Enunţuri:

1. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.
   (a) Determinaţi dimensiunea subspaţiului $L = \left\{x \in \mathbb{R}^4 | Ax = 0\right\}$ şi o bază a acestuia;
   (b) Determinaţi o descompunere $\mathbb{R}^4 = L \oplus L_0$;
   (c) Descompuneţi vectorul $x = (1, 2, 1, 2)$ ca suma dintre un vector din L şi unul din L_0.

2. Fie aplicaţia liniară $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,
   $$T(x, y, z) = (-7x + 2y + 2z, -8x + 3y + 2z, -32x + 8y + 9z)\,.$$
   (a) Determinaţi matricea lui T în raport cu baza canonică;
   (b) Fie baza $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$, unde $v_1 = (1, 1, 4), v_2 = (1, 0, 4), v_3 = (0, 1, -1)$. Determinaţi matricea lui T în raport cu baza $\mathcal{B}$.

3. Fie aplicaţia liniară $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$,
   $$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2 + x_3 + x_4, 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4, x_1 - 2x_2 - 2x_4)\,.$$
   Determinaţi cîte o bază în $Ker(T)$ şi în $Im(T)$.

4. Fie V un spaţiu vectorial şi $L \subset V$ un subspaţiu. Fie
   $$Ann(L) := \{f \in V^* | f(x) = 0, \forall x \in L\}\,.$$
   (a) Dacă $dim(V) = n$ şi $dim(L) = m$ determinaţi $dim(Ann(L))$.
   (b) Dacă $V = \mathbb{R}^4$ (văzut ca spaţiul vectorilor coloană), V^* văzut ca spaţiul vectorilor linie şi $L = Span((1, 0, 1, 1), (-2, 1, 1, 0))$, determinaţi $Ann(L)$.

5. Fie $V^{**} := (V^*)^*$. Să se arate că există un izomorfism $\Phi : V^{**} \to V$ care nu depinde de alegerea unei baze.

Exerciţiile 4 şi 5 constituie temă bonus (contează la nota finală de seminar).
Indicaţii:

1. (a) Rezolvaţi sistemul şi găsiţi un sistem fundamental de soluţii;
   (b) Completaţi baza lui L la o bază a lui $\mathbb{R}^4$. Spaţiul L_0 este generat de vectorii adăugaţi.
   (c) Orice $x \in \mathbb{R}^4$ trebuie să se scrie ca $x = x_0 + x_1$ cu $x_0 \in L_0$ şi $x_1 \in L$. Observaţi că dacă aţi determinat unul dintre aceşti vectori (să zicem x_1 atunci $x_0 = x - x_1$). O metodă ar fi pornind de la observaţia că $Ax = Ax_0 + Ax_1$.

2. Aplicaţi definiţia în ambele cazuri. Sau la punctul b) folosiţi formula de schimbare a bazei pentru aplicaţii liniare. Se poate aplica şi metoda Gauss!

3. $Ker(T)$ se calculează cu definiţia. Pentru $Im(T)$ folosiţi faptul că un sistem de generatori in acesta este format de imaginea unui sistem de generatori din $\mathbb{R}^4$.

Dacă trimiteţi rezolvările pe e-mail veţi primi feed-back. Pentru întrebări folosiţi Zulip, streamul Algebra si Geometrie/131 (va trebui să faceţi un cont în prealabil).