第一题

证明. G/K 交换, 于是

$$\forall a, b \in G, \quad Kab = Kba$$

也就是说, $ab(ba)^{-1} \in K$. 因为 $K \leq H$, 那么 $ab(ba)^{-1} \in H$, 于是

$$\forall a, b \in G, \quad Hab = Hba$$

于是 G/H 交换. $\square$

第二题

证明. 分三步走

1. 证明 $|\operatorname{Aut}(G)| = \varphi(n)$

2. 证明 $\forall f \in \operatorname{Aut}(G)$, 都有

$$\forall g \in G, f(g) = g^i$$

3. 验证 $\operatorname{Aut}(G)$ 是循环的.

证明 (1): 设 g 是 G 的生成元. 设 f 是一个自同态, 且有 $f(g) = g^i$. 那么我们有: $f \in \operatorname{Aut}(G)$ 当且仅当 $\gcd(i, n) = 1$, 于是说 $|\operatorname{Aut}(G)| = \varphi(n)$.

证明 (2): 设

$$\forall a \in G, \quad a = g^\alpha$$

那么

$$\forall a \in G, \quad f(a) = f(g^\alpha) = g^{\alpha i} = a^i$$

证明 (3): 设 $f_i \colon G \to G, g \mapsto g^i$

1 和 2. 当 $|G| = 1$ 或者 2 的时候, $\varphi(n) = 1$, 则 $\operatorname{Aut}(G)$ 是循环的

3. $|G| = 3$, $\varphi(n) = 2$. $\operatorname{Aut}(G) = \{ f_1, f_2 \}$, 因为 $f_2^2 = f_1$ 则 $\operatorname{Aut}(G)$ 是循环的

4. $|G| = 4$, $\varphi(n) = 2$. 和 (3) 完全类似.

5. $|G| = 5$, $\varphi(n) = 4$.

$$\operatorname{Aut}(G) = \{ f_1, f_2, f_3, f_4 \}$$

有

$$\begin{cases} f_2^2 = f_4 \\ f_2^3 = f_3 \\ f_2^4 = f_1 \end{cases}$$

则 $\operatorname{Aut}(G)$ 是循环的

6. $|G|=6$, $\varphi(n)=2$. 和 (3) 完全类似.

7. $|G|=7$, $\varphi(n)=6$, 且

$$\mathrm{Aut}(G)=\{\,f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,f_6\,\}$$

有

$$\begin{cases} f_3^2=f_2 & 9 \bmod 7=2 \\ f_3^3=f_6 & 27 \bmod 7=6 \\ f_3^4=f_4 & 81 \bmod 7=4 \\ f_3^5=f_5 & 243 \bmod 7=5 \\ f_3^6=f_1 & 729 \bmod 7=1 \end{cases}$$

则 $\mathrm{Aut}(G)$ 是循环的, 证毕. $\square$