chapter 4

You me

Yesterday

目录

1 引入

1.1 what is Fibonacci sequence

the definition of Fibonacci sequence is well-known. Let's say $F(n)$ stands for the n th member of Fibonacci sequence. We have that

$$F(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 1 & n = 2 \\ F(n-1) + F(n-2) & n > 2 \end{cases}$$

I can write some code now.

```
public int fib (int n) {
    if (n < 1) {
        return -1;
    }
    if (n == 1 || n == 2) {
        return 1;
    }
    return fib(n-1) + fib(n-2);
}
```

we can see that the time complexity of the algorithm is $O(2^n)$. And why is that happening? Can we do better? Because, when we are calculate the Fibonacci sequence, we don't need that much time.

1.2 what is dynamic programming

动态规划的前提实际上和我们的递归解法什么的是类似的, 都需要有递归的子结构.

动态规划 = 分治递归 + 记忆储存

和分治递归之间的区别就是在于这个记忆储存, 因为分治递归的过程中, 部分子问题会被重复求解, 我们将子问题的解储存下来, 以此来提高效率.

Example 1. 斐波那契数列的求解过程中, 子问题会被重复求解.

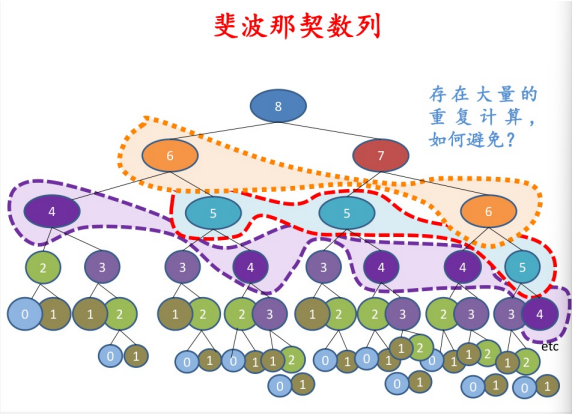
比如说我现在给出一个求斐波那契数列中, 某一项值的递归函数.

$$F(n) = \begin{cases} 1 & ,n = 1 \\ 1 & ,n = 2 \\ F(n-1) + F(n-2) & ,n > 2 \end{cases}$$

```
1. public int fib(int n) {
2.     if (n < 1) {
3.        return -1;
4.     }
5.     if (n == 1 || n == 2) {
6.        return 1;
7.    }
8.    return fib(n - 1) + fib(n - 2);
9.  }
```

我们看到这里的时间复杂度非常高，有 $O(2^n)$，是非常糟糕的算法.[1] 但是我们自己手算的时候体感并没有那么夸张，这是因为这个函数重复求解了很多子问题

为此我们可以画一颗树：



这边圈出的都是重复计算的，数量比较夸张，这种重复求解子问题的情况，就是动态规划适用的时候.

2 动态规划的一些基本原理

分治法的特点

1. 子问题是相互独立的
2. 如果说子问题之间不是相互独立的，分治方法将会重复计算子问题，效率很低

the dynamic programming is a paradigm or an approuch, which is not a specific algorithm to solve certain problems.

Divide and conquer has no memory. It is stupid. The same questions are being solved over and over again (in some situation). It works fine if we the subproblems are independent (as what we mention previously).

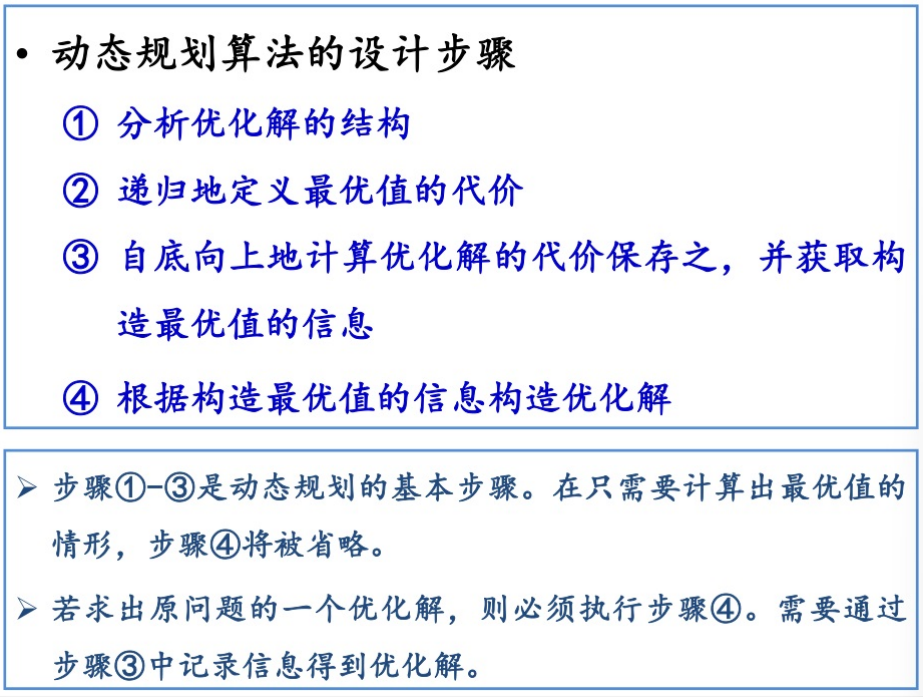
[1] 怎么求出来的?

