Tutoriat VIII:

Seminar 131
12.03.20

Ex4: Fie vectorii $x_1 = (1, 1, 1, 1)$, $x_2 = (1, 1, -1, -1)$, $x_3 = (1, -1, 1, -1)$ și $y_1 = (1, -1, -1, 1)$, $y_2 = (2, -2, 0, 0)$, $y_3 = (3, -1, 1, 1)$ și $L_1 = \mathrm{Span}(x_1, x_2, x_3)$, $L_2 = \mathrm{Span}(y_1, y_2, y_3)$. Determinați câte o bază în $L_1 + L_2$, respectiv $L_1 \cap L_2$.

Rezolvare:

$$R_1 \overset{not}{=} \{\underset{x_1}{\underset{\parallel}{(1, 1, 1, 1)}}, \underset{x_2}{\underset{\parallel}{(1, 1, -1, -1)}}, \underset{x_3}{\underset{\parallel}{(1, -1, 1, -1)}}\}$$

$L_1 = \langle R_1 \rangle$

$\Rightarrow L_1 = \{v \in \mathbb{R}^4 \mid ax_1 + bx_2 + cx_3 = v, \forall a, b, c \in \mathbb{R}\}$

$v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$

$$\begin{cases} a + b + c = v_1 \\ a + b - c = v_2 \\ a - b + c = v_3 \\ a - b - c = v_4 \end{cases}$$

$$R_2 \overset{not}{=} \{\underset{y_1}{\underset{\parallel}{(1, -1, -1, 1)}}, \underset{y_2}{\underset{\parallel}{(2, -2, 0, 0)}}, \underset{y_3}{\underset{\parallel}{(3, -1, 1, 1)}}\}$$

$L_2 = \langle R_2 \rangle$

$\Rightarrow L_2 = \{v \in \mathbb{R}^4 \mid ay_1 + by_2 + cy_3 = v, \forall a, b, c \in \mathbb{R}\}$

$v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$

$$\begin{cases} a + 2b + 3c = v_1 \\ -a - 2b - c = v_2 \\ -a + c = v_3 \\ a + c = v_4 \end{cases}$$

$\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2)$.

Aflăm $\dim(L_1 \cap L_2)$:

$L_1 \cap L_2$:

$a+b+c = a+2b+3c \iff b+2c=0$

$a+b-c = -a-2b-c \iff 2a+3b+2c=0$

$-a+c = a-b+c \iff 2a-b=0$

$a+b = a-b-c \iff 2c+b=0$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} 2c+b=0 \\ 2a+3b+2c=0 \\ 2a-b=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2c+b=0 \\ 4b+2c=0 \\ 2a-b=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3b=0 \\ 2c+b=0 \\ 2a-b=0 \end{cases} \iff \begin{cases} b=0 \\ c=0 \\ a=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \dim(L_1 \cap L_2) = 0 \Rightarrow R' = \{(0,0,0,0)\}$ reper în $L_1 \cap L_2$

$\Rightarrow L_1 \oplus L_2 = \mathbb{R}^4$

$\Rightarrow$ Un reper în $\mathbb{R}^4$ este o bază pentru $L_1 \oplus L_2$:

extragem $R'' = \{x_1, x_2, y_1, y_2\}$ SG.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+(-2)\cdot(-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-2)(-1+1-1-1-1-1)+$$

$$+(-2)(-1-1-1+1-1-1) = 8+8 = 16 \neq 0 \Rightarrow R'' = \text{SLI}$$

R'' este bază în $L_1 \oplus L_2$.

Ex5: Fie vectorii $x_1 = (2,1,0)$, $x_2 = (1,2,3)$, $x_3 = (-5,-2,1)$ și $y_1 = (1,1,2)$, $y_2 = (-1,2,0)$, $y_3 = (2,0,3)$ și $L_1 = \text{Span}(x_1, x_2, x_3)$, $L_2 = \text{Span}(y_1, y_2, y_3)$. Arătați că $L_1 \oplus L_2 = \mathbb{R}^3$ și descompuneți în 2 moduri vectorul $x = (1,0,1)$ după subspațiile L_1 și L_2.

