

$(M_{n,n}(K), +, \cdot)_{/K}$  spații vectoriale;  
 $_{/K}$  spațiu vectorial

Fie  $(V, +, \cdot)_{/K}$ ,  $S \subseteq V$ .

$S$  s.n. sistem de generatori.  $(S.G.) \Leftrightarrow \langle S \rangle = V$  ie

$\forall x \in V, \exists x_1, \dots, x_n \in S, \exists a_1, \dots, a_n \in K$  aî  
 $x = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$

Fie  $(V, +, \cdot)_{/K}$  sp. vect.,  $S \subseteq V$ .

1)  $S$  este un SLI (sistem linear independent)  $\Leftrightarrow$

$\forall x_1, \dots, x_n \in S \wedge \forall a_1, \dots, a_n \in K$  aî  $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$   
 $= 0_V \Rightarrow a_1 = \dots = a_n = 0_K$

( $\forall$  combinație liniară ~~trivială~~ nulă este triviale)

2)  $S$  s.n. sistem linear dependent (SLD)  $\Leftrightarrow \exists x_1, \dots, x_n \in S$

și  $a_1, \dots, a_n \in K$  aî  $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0_V$   
nu toți nuli

$\forall \{x\}$  este un SLI

$\forall$  submulțime  $S'$  ale unui SLI este SLI

Ex 1:  $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)_{/\mathbb{R}}$ ,  $B \stackrel{\text{not}}{=} \{(1,0), (0,1)\}$  este SLI

Dem:

Fie  $a, b \in \mathbb{R}$  aî  $a(1,0) + b(0,1) = (0,0) \Leftrightarrow (a,b) = (0,0)$   
 $\Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$

$B$  ~~nu~~ este SLI |  $\Rightarrow B$  este bază în  $\mathbb{R}^2$ .  
 $B$  este SG

Ex 2: a)  $(\mathbb{R}_2[X], +, \cdot)_{/\mathbb{R}}$

$$P = a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \cdot 1$$

$\Rightarrow S = \{1, x, x^2\}$  este SG,  $\langle S \rangle = \mathbb{R}_2[X]$

b)  $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)_{/\mathbb{R}}$

$$S = \{(1,0), (0,1)\}, \langle S \rangle = \mathbb{R}^2$$

$$\text{Fie } (x_1, x_2) = (x_1, 0) + (0, x_2) = \underbrace{x_1}_{\in \mathbb{R}} (1,0) + \underbrace{x_2}_{\in \mathbb{R}} (0,1)$$

$\Rightarrow S$  este SG pentru  $\mathbb{R}^2$ ,  $\langle S \rangle = \mathbb{R}^2$ .

$$Ex 3: (\mathbb{R}^2, +, \cdot) / \mathbb{R}$$

$$S = \{(1, -1), (2, 0)\}$$

$$S' = \{(1, -1), (2, 0), (3, 1)\}$$

$$S'' = \{(a, 2), (3, -1)\}$$

a)  $S$  este bază

b)  $S'$  este SLD

c)  $a = ?$  și  $S''$  este SLI, respectiv SLD.

Rezolvare:

a) • Dem că  $S$  este SLI

$$[\forall a, b \in \mathbb{R} \text{ aî } a(1, -1) + b(2, 0) = (0, 0) \Rightarrow a = b = 0]$$

$$\Rightarrow (a + 2b, -a) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = 0 \\ -a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

• Dem că  $S$  este SG  $\Leftrightarrow [(\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \exists a, b \in \mathbb{R} \text{ aî } x = a(1, -1) + b(2, 0))]$   
 $\Rightarrow (x_1, x_2) = (a + 2b, -a) \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = x_1 \\ -a = x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \\ a = -x_2 \end{cases}$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det M \neq 0$$

$\Rightarrow (*)$  compatibil determinat  $\Rightarrow S$  este bază

Obs: B - bază

card  $B = n = \dim_{\mathbb{R}} V = \text{nr. maxim de vectori care}$

$(\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 = 2)$  formează SLI și nr. minim care formează SD.