So what is dynamic programming? In a simpliest way, it can be described as follows:

1. It is the improvement of divide and conquer.
2. It need memory
3. The memory is a list. The solution of subproblems are stored in the list.
4. We start from the smallest subproblem.

The dynamic programming is used only when:

- we have 优化子结构
    - 一个问题具有优化子结构, 如果其优化解包含了子问题的优化解.
    - 缩小子问题的集合, 我们只要优化问题中的子问题, 以此降低复杂性
    - 优化子结构使得我们能够自下而上地完成求解
- and we have 重叠子问题
    - 子问题的解被多次使用



看了不一定有什么概念, 接下来我们给出实例.

3 矩阵链乘法问题

在矩阵乘法中, 我们适当使用结合律是能提高效率的. 为此, 我们应当加上适当的括号, 使得所用时间最少.

Example 2. 设 $A_1 \in \mathbb{R}^{10\times100}, A_2 \in \mathbb{R}^{100\times5}, A_3 = \mathbb{R}^{5\times50}$ 我们计算 $A_1 \times A_2 \times A_3$, 我们能够发现, $(A_1 \times A_2) \times A_3$ 以及 $A_1 \times (A_2 \times A_3)$ 的代价[2]是不一样的.

前者是 $10 \times 100 \times 5 \times 100 \times 50 \times 5$, 后者是 $100 \times 5 \times 50 \times 10 \times 100 \times 50$ [3]

So we have the conclusion that the multiplication between matrices suit 结合律. But the different parenthesis may contribute to different cost.

3.1 问题描述

What we going to do is to find the smallest cost that the multiplication makes and find how the parenthesis is distributed, if possible. 现在给出准确的定义

Input: 给定 n 个矩阵记为 $\{A_n\}$

Output: 给出最优的效率, 以及其划分

试着使用穷举. 设 $p(n)$ 是计算 n 个矩阵相乘的方法数目. 设其最外面两个的括号是这样的 $(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k) \times (A_{k+1} \times \cdots \times A_n)$ 就有

$$p(n) = \sum_{k=1}^{n-1} p(k)\, p(n-k)^4$$

其中 $n > 1$, $p(1)$ 定义为 1

这里有个结论: 满足上面这个递推式的数字称为卡特兰数字[5], 记为 C

$$\begin{aligned} p(n) = C(n-1) &= \frac{1}{n}\binom{2(n-1)}{n-1} = \frac{(2(n-1))!}{n!\,(n-1)!} \\ &= \Omega\left(4^n/n^{3/2}\right)^{6} \end{aligned}$$

3.2 分析优化解的结构

假设矩阵链应当在 k 处断开, 得到两个子链 $A_i \times \cdots \times A_k, A_{k+1} \times \cdots \times A_j$.

Theorem 1. 如果确定了上面两个子链的优化顺序, 则确定原矩阵链的优化顺序

证明. 反证法, 原矩阵链的优化顺序可以拆为两段, 分为对应两个子链. 记为 $A = U \times V$[7]设子链的优化顺序为 U_0, V_0 (这是已知条件) , 我们要证明的是 $U_0 \times V_0$ 和 $U \times V$ 等价[8].

如果说不等价, 设 $U_0 < U$, 那么 $U_0 \times V$ 比 $U \times V$ 更优的顺序. 矛盾 □

如图, 有重叠子问题, 所以说可以使用动态规划

[2]就是花费的步骤, 操作的次数

[3]$A \in \mathbb{R}^{p\times q}, B \in \mathbb{R}^{q\times r} \implies$ 代价为 $O(pqr)$, 不妨证明一下

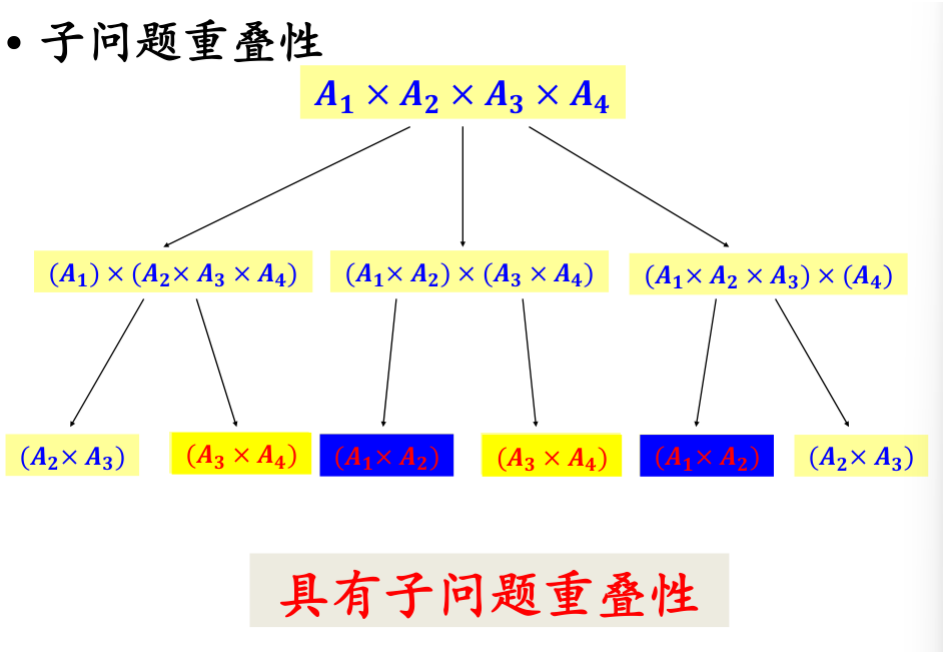
[4]这里为什么是 $n-1$ 捏, apparently it is pointless to have something like $(A_1 \times A_2)$, the parenthesis is nonsense.

