Enunţuri:

1. Fie operatorii liniari definiţi de matricele

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -5 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \\ 3 & 15 & 12 \end{pmatrix}$$

Determinaţi valorile proprii şi cîte o bază în subspaţiile proprii corespunzătoare.

2. Fie polinomul $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$ şi fie matricea

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix},$$

numită matricea companion a lui $P(X)$.

   (a) Scrieţi matricea companion a lui $P(X) = X^3 + 2X^2 - 5X + 1$;

   (b) Demonstraţi că polinomul caracteristic al lui C_P este chiar $P(X)$.

3. Determinaţi o matrice A cu valorile proprii 1 şi 3 şi vectorii proprii $(1, 2)$, respectiv $(1, 1)$. Este A unică?

4. Fie şirul lui Fibonacci $x_0 = 0, x_1 = 1$ şi $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$.

   (a) Determinaţi o matrice A astfel încît

$$\begin{pmatrix} x_{n+2} \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix};$$

   (b) Diagonalizaţi pe A şi determinaţi A^n;

   (c) Determinaţi o formulă pentru x_n;

   (d) Arătaţi că vectorul $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}, 1 \right)$ tinde la un vector propriu al lui A. Este o întîmplare?

5. (Bonus) Fie $V = \left\{ \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \,|\, x_n \in \mathbb{C} \text{ şi } \sum |x_n|^2 < \infty \right\}$. Fie operatorii $T : V \to V$, $T_1(\{x_0, x_1, \dots\}) = \{x_1, x_2 \dots, \}$ arătaţi că orice $\lambda \in \mathbb{C}$ cu $|\lambda| < 1$ este valoare proprie al lui T_1.

Dacă trimiteţi rezolvările pe e-mail veţi primi feed-back. Pentru întrebări folosiţi Zulip, streamul Algebra si Geometrie/131 (va trebui să faceţi un cont în prealabil).