Spații vectoriale:

$(M_{n,m}(\mathbb{K}), +, \cdot)_{/\mathbb{K}}$ spațiu vectorial

Fie $(V, +, \cdot)_{/\mathbb{K}}$, $S \subseteq V$.

S s.n. sistem de generatori (SG) $\Leftrightarrow$ $\langle S \rangle = V$ ie

$\forall x \in V$, $\exists x_1, \ldots x_n \in S$ și $\exists a_1, \ldots a_n \in \mathbb{K}$ a.î.

$x = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n$

Fie $(V, +, \cdot)_{/\mathbb{K}}$ sp. vect., $S \subseteq V$.

1) S este un SLI (sistem liniar independent) $\Leftrightarrow$

$\forall x_1, \ldots x_n \in S$ și $\forall a_1, \ldots a_n \in \mathbb{K}$ a.î. $a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n$

$= 0_V \Rightarrow a_1 = \ldots = a_n = 0_{\mathbb{K}}$

($\forall$ combinație liniară ~~trivială~~ nulă este trivială)

2) S s.n. sistem liniar dependent (SLD) $\Leftrightarrow \exists x_1, \ldots x_n \in S$

și $a_1, \ldots a_n \in \mathbb{K}$ a.î. $a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = 0_V$.

nu toți nuli

$\forall \{x\}$ este un SLI

$\forall$ submulțime S' a unui SLI este SLI

Ex 1: $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)_{/\mathbb{R}}$, $B \overset{not}{=} \{(1,0),(0,1)\}$ este SLI

Dem:

Fie $a, b \in \mathbb{R}$ a.î. $a(1,0)+b(0,1)=(0,0) \Leftrightarrow (a,b)=(0,0)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} B \text{ este SLI} \\ B \text{ este SG} \end{array}\right| \Rightarrow B$ este bază în $\mathbb{R}^2$.

Ex 2: a) $(\mathbb{R}_2[X], +, \cdot)_{/\mathbb{R}}$

$P = a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \cdot 1$

$\Rightarrow S = \{1, x, x^2\}$ este SG, $\langle S \rangle = \mathbb{R}_2[X]$

b) $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)_{/\mathbb{R}}$

$S = \{(1,0),(0,1)\}$, $\langle S \rangle = \mathbb{R}^2$

Fie $\underset{\in \mathbb{R}^2}{(x_1, x_2)} = (x_1, 0) + (0, x_2) = \underset{\in \mathbb{R}}{x_1}(1,0) + \underset{\in \mathbb{R}}{x_2}(0,1)$

$\Rightarrow S$ este SG pentru $\mathbb{R}^2$, $\langle S \rangle = \mathbb{R}^2$.

Ex3: $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)/\mathbb{R}$

$S = \{(1,-1), (2,0)\}$

$S' = \{(1,-1), (2,0), (3,1)\}$

$S'' = \{(\alpha, 2), (3,-1)\}$

a) S este bază

b) S' este SLD

c) $\alpha = ?$ a.î. S'' este SLI, respectiv SLD.

Rezolvare:

a) • Dem că S este SLI

$[\forall a, b \in \mathbb{R}$ a.î. $a(1,-1) + b(2,0) = (0,0) \Rightarrow a = b = 0]$

$\Rightarrow (a + 2b, -a) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = 0 \\ -a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$

• Dem că S este SG $\Leftrightarrow [(\forall) x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \exists a, b \in \mathbb{R}$ a.î. $x = a(1,-1) + b(2,0)]$

$\Rightarrow (x_1, x_2) = (a + 2b, -a) \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = x_1 \\ -a = x_2 \end{cases} \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} b = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \\ a = -x_2 \end{cases}$

$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\det M \neq 0$ $\Rightarrow (*)$ compatibil determinat $\Rightarrow$ S este bază

Obs: B - bază

card $B = n = \dim_{\mathbb{K}} V$ = nr. maxim de vectori care formează SLI și nr. minim care formează SG.

