我们这边的题型是如何判定一个语言不是正则的. 既然他这么问了, 那么他大概率不是正则的.

1 泵引理

所用到的方法便是下面介绍的泵引理. 需要注意到, 符合泵引理的语言不一定是正则的, 但不满足的一定不是正则的, 也就是说, 泵引理实际上是正则的必要条件.

鸽巢原理 原理应该很简单, 之前在其他地方也有涉及[1], 其实是一个挺有意思的定理.

泵引理

定理 1.1. 对于一个正则语言 L, 存在 N 使得对于长度大于等于 N 的语句, i.e. $\{w \mid |w| \geq N$, 可以分为三个部分 xyz, i.e. $w = xyz$, 并且满足:

1. $y \neq \epsilon$
2. $|xy| \leq N$
3. $xy^*z \in L$

我们使用泵引理和反证法, 一般是, 给定一个 N, 找出一个 w, 其不满足上面的第三条.

证明 证明需要用到前面的定理. 考虑这个语言对应的正则表达式, 还有其对应的 DFA. 并且给 DFA 的状态编号. 设 $w = a_1a_2a_3\dots a_m, m \geq N$, $q_i = \hat{\delta}(q_0, a_1\dots a_i)$. q_i 代表的是, DFA 接收到 w 的前 i 字母的时候所处于的状态. 这个证明的重点在于: 使用鸽巢原理知道, 当输入长度为 N 的时候,

[1]比如说, 线性代数之中有一题: 证明对于一个 n 阶方阵, 存在 $k \leq n$ 使得 $r(A^k) = r(A^{k+1}) = r(A^{k+2}) = \dots$

至少存在一对 $i, j, i \neq j$ 使得 $q_i = q_j$. 若是将状态考虑为点, 将状态的转移看作边, 则输入可视为图. 由上面的讨论知道, 该图一定有圈. 卧槽, 讨论很几把麻烦.

通过泵引理证明某些语言并不是正则的. 证明思路上面已经讲过了: 我们使用泵引理和反证法, 一般是, 给定一个 N, 找出一个 w, 其不满足上面的第三条. 下面给出一些例题:

Example 1.2. 证明 $L_{01} = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$ 不是正则的.

Example 1.3. 证明 $L = \{0^i 1^j \mid i > j\}$ 不是正则的.

Example 1.4. 证明 $L = \{a^{n!} \mid n \geq 0\}$ 不是正则的.

2 运算的封闭性