

Spații vectoriale

Teorie: \forall submultime a unui SLI este SLI.

\forall supra-multime a unui SG este un SG.

\forall supra-multime a unui SLI este un SLI.

Teorema schimbării: Fie $(V, +, \cdot)_{/K}$ sp. vect. finit generat.

Fie $\{x_1, \dots, x_n\}$ un SG.
 $\{y_1, \dots, y_n\}$ un SLI $\Rightarrow \{y_1, \dots, y_n\}$ este SG.

Teorema: Fie $(V, +, \cdot)_{/K}$ sp. vect. finit generat. Fie B_1, B_2 baze în V . $\Rightarrow |B_1| = |B_2|$

\forall SLI (finit) se poate completa la o bază.

Din orice SG (finit), care conține cel puțin un vector nenul, se poate extrage o bază.

Ex 1 $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)_{/\mathbb{R}}$, $S = \{(1, 0, 1), (-1, 1, 2)\}$

a) S este SLI

b) Să se completeze S la o bază.

Rezoluți:

a) Fie $a, b \in \mathbb{R}$ aî $a(1, 0, 1) + b(-1, 1, 2) = (0, 0, 0) \Rightarrow$
 $(a, 0, a) + (-b, b, 2b) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow (a-b, b, a+2b) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow$
 $\begin{cases} a-b=0 \\ b=0 \\ a+2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=0 \Rightarrow S \text{ este SLI.}$

b) $B_0 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ bază canonică în \mathbb{R}^3 . $\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3$.

Fie $B = \{(1, 0, 1), (-1, 1, 2), (1, 0, 0)\}$.

Demonstrăm că B este S.L.I.:

$$\text{Fie } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ a.î. } a(1, 0, 1) + b(-1, 1, 2) + c(1, 0, 0) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow (a - b + c, b, a + 2b) = (0, 0, 0)$$

$$(*) \begin{cases} a - b + c = 0 \\ b = 0 \\ a + 2b = 0 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det A = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{rang } A = 3 \Rightarrow (*)$ are sol. unică nulă $\Rightarrow a = b = c = 0$ ^(noul) B este S.L.I.

dar $|B| = 3 \stackrel{\text{obs.}}{=} \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 \Rightarrow B$ este bază.

Obs: $(V, +, \cdot) / \mathbb{K}$

B - bază

$$|B| = n = \dim_{\mathbb{K}} V$$

$\Rightarrow \begin{cases} n = \text{nr. maxime de vectori care} \\ \text{formează un S.L.I. și nr. minime} \\ \text{care formează S.B. (nr. exact de} \\ \text{vectori care formează o bază)} \end{cases}$

Ex2 $(\mathbb{R}^2, +, \cdot) / \mathbb{R}$, $S = \{(1, 2), (-1, 1), (2, 3)\}$

a) \mathbb{R}^2 este $\langle S \rangle$. (S e S.B. pentru \mathbb{R}^2)

b) Să se extragă din S o bază.

Răspuns:

a) Dem. că $\mathbb{R}^2 \subset \langle S \rangle$. (Știm deja că $\langle S \rangle \subset \mathbb{R}^2$).

$$\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \exists a, b, c \in \mathbb{R} \text{ a.î. } (x_1, x_2) = a(1, 2) + b(-1, 1) + c(2, 3) \Leftrightarrow (a - b + 2c, 2a + b + 3c) = (x_1, x_2)$$

$$(*) \begin{cases} a - b + 2c = x_1 \\ 2a + b + 3c = x_2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}$$

$\text{rg } A = 2 = \text{rg } \bar{A} \Rightarrow (*)$ este sistem compatibil neliniar
 $\Rightarrow \exists a, b, c \in \mathbb{R} \text{ a. i. } \mathbb{R}^2 = \langle S \rangle$

b) Fie $B = S \setminus \{(2, 3)\} = \{(1, 2), (-1, 1)\}$

$$\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow B \text{ este S.L.I.}$$

(are rangul maxim posibil)

$$\text{dar } |B| = 2 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2$$

$\Rightarrow B$ este o bază în \mathbb{R}^2 .

un reper este o bază ordonată (canonică)

$$R = \{e_1, \dots, e_n\}$$

ex: $B_0 = \{(1, 0), (0, 1)\} = \{e_1, e_2\} = R$, reper în \mathbb{R}^2 .

