数理逻辑作业

毛翰翔　　210110531

2022 年 11 月 24 日

1. 将下语句形式转化为命题公式.

(1) 设是本科生为 p , 研究生为 q , 那么语句为 $p \vee q$

(2) 设接到罚单为 p , 车速超过 100km/h 为 q , 那么为 $p \rightarrow q$

(3) 设满 18 为 p , 有选举权为 q , 那么 $p \leftarrow q$

2. 判定下列逻辑蕴含和逻辑等价是否成立, 其中 A, B, C, D 为任意公式.

(1) $A \Rightarrow \neg B \vee A$ 那么就有 $A^v = 1 \implies (\neg B \vee A)^v = 1$

(2) $\neg A \rightarrow \neg B \iff A \vee \neg B \iff \neg B \vee A \iff B \rightarrow A$

(3)

$$
\begin{aligned}
& A \rightarrow (B \rightarrow C) \\
\iff & (\neg A) \vee (\neg B) \vee (C) \\
\implies & (A \wedge \neg B) \vee (\neg A) \vee C \\
\iff & \neg(\neg A \vee B) \vee (\neg A \vee C) && \text{(de Morgan's law)} \\
\iff & \neg(A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C) \\
\iff & (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)
\end{aligned}
$$

(4)

$$
\begin{aligned}
& A \rightarrow (B \rightarrow C) \\
\iff & \neg A \vee \neg B \vee C \\
\iff & \neg (A \wedge B) \vee C && \text{(de Morgan's law)} \\
\iff & (A \wedge B) \rightarrow C
\end{aligned}
$$

(5)

$$
\begin{aligned}
& A \wedge B \rightarrow C \\
\iff & (\neg A \wedge \neg B) \vee C \\
\iff & (\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee C) && \text{(分配律)} \\
\iff & (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)
\end{aligned}
$$

(6) 不成立, 只需令 $A^v = 0, B^v = 0, C^v = 0, D^v = 0$, 明显这个时候不成立.

3.

(1)

$$
\begin{aligned}
& \neg(q \to p) \land (r \to \neg s) \\
\iff & \neg(\neg q \lor p) \land (r \to \neg s) \\
\iff & q \land \neg p \land (\neg r \lor \neg s) && \text{(de Morgan's law, 蕴含式转换)}
\end{aligned}
$$

所以说析取范式是:

$$(q \land \neg p \land \neg r) \lor (q \land \neg p \land \neg s)$$

而合取范式是:

$$q \land \neg p \land (\neg r \lor \neg s)$$

(2)

$$
\begin{aligned}
& \neg p \land q \to r \\
\iff & \neg(\neg p \land q) \lor r && \text{(蕴含式转换)} \\
\iff & p \lor \neg q \lor r && \text{(de Morgan's law)}
\end{aligned}
$$

既是合取范式又是析取范式.

(3) 合取范式

$$
\begin{aligned}
& \neg(p \lor q) \leftrightarrow p \land q \\
\iff & (\neg(p \lor q) \to p \land q) \land (p \land q \to \neg(p \lor q)) \\
\iff & ((p \lor q) \lor (p \land q)) \land (\neg p \lor \neg q \lor [(\neg p) \land (\neg q)]) \\
\iff & (p \lor q \lor p) \land (p \lor q \lor q) \land (\neg p \lor \neg q \lor \neg p) \land (\neg p \lor \neg q \lor \neg q) && \text{(分配律)} \\
\iff & (p \lor q) \land (\neg p \lor \neg q)
\end{aligned}
$$

我们根据合取范式可以快速地写出真值表.

q/p	0	1
0	0	1
1	1	0

于是我们可以根据真值表写出析取范式:

$$(p \land \neg q) \lor (q \land \neg p)$$

4. 求出下面公式的主合取范式和主析取范式

(1)

$$
\begin{aligned}
& p \to p \land q \\
\iff & \neg p \lor (p \land q) && \text{(消去蕴含)} \\
\iff & (\neg p \lor p) \land (\neg p \lor q) && \text{(分配律)} \\
\iff & \neg p \lor q && \text{(消去永真式)}
\end{aligned}
$$

所以说主合取范式为 $\neg p \vee q$

$$\begin{aligned}
& \neg p \vee q \\
\Longleftrightarrow\ & (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p) \vee (q \wedge p) \\
\Longleftrightarrow\ & (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q) && \text{(消去相同项)}
\end{aligned}$$

此为主析取范式.

(2)

$$\begin{aligned}
& p \vee q \rightarrow (q \rightarrow r) \\
\Longleftrightarrow\ & \neg (p \vee q) \vee (\neg q \vee r) && \text{(消去蕴含)} \\
\Longleftrightarrow\ & (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg q \vee r) && \text{(de Morgan)} \\
\Longleftrightarrow\ & \neg q \vee r && \text{(吸收律)}
\end{aligned}$$

此为析取范式, 也为合取范式. 那么主析取范式就是:

$$(p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$$

对于主合取范式:

$$\begin{aligned}
& \neg q \vee r \\
\Longleftrightarrow\ & (\neg p \wedge p) \vee (\neg q \vee r) \\
\Longleftrightarrow\ & (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) && \text{(分配律)}
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
& (p \rightarrow p \wedge q) \vee r \\
\Longleftrightarrow\ & \neg p \vee (\neg p \wedge q) \vee r && \text{(消去蕴含, 式 1)} \\
\Longleftrightarrow\ & (\neg p \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) && \text{(分配律)} \\
\Longleftrightarrow\ & (\neg p \vee r) && \text{(吸收律, 式 2)}
\end{aligned}$$

式 1 为析取范式, 式 2 为合取范式. 则主析取范式为:

$$(\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \vee r)$$

则主合取范式是:

$$(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r)$$