## Tutoriat V

Seminar 09.04.20
grupa 131
Seria 13

1. Fie operatorii liniari definiți de matricile:

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -5 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \\ 3 & 15 & 12 \end{pmatrix}$$

Determinați valorile proprii și câte o bază în subspațiile proprii corespunzătoare.

Rezolvare:

operator liniar <=> aplicație liniară <=> morfism de spații vectoriale <=> transformare liniară

$$[f]_{R_0,R_0} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix} = A$$

$$\Rightarrow f(x_1, x_2, x_3) = (4x_1 - 4x_2 + 2x_3, 2x_1 - 2x_2 + x_3, -4x_1 + 4x_2 - 2x_3)$$

Determinăm valorile proprii:

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -4 & 2 \\ 2 & -2-\lambda & 1 \\ -4 & 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (4-\lambda)(-2-\lambda)(-2-\lambda) + 16 + 16 + 8(-2-\lambda) - 4(4-\lambda) + 8(-2-\lambda) = (4-\lambda)(4+4\lambda+\lambda^2) + \cancel{32} - \cancel{32} - 16\lambda - 16 + 4\lambda = \cancel{16} - \cancel{4\lambda} + \cancel{16\lambda} - \cancel{4\lambda^2} + \cancel{4\lambda^2} - \lambda^3 - \cancel{16\lambda} + \cancel{4\lambda} - \cancel{16} =$$

$$= -\lambda^3$$

$$\lambda_1 = 0, \quad m_1 = 3$$

Subspațiul propriu:

$$V_{\lambda_1} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) = 0\} = \operatorname{Ker} f$$

$$\begin{cases} 4x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ -4x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x_3 = -2x_1 + 2x_2$

$V_{\lambda_1} = \{(x_1, x_2, -2x_1 + 2x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} = \{x_1(1, 0, -2) + x_2(0, 1, 2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$

$R = \{(0, 1, 2), (1, 0, -2)\}$ SG pentru $V_{\lambda_1}$

$rg\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow R$ este SLI

$\Rightarrow R$ este reper în $V_{\lambda_1}$.

Ex2: Fie polinomul $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$ și fie matricea

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

numită matricea companion a lui $P(X)$.

a) Scrieți matricea companion a lui $P(X) = X^3 + 2X^2 - 5X + 1$

b) Demonstrați că polinomul caracteristic al lui $C_P$ este chiar $P(X)$.

Rezolvare:

a) $C_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

b) Polinomul caracteristic (înlocuind $\lambda$ cu $x$):

$P(x) = (-1)^3 \det(C_P - x I_3) = (-1)\begin{vmatrix} -x & 0 & -1 \\ 1 & -x & 5 \\ 0 & 1 & -2-x \end{vmatrix} =$

$= (-1)(x^2(-2-x)-1+5x) = (-1)(-2x^2-x^3-1+5x) =$

$= \underbrace{x^3+2x^2-5x+1}_{P(X)}$ c.c.t.d. Polinomul caracteristic:

Obs: $P(x) = (-1)^n \det(A - xI_n)$

Ex 3: Determinați o matrice $A$ cu valorile proprii 1 și 3 și vectorii proprii $(1,2)$, respectiv $(1,1)$. Este $A$ unică?

Rezolvare:

Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$(x_1, x_2) = (1,2)$

$\begin{cases} (a-1)x_1 + bx_2 = 0 \\ cx_1 + (d-1)x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-1+2b=0 \\ c+2(d-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-1+2b=0 \\ c+2d-2=0 \end{cases}$

$(x_1, x_2) = (1,1)$

$\begin{cases} (a-3)x_1 + bx_2 = 0 \\ cx_1 + (d-3)x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-3+b=0 \\ c+d-3=0 \end{cases}$

$\begin{cases} a+2b=1 \\ c+2d=2 \\ a+b=3 \\ c+d=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2 \\ a=5 \\ d=-1 \\ c=4 \end{cases}$

$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

Ex 4: Fie șirul lui Fibonacci $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ și $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$

a) Determinați o matrice $A$, a.î.:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix}$$

b) Diagonalizați pe $A$ și determinați $A^n$.

c) determinați o formulă pentru $x_n$

d) Arătați că vectorul $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}, 1\right)$ tinde la un vector propriu a lui $A$. Este o întâmplare?

