Tutoriat IX

seminar 131
19.03.2020

Ex 1: A fost rezolvat în tutoriatul VII, Ex 2.

Ex 2: Fie aplicația liniară $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$T(x,y,z) = (-7x+2y+2z, -8x+3y+2z, -32x+8y+9z)$$

a) Determinați matricea lui T în raport cu baza canonică.

b) Fie baza $B = \{v_1, v_2, v_3\}$, unde $v_1 = (1,1,4)$, $v_2 = (1,0,4)$, $v_3 = (0,1,-1)$. Determinați matricea lui T în raport cu baza B.

Rezolvare:

a) $$[T]_{R_0,R_0} = A = \begin{pmatrix} -7 & 2 & 2 \\ -8 & 3 & 2 \\ -32 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{tikzcd} R_0 \arrow[r, "A"] \arrow[d, "D"'] & R_0 \arrow[d, "D"] \\ B \arrow[r, "A'"] & B \end{tikzcd}$$

$$A' = [T]_{B,B} = D^{-1} A D$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Aflăm D^{-1}:

$$D^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$a_{11} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

$$a_{12} = 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

Scanned with CamScanner

$$a_{13} = 4 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

$$a_{21} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 5$$

$$a_{22} = 0$$

$$a_{23} = 4 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

$$a_{31} = 0$$

$$a_{32} = 1 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$a_{33} = (-1) \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$D^* = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 - 4 + 1 = 1$$

$$D^{-1} = \frac{1}{\Delta} D^* = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A' = D^{-1} A D = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 2 & 2 \\ -7 & 3 & 2 \\ -32 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot D =$$

$$= \begin{pmatrix} 28 - 8 - 128 & -8 + 3 + 32 & -8 + 2 + 36 \\ -35 + 128 & 10 - 32 & 10 - 36 \\ -32 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot D = \begin{pmatrix} -108 & 27 & 30 \\ 93 & -22 & -26 \\ -32 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot D = \begin{pmatrix} -108 & 27 & 30 \\ 93 & -22 & -26 \\ -32 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -108 + 27 & -108 + 30 & -432 + 108 - 30 \\ 93 - 22 & 93 - 26 & 372 - 88 + 26 \\ -32 + 8 & -32 + 9 & -128 + 32 - 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -81 & -78 & -354 \\ 71 & 67 & 310 \\ -24 & -23 & -105 \end{pmatrix}$$

Scanned with CamScanner

Ex3: Fie aplicația liniară $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$,
$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2 + x_3 + x_4,\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4,\ x_1 - 2x_2 - 2x_4)$
Determinați câte o bază în Ker T și Im T.

Rezolvare:

$\operatorname{Ker} T = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid T(x) = 0\}$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_2 + 2x_4 \\ 2x_2 + 2x_4 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_2 + 2x_4 \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} x_1 &= 2x_2 + 2x_4 \\ x_3 &= -x_2 - 3x_4 \end{aligned}$$

$\operatorname{Ker} T = \{(2x_2 + 2x_4, x_2, -x_2 - 3x_4, x_4) \mid x_2, x_4 \in \mathbb{R}\} =$
$= \{x_2(2, 1, -1, 0) + x_4(2, 0, -3, 1) \mid x_2, x_4 \in \mathbb{R}\}$

$R = \{(2, 1, -1, 0), (2, 0, -3, 1)\}$

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{matrix}} \\ \begin{matrix} -1 & -3 \\ 0 & 1 \end{matrix} \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow R \text{ este reper în Ker } T.$$

Conform teoremei dimensiunii:
$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^4 = \dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Im} T \Rightarrow \dim \operatorname{Im} T = 2$
extindem R la un reper în $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

$\Rightarrow R' = \{(2, 1, -1, 0), (2, 0, -3, 1), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)\}$

Scanned with CamScanner

este reper în $\mathbb{R}^4$.

$R'' = \{T(1,0,0,0),\ T(0,1,0,0)\} = \{(1,2,1), (-1,-3,-2)\}$ SG pentru Im T.

$rg\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{matrix}} \\ \begin{matrix} 1 & -2 \end{matrix} \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow R''$ este reper în Im T.

