1 General definition

Definition 1 (随机变量之定义)**.** *给定一个概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, X 是一个函数 $\Omega \to \mathbb{R}$, 并且有*

$$\forall B \in \mathcal{B}, X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$$

那么, 我们称 X 是随机变量.

我们还有另一种更加广义一点的定义, 涉及到了 trace 的定义. 但是我们不必管那么多. 但我仍会加入这个定义.

定理 1 (逆函数之性质)**.** *X 是 $\Omega \to \mathbb{R}$ 的任意一个函数, 则有*

$$X^{-1}(A^c) = \left(X^{-1}(A)\right)^c$$

$$X^{-1}\left(\bigcup_{a\in\alpha} A_a\right) = \bigcup_{a\in\alpha} X^{-1}(A_a)$$

$$X^{-1}\left(\bigcap_{a\in\alpha} A_a\right) = \bigcap_{a\in\alpha} X^{-1}(A_a)$$

where $a \in \mathcal{B}$, 并且 α 是一个指标集, 可以不可数.

这是非常重要的基础的知识, 我们在学习拓扑的时候就有提到过. [1]

定理 2 (随机变量的一个等价条件)**.** *X is a random variable $\iff \forall x \in \mathbb{R}, X^{-1}((-\infty, x]) \in \mathcal{F}$*

证明. 只证明 "$\Rightarrow$"
证明方法非常有意思, 具有一定的借鉴价值. 只不过说, 这个方法在前面的章节已经学过了捏.
设 $\mathcal{S} = \{S : X^{-1}(S) \in \mathcal{F}\}$, 不难验证, $\mathcal{S}$ 是一个 sigma 代数.

$X^{-1}(S) \in \mathcal{F}$, $X^{-1}(S^c) = \left(X^{-1}(S)\right)^c \in \mathcal{F}$ 于是说明, 集合 $\mathcal{S}$ 对于补运算封闭.

而后, $X^{-1}\left(\bigcup S_i\right) = \bigcup X^{-1}(S_i) \in \mathcal{F}$ 说明 $\mathcal{S}$ 对于可数并封闭. 并且 $\emptyset, \Omega$ 都在其中. $(-\infty, x] \in \mathcal{S}$, 则 $\mathcal{B} \subset \mathcal{S}$ [2], 于是就

$$\forall B \in \mathcal{B}, X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$$ □

定理 3. *$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ induces $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu)$*

Note: 这个过程中存在信息的丢失, i.e. 该过程不一定可逆. 存在两个不同的随机变量, 他们能够诱导出相同的 μ

一种逆, $\left\{X^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\right\}$ 这称为是 X 生成的 sigma 代数.

现在我们知道 $(\Omega, \mathcal{F}, P) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu) \to F$ 但上面的逆过程都是不成立的. 与此同时, 我们应该注意 $\mu \iff F$ 是可以的.

定理 4. *X is a r.v. 那么, $f(X)$ 也是随机变量, 其中 f 是一个 Borel 可测函数.*

Definition 2 (随机向量)**.** *函数 $\Omega \to \mathbb{R}^2$, 其每一个分量都是随机变量, 则这个函数是一个随机向量.*

Definition 3. *2 维 Borel 集.*

[1] 但是证明就完全不会了捏, 尤其是不可数的情况... 这鬼知道啊

[2] 这是因为 $\sigma\{(-\infty, x] : x \in \mathbb{R}\} = \mathcal{B}$

定理 5. $\{X_j, j \geq 1\}$, 都是随机变量, 那么

$$\inf_j X_j, \liminf_j X_j, \sup_j X_j, \limsup_j X_j$$

都是随机变量.

证明. 首先从 $\sup_j X_j$ 入手, $\sup_j X_j\left((-\infty, x]\right) =$ □

Definition 4 (离散随机变量之定义)**.** *X 是离散的, if $\exists B \subset \mathbb{R}, P\left(X \in B\right) = 1$, where B 是可数的.*

Definition 5 (indicators)**.** *对于 $\Delta \subset \Omega$, 1_Δ 称为是 indicator functions if*

$$\forall \omega \in \Omega, 1_\Delta = \begin{cases} 1 & , \omega \in \Delta \\ 0 & , otherwise. \end{cases}$$

好了, 这节就结束了, 是不是有点迷糊, 其实我也很迷糊. 但是接下来就是习题啦!

TODO