1 求解形如 $g(X,Y)$ 的分布

1.1 求解 r.v. 和的分布函数

给定 r.v. X,Y, 求 $X+Y$ 的分布函数 F

面对这个问题, 理论上我们可以首先引入几个例子, 然后分为离散型 r.v. 和绝对连续型的 r.v. 进行讨论. 但其实我觉得并没有这些必要, 我们直接引入即可. 但是分类讨论在这种情况之下还是必须的, 这是因为求法不同. 一边是可以直接求和的方式求解, 和本节主要内容关系不大. 绝对连续型的, 就需要从密度函数出发.

1.1.1 离散的情况

对于离散型 r.v. 设 X,Y are discrete, 仅在自然数上有定义[1], 即 $P(X=j)\geq 0$ if $j\in\mathbb{N}$. 新的分布函数是 $F(z)=P(X+Y\leq z)$

有

$$F(z)=\sum_{i=0}^{z}P(X=i)P(Y=z-i)$$

, 这种就是书上介绍的方法, 因为我们平时接触的离散 r.v. 并没有那么奇葩 (比如说 $\sum_{i=1}^{\infty}a_i=1$, $\{b_i\}$ 是有理数的穷举, 我们有离散型 r.v. $\sum_{i=1}^{\infty}a_iI_{b_i}$ [2])

Example 1. *X , Y 相互独立, 且是参数为 λ_1,λ_2 的泊松分布, 如果说泊松分布的记号是 P 就是说 $X\sim P(\lambda_1), Y\sim P(\lambda_2)$ 问 $X+Y$ 是啥子分布?*

我们套用上面的公式

$$\begin{aligned}
F(z)&=P(X+Y\leq z)\\
&=\sum_{i=0}^{z}P(X=i)P(Y=z-i)\\
&=\sum_{i=0}^{z}\frac{\lambda_1^i}{i!}e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_2^{z-i}}{(z-i)!}e^{-\lambda_2}\\
&=\frac{1}{z!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\sum_{i=0}^{z}\frac{z!}{i!\,(z-i)!}\lambda_1^i\lambda_2^{z-i}\\
&=\frac{1}{z!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\sum_{i=0}^{z}C_z^i\lambda_1^i\lambda_2^{z-i}\\
&=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^z\,e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{z!}
\end{aligned}$$

$F(z)\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$ 这就说明, 泊松分布具有一种线性可加性. 实际上对于伯努利分布也是如此.

1.1.2 连续的情况

首先还是从定义看:

$$F(z)=P(X+Y\leq z)$$

我们可以联想到 $g(X)$ 的求法. 假设 X 是绝对连续的, $g(X)$ 的分布函数 $F=\displaystyle\int_G f(x)\ \mathrm{d}x$, where $G=\{x:g(x)\leq z\}$

类似的, 对于随机变量之和的分布函数

$$F(z)=\iint_G f_{X,Y}(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$$

---

[1] 我们遇到的大部分离散 r.v. 都是这样的

[2] $I_{b_i}(x)=1$ if $x>b_i$, else $I_{b_i}(x)=0$

, 其中 $G = \{(x,y) : x + y \le z\}$ 当然这里能够直接扩展到一般的情况, 即 $G = \{(x,y) : g(x,y) \le z\}$, 这点我们之后在介绍.

Lemma 1. 给定了两个随机变量 X, Y , 设 $f_{X,Y}(x,y)$ 是其密度函数, 则 $Z = X + Y$ 的密度函数 f_Z 等于

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) \ \mathrm{d}x$$

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-x, x) \ \mathrm{d}x$$

证明.

$$\begin{aligned} F(z) &= \iint_G f(x,y) \ \mathrm{d}x \ \mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{z-x} f(x,y) \ \mathrm{d}y \right) \ \mathrm{d}x \end{aligned}$$

令 $y = u - x$ 就有

$$F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{z} f(x, u-x) \ \mathrm{d}u \right) \ \mathrm{d}x$$

交换积分次序:

$$F(z) = \int_{-\infty}^{z} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, u-x) \ \mathrm{d}x \right) \ \mathrm{d}u$$

两边求导, 就能够得出答案了. □

定理 1. X, Y 是独立的, 那么 $X + Y$ 的密度函数是 $f(z) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) \ \mathrm{d}x$

证明. 使用上面的引理

因为是独立的, 立刻能够得到结果. □

其中 f_X, f_Y 涉及的计算称为卷积, 记为 $f_X * f_Y$

Example 2. 设 $X, Y \sim U[-a, a]$, 求 $Z = X + Y$ 的分布函数

Example 3. 设 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 求 $Z = X + Y$ 的分布.