Ex4: Fie V un spațiu vectorial și $L \subset V$ un subspațiu. Fie:

$Ann(L) := \{f \in V^* \mid f(x) = 0, \forall x \in L\}$

a) Dacă $\dim(V) = n$ și $\dim(L) = m$ determinați $\dim Ann(L)$.

Rezolvare:

$\dim V^* = n$ (spațiul vectorial dual lui V, $V \simeq V^*$),

$Ann(L)$ primește valori din V^*: $\dim Ann(L) \leq n$,

pentru anumiți x din L: $\dim Ann(L) \geq m$.

$\Rightarrow \quad m \leq \dim Ann(L) \leq n$.

Ex5: Fie $V^{**} := (V^*)^*$. Să se arate că există un izomorfism $\Phi : V^{**} \to V$ care nu depinde de alegerea unei baze:

1) Din definiția spațiului vectorial dual, $V \simeq V^*$

pentru $V^* = (\{f : V \to \mathbb{K} \mid f \text{ - liniară}\}, +, \cdot)_{\mathbb{K}}$

$\Rightarrow \exists\, g$ izomorfism a.î. $g : V^* \to V$, și $|V^*| = |V|$.

2) Dacă $V^{**} = (V^*)^*$, atunci $V^{**} \simeq V$,

pentru $V^{**} = (\{f' : V^* \to \mathbb{K} \mid f' \text{ - liniară}\}, +, \cdot)_{\mathbb{K}}$

$\Rightarrow \exists\, g'$ un izomorfism a.î. $g' : V^{**} \to V^*$, și $|V^{**}| = |V^*|$

Scanned with CamScanner

$\Rightarrow \exists\ \Phi$ un izomorfism, $\Phi = g' \circ g : V^{**} \to V$

şi $|V^{**}| = |V|$.

seria 14

Transformări ortogonale:

Def: $(E_i, \langle , \rangle_i)$, $i = \overline{1,2}$ spaţii vect. euclidiene şi reale.

Fie $f : E_1 \to E_2$ aplicaţie liniară.

f s.n. aplicaţie ortogonală $\Leftrightarrow \langle f(x), f(y) \rangle_2 = \langle x, y \rangle_1$, $\forall\ x, y \in E_1$.

Prop: Fie $f : E_1 \to E_2$ aplicaţie ortogonală $\Rightarrow$

1) $\|f(x)\|_2 = \|x\|_1$, $\forall x \in E_1$, $\|x\|_1 = \sqrt{\langle x, x \rangle_1}$

2) f este injectivă.

Def: Fie $(E, \langle , \rangle)$ spaţiu vectorial euclidian real.

$f \in End(E)$.

f s.n. transformare ortogonală $\Leftrightarrow \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$, $\forall x, y \in E$.

Notaţie: $O(E)$ = mulţimea transformărilor ortogonale.

Prop: $f \in O(E) \Leftrightarrow$ matricea asociată lui f în raport cu $\forall$ reper este o matrice $O(n)$ (i.e $A \cdot A^T = I_n$).

Prop: Orice transformare ortogonală este o schimbare de reper ortonormat.

Prop: Fie $f \in O(E)$, $\mathcal{U} \subseteq E$ subsp. vect.

a) Dacă $\mathcal{U}$ subspaţiu invariant al lui f, i.e $f(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{U}$ atunci $f(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$.

b) Dacă $\mathcal{U}$ subspaţiu invariant, atunci $\mathcal{U}^\perp$ este invariant al lui f. Mai mult, $f|_{\mathcal{U}^\perp} : \mathcal{U}^\perp \to \mathcal{U}^\perp$ este o transformare ortogonală.

Scanned with CamScanner

Clasificarea transformărilor ortogonale

Prop: $f \in O(E) \Rightarrow$ valorile proprii sunt ± 1.

[Teoremă: $\dim E = 2$

$\forall f \in O(E)$ se scrie ca o compunere de cel mult 2 simetrii ortogonale.]