Rezolvare:

$R_1 \overset{not}{=} \{(2,1,0), (1,2,3), (-5,-2,1)\}$, where $x_1 = (2,1,0)$, $x_2 = (1,2,3)$, $x_3 = (-5,-2,1)$

$R_2 \overset{not}{=} \{(1,1,2), (-1,2,0), (2,0,3)\}$, where $y_1 = (1,1,2)$, $y_2 = (-1,2,0)$, $y_3 = (2,0,3)$

$L_1 = \langle R_1 \rangle$, $L_2 = \langle R_2 \rangle$.

$L_1 \oplus L_2 = \mathbb{R}^3 \iff L_1 \cap L_2 = \{0_v\}$

$L_1 = \{ v \in \mathbb{R}^3 \mid a x_1 + b x_2 + c x_3 = v;\ a, b, c \in \mathbb{R} \}$

$$\begin{cases} 2a + b - 5c = v_1 \\ a + 2b - 2c = v_2 \\ 3b + c = v_3 \end{cases}$$

$L_2 = \{ v \in \mathbb{R}^3 \mid a y_1 + b y_2 + c y_3 = v;\ a, b, c \in \mathbb{R} \}$

$$\begin{cases} a - b + 2c = v_1 \\ a + 2b = v_2 \\ 2a + 3c = v_3 \end{cases}$$

$L_1 \cap L_2$:

$$\begin{cases} 2a + b - 5c = a - b + 2c \\ a + 2b - 2c = a + 2b \\ 3b + c = 2a + 3c \end{cases} \iff \begin{cases} 2b - 7c = 0 \\ 2c = 0 \\ 2a - 3b + 2c = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 2b - 7c = 0 \\ 2a - 3b + 2c = 0 \\ c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \\ a = 0 \end{cases} \Rightarrow L_1 \cap L_2 = \{(0,0,0)\}.$$

$\Rightarrow L_1 \oplus L_2 = \mathbb{R}^3 \Rightarrow \dim(L_1 + L_2) = 3.$

Extragem 2 repere în $L_1 \oplus L_2$:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 8+3-6-2 = 3 \neq 0 \Rightarrow R' = \{(2,1,0),(1,2,3),$$

$(1,1,2)\}$ este reper

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2-8 = -10 \neq 0 \Rightarrow R'' = \{(2,1,0),(1,1,2),$$

$(-1,2,0)\}$ este reper.

1) $(1,0,1) = \underbrace{a(2,1,0) + b(1,2,3)}_{\in L_1} + \underbrace{c(1,1,2)}_{\in L_2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a+b+c=1 \\ a+2b+c=0 \;/\cdot 2 \\ 3b+2c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3b-c=1 \\ 3b+2c=1 \\ a+2b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=2 \\ 3b=-3 \\ a+2b=-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c=2 \\ b=-1 \\ a=0 \end{cases} \Rightarrow (1,0,1) = (-1,-2,-3)+(2,2,4)$$

2) $(1,0,1) = \underbrace{a(2,1,0)}_{\in L_1} + \underbrace{b(1,1,2) + c(-1,2,0)}_{\in L_2}$

$$\begin{cases} 2a+b-c=1 \\ a+b+2c=0 \\ 2b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\frac{1}{2} \\ 2a-c=\frac{1}{2} \\ a+2c=-\frac{1}{2} \;/\cdot(2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\frac{1}{2} \\ -5c=\frac{3}{2} \\ a+2c=-\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=\frac{1}{2} \\ c=-\frac{3}{10} \\ a=\frac{1}{10} \end{cases} \Rightarrow (1,0,1) = \left(\frac{2}{10}, \frac{1}{10}, 0\right) + \left(\frac{8}{10}, -\frac{1}{10}, 1\right)$$

seria 14

Forme biliniare
Spații vectoriale euclidiene

Ex 1: Fie $g: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, formă biliniară,
$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ matricea asociată în raport cu reperul canonic.

a) $g = ?$

b) $\operatorname{Ker} g = ?$

c) Forma pătratică asociată lui $g = ?$

d) Să se aducă Q la forma canonică.

e) $(\mathbb{R}^3, g)$ sp. vectorial euclidian.