Def: Fie $(V, +, \cdot)_{/\mathbb{K}}$ sp. vect. finit generat, $n = \dim_{\mathbb{K}} V$,
 $R = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ reper în V . Atunci $\forall x \in V, \exists! (x_1, \dots, x_n)$

— coordonatele / componentele lui x în raport cu R . \mathbb{K}^n

$$\text{a. i. } x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

Ex 3: $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)_{/\mathbb{R}} \quad R = \{(1, 1), (2, 3)\}$

a) R reper

b) Să se afle coordonatele lui $x = (-1, 2)$ în raport cu R .

Rezolvare:

$$R = \{(1, 1), (2, 3)\} \Rightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{rang } L = 2 \text{ (maxim)} \xRightarrow{\text{CLT}} R \text{ este SLI}$$

$$\text{dar } |R| = 2 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} \text{rang } L = 2 \\ R \text{ este SLI} \end{matrix}} \right\} \Rightarrow R \text{ reper.}$$

CLT (criteriul de linear-independență):

$(V, +, \cdot)_{/\mathbb{K}}$ sp. vect., $n = \dim_{\mathbb{K}} V$

$S = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ sist. de vect., $n \leq n$.

$\Rightarrow S \neq \emptyset$
 $\Rightarrow S$ este SLI \Leftrightarrow matricea componentelor vectorilor din S în raport cu \forall reper din V are rang maxim = n .

$$b) (-1, 2) = a(1, 1) + b(2, 3)$$

$$\begin{cases} a + 2b = -1 \\ a + 3b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = 2 - 9 = -7 \end{cases}$$

$(-7, 3)$ = coordonatele în raport cu R .

Operații cu subspații vectoriale

Teorie: $(V, +, \cdot)_{/\mathbb{K}}$ sp. vect., $V' \subset V$ sp. vect. $\neq \emptyset$

\Leftrightarrow 1) $\forall x, y \in V' \Rightarrow x + y \in V'$ (închidere la adunare)

2) $\forall \alpha \in \mathbb{K}$
 $\forall x \in V' \Rightarrow \alpha x \in V'$ (închidere la înmulțirea cu scalari)

$\Leftrightarrow \forall x, y \in V'$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \Rightarrow \alpha x + \beta y \in V'$

Subspațiile vectoriale sunt închise la adunare și la înmulțirea cu scalari!

Prop: $(V, +, \cdot)_{/K}$ sp. vect, $V_1, V_2 \subseteq V$ subspații vect
 $\Rightarrow V_1 \cap V_2 \subseteq V$

subspații vect.

Obs: În general, $V_1 \cup V_2 \subseteq V$ nu este sp. vect. Considerăm $\langle V_1 \cup V_2 \rangle \stackrel{\text{not}}{=} V_1 + V_2$.

$$V_1 + V_2 = \{v_1 + v_2 \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$$

Def: Suma $V_1 + V_2$ s.n. sumă directă și se notează $V_1 \oplus V_2 \Leftrightarrow V_1 \cap V_2 = \{0_V\}$

$(V, +, \cdot)_{/K}$, $V_1, V_2 \subseteq V$ - 2 sp. vect. Suma

$V_1 + V_2$ este directă ($V_1 \oplus V_2$) $\Leftrightarrow \forall v \in V_1 + V_2$,

$\exists!$ $v_1 \in V_1$
 $v_2 \in V_2$ aî $v = v_1 + v_2$.

Teorema Grassman: Fie $(V, +, \cdot)_{/K}$ sp. vect, $V_1, V_2 \subseteq V$ subspații vect $\Rightarrow \dim_K (V_1 + V_2) = \dim_K V_1 + \dim_K V_2 - \dim_K (V_1 \cap V_2)$.

$$V_1 \cap V_2 = \{0\}$$

Obs:

a) $(V, +, \cdot)_{/K}$, $V_1, V_2 \subseteq V$ sp. vect. Dacă $V = V_1 \oplus V_2$ atunci $R = R_1 \cup R_2$ reper în V , unde R_i reper în V_i , $i = \overline{1, 2}$.

b) $(V, +, \cdot)_{/K}$, R reper în V . Partitionăm $R = R_1 \cup R_2$.