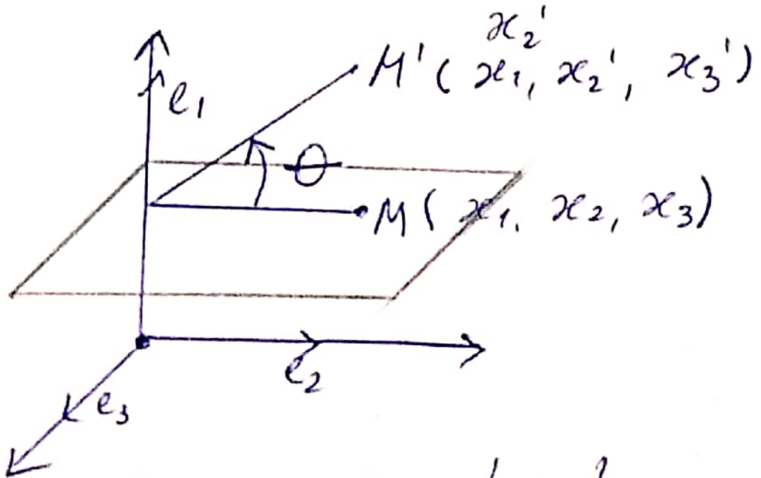
Teoremă: $\dim E = 3$, $f \in O(E)$

$\exists$ un reper $R: \{e_1, e_2, e_3\}$ ortonormat în E a.î.

dacă $\det A = 1$, atunci

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$f: E \to E$, $f(x) = (x_1, \underbrace{x_2\cos\theta - x_3\sin\theta}_{\overset{not}{=} x_2'}, \underbrace{x_2\sin\theta + x_3\sin\theta}_{\overset{not}{=} x_3'})$



f = rotație de $\measuredangle\theta$ și axă $\langle\{e_1\}\rangle$

$\operatorname{Tr} A = 1 + 2\cos\theta$ invariant la schimbarea reperului

Axa: $f(x) = x$ ($f(e_1) = e_1$).

Scanned with CamScanner

Teoremă: $\dim E = 1$

$O(E) = \{ id_E, -id_E \}$.

Valorile proprii, $\lambda = \pm 1$, $\forall f \in O(E)$

Caz $\dim = 3$:

Fie e_1 versor propriu, i.e. $f(e_1) = \lambda e_1$.

$\langle \{e_1\} \rangle \subset E$ ssp invariant $\Rightarrow \langle \{e_1\} \rangle^{\perp}$ ssp invariant

$f|_{\langle \{e_1\} \rangle^{\perp}} : \langle \{e_1\} \rangle^{\perp} \to \langle \{e_1\} \rangle^{\perp}$ transf. ortog.

și $\tilde{A}$ matrice asociată.

1) $\det A = 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, f de speță 1

f o rotație de $\measuredangle \theta$ și axă $\langle \{e_1\} \rangle$.

2) $\det A = -1$ $\quad$ f de speță 2.

a) $\lambda = 1 \Rightarrow f(e_1) = e_1$

$[f]_{R,R} = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\tilde{A}} \\ 0 & & \end{pmatrix} \Rightarrow \det \tilde{A} = -1$.

$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

În raport cu $R' = \{e_2, e_1, e_3\}$: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} \\ 0 & & \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 0 & -\sin 0 \\ 0 & \sin 0 & \cos 0 \end{pmatrix}$

Scanned with CamScanner

b) $\lambda = -1 \Rightarrow f(e_1) = -e_1$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A} & \\ 0 & & \end{pmatrix} \Rightarrow \det \tilde{A} = 1$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

<u>Teoremă</u>: $n = 3$, $f \in O(E)$ de speță 2 (ie $\det A = -1$)
$\Rightarrow \exists$ un reper ortonormat $R = \{e_1, e_2, e_3\}$ a.î.

$$[f]_{R,R} = A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

f este o compunere dintre o rotație de $\measuredangle\theta$ în axă $<\{e_1\}>$ și o simetrie ortogonală față de $<\{e_1\}>^{\perp}$.

Teoremă: $f \in O(E)$
caz $\dim E = 2$, $\exists$ un reper ortonormat $R = \{e_1, e_2\}$
a.î.

a)
$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in [0; \pi].$$

$\det A = 1$

f - rotație de $\measuredangle\theta$.

