Enunţuri:

1. Fie V un spaţiu euclidian şi $L \subset V$. Să se arate
   (a) $(L^{\perp})^{\perp} = L$;
   (b) Dacă $L_1 \subset L_2$, atunci $L_2^{\perp} \subset L_1^{\perp}$;
   (c) $(L_1 + L_2)^{\perp} = L_1^{\perp} \cap L_2^{\perp}$;
   (d) $(L_1 \cap L_2)^{\perp} = L_1^{\perp} + L_2^{\perp}$.
2. (a) Fie $V \subset \mathbb{R}^3$, $V = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 | x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\right\}$. Determinaţi o bază în $V^{\perp}$.
   (b) Aceeaşi întrebare pentru $V = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 | x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, x_2 - x_3 = 0\right\}$
3. Să se scrie vectorul f ca suma dintre unul din spaţiul generat de vectorii b_i şi unul din complementul ortogonal al acestuia, unde:
$$f = (5, 2, -2, 2), b_1 = (2, 1, 1, -1), b_2 = (1, 1, 3, 0)$$
$$f = (-3, 5, 9, 3), b_1 = (1, 1, 1, 1), b_2 = (2, -1, 1, 1), b_3 = (2, -7, -1, -1)$$
4. Determinaţi o bază ortonormată în subspaţiul lui $\mathbb{R}^4$ generat de vectorii $(1, 1, 1, 2)$, $(2, 1, 1, 1)$, respectiv $(1, 2, 1, 0)$.
5. (Temă bonus). Fie $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ vectori într-un spaţiu euclidian. Fie
$$G(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) = \begin{vmatrix} \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 & \ldots & \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_n \\ \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_2 & \ldots & \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbf{x}_n \cdot \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_n \cdot \mathbf{x}_2 & \ldots & \mathbf{x}_n \cdot \mathbf{x}_n \end{vmatrix}.$$
   Arătaţi că $0 \leq G(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) \leq ||\mathbf{x}_1||^2 \ldots ||\mathbf{x}_n||^2$. Mai mult $G(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) = 0$ dacă şi numai dacă vectorii sînt liniar-dependenţi şi $G(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) = ||\mathbf{x}_1||^2 \ldots ||\mathbf{x}_n||^2$ dacă şi numai dacă vectorii sînt ortogonali.
6. Fie aplicaţiile liniarea induse de matricele:
$$P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -5 & -3\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & -1 & 6 \\ -2\sqrt{3} & 6 & 4 \end{pmatrix}$$
   (a) Să se arate că P şi A definesc rotaţii ale spaţiului.
   (b) Pentru fiecare determinaţi axa şi unghiul de rotaţie.
7. Fie planul $\Pi : x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$.
   (a) Să se determine proiecţia ortogonală faţă de Π.
   (b) Să se determi rotaţia de unghi $\frac{\pi}{3}$ şi axa $\Pi^{\perp}$.
8. (Temă bonus)
   (a) Să se determine matricele $R_x(\alpha), R_y(\alpha), R_z(\alpha)$ ale rotaţiilor de unghi α în jurul axelor Ox, Oy, respectiv Oz.
   (b) Să se arate că orice rotaţie A se scrie ca un produs $A = R_x(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma)$.
   (c) Pentru rotaţiile de la ex.6 determinaţi descompunerea.

Seminarul se va desfăşura pe 8x8 cu chat pe Zulip.

Corectură ex. 4.: Avem $\mathbf{f}_1 = (1, 1, 1, 2), \mathbf{f}_2 = (8, 1, 1, -5)$.$\mathbf{f}_3 = a\mathbf{f}_1 + b\mathbf{f}_2 + \mathbf{e}_3$. Din $0 = \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_3$ rezultă $a = -\frac{4}{7}$. Din $\mathbf{f}_3 \cdot \mathbf{f}_2 = 0$ rezultă $b = -\frac{11}{91}$. Deci $\mathbf{f}_3 = \frac{1}{91}\left(-4(13, 13, 13, 26) - 11(8, 1, 1, -5) + (91, 182, 91, 0)\right)$. Deci putem lua $\mathbf{f}_3 = (-49, 119, 28, -49)$.În final împărţim fiecare vector la norma sa şi obţinem:

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{7}}(1, 1, 1, 2), \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{91}}(8, 1, 1, -5), \mathbf{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{19747}}(-49, 119, 28, -49)$$