[5]这是计算机领域和组合 (应该) 中经常出现的

[6]这是 tm 怎么来的

[8]这个符号我尽力了

[8]突然冒出来的 “等价” 是为了严谨



3.3 递归地定义最优值的代价

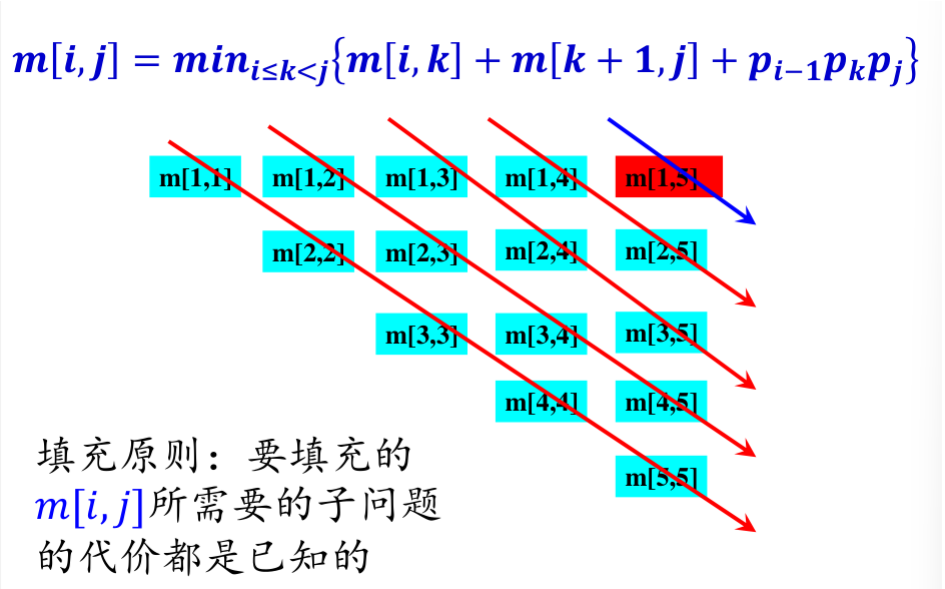
Definition 1. 设 $A_i \in \mathbb{R}^{p_{i-1} \times p_i}$, 序列 $\{p_i\}, i = 0, 1, \cdots, n$ 表示矩阵的列或者行

Definition 2. 设 $m[i, j]$ 是计算 $A_{i \sim j}$ 的最小乘法数. 有:

$$m[i,j] = \begin{cases} \min_{i \le k < j} \{m[i,k] + m[k+1] + p_{i-1} p_k p_j\} & i < j \\ 0 & i = j \end{cases}$$

我们可以将 m 视作一个矩阵, 对角线上的元素已知, 自底向上地计算.

3.4 计算代价



3.5 伪代码

算法

Matrix-Chain-Order
Input: 向量p, p中存放各个矩阵的行数列数
Output: m 完成矩阵链乘的最小乘法数
过程：Matrix-Chain-Order(p)

```
1. n←length(p)-1;
2. FOR  i←1  TO  n  DO
3.        m[i, i]←0;     /*初始化主对角线*/
4. FOR  l←2  TO  n DO    /*计算第l个对角线*/
5.    FOR  i←1  TO  n-l+1  DO
6.        j ← i+l-1;
7.        m[i, j] ← ∞;
8.        FOR  k ← i  TO  j-1  DO   /* 计算m[i,j] */
9.            q ← m[i, k] + m[k+1, j] + p_{i-1}p_k p_j;
10.           IF  q<m[i, j]  THEN  m[i,j] ← q;
11. Return m.
```

考虑p的维度是？

```
int main (){
    // let's say that we count from 0
    int n = length of array;
    for (int i = 0 ; i < n ; i++){
        m[i][i] = 0;
    }
    int min = 100000;
    for (int i = 0 ; i < n ; i ++){
        for (int j =1 ; j < n - 1 ;j ++ ){
            min = 10000;
            for (int k = i ; k < j + 1 ; j++){
                if (i+j && min > m[i][k]+m[k+1][i+j]+p[i-1]p[k]p[i+j]){
                    min = m[i][k]+m[k+1][i+j]+p[i-1]p[k]p[i+j];
                }
            }
            m[i][j] = min;
        }
    }
}
```

3.6 获取构造最优解的信息

How to store the position of parenthesis? apparently, we have to write down the k above when the for block of k stop exercuting. That is not difficult.

用矩阵 S 来储存最优的划分处, $S[i,j]$ 就是储存了最优的划分 k , 分为 $A_{i\sim k}, A_{k+1\sim j}$

构造最优解

Print-Optimal-Parens(S, i, j)

```
1. IF j = i
2. THEN  Print "A_i";
3. ELSE   Print "("
4.      Print-Optimal-Parens(S, i, S[i, j])
5.      Print-Optimal-Parens(S, S[i, j]+1, j)
6.      Print  ")"
```

$S[i,j]$ 记录$A_i \cdots A_j$的最优划分处；
$S[i,S[i,j]]$记录$A_i \cdots A_{S[i,j]}$ 的最优划分处；
$S[S[i,j]+1,j]$ 记录$A_{S[i,j]+1} \cdots A_j$的最优划分处。

调用Print-Optimal-Parens$(S,1,n)$
即可输出$A_{1\sim n}$的优化计算顺序

the algorithm above is very neat.

