Limbaje Formale și Automate
Tutoriat 4

Gabriel Majeri

Automate Pushdown

Un *automat pushdown* este un automat finit extins cu o stivă de dimensiune infinită. Acesta operează la fel ca un automat obișnuit, prelucrând cuvintele literă cu literă, dar poate să stocheze și să ia decizii pe baza memoriei sale.

Limbajele acceptate de PDA sunt aceleași cu limbajele generate de **gramatici independente de context**.

Automatele pushdown deterministe sunt incluse **strict** în cele nedeterministe. De exemplu, se poate demonstra că limbajul

$$\mathcal{L} = \{ ww^R \mid w \in \{ a, b \}^* \}$$

nu poate fi acceptat de un DPDA, dar este destul de simplu să facem un NPDA pentru el.

Vom folosi simbolul Z_0 pentru a indica o stivă vidă: în momentul în care PDA-ul începe execuția, presupunem că acest simbol se află pe stivă, și îl vom lăsa tot timpul la baza stivei.

Exerciții

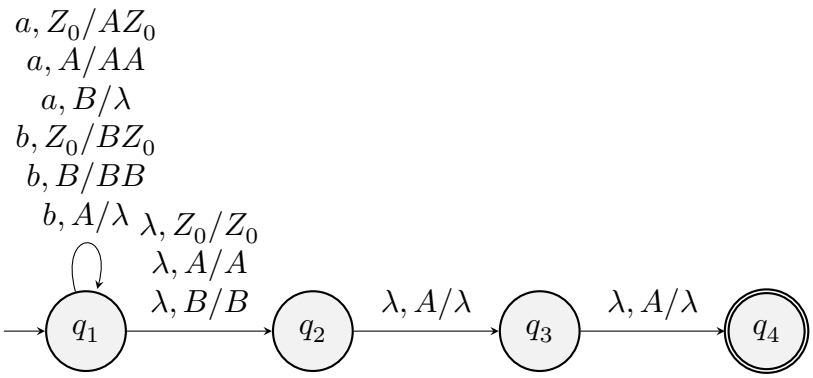
Exercițiu 1 (exercițiul 10 din examen iunie 2011)**.** Construiți un automat pushdown (PDA), eventual determinist, pentru limbajul

$$\mathcal{L} = \{\, w \mid w \in \{\, a, b, c \,\}^*, |w|_a = |w|_b + 2 \,\}$$

Idee: Pe stivă reținem dacă am citit mai multe a-uri sau mai multe b-uri până la acel moment. La finalul cuvântului, trebuie să avem două a-uri în plus.

Rezolvare.

Construim următorul PDA, cu acceptare prin stare finală și stivă vidă:



În starea q_1, automatul ciclează, citește caractere și le pune pe stivă. La un moment dat, acesta trece nedeterminist în q_2. Tranzițiile de la q_2 la q_3 și de la q_3 la q_4 verifică că avem două a-uri în plus pe stivă. □

Exercițiu 2 (exercițiul 11 din examen iunie 2013)**.** Construiți un automat pushdown (PDA), eventual determinist, pentru limbajul

$$\mathcal{L} = \{\, w \mid w \in \{\, 0, 1, 2 \,\}^*, 4\,|w|_0 + 1 = |w|_2 \,\}$$

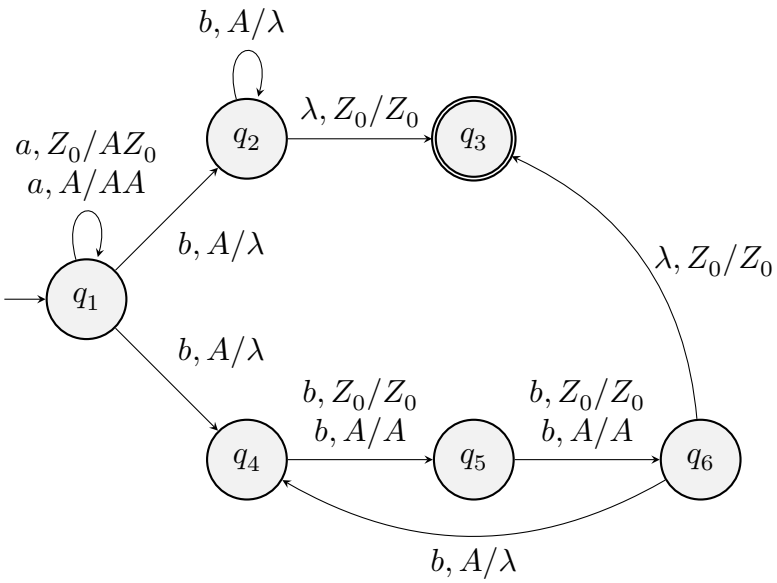
Idee: La fel ca mai sus, dar punem de 4 ori mai multe simboluri pentru 0 decât pentru 2. La final trebuie să rămână un 2 în plus.

