Seminar 4

Ex 1 Care dintre S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 sunt subspații vectoriale în $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$?

$S_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$

$x = (x_1, x_2, x_3), \quad y = (y_1, y_2, y_3)$

$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$

$x_1 + y_1 + 2x_2 + 2y_2 - x_3 - y_3 = 0$ (A) $x + y \in S_1$

$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3), \ \alpha \in \mathbb{R}$

$\cancel{\alpha x_1 + 2\alpha x_2 + 2\alpha}$ $\alpha x_1 + 2\alpha x_2 - \alpha x_3 = 0$

$\alpha(x_1 + 2x_2 - x_3) = 0$ (A) $\Rightarrow \alpha x \in S_1$

$\Rightarrow S_1$ subspațiu vectorial în $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$

$S_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 - x_3 = 1\}$

$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$

$x_1 + y_1 + 2x_2 + 2y_2 - x_3 - y_3 = 0 \neq 1 \Rightarrow S_2$ nu este subspațiu vect. în $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$

$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)$

$\alpha(x_1 + 2x_1 - x_3) = \alpha \neq 1 \Rightarrow S_2 \neq$ subsp. vect. în $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$

$S_4 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = x_3^2\}$ ~~$x_1 + x_2 +$~~

$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$

$(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 = (x_3 + y_3)^2$

$\cancel{x_1^2} + 2x_1y_1 + \cancel{y_1^2} + \cancel{x_2^2} + 2x_2y_2 + \cancel{y_2^2} = \cancel{x_3^2} + 2x_3y_3 + \cancel{y_3^2}$

$2x_1y_1 + 2x_2y_2 = 2x_3y_3 \Leftrightarrow x_1y_1 + x_2y_2 = x_3y_3$ FALS

$\Rightarrow x + y \notin S_4$

$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3) \Rightarrow \alpha^2 x_1^2 + \alpha^2 x_2^2 = \alpha^2 x_3^2$

$\Rightarrow \alpha x \in S_4$

$\Rightarrow S_4$ nu este subsp. vect. în $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$

$S_3 = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{array}\right\}$ $\cancel{\{x \in \mathbb{R}^3}$

$2x_1 + 3x_2 = 0$

$x + y = (x_1 + y_1, x_1 + y_2, x_3 + y_3)$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I} & x_1 + y_1 + 2x_2 + 2y_2 - x_3 - y_3 = 0 \quad (A) \\ \text{II} & x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + x_3 + y_3 = 0 \quad (A) \end{array}\right\} \Rightarrow x + y \in S_3$$

$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

I $\alpha(x_1+x_2+x_3) = 0$ (A)

II $\alpha x_1 + 2\alpha x_2 - \alpha x_3 = \alpha(x_1+2x_2-x_3) = 0$ (A) $\Big| \Rightarrow \alpha x \in S_4$

$\Rightarrow S_4$ subspațiu vectorial în $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$

$S_5 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x_1| < 1\}$

$x+y = (x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)$

$\left.\begin{array}{l} -1 < x_1 < 1 \\ -1 < y_1 < 1 \end{array}\right| \Rightarrow -2 < x_1+y_1 < 2 \Rightarrow x_1+y_1 < |2| \Rightarrow x_1+y_1 \notin S_5$

$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)$

~~$|x_1|$~~ $-1 < x_1 < 1 \,/\, \alpha$

$-\alpha < \alpha x_1 < \alpha \Rightarrow |\alpha x_1| < \alpha \Rightarrow \alpha x_1 \notin S_5$

$\Rightarrow S_5$ nu este subspațiu vectorial în $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$

<u>Ex 2</u> Ar. că S este subspațiu vectorial în K^n/K

$S = \{x \in K^n \mid A \cdot x = 0_m\}$, $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$, K corp comutativ

$x+y = (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n)$

$A \cdot (x+y) = A \cdot x + A \cdot y = 0_m + 0_m = 0_m \Rightarrow x+y \in S$
(K corp)