Fie $V_i = \langle R_i \rangle$, $i = \overline{1, 2} \Rightarrow V = V_1 \oplus V_2$.

c) $(V, +, \cdot)_{/K}$, $V_1, V_2 \subseteq V$ sp. vect. Dacă $V = V_1 \oplus V_2$, atunci $V_2 =$ sp complementar lui V_1 și $V_1 =$ sp com-

planaritate pentru V_2 .

$$E_x 1: (\mathbb{R}^3, +, \cdot) / \mathbb{R}$$

$$V_1 = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$V_2 = \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \{z(0, 0, 1) \mid z \in \mathbb{R}\}$$

$$V_2' = \{(t, t, t) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{t(1, 1, 1) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{Arătați: că } \mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2 = V_1 \oplus V_2'.$$

Rezolvare:

$$R_0 = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\} \text{ reper canonic în } \mathbb{R}^3.$$

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \{e_1, e_2\} \text{ S.L.I.}$$

$$\langle \{e_1, e_2\} \rangle = V_1$$

$$\Rightarrow R_1 = \{e_1, e_2\} \text{ reper în } V_1.$$

$$R_2 = \{e_3\} \text{ reper în } V_2.$$

$$R_0 = R_1 \cup R_2 \Rightarrow \mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$$

$$R_2' = \{(1, 1, 1)\} \text{ reper în } V_2'.$$

$$R = R_1 \cup R_2' \text{ reper în } \mathbb{R}^3.$$

demonstrăm: \hookrightarrow

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow R \text{ este S.L.I.} \left. \begin{array}{l} \text{deoareci } |\mathcal{R}| = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R \text{ este reper în } \mathbb{R}^3.$$

$$\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2.$$

Teorie: $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$

$$S(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid AX = O_{n,1}\}, X_{n,1}$$

multimea solutiilor sistemului linear omogen al lui A.

a) $S(A) \subseteq \mathbb{R}^n$ este un ssp vect. al $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)_{/\mathbb{R}}$.

b) $\dim_{\mathbb{R}} S(A) = n - \text{rg}(A)$

Ex 2: $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)_{/\mathbb{R}}$

$$V' = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}\}$$

intersecția a 2 plane = o dreaptă

a) Dem. că $V' \subseteq \mathbb{R}^3$ ssp vect.

b) $\dim V' = ?$

c) Reper în V'

Rezolvare:

$$a) A = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

$\text{rg } A = 2 = \text{rangul maxim} \Rightarrow S(A) = V' \Rightarrow V' \subseteq \mathbb{R}^3$

b) $\dim V' = 3 - \text{rg } A = 3 - 2 = 1$ (V' este o dreaptă, i.e. V' este unidimensională)

$$c) \begin{cases} 2x_1 - x_2 = -x_3 \\ x_1 + x_2 = 2x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 = x_3 \\ x_1 + x_2 = 2x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}x_3 \\ x_2 = 2x_3 - \frac{1}{3}x_3 = \frac{5}{3}x_3 \end{cases}$$

$$V' = \left\{ \left(\frac{1}{3}x_3, \frac{5}{3}x_3, x_3 \right) \mid x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \frac{x_3}{3} (1, 5, 3) \mid x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$R = \{ (1, 5, 3) \} \text{ (un vector, fiindcă } \dim V' = 1)$$

R este SL } $\Rightarrow R$ este reper.

$$|R| = \dim V' = 1$$

Aplicații liniare

Teorie: Fie $(V_1, +, \cdot)_{/K}$, $(V_2, +, \cdot)_{/K}$ 2 spații vect.

$f: V_1 \rightarrow V_2$ s.n. aplicație liniară (sau morfism de spații vectoriale) \Leftrightarrow

- 1) $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in V_1$
- 2) $f(\alpha x) = \alpha f(x)$, $\forall x \in V_1$, $\forall \alpha \in K$

Prop: $f: V_1 \rightarrow V_2$ apl. liniară $\Leftrightarrow f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$
 $\forall x, y \in V_1$
 $\forall \alpha, \beta \in K$

Def: $f: V_1 \rightarrow V_2$ s.n. izomorfism de sp. vect. \Leftrightarrow

- 1) apl. liniară
- 2) f este bijectivă

Def: $(V, +, \cdot)_{/K}$

1) $f: V \rightarrow V$ s.n. endomorfism de spații vect. $\Leftrightarrow f$ e aplicație liniară

2) $f: V \rightarrow V$ s.n. automorfism de spații vect. \Leftrightarrow

$\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ este endomorfism de spații vect.} \\ f \text{ este bijectivă} \end{cases}$

Def: $f: V_1 \rightarrow V_2$ apl. liniară.

a) $\text{Ker } f$ $= \{x \in V_1 \mid f(x) = 0_{V_2}\} = f^{-1}\{0_{V_2}\}$
"nucleul lui f ."

b) $\text{Im } f$ $= \{y \in V_2 \mid \exists x \in V_1 \text{ aî } f(x) = y\}$
"imaginea lui f ."