Rezolvare:

a) $g(x,y) = x_1y_1 + x_1y_2 + 3x_1y_3 + x_2y_1 + 5x_2y_2 + x_2y_3 + 3x_3y_1 + x_3y_2 + x_3y_3$

b) $\det G \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{Ker} g = \{0_V\}$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 + 3 + 3 - 45 - 1 - 1 = -36 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{Ker} g = \{0_V\}$

c) $Q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$Q(x) = g(x,x) = x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$

d) Met. Jacobi

$\Delta_1 = 1 \neq 0$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 1 = 4 \neq 0$

$\Delta_3 = -36 \neq 0$

$\Rightarrow \exists$ un reper a.î. $Q(x) = \frac{1}{\Delta_1} x_1'^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} x_2'^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3} x_3'^2 =$

$= x_1'^2 + \frac{1}{4} x_2'^2 - \frac{1}{9} x_3'^2$

$(2, 1)$ signatura $\Rightarrow Q$ nu e pozitiv definită

c) Q nu e pozitiv definită => g nu e pozitiv definită => $(\mathbb{R}^3, g)$ nu e spațiu vectorial euclidian.

d) Met. Gauss:

$$Q(x) = (x_1 + x_2 + 3x_3)^2 - x_2^2 - 9x_3^2 - 6x_2x_3 + 5x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3 = (x_1 + x_2 + 3x_3)^2 + 4x_2^2 - 4x_2x_3 - 8x_3^2 =$$
$$= (x_1 + x_2 + 3x_3)^2 + (2x_2 - x_3)^2 - 9x_3^2$$

Schimbăm reperul:

$y_1 = x_1 + x_2 + 3x_3$

$y_2 = 2x_2 - x_3$

$y_3 = 3x_3$

$\Rightarrow Q(x) = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$

signatura $(2, 1)$ => Q nu e pozitiv definită.

Ex2: $Q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3$

a) g forma polară asociată.

b) Să se reducă Q la forma canonică.

c) Este Q pozitiv definită?

d) Este $(\mathbb{R}^3, g)$ spațiu vectorial euclidian?

Rezolvare:

a)
$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$g(x, y) = x_1y_2 - 2x_1y_3 + x_2y_1 + 4x_2y_3 + 4x_3y_2 - 2x_3y_1$

$g: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ este forma polară asociată lui Q.

$g(x, y) = \frac{1}{2}(G(x+y) - Q(x) - Q(y))$

b) Efectuăm schimbarea de reper:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_1 - x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) \\ x_2 = \frac{1}{2}(y_1 - y_2) \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

$Q(x) = \frac{1}{2}(y_1^2 - y_2^2) - 2(y_1 + y_2)y_3 + 4(y_1 - y_2)y_3 =$

$= \frac{1}{2}y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 - 2y_1y_3 - 2y_2y_3 + 4y_1y_3 - 4y_2y_3 =$

$= \underline{\frac{1}{2}y_1^2} + \underline{2y_1y_3} - \frac{1}{2}y_2^2 + 6y_2y_3 = \frac{1}{2}(y_1^2 + 4y_1y_3) -$

$- \frac{1}{2}y_2^2 - 6y_2y_3 = \frac{1}{2}(y_1 + 2y_3)^2 - 2y_3^2 - 6y_2y_3 =$

$= \frac{1}{2}(y_1 + 2y_3)^2 - \frac{1}{2}(y_2^2 + 12y_2y_3) - 2y_3^2 = \frac{1}{2}(y_1 + 2y_3)^2 -$

$- \frac{1}{2}(y_2 + 6y_3)^2 + 16y_3^2$

$Q(x) = \frac{1}{2}z_1^2 - \frac{1}{2}z_2^2 + 16z_3$

$(2, 1)$ signatura $\Rightarrow G$ nu e pozitiv definită $\Rightarrow (\mathbb{R}^3, g)$ nu e sp. vectorial euclidian.

Ex3: $(\mathbb{R}^3, g_0)$ sp. vectorial euclidian, $g_0 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

$g_0(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ produs scalar canonic.

$U = \langle\{(1, 2, 3)\}\rangle$.

a) $U^\perp = ?$

b) Să se determine un reper ortonormat în $U^\perp$.

Rezolvare:

$U^\perp = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid g_0(x, y) = 0, \forall y \in U\} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid g_0(x, (1,2,3))$
$= 0\} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\}$

$x_1 = -2x_2 - 3x_3$

$U^\perp = \{(-2x_2 - 3x_3, x_2, x_3) \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} = \{x_2 \underbrace{(-2, 1, 0)}_{f_1} +$
$+ x_3 \underbrace{(-3, 0, 1)}_{f_2} \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$

$\mathcal{U}^{\perp} = \langle \{f_1, f_2\} \rangle$

$\mathbb{R}^3 = \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}^{\perp}$

$\dim \mathcal{U}^{\perp} = 2$

$\Rightarrow R = \{f_1, f_2\}$ reper arbitrar în $\mathcal{U}^{\perp}$.