$(\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 = 2)$

b) Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ a.î. $a(1,-1) + b(2,0) + c(3,1) = (0,0)$
$\Leftrightarrow (a, -a) + (2b, 0) + (3c, c) = (0,0) \Leftrightarrow (a + 2b + 3c, -a + c) = (0,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b + 3c = 0 \\ -a + c = 0 \end{cases} \qquad M = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

rang $M = 2$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} b = -2c \\ a = c \end{array}$$

$(a, b, c) = (c, -2c, c), \; c \in \mathbb{R}$

Luăm o valoare pentru c, fie $c = 1$, deci există valori pentru $a, b, c \in \mathbb{R}$ a.î. acestea să fie nenule și $\forall x \in S'$, $x = (0,0) \Rightarrow S'$ este SLD.

c) $(\forall)$ $a, b \in \mathbb{R}$ a.î. $a(\alpha, 2) + b(3, -1) = (0,0) \Leftrightarrow$
$(\alpha a + 3b, 2a - b) = (0,0)$

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

- $S'' = SLI \Leftrightarrow \det M \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq -6$ (sol. unică nulă)
- $S'' = SLD \Leftrightarrow \det M = 0 \Leftrightarrow \alpha = -6.$

Ex 4. $(\mathbb{R}_2[X], +, \cdot)/\mathbb{R}$

$\mathbb{R}_2[X] = \{ P \in \mathbb{R}[X] \mid \text{grad } P < 2 \}$

a) $B = \{1, x-2, (x-2)^2\}$ bază în $\mathbb{R}_2[X]$.

b) $B' = \{f, f', f''\}$ bază în $\mathbb{R}_2[X]$

unde $f = x^2 + x + 1$

Obs: $B_0 = \{1, x, x^2\}$ bază.

$P = ax^2 + bx + c \equiv (a, b, c) \in \mathbb{R}^2$

Rezolvare:

a) B este SLI $\Leftrightarrow \forall a, b, c \in \mathbb{R}$ a.î. $a + b(x-2) + c(x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow cx^2 + x(b-4c) + (a-2b+4c) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b - 4c = 0 \\ a - 2b + 4c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 0 \Rightarrow B \text{ este SLI}$$

$B = SG \Leftrightarrow \forall P = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \exists a, b, c \in \mathbb{R}$ a.î.

$P = a + b(x-2) + c(x-2)$

$\overset{\parallel}{P} = cx^2 + x(b-4c) + (a-2b+4c) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = \alpha = x_1 \\ b - 4c = \beta = x_2 \\ a - 2b + 4c = \gamma = x_3 \end{cases} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$\det M \neq 0 \Rightarrow$ SCD (sistem compatibil determinat) $\Rightarrow B$ este ~~Bază~~ SG $\Rightarrow B$ este Bază

Dem că V este ssp v. pentru $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)/\mathbb{R}$

$$V' = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1 - x_2 = 0\}$$

$$\left.\begin{matrix}(x_1, x_2)\\ (x_1', x_2')\end{matrix}\right\} \in V' \qquad \begin{matrix}2x_1 - x_2 = 0\\ 2x_1' - x_2' = 0\end{matrix}$$

$$(x_1; x_2) + (x_1', x_2') = (\underbrace{x_1 + x_1'}_{=x_1''}, \underbrace{x_2 + x_2'}_{=x_2''})$$

$$2x_1'' - x_2'' = 2(x_1 + x_1') - (x_2 + x_2') =$$
$$= (2x_1 - x_2) + (2x_1' - x_2') = 0 \Rightarrow \text{închis la adunare}$$

$$a \in \mathbb{R} \Rightarrow a(x_1, x_2) = (\underbrace{a x_1}_{=y_1}, \underbrace{a x_2}_{=y_2})$$

$$2y_1 - y_2 = 2ax_1 - ax_2 = a(2x_1 - x_2) = 0$$
$\Rightarrow$ închis la înmulțirea cu scalari.

$\Rightarrow V'$ este ssp v.