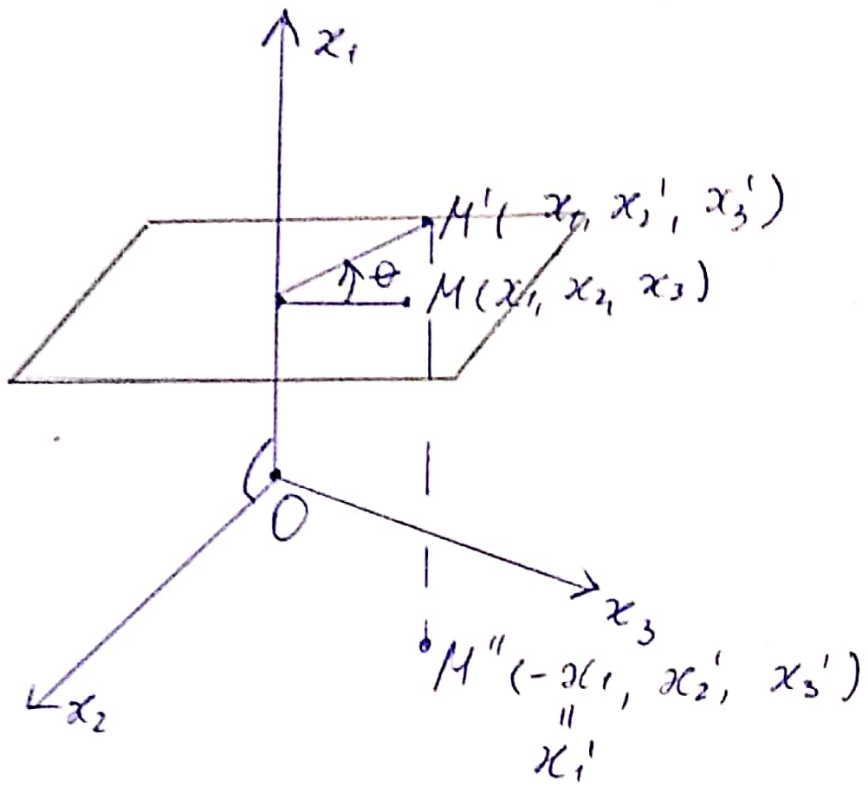
$A = [f]_{R,R}$

b) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

f = simetrie ortogonală față de $<\{e_1\}>^{\perp}$.

Scanned with CamScanner

$f: E \to E$, $f(x_1, x_2, x_3) = (\underbrace{-x_1}_{\text{not } x_1'}; \underbrace{x_1\cos\theta - x_3 \sin\theta}_{\text{not } x_2'}, \underbrace{x_2 \sin\theta + x_3 \cos\theta}_{x_3'})$



Axa de rotație: $f(x) = -x$.

Teorema Cartan:

Fie $f \in O(E)$, $\dim E \geq 2$, $\dim E = n$, $f \neq id_E \Rightarrow f$ se poate scrie ca o compunere de cel mult n simetrii față de hiperplan.

Obs: $E_1 = \{<(1, 0, 1)>\}$ axă de rotație.
$\phantom{E_1 = \{}$ $\overset{\shortparallel}{\text{o dreaptă}}$

$\measuredangle\, \theta = \frac{\pi}{6}$.

Să se determine rotația de $\measuredangle\, \theta$ și axă E_1;

$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$ versorul axei

norma $\sqrt{<e_1, e_1>}$

Scanned with CamScanner

$E_1^{\perp} = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, (1,0,1) \rangle = 0 \iff \underset{\text{un plan}}{\underbrace{x_1 + x_3 = 0}} \} =$

$= \{ (-x_3, x_2, x_3) \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R} \}$

$x_3 \underbrace{(-1,0,1)}_{f_2} + x_2 \underbrace{(0,1,0)}_{f_3}$

$\{f_2, f_3\}$ reper arbitrar oarecare pentru $E_1^{\perp}$.

Aplicăm metoda Gram-Schmidt:

construim $\{e_2, e_3\}$ reper ortonormat în $E_1^{\perp}$.

$R = \{-e_1, e_2, e_3\}$ reper ortonormat pozitiv orientat

$\underset{\text{canonic}}{R_0 = \{e_1^0, e_2^0, e_3^0\}} \xrightarrow{C} R = \{e_1, e_2, e_3\}$

$$[f]_{R,R} = A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$[f]_{R_0, R_0} = A.$

$A' = C^{-1} A C = C^T A C \Rightarrow A = C A' C^T.$

(C e o matrice ortogonală $\Rightarrow C^{-1} = C^T$.)

$C \in O(E), \quad C^T = C^{-1}$

$f(x) = x' \qquad X' = AX.$

Scanned with CamScanner