Rezolvare:

Notăm: $x_{n+1} = x$

$x_n = y$

$x_{n+2} = x + y$

Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ (conform produsului dintre matrici, $A$ trebuie să fie de forma $2\times 2$).

$\Downarrow$

$$\begin{pmatrix} x+y \\ x \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ax + by = x + y \\ cx + dy = x \end{cases}$$

(Trebuie să găsim orice matrice $A$ care să îndeplinească aceste condiții, am optat pentru matricea evidentă)

$\Downarrow$

$$\begin{matrix} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 1 \\ d = 0 \end{matrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Diagonalizăm $A$:

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda) - 1 =$$

$$= -\lambda + \lambda^2 - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1$$

$\Delta = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 5$

$\lambda_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \qquad m_1 = 1$

$\lambda_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad m_2 = 1$

$V_{\lambda_1} = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} x \}$

$1 - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

$$\begin{cases} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_2 = -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} x_1$$

$\dim V_{\lambda_1} = 2 - \operatorname{rang} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} = 2 - 1 = 1 =$

$= m_1$ ✓

$V_{\lambda_1} = \{ (x_1, -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} x_1) \mid x_1 \in \mathbb{R} \} = \{ x_1 (1, -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}) \mid x_1 \in \mathbb{R} \}$

$R_1 = \{ (1, -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}) \}$ e SG și SLI $\Rightarrow$ reper în $V_{\lambda_1}$

$V_{\lambda_2} = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} x \}$

$1 - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

$$\begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_2 = -\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} x_1$$

$\dim V_{\lambda_2} = 2 - \operatorname{rang} \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} = 2 - 1 = 1 = m_2$

$V_{\lambda_2} = \{ (x_1, -\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} x_1) \mid x_1 \in \mathbb{R} \} = \{ x_1 (1, -\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}) \mid x_1 \in \mathbb{R} \}$

$R_2 = \{ (1, -\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}) \}$ e SG și SLI $\Rightarrow$ reper în $V_{\lambda_2}$.

Aflăm $A^n$:

Teorema Hamilton-Cayley:

$$A^n - \sigma_1 A^{n-1} + \ldots + (-1)^n \sigma_n I_n = O_n$$

$\sigma_1(A) = Tr(A) = 1$

$\sigma_2(A) = \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$

$\left.\begin{array}{l} \sigma_3(A) = 0 \\ \sigma_4(A) = 0 \\ \vdots \\ \sigma_n(A) = 0 \end{array}\right\}$ fiindcă $A$ e $2 \times 2$.

pentru $A^2$ avem: $A^2 - \sigma_1 A + \sigma_2 I_2 = 0$

pentru $A^3$ : $A^3 - \sigma_1 A^2 + \sigma_2 A - \sigma_3 I_2 = 0$.

$\Updownarrow$

$$A^3 - \sigma_1 A^2 + \sigma_2 A = 0$$

$\Rightarrow$ pentru $\forall n \geq 3$:

$$A^n - \sigma_1 A^{n-1} + \sigma_2 A^{n-2} = O_n$$

1) $A^2 = \sigma_1 A - \sigma_2 I_2 = A + I_2$

2) $A^n = \sigma_1 A^{n-1} - \sigma_2 A^{n-2} = A^{n-1} + A^{n-2}$

Obținem: $A^n = \begin{cases} A + I_2, & n = 2 \\ A, & n = 1 \\ A^{n-1} + A^{n-2}, & n \geq 3 \end{cases}$

c) $x_n = x_{n-1} + x_{n-2} = x_{n+2} - x_{n+1}$.

d) Dem că:

$\exists\, \alpha \in \mathbb{R}$, a.î. $\alpha\left(\frac{x_n + x_{n-1}}{x_n}, 1\right) = \left(1, -\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

$\alpha = -\frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \frac{x_n + x_{n-1}}{x_n} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x_n + x_{n-1}}{x_n} = \underbrace{\frac{2}{\sqrt{5}-1}}_{\approx 1,61}$

$\Rightarrow \frac{x_n + x_{n-1}}{x_n} \simeq 1,61 \Leftrightarrow 1 + \frac{x_{n-1}}{x_n} \simeq 1,61 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x_{n-1}}{x_n} \simeq 0,61$

Considerăm șirul lui Fibonacci:

$0, 1, 1, 2, \boxed{3, 5}, 8, 13, \ldots$

$\frac{3}{5} = 0,6$

Seria 14

Ex 1: $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$f(x) = (x_1 + 2x_2 + x_3,\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3,\ -3x_1 - 4x_2 - 4x_3)$

a) f liniară

b) Im f, Ker f

c) Precizați câte un reper în Im f, Ker f.

