态. 因为状态是有限的, 所以说, 状态集合的幂集也是有限的, 若是能够将 NFA 看作是一个 DFA , 那么其现态就是一个 Σ 的子集, 当然次态也是一个 Σ 的子集.

我们给定 NFA $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, 构造 DFA $(Q', \Sigma, \delta', \{q_0\}, F')$, 其中

$$Q' = 2^\Sigma$$
$$F' = \{S \mid S \in Q', S \cap F \neq \varnothing\}$$

注意到, $\{q_0\} \in Q'$, 这是我们加上 $\{\}$ 的原因. 其中 δ' 的定义如下:

$$\delta'(S, a) = \bigcup_{q_i \in S} \delta(q_i, a)$$

我们需要证明 $\forall s \in \Sigma^*(\hat{\delta}'(q_0, s) = \hat{\delta}(q_0, s))$. 证明等会在说. □

定理 1.4. $\hat{\delta}(q_0, s) = \hat{\delta}'(q_0, s)$

证明. 对字符串的长度进行归纳: 当长度为 $n = 0$

$$\hat{\delta}'(\{q_0\}, \epsilon) = \{q_0\} = \hat{\delta}(q_0, \epsilon) \tag{3}$$

当长度为 $n = k$, 设假设成立.

当长度为 $n = k + 1$, 设 $w = xa$, 那么 $\hat{\delta}(q_0, w) = \bigcup_{p\in\hat{\delta}(q_0,x)} \delta(p, a)$. 而 $\hat{\delta}'(q_0, w) = \delta'(\delta'(q_0, x), a)$. 后者的定义为 $\bigcup_{p\in\hat{\delta}'(q_0,x)} \delta(p, a)$. 因为 x 的长度为 k, 所以 $\hat{\delta}'(q_0, x) = \hat{\delta}(q_0, x)$, 因此 $\hat{\delta}'(q_0, w) = \hat{\delta}(q_0, w)$ 恒成立.

$$\delta'(\delta'(q_0, x)) = \bigcup_{p\in\hat{\delta}'(q_0,x)} \delta(p, a) = \bigcup_{p\in\hat{\delta}(q_0,x)} \delta(p, a) = \hat{\delta}(q_0, w) \tag{4}$$

□

我们知道了 $\hat{\delta}(q_0, w) = \hat{\delta}'(q_0, w)$ 之后, 就能够证明 $L(N) = L(D)$ 了. 只需要注意到 $L(N)$ 的定义: 对于任意的 $s \in L(N)$, 都有 $\hat{\delta}'(q_0, s) \cap F \neq \varnothing$. 我们知晓了这个定义之后就能够证明 $L(N) = L(D)$ 了, 这是显然的.

1.1.2 NFA 转化为 DFA 的方法

使用上面的子集构造法就能够进行转化, 随后我们将不需要的状态进行删除即可.

1.2 带空转移的 NFA

空转移的意思便是, 在没有输入的时候状态可以自己发生转移, 这样的自动机记为 ϵ-NFA, 其中 ϵ 是空字符串的意思. 在本小节之后, 如果没有特别说明, NFA 包括 ϵ - NFA 和 NFA.

1.2.1 $\epsilon-$ NFA 的定义

仅有一处和 NFA 不同, 状态转移函数的定义不同:

$$\delta\colon Q\times(\Sigma\cup\epsilon)\to 2^Q \tag{5}$$

并且, 我们需要理解什么是 ϵ: 对于一个输入的字符串 s, 其等价于 $s\epsilon$, 也等价于 $s\epsilon\epsilon$. 当然, ϵ 插在中间也是可以的.

Example 1.5.

定义 1.6 (ϵ closure)**.** 给定一个状态集合 S, 那么 S 的 ϵ closure 为 S 并上那些当前状态通过空转能够达到的状态, 记为 $\bar{\epsilon}(S)$. 记 $\bigcup_{s\in S}\delta(s,\epsilon)$ 为 $\epsilon_1(S)$, 并且记 $\bigcup_{s\in\epsilon_1(S)}\delta(s,\epsilon)$ 为 $\epsilon_2(S)$, 那么就能够得到 $\bar{\epsilon}(S)$ 的表达式:

$$\bar{\epsilon}(S)=S\cup\epsilon_1(S)\cup\epsilon_2(S)\cup\cdots \tag{6}$$

当然可以写为

$$\bar{\epsilon}(S)=\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}\epsilon_n(S)\Big)\cup S \tag{7}$$

特别地, 可以称呼 S 为 $\epsilon_0(S)$. 表达式还可以再精简一点.

引入 ϵ closure 的概念是为了定义 $\hat{\delta}$, 以及下文之中 ϵ -NFA 向 DFA 转换.

定义 1.7 (δ 函数的扩展)**.** 同样地, δ' 的定义也是递归的. 定义如下:

$$\delta'(q_0,w)=\begin{cases}\bar{\epsilon}(q_0) & \text{, if } w=\epsilon\\ \bar{\epsilon}\big(\bigcup_{p\in\hat{\delta}'(q_0,x)}\delta(p,a)\big) & \text{, if } w=xa\end{cases} \tag{8}$$

1.2.2 空转 NFA 的性质

实际上 ϵ - NFA 也是和 NFA 等价的, 这就是说给定一个 ϵ - NFA , 我们能够构造出一个 NFA. 且有 $L(N)=L(N')$.

定理 1.8 (ϵ-NFA 和 DFA 等价性)**.**

1.2.3 空转 NFA 转换为 DFA

方法是和前面类似的.