3.7 算法复杂性

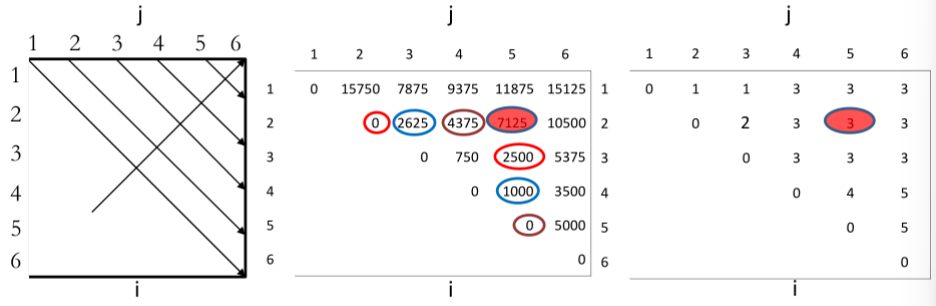
时间复杂度: 初始化对角线, 一层循环; 然后计算上三角, 元素总共有 $\Theta(n^2)$ 这么多每个元素也要有 $\Theta(n)$ 次比较, 于是就是 $\Theta(n^3)$
根据数组 s 给出最优解的构造, 需要 $\Theta(n)$, 总的就是 $\Theta(n^3)$

空间复杂度: 需要用到一维向量 p 来储存矩阵的行数列数, m 二维矩阵来储存子问题的解, s 来构造最优解, 于是空间复杂度就是 $\Theta(n^2)$

示例

A1	A2	A3	A4	A5	A6
30×35	35×15	15×5	5×10	10×20	20×25

$$m[i,j] = min_{i \le k < j}\{m[i,k] + m[k+1,j] + p_{i-1}p_k p_j$$



(a) 计算次序　(b) $m[i,j]$　(c) $S[i,j]$

$$m[2,5] = min\begin{cases} m[2,2] + m[3,5] + p_1p_2p_5 = 0 + 2500 + 35 \times 15 \times 20 = 13000 & k = 2 \\ m[2,3] + m[4,5] + p_1p_3p_5 = 2625 + 1000 + 35 \times 5 \times 20 = 7125 & k = 3 \\ m[2,4] + m[5,5] + p_1p_4p_5 = 4375 + 0 + 35 \times 10 \times 20 = 11375 & k = 4 \end{cases}$$

$$(A_1 \times (A_2 \times A_3)) \times ((A_4 \times A_5) \times A_6)$$

4 最长公共子序列

比如说我们使用最长公共子序列的长度来描述两个 DNA 片段的相似程度

4.1 问题描述

Definition 3 (subsequence)**.** 一个 *sequence* $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ 的 *subsequence* 是 $a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_k}$, 其中满足

$$i_1 < i_2 < \cdots < i_k$$[9]

Definition 4 (Common subsequence)**.** 对于两个序列 A, B, 其公共子序列 C 既是 A 的 *subsequence* 又是 B 的 *subsequence*

问题定义:
输入: 两个 sequence $X = (x_1, x_2, \cdots, x_m)$, $Y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$
输出: 最长的公共子序列 Z

如果使用暴力求解的话, 时间复杂度将会是指数级别的, 接下来我们分析其能够使用动态规划来解决

4.2 分析优化解的结构

Definition 5. X 是一个 *sequence*, $(x_1, x_2, \cdots, x_i), i \leq n$ 这个子序列称为是 X 的第 i 前缀, 记为 X_i

Theorem 2 (优化子结构)**.** 给定两个 *sequence* , $X = (x_1, \cdots x_m)$, $Y = (y_1, \cdots, y_n)$ $Z = (z_1, \cdots, z_k)$ 是 *LCS*, 我们有:

(1) 如果 $x_m = y_n$, 那么 $z_k = x_m = y_n$, Z_{k-1} 是 X_{m-1}, Y_{n-1} 的 *LCS*

(2) 如果 $x_m \neq y_n$, 且 $z_k \neq x_m$, 则 Z 是 X_{m-1} 和 Y 的 *LCS*

(3) 如果 $x_m \neq y_n$, 且 $z_k \neq y_n$, 则 Z 是 X , Y_{n-1} 的 *LCS*

证明显然, 请读者自证[10]

于是我们就有:

