Enunţuri:

1. Fie vectorii $v_1 = (1,1,3), v_2 = (2,1,0), v_3 = (4,3,1), v_4 = (3,2,1) \in \mathbb{R}^3$.
   (a) Formează $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ un sistem de generatori pentru $\mathbb{R}^3$?
   (b) Extrageţi o bază a lui $\mathbb{R}^3$ din $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.
   (c) Scrieţi componentele vectorului $x = (1,1,1)$ în raport cu baza obţinută la punctul precedent.

2. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.
   (a) Determinaţi dimensiunea subspaţiului $L = \left\{x \in \mathbb{R}^4 | Ax = 0\right\}$ şi o bază a acestuia;
   (b) Determinaţi o descompunere $\mathbb{R}^4 = L \oplus L_0$;
   (c) Descompuneţi vectorul $x = (1,2,1,2)$ ca suma dintre un vector din L şi unul din L_0.

3. Fie $\mathcal{B} = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1),\}$ baza canonică din $\mathbb{R}^3$ şi $\mathcal{B}' = \{u_1 = (1,2,1), u_2 = (1,-1,0), u_3 = (3,1,-2)\}$. Să se determine matricea de trecere de la $\mathcal{B}$ la $\mathcal{B}'$ şi coordonatele lui $v = (2,3,-5)$ în raport cu baza $\mathcal{B}'$.

4. Fie vectorii $x_1 = (1,1,1,1), x_2 = (1,1,-1,-1), x_3 = (1,-1,1,-1)$ şi $y_1 = (1,-1,-1,1), y_2 = (2,-2,0,0), y_3 = (3,-1,1,1)$ şi $L_1 = Span(x_1, x_2, x_3), L_2 = Span(y_1, y_2, y_3)$. Determinaţi cîte o bază în $L_1 + L_2$, respectiv $L_1 \cap L_2$

5. Fie vectorii $x_1 = (2,1,0), x_2 = (1,2,3), x_3 = (-5,-2,1)$ şi $y_1 = (1,1,2), y_2 = (-1,2,0), y_3 = (2,0,3)$ şi $L_1 = Span(x_1, x_2, x_3), L_2 = Span(y_1, y_2, y_3)$. Arătaţi că $L_1 + L_2 = \mathbb{R}^3$ şi descompuneţi în două moduri vectorul $x = (1,0,1)$ după subspaţiile L_1 şi L_2.

6. Dacă vectorii v_1, v_2, v_3 sînt liniar-dependenţi se poate ca $w_1 = v_1 + v_2$, $w_2 = v_2 + v_3$ şi $w_3 = v_1 + v_3$ să fie liniar-independenţi?

Indicaţii:

1. (a) Este suficient să arătaţi că matricea cu coloanele v_1, v_2, v_3, v_4 are rangul 3;
   (b) Determinaţi minorul principal al matricei precedente. Baza este formată de coloanele pe care se sprijină acesta;
   (c) Dacă u_1, u_2, u_3 este baza obţinută, trebuie să rezolvaţi sistemul determinat de $x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 = (1,1,1)$.

2. (a) Rezolvaţi sistemul şi găsiţi un sistem fundamental de soluţii;
   (b) Completaţi baza lui L la o bază a lui $\mathbb{R}^4$. Spaţiul L_0 este generat de vectorii adăugaţi.
   (c) Orice $x \in \mathbb{R}^4$ trebuie să se scrie ca $x = x_0 + x_1$ cu $x_0 \in L_0$ şi $x_1 \in L$. Observaţi că dacă aţi determinat unul dintre aceşti vectori (să zicem x_1 atunci $x_0 = x - x_1$). O metodă ar fi pornind de la observaţia că $Ax = Ax_0 + Ax_1$.

3. Aceeaşi idee ca la punctul 1. Matricea de trecere se obţine aplicînd definiţia

4. Un sistem de generatori pentru $L_1 + L_2$ este $\{x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3\}$. Extrageţi o bază. Pentru $L_1 \cap L_2$ rezolvaţi sitemul dat de $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b_1y_1 + b_2y_2 + b_3y_3$. Este suficient să găsiţi a_1, a_2, a_3, respectiv b_1, b_2, b_3.

5. La fel ca la exerciţiul precedent. Pentru descompuneri este suficient să observăm că $dimL_1 = dimL_2 = 2$ deci avem mai multe posibilităţi de a alege o bază in L_1 şi L_2.

Dacă trimiteţi rezolvările pe e-mail veţi primi feed-back. Pentru întrebări folosiţi Zulip, streamul Algebra si Geometrie/131 (va trebui să faceţi un cont în prealabil).