$R = \{f_1, f_2\} \rightarrow R' = \{e_1, e_2\} \rightarrow R'' = \left\{\frac{e_1}{\|e_1\|}, \frac{e_2}{\|e_2\|}\right\}$.

reper arbitrar, reper ortogonal, reper ortonormat.

$e_1 = f_1 = (-2, 1, 0)$

$e_2 = f_2 - \frac{\langle f_1, e_1 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle} \cdot e_1 = (-3, 0, 1) - \frac{6}{5}(-2, 1, 0) =$

$= (-3, 0, 1) + \left(\frac{12}{5}, -\frac{6}{5}, 0\right) = \left(-\frac{3}{5}, -\frac{6}{5}, 1\right)$.

$\frac{e_1}{\|e_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1, 0)$

$\frac{e_2}{\|e_2\|} = \frac{1}{\sqrt{70}}(-3, -6, -5)$

Obs: $u = \alpha v,\ \alpha > 0 \Rightarrow \frac{u}{\|u\|} = \frac{v}{\|v\|}$

Ex4: $(\mathbb{R}^3, g_0)$

$u = (2, -1, 3)$; $v = (1, 1, 2)$

a) $u \times v = w$

b) Coordonatele lui $(1, 1, 0)$ în raport cu reperul $\{u, v, w\}$.

c) $t = (1, -1, 1)$, $t \wedge u \wedge v = \langle t, u \times v \rangle \overset{not}{=} z$

Obs: z s.n. produs mixt.

Rezolvare:

a) $w = u \times v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = e_1 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - e_2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} +$

$+ e_3 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = e_1 \cdot (-5) - e_2 \cdot 1 + e_3 \cdot 3 = (-5, -1, 3)$.

Obs: $\{e_1, e_2, e_3\}$ = reper canonic

b) $R = \{u = (2,-1,3),\ v = (1,1,2),\ w = (-5,-1,3)\}$ reper pozitiv orientat în $\mathbb{R}^3$.

$(1,1,0) = a\cdot u + b\cdot v + c\cdot w = a(2,-1,3) + b(1,1,2) + c(-5,-1,3) = (2a+b-5c, -a+b-c, 3a+2b+3c)$

$$\begin{cases} 2a+b-5c=1 \\ -a+b-c=1 \\ 3a+2b+3c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a-4c=0 \\ -\frac{4}{3}c+b-c=1 \\ 4+2+\frac{14}{3}c+3c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{8}{35} \\ b=\frac{21}{35} \\ c=-\frac{6}{35} \end{cases}$$

$(a,b,c) = \left(-\frac{8}{35}, \frac{21}{35}, -\frac{6}{35}\right)$

c) $t \wedge u \wedge w = g_0(t, w) = \langle (1,-1,1), (-5,1,3)\rangle = -5+1+3 = -1.$

Obs: $t \wedge u \wedge v = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \Leftrightarrow t\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - t\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + t\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

Ex5: $(E, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ sp. vectorial euclidian real.
Demonstrați că următoarele afirmații sunt echivalente:

1) $u \perp v$
2) $\|u+v\| = \|u-v\|$
3) $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$

Rezolvare:

$(*)\ \|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \langle u,u\rangle + \langle v,v\rangle + 2\langle u,v\rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u,v\rangle$

$(**)\ \|u-v\|^2 = \langle u-v, u-v\rangle = \langle u,u\rangle + \langle v,v\rangle - 2\langle u,v\rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\langle u,v\rangle$

1) $\to$ 2) $\langle u,v\rangle \overset{(*)(**)}{\Rightarrow} \|u+v\|^2 = \|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$

2) $\to$ 1) $\|u+v\| = \|u-v\| \overset{(*)(**)}{\Rightarrow} 2\langle u,v\rangle = -2\langle u,v\rangle \Rightarrow$

$\Rightarrow \langle u, v\rangle = 0 \Rightarrow u \perp v$

$1) \to 3)$ $\langle u, v\rangle = 0 \overset{(*)}{\Rightarrow} \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$

$3) \to 1)$ $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \overset{(*)}{\Rightarrow} -2\langle u, v\rangle = 0 \Rightarrow u \perp v.$