Tutorial VI

Ex 1: $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x) = (x_1 + x_2,\ x_1 - x_2)$

$R_0 = \{e_1, e_2\}$ reperul canonic.

$R = \{e_1 + e_2,\ 2e_2\}$

a) $[f]_{R_0, R_0} = A = ?$

b) $[f]_{R, R} = A' = ?$

Rezolvare:

$R_0 = \{(1,0), (0,1)\}$

$R = \{(1,1), (0,2)\}$

$$[f]_{R_0, R_0} = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{tikzcd} R_0 \arrow[r, "A"] \arrow[d, "C"] & R_0 \arrow[d, "C"] \\ R \arrow[r, "A'"] & R \end{tikzcd} \qquad A' = C^{-1} A C$$

$$C = [f]_{R_0, R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ (matricea adjunctă)}$$

$$C^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A' = C^{-1} A C = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Ex2: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + 2x_2, x_1 + x_3, x_1 + 3x_2 - 2x_3)$

$V' = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$

$V'' = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 0\}$

a) f e liniară, dar nu e izomorfism de spații vect.

b) $f_{/V'}: V' \to V''$ este izomorfism de spații vect.

c) $f/V' \cap V'' = ?$

Rezolvare:

a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} = [f]_{R_0, R_0}$$

$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow f$ nu este bijectivă (1)

$f(x) = y \Leftrightarrow Y = AX \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_2 \\ x_1 + x_3 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow f$ e liniară (2)

f este izomorfism $\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ e liniară} \\ f \text{ e bijectivă} \end{cases} \Rightarrow f$ nu este bijectivă,

deci f nu este izomorfism.

b) $V': x_1 + x_2 = x_3$

$V' = \{(x_1, x_2, x_1 + x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$

$R' = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ SG pentru V'

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}} \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow R' \text{ este SLI}$$

$\Rightarrow R'$ este reper în V'

$f(R') = \{f(1,0,1), f(0,1,1)\}$

$f(1,0,1) = (2,2,-1) \in V''$

$f(0,1,1) = (2,1,1) \in V''$

$f(R') = R''$ reper în V''

$f(V') = V''$

$$\left.\begin{matrix} rg\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \\ \dim V'' = 2 = |R''| \end{matrix}\right\} \Rightarrow R'' \text{ reper în } V''$$

f/V' este izomorfism $\Leftrightarrow f/V'$-aplicație liniară bijectivă

$\Leftrightarrow \dim V' = \dim V''$

$$\left.\begin{matrix} \dim V' = |R'| = 2 \\ \dim V'' = |R''| = 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow f/V' \text{ este izomorfism.}$$

c) $V' \cap V'' : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = x_3 \\ 3x_1 - 4x_2 = 2x_3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x_1 - 3x_2 = -3x_3 \\ 3x_1 - 4x_2 = 2x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7x_2 = -x_3 \\ x_1 = x_3 - x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{1}{7}x_3 \\ x_1 = \frac{6}{7}x_3 \end{cases}$

$\Rightarrow V_1 \cap V_2 = \{(\frac{6}{7}x_3, \frac{1}{7}x_3, x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R}\} =$

$= \{\frac{x_3}{7}(6, 1, 7) \mid x_3 \in \mathbb{R}\}$

$\{(6, 1, 7)\}$ reper în $V' \cap V''$

$f(6, 1, 7) = (14, 13, -5)$

$f(V' \cap V'') = \underbrace{< \{(14, 13, -5)\} >}_{\overset{not.}{=} W}$

Ex3: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, R_0 reper canonic în $\mathbb{R}^3$.

$[f]_{R_0, R_0} = A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

$u = (1, -1, 2)$

$R = \{ v_1 = e_1 + e_2, \ v_2 = e_2 + e_3, \ v_3 = e_1 + e_2 + e_3 \}$

a) v_1, v_2, v_3 sunt vectori proprii ai lui f.
Precizați valorile proprii corespunzătoare.

b) R este un reper. Determinați coord. lui u și lui $f(u)$ în raport cu R. Ce legătură există între acestea?