Exercițiu 3 (exercițiul 10 din examen iunie 2014)**.** Construiți un automat pushdown (PDA) pentru limbajul

$$\mathcal{L} = \{\, a^n b^n \mid n \geq 0 \,\} \cup \{\, a^n b^{3n} \mid n \geq 0 \,\}$$

Idee: Reținem câte a-uri citim pe stivă. Când dăm de primul b, automatul se bifurcă nedeterminist: pe un caz o să corelăm un b cu un a, pe altul câte 3 b-uri cu un a.

Construim următorul PDA, cu acceptare prin stare finală și stivă vidă:



Rezolvare.

În starea q_1, automatul citește a-uri și le pune pe stivă. La primul b citit, trece nedeterminist în starea q_2 sau q_4.

În starea q_2 citește b-uri și le corelează cu a-uri.

În stările q_4, q_5 și q_6 avem un ciclu de lungime 3 care corelează câte 3 b-uri cu un a. □

Exercițiu 4 (exercițiul 11 din examen iunie 2017)**.** Construiți un automat pushdown (PDA) cu acceptare prin stivă vidă pentru limbajul

$$\mathcal{L} = \{ w \mid w \in \{ a, b \}^*, 2 |w|_a \neq 3 |w|_b + 2 \} \cup \{ aaab, bbba \}$$

Idee: Rezolvăm ca mai sus, reținând câte a-uri / b-uri am citit pe stivă. La final verificăm să nu se îndeplinească egalitatea.

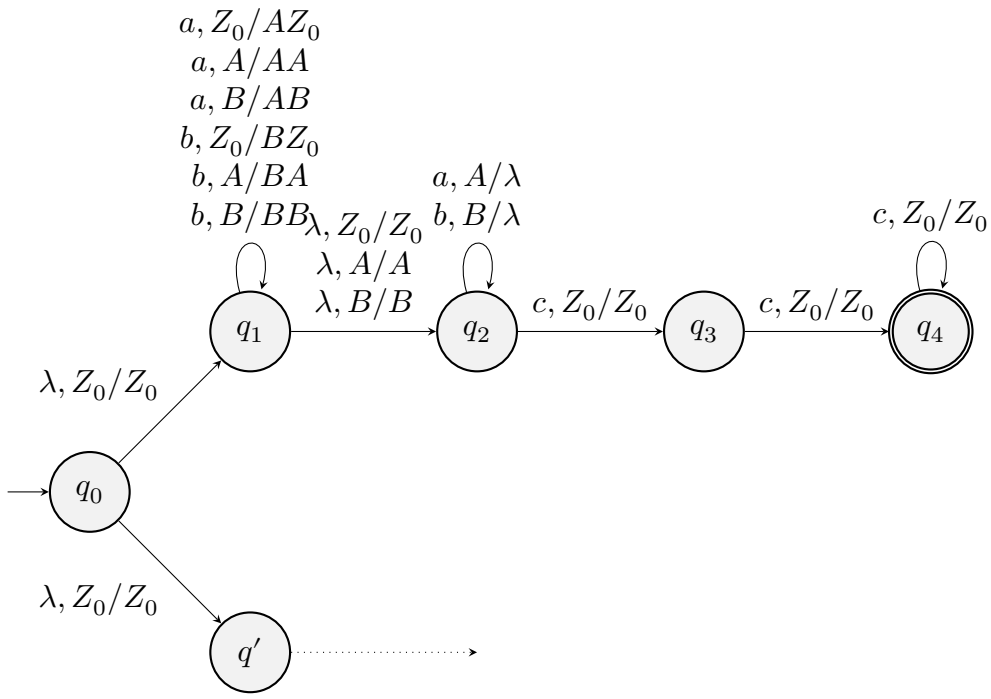
Exercițiu 5 (exercițiul 11 din examen iunie 2018)**.** Construiți un automat pushdown (PDA) pentru limbajul

$$\mathcal{L} = \{ ww^R c^i \mid w \in \{ a, b \}^*, i \geq 2 \} \cup \{ abca, ccba, cabc \}$$

unde w^R înseamnă oglinditul lui w, de exemplu $(abcd)^R = dcba$.

Idee: Reținem pe stivă literele lui w, și alegem nedeterminist care este momentul în care începe w^R.

Construim următorul PDA nedeterminist:



Rezolvare.

În q_1 punem pe stivă câte un simbol pentru fiecare literă citită. Alegem nedeterminist care este mijlocul cuvântului, trecând în starea q_2. Aici citim literele și comparăm cu ce avem pe stivă.

În starea q_4 acceptăm oricâte c-uri; am verificat deja că avem cel puțin două prin tranzițiile de la q_2 la q_3 și de la q_3 la q_4.

Începând cu starea q' avem DFA-ul pentru mulțimea $\{\, abca, ccba, cabc \,\}$, pe care nu l-am mai scris. □