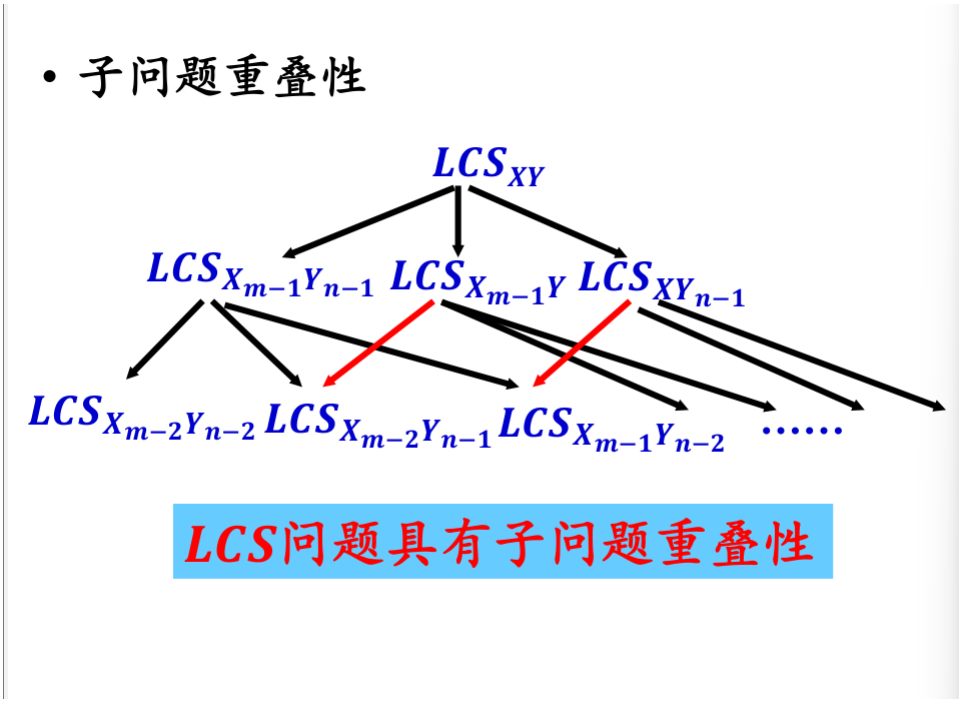
$$LCS_{XY} = \begin{cases} LCS_{X_{m-1}Y_{n-1}} + (x_m) & x_m = y_n \\ LCS_{X_{m-1}Y} & x_m \neq y_n, z_k \neq x_m \\ LCS_{XY_{n-1}} & x_m \neq y_n, z_k \neq y_n \end{cases}$$

子问题具有重叠性[11]:

[9] 和数列的子列一样

[10] Q: 为什么证明常常需要使用反证法?

[11] 这时 dp 的基本前提, 当然这是废话



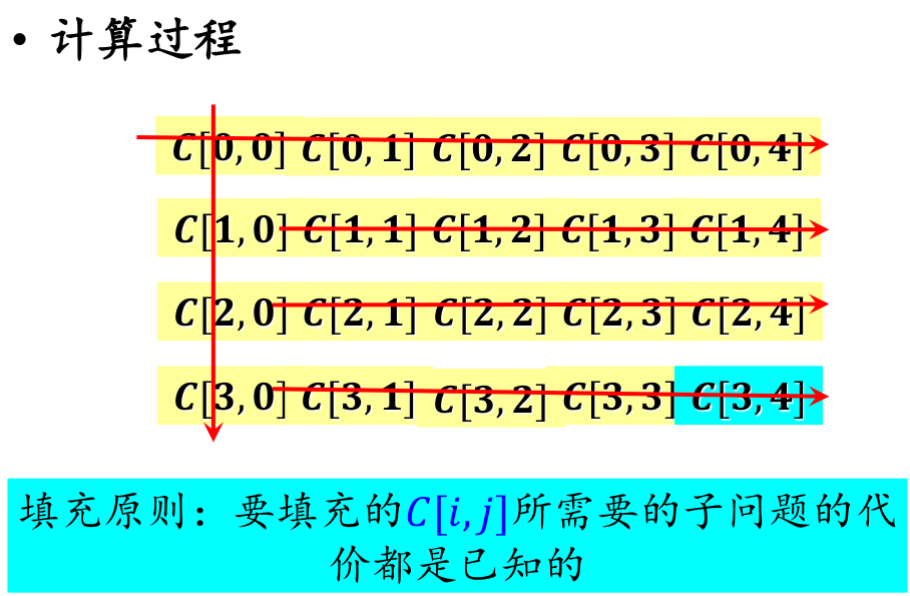
4.3 确定递归解

就是由上面的那个式子而来, 设 $c[i,j]$ 是前缀 X_i, Y_j 的 LCS 的长度. 给出 LCS 的长度的递归方程:

$$c[i,j] = \begin{cases} 0 & ,i=0 \text{ or } j=0 \\ c[i-1,j-1]+1 & ,i,j>0, x_i = y_j \\ \max\left(c\left[i,j-1\right], c\left[i-1,j\right]\right) & ,x_i \neq y_j \end{cases}$$

[12]这里的 ppt 上有错误

计算过程



先是将含有 0 的求出来, 然后再一行一行地进行求解. 建议画一个表格自己进行实践.