Rezolvare:

$f(x) = y \Leftrightarrow Y = AX$

$R = \{ v_1 = (1, 1, 0), \ v_2 = (0, 1, 1), \ v_3 = (1, 1, 1) \}$.

$f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, 2x_1 - 2x_2 + 3x_3)$

$f(v_1) = f(1, 1, 0) = (2, 2, 0) = 2(1, 1, 0) = 2 v_1$

legătura

$\Updownarrow$

$f(v_1) = 2 v_1 \Leftrightarrow \lambda_1 = 2.$

$f(v_2) = f(0, 1, 1) = (0, 1, 1) = 1 v_2 \Rightarrow \lambda_2 = 1.$

$f(v_3) = f(1,1,1) = (3,3,3) = 3(1,1,1) = 3v_3 \Rightarrow \lambda_3 = 3$

$$[f]_{R,R} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

b) $rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow R$ este reper.

$u = av_1 + bv_2 + cv_3 = a(1,1,0) + b(0,1,1) + c(1,1,1) =$
$= (a+c, a+b+c, b+c) \Leftrightarrow (1,-1,2) = (a+c, a+b+c,$
$b+c)$

$$\begin{cases} a+c = 1 \\ a+b+c = -1 \\ b+c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -2 \\ c = 4 \end{cases}$$

$(-3,-2,4)$ sunt coordonatele lui u în raport cu R

$\left.\begin{array}{l} f(u) = f(av_1 + bv_2 + cv_3) \\ f \text{ e aplicație liniară} \end{array}\right\} \Rightarrow f(u) = af(v_1) + bf(v_2) +$
$+ cf(v_3)$

$\left.\begin{array}{l} f(v_1) = 2v_1 \\ f(v_2) = 1v_2 \\ f(v_3) = 3v_3 \end{array}\right\} \Rightarrow f(u) = 2av_1 + bv_2 + 3cv_3$

coordonatele lui $f(u)$ în raport cu R sunt
$(2a, b, 3c) = (-6, -2, 12)$.

Forme biliniare
Forme pătratice

$(V, +, \cdot) / \mathbb{K}$ sp. vect.

Def: $g : V \times V \to \mathbb{K}$ s.n. formă biliniară $\Leftrightarrow$

1) $g(\alpha x + \beta y, z) = \alpha g(x, z) + \beta g(y, z)$

2) $g(x, \alpha y + \beta z) = \alpha g(x, y) + \beta g(x, z)$

$\forall x, y, z \in V;\ \alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

g s.n. formă biliniară simetrică $\Leftrightarrow g(x,y) = g(y,x)$

și antisimetrică $\Leftrightarrow g(x,y) = -g(y,x)$

$\forall x, y \in V$.

Notăm $L(V, V; \mathbb{K})$ mulțimea formelor biliniare de tipul $V \times V \to \mathbb{K}$.

Dacă $g : V \times V \to \mathbb{K}$ este liniară într-un argument și simetrică (sau antisimetrică), atunci g este biliniară.

$g(x, y) = X^T G Y$, G - matricea asociată lui $g(x, y)$

$$\Downarrow$$

$$(x_1 \dots x_n) \begin{pmatrix} g_{11} & \dots & g_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{n1} & \dots & g_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = g(x, y)$$

Obs: g simetrică $\Leftrightarrow G = G^T$ (G este simetrică)

g antisimetrică $\Leftrightarrow G = -G^T$ (G este antisimetrică).

Modificarea matricei la schimbarea reperului

$$R_0=\{e_1,\dots e_n\} \xrightarrow{A} R'=\{e'_1,\dots e'_n\}$$

$$\begin{array}{ccc} R_0=\{e_1,\dots e_n\} & \xrightarrow{A} & R'=\{e'_1,\dots e'_n\} \\ \downarrow G & & \downarrow G' \\ R_0=\{e_1,\dots e_n\} & \xrightarrow{A} & R'=\{e'_1,\dots e'_n\} \end{array}$$

G este matricea asociată formei biliniare $g(x,y)$.

$$\boxed{G' = A^T G A}$$

Def: $g \in L^s(V, V; K)$ (s - simetric)

$\operatorname{Ker} g = \{x \in V \mid g(x,y) = 0\}$ $\forall y \in V$

g s.n. formă nedegenerată $\Leftrightarrow$ 1) $\operatorname{Ker} g = \{0_V\}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ 2) $\det G \neq 0$

Def: $Q: V \to \mathbb{K}$ s.n. formă pătratică $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists\, g \in L^s(V; V; \mathbb{K})$ a.î. $g(x,x) = Q(x)$, $\forall x \in V$.