Prop: a) $\text{Ker } f \subset V_1$ ssp vect.
b) $\text{Im } f \subset V_2$ ssp vect.

$$Ex1: (\mathbb{R}^3, +, \cdot) / \mathbb{R}, f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$f(x) = (x_1 + x_2 - x_3, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3)$$

a) f liniară

b) $\text{Ker } f, \text{Im } f = ?$

c) Precizati câte un reper în $\text{Ker } f, \text{Im } f$.

Rezolvare:

$$a) f(ax + by) = af(x) + bf(y)$$

Demonstrăm:

$$\begin{aligned} f(ax + by) &= (ax_1 + by_1 + ax_2 + by_2 - (ax_3 + by_3), \\ &ax_1 + by_1 + ax_2 + by_2, ax_1 + by_1 + ax_2 + by_2 + ax_3 + by_3) = \\ &= (a(x_1 + x_2 - x_3) + b(y_1 + y_2 - y_3), a(x_1 + x_2) + b(y_1 + y_2), \\ &a(x_1 + x_2 + x_3) + b(y_1 + y_2 + y_3)) = af(x) + bf(y). \end{aligned}$$

$$b) \text{Ker } f = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) = 0_{\mathbb{R}^3}\}$$

\Downarrow

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\text{rg } A = 2$$

$$\text{Ker } f = S(A)$$

$$\dim \text{Ker } f = 3 - 2 = 1.$$

$$\begin{cases} x_2 - x_3 = -x_1 \\ x_2 = -x_1 \\ x_2 + x_3 = -x_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_2 = -x_1 \end{cases}$$

$$\text{Ker } f = \{(x_1, -x_1, 0) \mid x_1 \in \mathbb{R}\} = \{x_1(1, -1, 0) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$$

$$R_1 = \{(1, -1, 0)\} \text{ reper în } \text{Ker } f.$$

$$b) \text{Im } f = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid \exists x \in \mathbb{R}^3 \text{ a.î. } f(x) = y\}$$

$$\text{Fie } y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$$

$$\begin{cases} x_1 + x_1 - x_3 = y_1 \\ x_1 + x_2 = y_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = y_3 \end{cases} \quad (*)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{vmatrix}$$

(*) este sistem compatibil

$$\Delta p = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$\Delta c = \begin{vmatrix} 1 & -1 & y_1 \\ 1 & 0 & y_2 \\ 1 & 1 & y_3 \end{vmatrix} = 0, \text{ pentru ca } (*) \text{ să fie compatibil}$$

$$y_1 - y_2 + y_2 + y_3 = 0 \Rightarrow y_1 + y_3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & y_1 \\ 1 & 0 & y_2 \\ 1 & 1 & y_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & y_1 \\ 1 & 0 & y_2 \\ 2 & 0 & y_1 + y_3 \end{pmatrix}$$

$$y_1 + y_3 - 2y_2 = 0$$

$\text{Ker } f$ e o dreaptă ($\dim \text{Ker } f = 1$)

$\text{Im } f$ e un plan ($\dim \text{Im } f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \text{Ker } f = 3 - 1 = 2$)

$$\text{Im } f = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 \mid y_1 - 2y_2 + y_3 = 0\} =$$

$$= \{(2y_2 - y_3, y_2, y_3) \mid y_2, y_3 \in \mathbb{R}\} = \{y_2(2, 1, 0) + y_3(-1, 0, 1) \mid y_2, y_3 \in \mathbb{R}\}$$

$$R_2 = \{(2, 1, 0), (-1, 0, 1)\} \text{ este S.G. pentru } \text{Im } f. \Rightarrow \text{rg} \left(\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = 2 \text{ (maxim)} \xrightarrow{\text{C.L.I.}} R_2 \text{ e S.L.I.}$$

$\Rightarrow R_2$ e reper în $\text{Im } f$.