$\alpha \cdot x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$

$A \cdot (\alpha \cdot x) = (A \cdot \alpha) \cdot x = \alpha (A \cdot x) = \alpha \cdot O_m = O_m \Rightarrow \alpha x \in S$

$\Rightarrow S$ subspațiu vectorial în K^n / K

Ex 3 a) Ar. că $S_1 \cap S_2$ subsp. vect în V/K; b) Ar că $S_1 \cup S_2$ subsp vect. $\Leftrightarrow (S_1 \subset S_2)$ sau $(S_2 \subset S_1)$

a) $x \in S_1 \cap S_2 \Rightarrow x \in S_1$ și $x \in S_2$
$y \in S_1 \cap S_2 \Rightarrow y \in S_1$ și $y \in S_2$ $\Big| \Rightarrow x+y \in S_1$ și $x+y \in S_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x+y \in S_1 \cap S_2$

$x \in S_1 \cap S_2 \Rightarrow x \in S_1$ și $x \in S_2 \Rightarrow \alpha x \in S_1$ și $\alpha x \in S_2 \Rightarrow \alpha x \in S_1 \cap S_2$

$\Rightarrow S_1 \cap S_2$ subspațiu vectorial în V/K

b) „$\Leftarrow$": $S_1 \subset S_2 \Rightarrow S_1 \cup S_2 = S_2 =$ sp. vect.
$S_2 \subset S_1 \Rightarrow S_1 \cup S_2 = S_1 =$ sp. vect

„$\Rightarrow$" $S_1 \cup S_2 =$ subspațiu vectorial

Pres. că $S_1 \not\subset S_2$ și $S_2 \not\subset S_1$

Fie $x \in S_1$ și $y \in S_2$, $x \notin S_2$, $y \notin S_1$

$x+y \in S_1 \cup S_2$

dacă $x+y \in S_1 \Rightarrow y \in S_1$ FALS

dacă $x+y \in S_2 \Rightarrow x \in S_2$ FALS

$\Rightarrow$ Presupunerea a fost falsă

Deci $S_1 \subset S_2$ sau $S_2 \subset S_1$

Ex 4 Ar. că $Sp_{\mathbb{R}}\{u_1\}=\{x\in\mathbb{R}^3 \mid \frac{x_1}{1}=\frac{-x_2}{1}=\frac{x_3}{2}\}$ şi că $Sp_{\mathbb{R}}\{u_1;u_2\}=\{x\in\mathbb{R}^3 \mid x_1-x_2-x_3=0\}$

$u_1=(2,-2,4)$, $\quad u_2=(1,1,0)$

$Sp_{\mathbb{R}}\{u_1\}=\{x\in\mathbb{R}^3 \mid x_1=2\lambda,\ x_2=-2\lambda,\ x_3=-4\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R}\}=$

$=\{x\in\mathbb{R}^3 \mid \lambda=\frac{x_1}{2};\ \lambda=-\frac{x_2}{2},\ \lambda=\frac{x_3}{4}\}=$

$=\{x\in\mathbb{R}^3 \mid \frac{x_1}{1}=-\frac{x_2}{1}=\frac{x_3}{2}\}$

$x\in Sp_{\mathbb{R}}\{u_1,u_2\}\Rightarrow x=\lambda u_1+\beta u_2$

$$\begin{cases} x_1=2\lambda+\beta \\ x_2=-2\lambda+\beta \\ x_3=4\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1-x_2=4\lambda \\ x_3=4\lambda \\ \beta\in\mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x_1-x_2=x_3$$

$\Rightarrow Sp_{\mathbb{R}}\{u_1,u_2\}=\{x\in\mathbb{R}^3 \mid x_1-x_2-x_3=0\}$

Ex 5 $u_1=(0,1,1);\ u_2=(1,0,1),\ u_3=(1,1,0),\ u_4=(-1,2,1)$. Det. $Sp_{\mathbb{R}}\{u_1;u_2;u_3\}$ şi $Sp_{\mathbb{R}}\{u_1;u_2;u_4\}$