Prop: $\exists$ o corespondență bijectivă între mulțimea formelor biliniare simetrice și mulțimea formelor pătratice.

$g(x, x) = Q(x) = X^T G X$

Ex 1: $g: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1$

a) fie $Q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ formă pătratică. Scrieți varianta în $Q(x) = g(x,x)$.

Rezolvare:

$Q(x) = g(x,x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1 x_2$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad g(x,x) = X^T G X.$$

Forma canonică pentru $Q(x)$:

$Q(x) = a_1 x_1^2 + \dots + a_n x_n^2$.

Teorema lui Gauss:

Fie $Q: V \to \mathbb{R}$ forma pătratică.

$\Rightarrow \exists$ un reper în V a.î. Q are formă canonică.

Def: $Q: V \to \mathbb{R}$ forma pătratică reală.

$Q(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2$; $r = \mathrm{rg}\, Q$, s.n. forma normală a lui Q.

Teoremă: $Q: V \to \mathbb{R}$ formă pătratică reală.

$\Rightarrow \exists$ un reper în V a.î. Q are formă normală.

Teorema de inerție Sylvester:

Nr de „+" și nr de „−" din forma normală a lui Q reprezintă un invariant, $Q: V \to \mathbb{R}$ forma pătratică reală.

$(p, r-p)$ s.n. signatura lui Q.

p = nr de „+"

$r-p$ = nr de „−"

Def:

• $Q: V \to \mathbb{R}$ forma pătratică reală.

Q s.n. pozitiv definită $\Leftrightarrow$

1) $Q(x) > 0, \forall x \in V \setminus \{0_V\}$
2) $Q(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_V$.
($sgn(Q) = (n, 0)$ sau $sgn(Q) = (0, 0)$)

• $g : V \times V \to \mathbb{R}$ formă biliniară simetrică s. n. pozitiv definită $\Leftrightarrow$ Q este formă pătratică reală asociată lui g și pozitiv definită.

Prop: Fie $g \in L^s(V, V; \mathbb{K})$. Dacă g este pozitiv definită atunci g este nedegenerată.

Metoda Jacobi de aducere la formă canonică a unei forme pătratice reale.

Teoremă: $Q : V \to \mathbb{R}$ formă pătratică reală. Dacă matricea asociată lui Q în raport cu un reper $R = \{e_1, \dots e_n\}$ în V are proprietatea

$$\Delta_1 = |g_{11}|, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \Delta_n = \det(G).$$

($\Delta_1 \neq 0, \dots \Delta_n \neq 0$ - minori diagonali principali ai lui G), atunci $\exists$ un reper $R' = \{e_1', \dots e_n'\}$ în V a.î. Q are forma canonică $Q(x) = \frac{1}{\Delta_1} x_1'^2 +$

$$+ \frac{\Delta_1}{\Delta_2} x_2'^2 + \dots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} x_n'^2.$$

Obs: a) Metoda Gauss poate fi aplicată pe toate cazurile
b) Metoda Jacobi poate fi aplicată numai dacă minorii $\Delta_1, \dots \Delta_n \neq 0$.

Teoremă (criteriul Sylvester):

$Q: V \to \mathbb{R}$ formă pătratică reală.

Fie R un reper în V a.î. $\Delta_1, \dots \Delta_n$ sunt minorii principali diagonali asociați matricei G a lui Q.

$\Rightarrow Q$ este pozitiv definită $\Leftrightarrow \Delta_i > 0, \forall i = \overline{1,n}$.