Tutoriat IV

seria 14

Ex 1: $(\mathbb{R}_2[X], +, \cdot)_{/\mathbb{R}}$

$\overset{\shortparallel}{\text{mulțimea polinoamelor de grad II în } \mathbb{R}}$

a) $P = 1 - X + X^2$

Să se afle coord. lui P în raport cu reperul

$\{1, X-1, (X-1)^2\}$

b) Să se dea exemple de subspații a.î.:

$\mathbb{R}_2[X] = V_1 \oplus V_2$

$\mathbb{R}_2[X] = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$

Rezolvare:

a) $P = a \cdot 1 + b(X-1) + c(X-1)^2 = a + bX - b + cX^2 - 2cX + c = cX^2 + bX - 2cX + a - b + c = cX^2 + X(b - 2c) + a - b + c$

$\Rightarrow \begin{cases} c = 1 \\ b - 2c = -1 \\ a - b + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ b = 1 \\ a = 1 \end{cases}$

Coord. sunt $(1, 1, 1)$

Obs: $P(X) = P(1) + P'(1)(X-1) + \frac{P''(1)(X-1)^2}{2!}$

M II: $a = P(1) = 1$

$b = P'(1) = 1$

$c = \frac{P''(1)}{2!} = 1$

b) $R = \{1, X-1, (X-1)^2\} = \underbrace{\{1, X-1\}}_{R_1} \cup \underbrace{\{(X-1)^2\}}_{R_2}$

$\Rightarrow \begin{array}{l} V_1 = \langle R_1 \rangle \\ V_2 = \langle R_2 \rangle \end{array}$, $\mathbb{R}_2[X] = V_1 \oplus V_2$

$R = \underset{\overset{\shortparallel}{R_1'}}{\{1\}} \cup \underset{\overset{\shortparallel}{R_2'}}{\{X-1\}} \cup \underset{\overset{\shortparallel}{R_3'}}{\{(X-1)^2\}}$

$W_i = \langle R_i \rangle \quad , i = \overline{1,3}$

$\mathbb{R}_2[X] = \langle\{1\}\rangle \oplus \langle\{X-1\}\rangle \oplus \langle\{(X-1)^2\}\rangle = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$

Ex2: $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)_{/\mathbb{R}}$

$S = \{(1,1,1)\}$

$S' = \{(1,0,2), (3,1,1), (2,0,4), (1,-1,3)\}$

a) Să se extindă S la o bază în $\mathbb{R}^3$.

b) S' este SG.

c) Să se extragă din S' o bază în $\mathbb{R}^3$.

Rezolvare:

a) $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow S \cup \{(1,0,0), (0,1,0)\} = \mathcal{B}$

$\mathcal{B}$ este SLI

$|\mathcal{B}| = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3 \Rightarrow \mathcal{B}$ este bază.

b) orice supramulțime a unui SG este SG.
(dacă o submulțime din S' este SG, atunci S' este SG)

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow B' = \{(1,0,2), (3,1,1),$$

$(1,-1,3)\}$ este SLI

$|B'| = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3 \Rightarrow B'$ este SG

$$\left.\begin{array}{l} S' = B' \cup \{(2,0,4)\} \\ B' \text{ este SG} \end{array}\right| \Rightarrow S' \text{ este SG (supramulțime)}$$

Teorie: Prop: Fie $f: V_1 \to V_2$ o aplicație liniară.

1) dacă f - injectivă $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \{0_{V_1}\}$ $\dim V_2 \geq \dim V_1$

2) f - surjectivă $\Leftrightarrow \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} f = \dim_{\mathbb{K}} V_2$ $\dim_{\mathbb{K}} V_1 = \dim \operatorname{Im} f$

$\dim_{\mathbb{K}} V_1 = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$

$\dim_{\mathbb{K}} V_1 \geq \dim_{\mathbb{K}} V_2$

3) f - bijectivă $\Leftrightarrow \dim V_1 = \dim V_2$

Teorema dimensiunii pentru aplicații liniare:

$f: V_1 \to V_2$ aplicație liniară

$\Rightarrow \dim V_1 = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$.

Teoremă: $(V_i, +, \cdot)_{/\mathbb{K}}$ sp. vect, $i = \overline{1,2}$, $V_1 \simeq V_2$ (izomorfe) $\Leftrightarrow \dim V_1 = \dim V_2$.