而后我们指出, 引理中使用的公式实际上可以直接用来求解问题, 当你涉及两个不独立的随机变量的时候可以这么做.

1.2 $\min\{X,Y\}, \max\{X,Y\}$ 的求解

$X \vee Y$ 就是两者取最大值的意思, $X \wedge Y$ 是取最小值的意思.

我们可以将 $\vee, \wedge$ 看作是两个二元函数 (而实际上他们确实是二元运算符, 所以也没什么差别), 于是这就是求解 $g(X,Y)$ 的范畴. 我们可以很轻松地解出来, 见下面的推导.

我们可以直接推导出公式:

定理 2. $F_{x \vee y}(z) = F_x(z) F_y(z)$

证明.

$$\begin{aligned} F_{X \vee Y}(z) &= P(X \vee Y \le z) \\ &= P(X \le z \quad \& \quad Y \le z) \\ &= P(X \le z) \cdot P(Y \le z) \\ &= F_X(z) \cdot F_Y(z) \quad \square \end{aligned}$$

对于 $X \wedge Y$ 也是类似的.

定理 3. $F_{X\wedge Y} = 1 - (1 - F_X(z))(1 - F_Y(z))$

证明.

$$\begin{aligned} F_{X\wedge Y}(z) &= 1 - P(X \wedge Y > z) \\ &= 1 - P(X > z \quad \& \quad Y > z) \\ &= 1 - (1 - F_X(z))(1 - F_Y(z)) \quad \square \end{aligned}$$

2 条件概率

2.1 第一部分

先前我们已经知道了条件概率的一种, 即 $P(A \mid B)$, conditioning an event on an event.

现在我们介绍 conditioning a r.v. on an event, 以及相关的概率密度之计算, 分布函数之计算. 离散型的先不介绍, 因为这个东西理应介绍过了.

Definition 1. $P(X \in B \mid A) = \int_B f_{X|A}(x)\ \mathrm{d}x$, 其中 A 是一个事件. 所定义的 $f_{X|A}$ 就是我们想要的条件概率密度.

实际上我们可以将事件 A 换成是 $\mathbb{R}$ 上的一个 borel 集, 这样的概率密度记为 $f_{X|\{X\in A\}}$, 我们为了避免麻烦, 还是确保 $P(A) > 0$, 但是这个条件并不是必要的, 我们之后将会处理等于 0 的情况.

Definition 2. 我们给出密度的值

$$f_{X|X\in A} = \begin{cases} \frac{f(x)}{P(X\in A)} & ,x \in A \\ 0 & ,x \notin A \end{cases}$$

我们不难验证, $f_{X|X\in A}$ 确实是一个密度函数. 这需要我们验证其在 $\mathbb{R}$ 上的积分是否等于 1.

对此我们当然能够推广到随机向量上

Definition 3.

$$f_{X,Y|(X,Y)\in A} = \begin{cases} \frac{f(x,y)}{P((X,Y)\in A)} & ,(x,y) \in A \\ 0 & ,(x,y) \notin A \end{cases}$$

这里的 A 当然是 $\mathbb{R}^2$ 上的一个 *borel* 集.

另一方面, 我们能够给出全概率公式的另一个版本

定理 4. A_i 是 Ω 的划分, 那么

$$f_X(x) = \sum_i^n P(A_i) f_{X|A_i}(x)$$

因为这里的划分只是有限个, 当然可以对这式子两边的密度函数进行任意的积分, 可以得到原本的那个全概率公式. [3]

[3]划分 A_i 可以是无穷个吗?

2.2 另一个部分

接下来是另一种条件概率, i.e. conditioning a r.v. on another r.v. 我们研究的是 $f_{X|Y}(x|y)$, 意思是给定 $Y=y$ 的时候, X 的条件概率密度. 在这里我们将会去处理前面所落下的, "条件的概率是 0" 的情况.

Definition 4.

$$f_{X|Y}\left(x|y\right)=\frac{f_{X,Y}\left(x,y\right)}{f_Y\left(y\right)}$$

其中 $f_Y\left(y\right)$ 不为 0

Example 4. 对于圆盘上的一个均匀分布的随机向量 (X,Y), 我们想要计算出 $f_{X|Y}(x|y)$, 首先得是算出 $f_Y\left(y\right)$, 我们将会看到, f_Y 并不是常数, 而 $f_{X|Y}$ 将会.