1 演绎定理

We have the deduction theorem. That is a theorem which can simplify the proof of some theorem in the Propositional Calculus.

Theorem 1.1.

$$\Gamma \vdash \alpha \to \beta \iff \Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta \tag{1}$$

proof by induction. **必要性:**

这个是显然的, 因为我们说, $\alpha \to \beta$ 是后面的一个定理, 我们再次使用 rmp 分离规则就能够证明

$$\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \alpha \to \beta$$

充分性: 我们需要使用归纳法. 我们说, emmm, 对长度进行归纳是怎么回事..

我们已知 $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ 记这个推理过程为 $(\beta_1, \cdots, \beta_n)$ 这个东西的长度为 n. 我们要证明对于里面的所有 β_i 都有 $\alpha \to \beta_i$

使用归纳法进行证明, 对于 β_1 只有两种可能: 1. β_1 是 Γ 中的一个 2. β_1 是其中一个公理. 这个时候当然有 $\alpha \to \beta_1$, 毕竟后件为真.

对于 $i \leq n$ 我们说, 假设成立, 有 $\Gamma \vdash \alpha \to \beta_i$

对于 $i = n$ 的时候, 我们要证明 $\Gamma \vdash \alpha \to \beta_i$ 对于 β_i 是一个推理结果, 就是说, β_i 是有一个 rmp 分离规则分离出来的 (当然 β_i 也可以是公理或者是属于 Γ), 这就是说他是前面两个 β_j, β_k 分离出来的, 设 $\beta_k = \beta_j \to \beta_i$, 并且我们还有 $\Gamma \vdash \alpha \to \beta_j$, $\Gamma \vdash \alpha \to \beta_k$

卧槽, 这个时候就简单了:

$$\Gamma \vdash \alpha \to \beta_k$$

viz.

$$\Gamma \vdash \alpha \to (\beta_j \to \beta_i)$$

viz.

$$\Gamma \vdash (\alpha \to \beta_j) \to (\alpha \to \beta_i)$$

然后捏, 使用 rmp 就行了, 毕竟我们有 $\Gamma \vdash \alpha \to \beta_j$. 我们就有 $\Gamma \vdash \alpha \to \beta_i$, 然后 $\beta_i = \beta$, 因为 β_i 是最后一个. □

Comment. 这个定理好用的一批, 只不过不让用.

Example 1.1. Prove

$$\vdash (A \to (B \to C)) \to ((C \to D) \to (A \to (B \to D))) \tag{2}$$

使用演绎定理证明. Trivial ! □

Example 1.2. 证明

$$\vdash ((A \to B) \to (A \to C)) \to (A \to (B \to C)) \tag{3}$$

Comment. 这个例子实际上是 A2 的逆命题. Wow, impressive.

2 Completeness and Soundness of Propositional Calculus

Theorem 2.1 (合理性)**.** *如果说* $\Gamma \vdash A$*, then* $\Gamma \vDash A$*, 或者说* $\Gamma \Rightarrow A$

这里的这个 $\vDash$ 是另一个方面的东西, 就是另一本书 logic for application 之中介绍的 tableau proof. 但是那里讲的比较诡异, 毕竟没有介绍如何证明 $\Gamma \vDash \alpha$ 只介绍了 $\vDash \alpha$. 即, 如何证明 tautology.

艹能不能讲点动机. 你妈的.

Theorem 2.2 (一致性)**.** *在 Propositional Calculus 之中, 不存在* Γ *使得* $\Gamma \vdash A, \Gamma \vdash \neg A$.

Remark. 如果说是不一致的, 那么因为反证法, Γ 能够推出任意的公式.

proof of 一致性. 反证法, 加上这个合理性就能够证明. 简单来说, 我们不能确定 A^v 的值, 它既是 1 又是 0. □

Definition 2.1 (完全性)**.** 已知 Propositions 的一个 collection Γ, 如果说对于任意的公式 A, 都有

$$\Gamma \vdash A \text{ or } \Gamma \vdash \neg A \tag{4}$$

但是, 我们说, 在 Propositional Calculus 之中, 并不是所有的公式集合都是这样的.

2.1 part 2

Definition 2.2 (theory)**.** Theory 是这样定义的.

$$\mathrm{Th}\,(PC) \equiv \{A \Vdash A\} \tag{5}$$

完备性定理: $\dashv\vdash$, 能不能多一点介绍.

Theorem 2.3 (Completeness)**.**

$$\Gamma \Rightarrow \alpha \implies \Gamma \vdash \alpha \tag{6}$$

分为很多命题来进行证明

1. Γ 是一致的, 如果说 $\Gamma \vdash A$ 不成立, 那么说 $\Gamma \cup \{\neg A\}$ 是一致的. 一致的定义见前面.

2. Γ 是一致的, 如果说 $\Gamma \vdash A$, 那么说 $\Gamma \cup \{A\}$ 也是一致的. 这两个定理是用来扩大的, 就是将前面这个东西. Γ 进行扩张, 可以说是数学家喜欢干的事情.

3. Γ 是一致的, 存在公式集合 Δ s.t. $\Gamma \subseteq \Delta$, Δ 是一致的, 并且 Δ 是完全的. 简单来说, 一直扩大, 像一个闭包一样. 使用上面两个命题进行构造, 对于每一个命题公式 A 都进行了扩大. 于是, 对于任意的 A, 都有 $\Delta \vdash A$ 或 $\Delta \vdash \neg A$, 且 Δ 一致. 就是我们给定了 Γ, 构造了定义良好的 collection Δ.

   完全性的定义见 Definition 2.1.

   Sketch of the Proof. 我们说, 这个命题的证明, 是非常数学的证明, 其他科里好像也有类似的东西, 就是整一个 bigcup. 我们找到一个 A, 有 $\Gamma \vdash A$ 或者说 $\Gamma \vdash A$ 不成立. 进行对其进行扩张 $\Delta_1 = \Gamma \cup \{A\}$ 或者说 $\Delta_1 = \Gamma \cup \{\neg A\}$. 一直扩.

   Remark. 这里需要注意极限. 说实话非常棘手.

4. 1. 如果说 $\Delta \vdash A$, 那么存在 n s.t. $\Delta_n \vdash A$ 只需要注意到, 任意一个 Propositional Calculus 之中的 '证明' 都是有限序列.

   2. 我们还要证明 Δ 是一致的. 为什么要证明? 这是因为 $\Delta = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Delta_0$, 这是无限并, 所以需要证明. 我们使用反证法证明.

Comment. 这里就不讲了, 哈哈, 考试不考, 这样一说谁都不看了. 当然啦, 这个东西是整个 Propositional Calculus 之中最重要的东西. 乐.