Rezolvare:

$f(x) = y \Leftrightarrow Y = AX \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 \\ -3x_1 - 4x_2 - 4x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ -3 & -7 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$[f]_{R_0, R_0} = A$

$f(e_1) = e_1 + 2e_2 - 3e_3$
$f(e_2) = 2e_1 + 5e_2 - 7e_3$
$f(e_3) = e_1 + 3e_2 - 4e_3$

b) $\operatorname{Ker} f = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) = 0_{\mathbb{R}^3} \}$

$AX = 0$

$\det A = 0$, $\operatorname{rg} A = 2$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{matrix}} & \begin{matrix} -1 \\ 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} -3 & -7 \end{matrix} & -4 \end{pmatrix}$$

minorul

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \mid \cdot 3 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$$

$\operatorname{Ker} f = \{ (x_3, -x_3, x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R} \} = \{ x_3(1, -1, 1) \mid x_3 \in \mathbb{R} \}$
$R_1 = \{(1, -1, 1)\}$ SG pentru $\operatorname{Ker} f$ și SLI $\Rightarrow R_1$ este reper pentru $\operatorname{Ker} f$

b-c) T. dimensiunii: $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$.
$\Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = 2$.

Extindem $R_1$ la un reper $R$ în $\mathbb{R}^3$:
$R = \{(1, -1, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 \text{ (maxim)} \overset{CLI}{\Rightarrow} R \text{ e SLI} \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\dim \mathbb{R}^3 = 3 = |R|$$

$\Rightarrow R$ este reper în $\mathbb{R}^3$

$\Rightarrow R_2 = \{f(1,0,0), f(0,1,0)\}$ este reper în $\operatorname{Im} f$

$R_2 = \{(1,2,-3), (2,5,-7)\}$

$\Rightarrow \operatorname{Im} f = \langle\{(1,2,-3),(2,5,-7)\}\rangle$

$\operatorname{Im} f = \{a(1,2,-3) + b(2,5,-7) \mid a, b \in \mathbb{R}\} =$

$= \{(a+2b, 2a+5b, -3a-7b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

$$\begin{cases} a+2b = x_1 \\ 2a+5b = x_2 \\ -3a-7b = x_3 \end{cases} \Rightarrow M = \left(\begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{matrix}\right) \left| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} \right.$$

$\operatorname{rg} M = 2$

$$\Delta C = 0 \Leftrightarrow \Delta C = \begin{vmatrix} 1 & 2 & x_1 \\ 2 & 5 & x_2 \\ -3 & -7 & x_3 \end{vmatrix} = x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x_1 = -x_2 - x_3$$

$\operatorname{Im} f = \{(-x_2 - x_3, x_2, x_3) \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} =$

$= \{x_2(-1,1,0) + x_3(-1,0,1) \mid x_3, x_2 \in \mathbb{R}\}.$

$M_{II}$ $\operatorname{Im} f = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid \exists x \in \mathbb{R}^3$ a.î. $f(x) = y\}$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = y_1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = y_2 \\ -3x_1 - 7x_2 - 4x_3 = y_3 \end{cases} \Rightarrow A = \left(\begin{matrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} -3 & -7 \end{matrix} & -4 \end{matrix}\right) \left| \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{matrix} \right.$$

$rg(A) = rg(\bar{A}) = 2$, sistem compatibil.

$$\Rightarrow \Delta_c = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & y_1 \\ 2 & 5 & y_2 \\ -3 & -7 & y_3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 = 0$$

$$y_1 = -y_2 - y_3$$

$$Im f = \{(-y_2 - y_3, y_2, y_3) \mid y_2, y_3 \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{y_2(-1, 1, 0) + y_2(-1, 0, 1) \mid y_2, y_3 \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \langle \{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\} \rangle$$

$R_2 = \{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$ reper în $Im f$.