b) Fie  $a, b, c \in \mathbb{R}$  aî  $a(1, -1) + b(2, 0) + c(3, 1) = (0, 0)$   
 $\Leftrightarrow (a, -a) + (2b, 0) + (3c, c) = (0, 0) \Leftrightarrow (a + 2b + 3c, -a + c) = (0, 0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b + 3c = 0 \\ -a + c = 0 \end{cases}$$

$$M = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

rang  $M = 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = -2c \\ a = c \end{cases}$$

$$(a, b, c) = (c, -2c, c), c \in \mathbb{R}$$

Luăm o valoare pentru  $c$ , fie  $c = 1$ , deci există valori pentru  $a, b, c \in \mathbb{R}$  aî acestea să fie nenule  
 și  $\forall x \in S', x = (0, 0) \Rightarrow S'$  este SLD.

c)  $(\forall) a, b \in \mathbb{R}$  aî  $a(\alpha, 2) + b(3, -1) = (0, 0) \Leftrightarrow$   
 $(\alpha a + 3b, 2a - b) = (0, 0)$

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

- $S'' = SLI \Leftrightarrow \det M \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq -6$  (sol. unică nulă)
- $S'' = SLD \Leftrightarrow \det M = 0 \Leftrightarrow \alpha = -6$

Ex 4.  $(\mathbb{R}_2[X], +, \cdot), \mathbb{R}$

$$\mathbb{R}_2[X] = \{ P \in \mathbb{R}[X] \mid \text{grad } P < 2 \}$$

a)  $B = \{ 1, x-2, (x-2)^2 \}$  basis in  $\mathbb{R}_2[X]$ .

b)  $B' = \{ f, f', f'' \}$  basis in  $\mathbb{R}_2[X]$

unde  $f = x^2 + x + 1$

Obs:  $B_0 = \{ 1, x, x^2 \}$  basis.

$$P = ax^2 + bx + c \equiv (a, b, c) \in \mathbb{R}^2$$

Rezolvare:

a)  $B$  este S.I.  $\Leftrightarrow \forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad a + b(x-2) + c(x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow cx^2 + x(b-4c) + (a-2b+4c) = 0$   
 $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} c = 0 \\ b - 4c = 0 \\ a - 2b + 4c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 0 \Rightarrow B \text{ este S.I.}$$

$B = S.G. \Leftrightarrow \forall P = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \exists a, b, c \in \mathbb{R} \text{ a.}$

$$P = a + b(x-2) + c(x-2)^2$$

$$P = cx^2 + x(b-4c) + (a-2b+4c) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = \alpha = x_1 \\ b - 4c = \beta = x_2 \\ a - 2b + 4c = \gamma = x_3 \end{cases} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$\det M \neq 0 \Rightarrow$  S.C. de sist. compatibil determinat  
 $\Rightarrow B$  este Baza S.G.  $\Rightarrow B$  este Baza

Dem că  $V$  este s.p.v. pentru  $(\mathbb{R}^2, +, \cdot) / \mathbb{R}$

$$V' = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1 - x_2 = 0 \}$$

$$\left. \begin{array}{l} (x_1, x_2) \\ (x_1', x_2') \end{array} \right\} \in V' \quad \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1' - x_2' = 0 \end{array}$$

$$(x_1, x_2) + (x_1', x_2') = (\underbrace{x_1 + x_1'}_{x_1''}, \underbrace{x_2 + x_2'}_{x_2''})$$

$$\begin{aligned} 2x_1'' - x_2'' &= 2(x_1 + x_1') - (x_2 + x_2') = \\ &= (2x_1 - x_2) + (2x_1' - x_2') = 0 \Rightarrow \text{încă, le adunăm} \end{aligned}$$

$$a \in \mathbb{R} \Rightarrow a(x_1, x_2) = (\underbrace{ax_1}_{y_1}, \underbrace{ax_2}_{y_2})$$

$$\begin{aligned} 2y_1 - y_2 &= 2ax_1 - ax_2 = a(2x_1 - x_2) = 0 \\ &\Rightarrow \text{încă, le înmulțim cu scalarul.} \end{aligned}$$

$\Rightarrow V'$  este s.p.v.