4.4 构造最优解

使用一个矩阵 b 来存储移动的操作, $\nwarrow$, $\leftarrow$, $\uparrow$. 比如说, $c[i-1,j], c\,[i,j-1]$ 如果说前者是更大的, 那么就是行数减一, 就是向上 $\uparrow$

4.5 伪代码

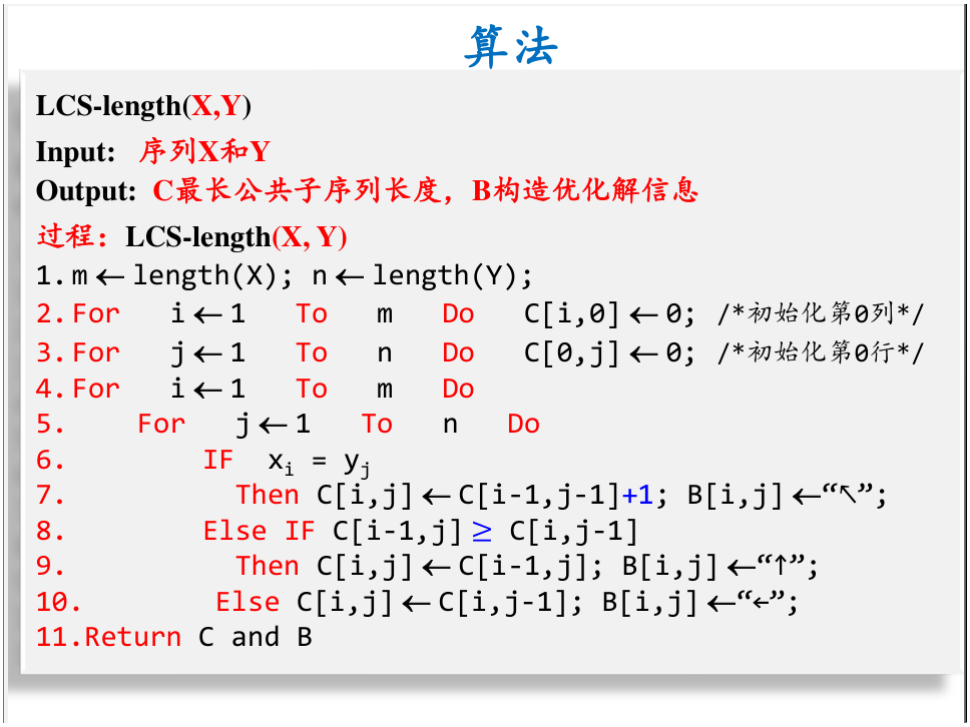


图 1: LCS 算法的伪代码

值得注意的是, 这里的箭头方向, 我们画箭头, 比较的是当前的格子和上面, 以及下面的格子. 箭头指向的方向是那个比较大的格子. 当这两个格子的值都相同的时候, 这就默认指向上方. 你得知道, 这里箭头的方向其实是无所谓的.

4.6 复杂度分析

明显是 $\Theta\left(n^2\right)$, 挺简单的

4.7 最优解的构造

读者不妨自己先思考一下, 什么时候打印出 z 的某一个项
好了就当你思考完了, 反正我没思考, 我直接看到答案所以没什么办法
基本思想: 从 $b[m,n]$ 开始, 顺着其箭头移动, 如果说 $b[i,j]$ 是 ↖ 的话, 就打印出当前值.
使用递归函数能够很好地打印出来

```
print-LCS (b , X, i ,j){
    if (i = 0 || j = 0)
        return ;
    if (b[i, j ] = "nearrow") { //焯，不能用数学公式啊，这是代码
        print-LCS (b , X , i-1, j-1);
        printf (x[i]);
    }
```

```
    else if (b[i,j] = "uparrow"){ //就是向上移动，那必然是行号减一
        print-LCS  (b , X , i-1, j);
    }else
        print-LCS (b ,X, i , j-1); //就是向左移动，就是列数减一
}
```

5 0-1 背包问题

这边介绍一点之后就直接进入正题好吧.

背包问题可以分为两类, 一类称为是 unbounded 背包问题, 另一类就是这里的 0-1 背包问题. 前者是说, 一个物品的数量并没有限制, 后者中, 物品最多拿一个.

背包问题是一种整数规划问题, 属于运筹学的学科范畴[13]

5.1 问题描述, 符号约定

给定了 n 种物品和一个背包, 第 i 个物品的重量是 w_i, 价值是 v_i, 背包的容量是 c (c for capacity).

问如何选择物品, 使得能装下的物品价值之和最大. 即

$$\sum_{i\in\alpha} v_i$$

最大. 有限制条件

$$\sum_{i\in\alpha} w_i \le c$$

其中 α 是一个指标集, 当然是 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的一个子集. 我们要求这个指标集

实际上, 对于完全背包问题, 我们已经解决了, 使用类似于矩阵链乘法的算法类似的思想就能解决. 那么为什么这个 0-1 背包问题不能使用相同的方法呢?

5.2 分析优化解的结构

5.2.1 一个尝试

我们根据背包的容量来划分子问题: 先是解出小背包的解, 然后再考虑大背包的. 如果说小背包的解能够用于大背包的解, 那么这个方法就是行得通的.

为什么这种方法是不行的? But this works for unbounded knapsack.

[13] 此范畴非彼范畴

图 2: 为什么不行?

That is to say that we lack some information, viz. the information of what items are used. But in this way the memory seem to be very weird. Because are YOU going to list all the situation of how items are selected? There is $\binom{n}{m}$ kind of combination if m items are selected.

5.2.2 正解

One index is not enough if we want to divide problem.

我们通过物品的种类数量来划分子问题. 对于物品 i , 最优解只有两种情况: 没有选择 i 或者选择了 i. 另一方面我们还是需要记录背包的容量, 以此来构造子问题.