$\frac{1}{2}(u_1+u_2+u_3)=(1,1,1)\in Sp_{\mathbb{R}}\{u_1,u_2;u_3\}$

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow (1,1,1)-u_1&=e_1\in Sp_{\mathbb{R}}\{u_1;u_2;u_3\} \\ (1,1,1)-u_2&=e_2\in Sp_{\mathbb{R}}\{u_1;u_2;u_3\} \\ (1,1,1)-u_3&=e_3\in Sp_{\mathbb{R}}\{u_1;u_2;u_3\} \end{aligned}\right| \Rightarrow Sp_{\mathbb{R}}\{u_1;u_2;u_3\}=\mathbb{R}^3$$

$u_4=u_1+u_1-u_2\Rightarrow Sp_{\mathbb{R}}\{u_1;u_2;u_4\}=Sp_{\mathbb{R}}\{u_1;u_2\}$

$x\in Sp_{\mathbb{R}}\{u_1,u_2\}\Leftrightarrow x_1=b;\ x_2=a;\ x_3=a+b\Leftrightarrow Sp_{\mathbb{R}}=\{x\in\mathbb{R}^3 \mid x_1+x_2=x_3\}$

Seminar 5

Ex 1

În K^n/K, K fiind un corp, pt $i \in \overline{1,n}$ notăm cu $e_i = (0, \ldots, \underset{i}{1}, \ldots, 0)$

Ar. că $\{e_1, \ldots, e_n\}$ este bază în K^n/K (o vom numi bază canonică a lui K^n/K)

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n \in K$ a.î. $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot e_i = 0_{K^n}$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (0, 0, \ldots, 0)$$

$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0 \Rightarrow \{e_1; \ldots; e_n\}$ liniar independent ①

$v \in K^n \Rightarrow v = (x_1, \ldots, x_n) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n, \ \forall v \in K^n$

$\Rightarrow \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ sistem de generatori ②

Din ① și ② $\Rightarrow \{e_1, \ldots e_n\}$ bază în K^n/K

Ex 2

Găsiți câte o bază în $\mathcal{M}_{m,n}(K)$, $K_n[X] = \{f \in K[X] \mid$ gr. lui f fiind $\leq n\}$

~~$f \in K_n[X] \Rightarrow f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}$~~

~~Deci avem vectorul $(a_0, a_1, \ldots a_{n-1})$ pt care avem baza $(e_1, \ldots, e_n)$~~

~~pt $\forall n \in \mathbb{N}$~~

~~Deci un~~ Fie $E_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots 1 \cdots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \; i,j$

Bază: $\{E_{11}, E_{21}, \dots, E_{m,n}\}$ pt $M_{m,n}$

$\alpha_{11} E_{11} + \alpha_{12} E_{12} + \dots + \alpha_{mn} E_{mn} = O_{mn}$

$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} = O_n \Rightarrow \alpha_{11} = \alpha_{12} = \dots = \alpha_{mn} = 0 \Rightarrow$ S.L.I (1)

Dacă $X \in M_{m,n}(K)$: $X = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \\ x_{m1} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}$, $x_{11} \dots x_{mn} \in K$

$\Rightarrow X = x_{11} \cdot E_{11} + x_{12} \cdot E_{12} + \dots + x_{mn} \cdot E_{m,n} \quad \forall X \in M_{m,n}(K)$

$\Rightarrow$ S.G (2)

din (1), (2) $\Rightarrow \{E_{11}, E_{21}, \dots, E_{mn}\}$ bază pt M_{mn}

$K_n[X]$

$\{1, x, \dots, x^n\}$ bază pt $K_n[X]$

$\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot x + \dots + \alpha_n \cdot x^n = 0 \quad \forall x \in K \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$

$\Rightarrow$ SLI (1)

$f \in K_n[X] \Rightarrow f = \alpha \cdot 1 + \alpha_2 x + \dots + \alpha_n x^n \quad \forall f \in K_n[X]$

$\Rightarrow$ SG (2)

din (1), (2) $\Rightarrow \{1; x; \dots; x^n\}$ bază pt $K_n[X]$