集合论

你野爹

2023 年 3 月 7 日

目录

1 一点介绍

What is algebra? 我们专业的人现在可能会说 “不知道”, 并且以后也可能维持这个不知道的状态; 而有的人会说, 这是数学的两个基础课程之一, 另外一个是数学分析; 但是有的人会说, 给定一个集合 A, A 上的一个 algebra 是 A 的幂集的子集 $\mathcal{A}$, 满足对于任意的 $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{A}$ 都有 $\alpha_1 \cup \alpha_2 \in \mathcal{A}, \alpha_1 \cap \alpha_2 \in \mathcal{A}$, 且 $A, \varnothing \in \mathcal{A}$.

Algebra 是一种代称, 大部分的基础代数课程可以称为 “群环模域” 课, 这是在说, 这门课的主要内容为这个四个单字, 他们是四种代数结构. 那么什么是代数结构, sã, 谁知道呢? 人连集合的定义都说得不明不白, 怎能说清别的呢? 当我说出 “集合以及集合上的代数运算” 的时候, 是否有意识到, 仅为都合之意, 才说其为 “集合上的” ? 或许我们可以说, 代数结构是, 满足某些运算性质的 collection. 这么说是否严谨一些呢? 我们后面将会意识到, 代数结构的性质, 出自于代数结构的定义, 也即, 其满足的运算性质.

可能会有人想到, “终究是错付了人”, 也许是对的, 代数这样重要的课程, 落得这般境地, 可称可悲, 着实引人唏嘘. 错付了人呐.

伽罗瓦 可否有人听闻过伽罗瓦? 伽罗瓦开创了群论, 证明了五次方程五根式解. 当我们认为数学均是与数字打交道的时候, 面对这个问题, 指定是摸不着头脑. 一般的五次方程长这个样子: $ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$, 没有一个数字. 更难的是: 如何证明不存在? 存在的话简单, 我们找到那个根式就行了. 可是不存在呢?

2 集合之间的运算和性质

虽然我们还是无法准确地说出集合定义, 但是我们有两种朴素的描述方法.

定义 2.1. 我们说一些元素放在一起便是集合; 或者是满足一些性质的元素的全体

$$A = \{a \mid P(a)\} \tag{1}$$

或者是说, 我们将某些东西用 $\{\}$ 框起来便是集合. 我们常用大写字母来表示集合.

Remark 2.2. 人们常用 $\mathbb{Z}$ 来表示 $\{\dots, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ — 整数集, 这是二十世纪的布尔巴基的著作之中使用的符号, 之后得到了流传, 类似的符号还有 $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ 分别表示自然数集, 有理数集, 实数集, 复数集.

定义 2.3 (属于)**.** $a \in A$ 是说, a 是 A 的一个元素, 也可以说 a 是 A 的一个成员.

尽管说我不能将 $\in$ 的定义说清楚, 但是, 差不多就行.

定义 2.4 (subset)**.** $A \subseteq B$ 是说 A 是 B 的子集, $A \subsetneq B$ 意指 A 是 B 的真子集. 对于前者来说:

$$A \subseteq B \iff \forall a \in A(a \in B) \tag{2}$$

对于后者来说:

$$A \subsetneq B \iff (\forall a \in A(a \in B)) \wedge (\exists a' \in A(a' \notin B)) \tag{3}$$

$A \subsetneq B$ 就是说 A 是 B 的子集, 但是 $A \neq B$.

Remark 2.5. 我们现在有三种符号 $\subseteq, \subset, \subsetneq$, 都可以说是包含于的二元运算符[1], $\subsetneq$ 并没有歧义, 表示的是 "真包含" 的意思, $\subset$ 既可以指 "包含" 也可以指 "真包含", 得看他怎么说的.

定义 2.6 (equal)**.** $A = B$ 的定义如下:

$$A = B \iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A \tag{4}$$

$A \neq B$ 定义为 $\neg(A = B)$, 于是我们知道:

$$A \neq B \iff \exists a \in A(a \notin B) \vee \exists b \in B(b \notin A) \tag{5}$$

定义 2.7 (交和并)**.** 我们学过的, 交的定义为:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\} \tag{6}$$

并的定义就省略不说了.

定义 2.8 (Power)**.** 我们断言, 对于任意一个集合, 存在其幂集, 记为 $P(A)$ 或者是 $\mathfrak{P}(A)$ 或者是 2^A, 其定义为

$$\mathfrak{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\} \tag{7}$$

定义 2.9 (Product)**.** 乘积的定义并不好说. 我们当然可以引入有序对的说法, 可是, 有序对真的是 product 的本质吗? 关注两个集合的 product 的势, 其为两个集合的势的乘积. 好吧, 我有点搞不懂.

[1] 运算符并不是真的指 '运算 '

3 映射

人们常说, 映射是一个对应法则. 我说, 这是什么几把. 别 tm 复读别人瞎几把说的定义. 我说, 一个映射, 或者说函数, 先要给定函数的值域和定义域, 函数将定义域之中的元素射到值域中的元素上. 我们这样表示: 设 f 是函数

$$f\colon X \to Y, x \mapsto f(x) \tag{8}$$

这就是说, $f(x) \in Y$ $f(x)$ 是 Y 之中的一个元素. 这便是一个函数. 你尽可以认为什么 "允许多对一, 不允许一对多" 完全是扯淡.

定义 3.1 (inverse)**.** 函数 f 的逆记为 f^{-1}, 我可以将其定义为函数, 你看就行了.

$$f^{-1}\colon \mathfrak{P}(B) \to \mathfrak{P}(A), \mathcal{B} \mapsto f^{-1}(\mathcal{B}) \tag{9}$$

为了方便, 对于单元集, 我们将 $\{\}$ 省略, 也就是将 $f^{-1}(\{b\})$ 简写为 $f^{-1}(b)$. 逆的定义也好写:

$$f^{-1}(\mathcal{B}) = \{x \mid f(x) \in \mathcal{B}\} \tag{10}$$