Definition 6. *j 个物品, x 容量的包, 其最大价值记为 $k[x,j]$*

很神奇的一点就是这个和上面 LCS 有一些类似, 希望我们能够从其中找到一些规律

1. case1: 物品 j 没有选择, 就有 $k[x,j]=k\left[x,j-1\right]$ 这是肯定的嘛, 毕竟 j 没用到.
2. case2: 物品 j 选择了, 就有 $k\left[x,j\right]=k\left[x-w_j,j-1\right]+v_j$ 其中[14] w_j 代表物品 j 的重量, v_j 代表物品 j 的价值.

于是综合一下就是:

$$k\left[x,j\right]=\begin{cases}\max\left\{k[x,j-1],k\left[x-w_j,j-1\right]+v_j\right\} & j\neq 0,x\neq 0\\ 0 & j=0 \text{ or } x=0\end{cases}$$

$k\left[x,j\right]$ 中的 x 不能小于 0 .

5.3 优化子结构

Definition 7 (a pure math description of 0-1 knap)**. input** $C>0$, $w_i>0$, $v_i>0$, $1\leq i\leq n$

[14] 回顾一下符号

output $((x_1, x_2, \cdots, x_n)), x_i \in \{0, 1\}$ *have that*

$$\sum_{1 \le i \le n} w_i x_i \le C$$

meanwhile $\sum_{1 \le i \le n} v_i x_i$ *is at maximum.*

Theorem 3 (optimal subproblem solution)**.** $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ *is the solution to the original 0-1 problem. then* $(y_1, y_2, \cdots, y_{n-1})$ *is a solution suit that:*

$$\begin{cases} \sum_{1 \le i \le n-1} w_i x_i \le C - w_n y_n \\ \sum_{1 \le i \le n-1} v_i x_i \textit{is at maximum} \\ x_i \in \{0, 1\} \qquad\qquad (1 \le i \le n-1) \end{cases}$$

5.4 递归地定义最优值的代价

$$k\,[x]\,[j] = \begin{cases} 0 & j = 0 \text{ or } x = 0 \\ \max\{k\,[x]\,[j-1], k[x - w_j][j-1] + v_j\} & \text{otherwise} \end{cases}$$

5.5 伪代码

```
zero-one-Kaban (w, v){
    int n = v.length // v.length 就是物品之个数
    for (x = 0 ; x <= c ; x++) {
        k[x ,0] = 0;
    }
    for (j = 1; j <= n ; j++) { //这个 j 从 0 开始也不是不行，只不过上面的已经初始化了一次了
        k[0 ,j] = 0;
    }
    for (x = 0 ; x <= c ; x++) {
        for (j = 1; j <= n ; j++){ //一个两重循环就是为了遍历这个矩阵
           k[x,j] = k[x,j-1];
           if (w_j <= x)
               k[x,j] = max (k[x,j], k[x-w_j, j-1] + v_j);
        }
    }
    return k[c,n]
}
```

5.6 获取最优值得信息

实际上也是和 LCS 类似，当出现了 case2 的时候就是要记录的时候

我们只需要将上面的代码中, 加入一个记录用的数组就行. 只需要注意到, 这里的 item[x,j] 实际上是一个序列, is subset of the sequence.

```
zero-one-Kaban (w, v){
    int n = v.length // v.length 就是物品之个数
    // item 是一个矩阵, 其元素是一个集合
    for (x = 0 ; x <= c ; x++) {
        k[x ,0] = 0;
    }
    for (j = 1; j <= n ; j++) { //这个 j 从 0 开始也不是不行, 只不过上面的已经初始化了一次了
        k[0 ,j] = 0;
    }
    for (x = 0 ; x <= c ; x++) {
        for (j = 1; j <= n ; j++){ //一个两重循环就是为了遍历这个矩阵
           k[x,j] = k[x,j-1];
           if (w_j <= x){
               k[x,j] = max (k[x,j-1], k[x-w_j, j-1] + v_j);
  /*new stuff*/if (k[x-w_j, j-1] > k[x,j-1]) { //case1
                    item[x,j] = item[x-w_j , j-1] + j
               }
  /*new stuff*/else  //case2
                    item[x,j] = item[x,j-1];
           }
           else (w_j > x){
               /* do case 2*/
           }
        }
    }
    return k[c,n]
}
```

6 最优二叉搜索树

6.1 问题描述

Definition 8. 有给定一个序列 $K = \langle k_1, \cdots, k_n \rangle$, 有概率 p_i 和每一个对应, 并且有 $n+1$ 个伪关键字 d_i 表示不在 k 中的值, 也有概率对应着记为 q_i 有:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i + \sum_{i=0}^{n} q_i = 1$$

这是因为总的概率为 *1*

我们可以对搜索代价进行一个期望值的计算.

$$E = \sum_{i=1}^{n} \left(d\left(k_i\right) + 1\right) + \sum_{i=0}^{n} \left(d(d_i) + 1\right) q_i{}^{15}$$

我们说这个期望值最小的数就是一个最优二叉搜索树. 当然我们也别忘了搜索树的定义: 对于一个节点, 左子树的节点的值都小于他; 右子树的节点的值都大于他.

6.2 递归解的结构

Just as previous chapter, the optimal search tree have optimal substrutrue property. That is some locally optimal solution to subproblems can be used to construct the optimal solution to the original problem.

Theorem 4 (optimal subproblem structure)**.** 最优树 T 的一个子树 T' 是最优的

证明. 略, 应当使用反证法. □

我们发现这和前面学习的矩阵链乘法非常类似, 此时我们应当确定 “以谁为节点”, 并且计算期望, 选取期望最小的那个.

