1. $G=\langle a\rangle$ 是 6 阶循环群, 给出 G 的一切生成元和 G 的所有子群.

证明. 设 $g=a^k$, g 是生成元则 k 和 6 互素, 那么 $k=1$ or 5, 故生成元为 a 或者 a^5

设子群为 $\langle a^m\rangle$, 其为子群则 m 是 6 的因子, 故 m 的可能取值为 $1,2,3,6$. 子群共有四个. □

Theorem 0.1 (生成元的个数)**.** 有限循环群的生成元的个数为 $\varphi(n)$ 其中 n 是 G 的阶, φ 是欧拉函数.

Theorem 0.2 (循环群的子群)**.** 循环群的子群必定为循环群.

Theorem 0.3 (子群的阶数)**.** 对于有限群 G, 由 Lagerange 定理, 有, 子群的阶数必定为 $|G|$ 的因子.

2. $M=\{1,2,3,4\}, H=\{\tau,\sigma\}$, where

$$r=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&1&3&4\end{pmatrix}\qquad\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&1&3&3\end{pmatrix}$$

H 关于变换的乘法是否做成有单位元的半群? 是否做成群?

证明. 可以验证:

$$\begin{cases}\sigma\tau=\sigma\\ \tau\sigma=\sigma\\ \sigma\sigma=\sigma\\ \tau\tau=\tau\end{cases}$$

于是 H 关于变换的乘法封闭, 且变换的合成自然满足结合律, 且 τ 是单位元, 于是 H 是幺半群. 但不是群, 因为 σ 没有逆元, 这是说, τ 或者 σ 都不满足其乘以 σ 为单位元 τ. □

纯水题.