Def: $(V, +, \cdot)_{/\mathbb{K}}$ sp. vect n-dimensional.

$V^* = (\{f: V \to \mathbb{K} \mid f \text{ aplicație liniară}\}, +, \cdot)_{/\mathbb{K}}$ sp. vect dual.

$(f+g)(x) := f(x) + g(x), \quad \forall x \in V$

$(af)(x) = a f(x), \quad \forall a \in \mathbb{K}$

Scanned with CamScanner

Teoremă: $V \simeq V^*$

Prop: $f: V_1 \to V_2$ liniară

1) f inj $\Leftrightarrow$ f transformă $\forall$ SLI din V_1 într-un SLI din V_2.

2) f surj $\Leftrightarrow$ f transformă $\forall$ SG din V_1 într-un SG din V_2.

3) f bij $\Leftrightarrow$ f transformă $\forall$ reper din V_1 într-un reper din V_2.

Matricea asociată unei aplicații liniare

Fie $f: V_1 \to V_2$ apl liniară, $\dim V_1 = n$
$\dim V_2 = m$.

$R_1 = \{e_1, \dots e_n\}$ reper în V_1.

$R_2 = \{\bar{e}_1, \dots \bar{e}_n\}$ reper în V_2.

$R_1 \xrightarrow{A} R_2$ (A este matricea de trecere de la baza R_1 la baza R_2 + matricea asociată unei aplicații liniare)

$$f(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} \bar{e}_j \quad \forall i = \overline{1,n}$$

(e_i e un vector din R_1, dar $f(e_i)$ e un vector din R_2, $\bar{e}_i$)

$$A = (a_{ji})_{\substack{j=\overline{1,m} \\ i=\overline{1,n}}} \in M_{m,n}(\mathbb{K})$$

Caracterizarea aplicațiilor liniare:

$f: V_1 \to V_2$ apl. liniară $\Leftrightarrow$ $\exists A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ aî coord. lui $x \in V_1$ în raport cu reperul $R_1 = \{e_1, \dots e_n\}$

și coord. lui $y = f(x) \in V_2$, în raport cu $R_2 = \{\overline{e_1}, \dots \overline{e_n}\}$ reper în V_2, verifică ecuația $Y = AX$, unde

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

$$y = f(x) = \sum_{j=1}^{m} y_j \overline{e_j}$$

Modificarea matricei aplicației liniare la schimbarea reperelor:

$f: V_1 \to V_2$ apl. liniară

$$\begin{array}{ccc} R_1 = \{e_1, \dots e_n\} & \xrightarrow{A} & R_2 = \{\overline{e_1}, \dots \overline{e_n}\} \\ \downarrow C & & \downarrow D \\ R_1' = \{e_1', \dots e_n'\} & \xrightarrow{A'} & R_2' = \{\overline{e_1'}, \dots \overline{e_n'}\} \end{array}$$

repere în V_1 — repere în V_2.

$$\boxed{A' = D^{-1} A C}$$

Ex 1: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3)$

a) Să se determine matricea asociată lui $f \in End(\mathbb{R}^3)$ în rap. cu reperul canonic $R_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$.

b) Determinați un reper în imagine.

Rezolvare:

a) $Y = AX$

$(y = f(x))$

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 \\ x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

M_{II}

$f(e_1) = f(1,0,0) = (1,1,1)$ (I coloană A)

$f(e_2) = f(0,1,0) = (1,1,1)$ (coloana II în A)

$f(e_3) = f(0,0,1) = (-1,0,1)$

b) $\operatorname{Ker} f = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) = 0_{\mathbb{R}^3}\} = \langle\{(1,-1,0)\}\rangle$.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ \cancel{-x_2} + \cancel{x_2} + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$(x_1, x_2, x_3) = (-x_2, x_2, 0) = x_2(-1, 1, 0)$

Extindem reperul $\{(1,-1,0)\}$ al lui $\operatorname{Ker} f$ la un reper în $\mathbb{R}^3$:

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

Conform teoremei dimensiunii,

$R = \{(1,-1,0), (1,0,0), (0,0,1)\}$ reper în $\mathbb{R}^3$

$R_1 = \{(1,-1,0)\}$ reper în $\operatorname{Ker} f$

$R_2 = \{f(1,0,0), f(0,0,1)\} = \{(1,1,1), (-1,0,1)\}$ reper în $\operatorname{Im} f$.