我们使用 $e[i,j]$ 来表示关键字 $k_i,\cdots,k_j$, 以及伪关键字 $d_{i-1},\cdots,d_j$ 组成的最优树. 先看递归的结构

$$e[i,j]=\min\{e[i,r-1]+e[r+1,j]+w[i,j]\}^{16}$$

To be frank, this recurrence structure can be very obvious. And it is not difficult to figure this out. 其中 $i\le r\le j$

此时我们还有比较特殊的处理, 这是因为左子树可以完全没有关键字, 右子树也是同理:

$$e[i,i-1]=q_{i-1}$$

Example 3. $e[j+1,j]=q_j$, $w[i,i-1]=q_{i-1}$

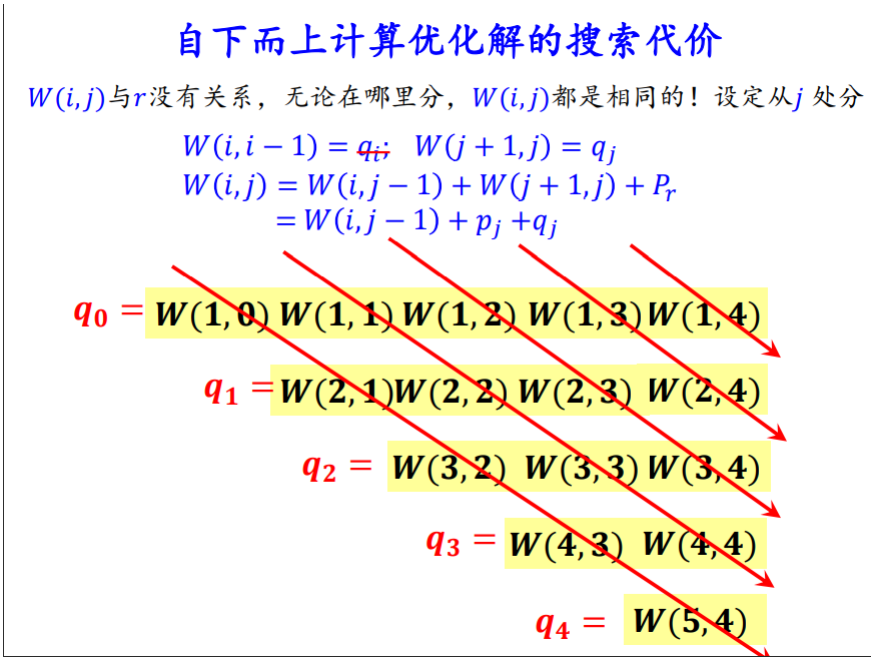
综合起来就是

$$e[i,j]=\begin{cases}\min_{i\le r\le j}\{e[i,r-1]+e[r+1,j]+w[i,j]\} & i+1\neq j\\ q_{i-1} & i+1=j\end{cases}$$

[15]为什么是深度 +1 呢, 访问节点个数.

[16]为什么是 $r-1$ 和 $r+1$ 呢? $w[i,j]$ 是什么意思? 怎么来的?

6.3 自底向上地计算 optimal solution



Comment 1. *Think about how we are going to write the code if we want to start from diagonal. Also the picture above contains some mistakes.*

6.4 伪代码

实际上求解的过程中我们还需要知道 w[i, j] 的信息, 这也可以是自底向上的计算. 最底: $w[i, i-1] = q_{i-1}$ 然后

$$w[i, j] = w[i, j-1] + p_j + q_j$$

就能求出值来

自下而上计算优化解的搜索代价

```
Optimal-BST
Input:   K和D的概率数组p、q
Output:  搜索代价E, 根结点Root
执行: Optimal-BST(p, q)
过程: Optimal-BST(p, q)
1. n ← length(p)
2. For  i ← 1  To  n+1   Do
3.     E(i, i-1) ← q_{i-1};
4.     W(i, i-1) ← q_{i-1};
5. For  l ← 1  To  n   Do
6.     For   i ← 1   To   n-l+1   Do
7.         j ← i+l-1;
8.         E(i, j) ← ∞;
9.         W(i, j) ← W(i, j-1)+p_j+q_j;
10.         For  r=i  To  j   Do
11.             t ← E(i, r-1) + E(r+1, j) + W(i, j);
12.             IF    t<E(i, j) Then
13.                 E(i, j) ← t;  Root(i, j) ← r;
14.Return  E and  Root
```

6.5 获取最优值得信息

What we should do is to write down the root of nodes from i to j, which means that we should use a two dimensional array.

use a 递归方法应该就行了.

7 Summary

Here is Summary. At the end of the chapter, I just want to rewind, to look back, to see what we have learnt.

This chapter is not like the previous chapter like chapter 3. It consist of many problems that can be treated with dynamic programming, which may lead to that one get confused in those examples, whereby not understanding what dp really is.

We restate here, dynamic programming is divide and conquer plus memory. Moreover, the precedure to justify whether dp is a suitable approuch need us to

1. examine if the problem have optimal substrutrue, and to
2. examine if the subproblems overlap during the divide and conquer approuch.
3. Then we need to figure out how to construct the solution to bigger one basing on the solutions to subproblems & to figure
4. figure in which order the solution is constructed[17]. and then to
5. Find a way to 获取最优值得信息, 构造最优解

[17] e.g. if we start from diagonal, how we are going to write the code?