目录

第一章　期望

1.1　期望和方差

期望是概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的一个 LS 积分. 有些人可能会对这个定义产生疑惑. 但这实际上是一个公理化定义, 我们已经定义出了一个测度空间, LS 便是这个基础上发展而来的.

我们接下来的、对积分的定义, 就是遵循上面的 LS 积分, 但是这里毕竟是概率论, 并不是实分析, 所以不会那么难.

我们首先是对离散随机变量 X 定义期望. 从其分布函数 F 入手, 我们说 F 满足一个 weighted partition : $\{\Lambda_i, b_i\}$

那么

Definition 1 (离散随机变量之期望). *期望定义为:*

$$E\ X = \sum_{i=1}^{\infty} b_i P\left(\Lambda_i\right)$$

面对一个非负函数 X , 我们就可以用一个简单的函数序列逼近这个 X , 然后用函数序列的期望值定义 X 的期望. 而对于一般类型的函数, 我们只需要分别讨论大于零的部分和小于零的部分就行了. 这方面的知识其实了解一下即可. 这里我们得点出, 书本上的分类方法是完全错误的. 一方面, 这里的积分从未说明是 Lebesgue-Stieljes 积分还是黎曼积分, 黎曼可积性的要求高很多. 另一方面, 存在分布函数, 他既不能写为 $\int f\ \mathrm{d}x$ 的形式, 也不是离散的 (即他是连续的), 如果说 X 的一个分布函数可以写为 $\int f\ \mathrm{d}x$, 那么 X 是绝对连续的, 这是书本上没有说明的. 同时, 一个分布函数可以分解为三类函数, 正是下面三类: 1. 离散型函数 2. 绝对连续函数 3. 奇异连续函数.[1]

Definition 2 (一般随机变量之期望). *略. 这里不做过多介绍. 记* $E\left(X\right) = \int X\ \mathrm{d}P$

定理 1. $E\left(X\right) < \infty \iff \int |X|\ \mathrm{d}P < \infty$

证明. TODO □

Example 1 (二项分布). $P\left(X=k\right) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$, *计算其期望.*

这里就不算了, 反正等于 np, *哥们算数很差.*

Example 2 (泊松分布). $P\left(X=k\right) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad , k = 0, 1, 2, \cdots$, *求期望*

$$E\left(X\right) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda$$

[1] 奇异的意思就是分布函数的导数几乎处处为 0

1.1.1 期望的性质

期望还可以记为 $E\left(X\right)=\int x\ \mathrm{d}F$

定理 2.

$$E\left(c\right)=c$$

c 是一个常数.

定理 3.

$$E\left(g\left(X\right)\right)=\int g\left(x\right)\ \mathrm{d}F$$

定理 4.

$$E\left(aX_1+bX_2\right)=aE\left(X_1\right)+bE\left(X_2\right)$$

如果 LHS 的两个期望均存在.

定理 5.

$$E\left(X_1X_2\right)=E\left(X_1\right)E\left(X_2\right)$$

如果 X_1,X_2 相互独立.

1.1.2 方差的基本概念

Definition 3 (方差)**.**

$$var\ X=\left(X-E\left(X\right)\right)^2$$

variance , 有时记为 D, D for deviation, 其正平方根称为标准差, 常记为 σ

平时计算 variance, 常用公式

$$\mathrm{var}\ \left(X\right)=E\left(X^2\right)-\left(E\left(X\right)\right)^2$$

证明.

$$\begin{aligned}E\left(X-E\left(X\right)\right)^2&=E\left(X^2-2XE\left(X\right)+E^2\left(X\right)\right)\\&=E\left(X^2\right)-2E\left(X\right)\cdot E\left(X\right)+E^2\left(X\right)\\&=E\left(X^2\right)-E^2\left(X\right)\quad\square\end{aligned}$$