Obs: $\operatorname{Ker} f = \{x \in V_1 \mid f(x) = 0_{V_2}\}$

$$\Downarrow$$
$$AX = 0$$

$\dim \operatorname{Ker} f = \dim V_1 - rg A$

conform Teoremei Dimensiunii:
$\dim V_1 = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$
$\Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = rg A$

- f inj $\Leftrightarrow \dim V_1 = rg A$
- f surj $\Leftrightarrow \dim V_2 = rg A$
- f bij $\Leftrightarrow \dim V_1 = \dim V_2 = rg A$ (matrice pătratică și inversabilă cu rang maxim) $\Rightarrow \dim V_1 = \dim V_2 = n$

Proiecții și simetrii

Def: $p : V_1 \oplus V_2 \to V_1 \oplus V_2$ endomorfism

$p(\underset{V_1}{\underset{\cap}{v_1}} + \underset{V_2}{\underset{\cap}{v_2}}) = v_1$ s.n. proiecția pe V_1 de-a lungul lui V_2.

Prop: $p \in End(V)$
p = proiecție $\Leftrightarrow p^2 = p$ $(p \circ p = p)$

Def: $s \in End(V)$
s s.n. simetrie sau involuție $\Leftrightarrow s \circ s = id_V$

Obs: $p \in End(V)$
p - proiecție $\Leftrightarrow s = 2p - id_V$ - simetrie.

Endomorfisme de vectori și valori proprii
Diagonalizarea matricei

$(V, +, \cdot)/_{\mathbb{K}}$, $f \in End(V)$

$R = \{e_1, e_2, \dots e_n\}$ reper în V.

$[f]_{R,R} = A$ (A este matricea asociată lui f în raport cu reperul R)

$f(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j, \ \forall i = \overline{1,n}.$

Def: $f \in End(V)$, $x \in V$, $x \neq 0_V$, x s.n. vector propriu.

$\Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{K}$ a.î. $f(x) = \lambda x$, λ s.n. valoare proprie.

Not $V_\lambda = \{x \in V$ (x vector propriu) $\mid f(x) = \lambda x\}$ subspațiul propriu corespunzător valorii proprii λ.

Obs: a) $V_\lambda \leq V$ ssp. vect

b) V_λ este ssp invariant al lui f, i.e $f(V_\lambda) \subseteq V_\lambda$.

Polinomul caracteristic:

$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = 0$

Obs: Valorile proprii sunt rădăcinile din $\mathbb{K}$ ale polinomului caracteristic.

Pentru matrici 2×2:

$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \underline{\lambda^2 - Tr(A)\cdot\lambda} + \det(A) = 0$

Ex 1: $f \in End(\mathbb{R}^2)$, $f(x) = (x_1, x_1 + 2x_2)$

$R_0 = \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$

a) Să se afle matricea asociată lui f în raport cu R_0.

b) Aflați valorile proprii.

Rezolvare:

$[f]_{R_0, R_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = A \qquad (Y = AX)$

$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) = 0$

$\lambda_1 = 1 \in \mathbb{R}$

$\lambda_2 = 2 \in \mathbb{R}$.

Obs: $P(\lambda)=0 \overset{M.T}{\Rightarrow} \lambda^2 - Tr(A)\lambda + det(A) = 0 \Rightarrow$
$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow (\lambda-1)(\lambda-2)=0$

$\lambda_1 = 1$
$\lambda_2 = 2$

Ex 2: $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)/\mathbb{R}$
$\mathcal{J}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathcal{J}(x) = (-x_2, x_1)$
a) Determinați matricea asociată lui $\mathcal{J}$ în raport cu reperul canonic.
b) Determinați valorile proprii.

Rezolvare:

a) $[\mathcal{J}]_{R_0,R_0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $P(\lambda)=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow$
$\lambda_{1,2} = \pm i \notin \mathbb{R}$, nu are valori proprii

Ex 3: $f \in End(\mathbb{R}^3)$
$f(x) = (x_1 + 2x_2 - x_3, x_2, 2x_2)$
$R_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$ reper canonic.
a) Determinați matricea asociată lui f în raport cu R_0.
b) Determinați valorile proprii.

Rezolvare:

a) $[f]_{R_0,R_0} = A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

b) $P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow -\lambda(1-\lambda^2)=0 \Rightarrow \lambda_1=0 \quad , m_1=1$

$\lambda_2=1 \quad , m_2=2$

Obs: σ_K = Suma minorilor diagonali de ordin K

$\sigma_1 = Tr(A)$ (urma)

$\sigma_2 = \sum_{i<j} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix}$

$\sigma_3 = \sum_{i<j<K} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{iK} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jK} \\ a_{Ki} & a_{Kj} & a_{KK} \end{vmatrix}$

M_{II}

$\lambda^3 - \sigma_1\lambda^2 + \sigma_2\lambda - \sigma_3 = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda = 0$

$\sigma_1 = Tr(A) = 2$

$\sigma_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 1$

$\Downarrow$ $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 1$

$\sigma_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$1<2 \qquad 1<3 \qquad 2<3$

$\sigma_3 = \det A = 0$

Obs: Teorema Hamilton-Cayley:

a) $A^n - \sigma_1 A^{n-1} + \ldots + (-1)^n \sigma_n I_n = O_n$

b) $f^n - \sigma_1 f^{n-1} + \ldots + (-1)^n \sigma_n \, id_V = 0$.

$f^n = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{n}$

Prop: $f \in End(V)$, $\dim_{\mathbb{K}} V = n$.

$S = \{v_1, \ldots v_K\}$ $(K \leq n)$ sistem de vectori proprii corespunzători la valori proprii distincte. $\Rightarrow S$ este SLI

Prop: Fie $f \in End(V)$, λ valoare proprie, m_λ = multiplicitatea unei valori proprii date și V_λ = subspațiul propriu corespunzător valorii proprii λ.

$V_\lambda = \{ x \in V \mid f(x) = \lambda x \} \Rightarrow \dim V_\lambda \leq m_\lambda$ (de obicei =).

Teoremă de diagonalizare:

Fie $f \in End(V)$, $\dim_{\mathbb{K}} V = n$.

Există un reper R în V a.î. $[f]_{R,R} = A$ este diagonală

$\Leftrightarrow$ 1) rădăcinile polinomului caracteristic (valorile proprii) $\in \mathbb{K}$ $(\lambda_i \ (i = \overline{1,k}) \in \mathbb{K})$.

2) dimensiunile subspațiilor proprii ($\dim V_\lambda$) = multiplicitățile valorilor proprii corespunzătoare (m_λ),

i.e. $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_{\lambda_1}} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{m_{\lambda_2}} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_k)^{m_{\lambda_k}}$

Ex 1:

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3)$

Să se determine un reper în raport cu care matricea asociată lui f este diagonală.

Rezolvare:

$$[f]_{R_0,R_0} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{L_1 = L_1 + L_2 + L_3}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3-\lambda & 3-\lambda \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (3-\lambda) \cdot \lambda^2 \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 = 3, \ m_{\lambda_1} = 1 \\ \lambda_2 = 0, \ m_{\lambda_2} = 2 \end{array}$$

$V_{\lambda_1} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) = 3x\}$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3x_1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Obs: $x_1 = x_2 = x_3 \Rightarrow V_{\lambda_1} = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$

$V_{\lambda_1} = \{(x_1, x_1, x_1) \mid x_1 \in \mathbb{R}\} =$

$= \{x_1(1, 1, 1) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$

$R_1 = \{(1, 1, 1)\}$ reper în V_{λ_1}.

M_{II}:

$$\text{rg}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 2$$

$\dim V_{\lambda_1} = 3 - 2 = 1 = m_{\lambda_1}$,

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 + x_2 = -x_3 \\ x_1 - 2x_2 = -x_3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 + x_2 = x_1 - 2x_2 \\ -2x_1 + x_2 = -x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x_1 = -3x_2 \\ -2x_1 + x_2 = -x_3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ -x_1 = -x_3 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3$$

$\Rightarrow V_{\lambda_1} = \{x_1(1, 1, 1) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$.

$V_{\lambda_2} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) = 0\} = \operatorname{Ker} f$

$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -x_2 - x_3$

$V_{\lambda_2} = \{(-x_2 - x_3, x_2, x_3) \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} = \{x_2(-1, 1, 0) +$
$+ x_3(-1, 0, 1) \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$

$R_2 = \{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$ este SG pt V_{λ_2}.

$rg\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow R_2$ e SLI

$R_2 = \{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$ este reper în V_{λ_2}.

$R = R_1 \cup R_2$. reper în $V = \mathbb{R}^3$ a.î.

$[f]_{R,R} = A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$