Tutoriat VII

Seminar grupa 131
12.03.2020

Ex 1: Fie vectorii $v_1 = (1,1,3)$, $v_2 = (2,1,0)$, $v_3 = (4,3,1)$, $v_4 = (3,2,1) \in \mathbb{R}^4$

a) Formează $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ un sistem de generatori pentru $\mathbb{R}^3$?

b) Extrageți o bază a lui $\mathbb{R}^3$ din $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

c) Scrieți componentele vectorului $x = (1,1,1)$ în raport cu baza obținută la punctul precedent.

Rezolvare:

$R = \{(1,1,3), (2,1,0), (4,3,1), (3,2,1)\}$ este un SG.

Orice supramulțime a unui SG este un SG, atunci R este (Dacă o submulțime a lui R este un SG).

Extragem $\{(1,1,3), (2,1,0), (4,3,1)\} \stackrel{not}{=} R'$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 18 - 12 - 2 = 5 \neq 0 \Rightarrow R' \text{ este SLI}$$

$|R'| = 3 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 \Rightarrow R'$ este SG $\Rightarrow R$ este SG.

b) $\Rightarrow R'$ este reper (bază) în $\mathbb{R}^3$.

c) $(1,1,1) = a(1,1,3) + b(2,1,0) + c(4,3,1)$

$$\begin{cases} a + 2b + 4c = 1 \\ a + b + 3c = 1 \\ 3a + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b + 4 - 12a = 1 \\ a + b + 3 - 9a = 1 \\ c = 1 - 3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b - 11a = -3 \\ b - 8a = -2 \\ c = 1 - 3a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b - 3a = -1 \\ b - 8a = -2 \\ c = 1 - 3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a = 1 \\ b = 3a - 1 \\ c = 1 - 3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{5} \\ b = -\frac{2}{5} \\ c = \frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right)$$

Ex2:

Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

a) Determinați dimensiunea subspațiului $L = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid Ax = 0\}$ și o bază a acestuia.

b) Determinați o descompunere $\mathbb{R}^4 = L \oplus L_0$

c) Descompuneți vectorul $x = (1, 2, 1, 2)$ ca suma dintre un vector din L și unul din L_0.

Rezolvare:

a) $L = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid Ax = 0\}$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 - 4x_2 + 4x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \quad / \cdot (-2) \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 - 4x_2 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 4x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4x_4 - 4x_2 \\ 4x_4 - 4x_2 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4x_4 - 4x_2 \\ 7x_4 - 5x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4x_4 - 4x_2 \\ x_3 = \frac{5x_2 - 7x_4}{2} \end{cases}$$

$L = \{(4x_4 - 4x_2, x_2, \frac{5x_2 - 7x_4}{2}, x_4) \mid x_2, x_4 \in \mathbb{R}\} =$

$= \{x_2(-4, 1, \frac{5}{2}, 0) + x_4(4, 0, -\frac{7}{2}, 1) \mid x_2, x_4 \in \mathbb{R}\}$

$R = \{(-8, 2, 5, 0), (8, 0, -7, 2)\}$ = SG pentru L.

$rg \begin{pmatrix} -8 & 8 \\ 2 & 0 \\ 5 & -7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow R$ este SLI

$\Rightarrow R$ este bază în L

$\dim L = |R| = 2$.

b) Extindem R la o bază în $\mathbb{R}^4$.

$R' = R \cup \{(1,0,0,0), (0,1,0,0)\}$

$$\begin{vmatrix} -8 & 8 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & -7 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$$

$$\Rightarrow rg \begin{pmatrix} -8 & 8 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4 \text{ (maxim)} \Rightarrow R' \text{ este SLI.}$$

$\Rightarrow R'$ este bază.

$$\mathbb{R}^4 = L \oplus \underbrace{\langle \{(1,0,0,0), (0,1,0,0)\} \rangle}_{= L_0} = L \oplus L_0$$

c) $(1,2,1,2) = \underbrace{a(-8,2,5,0) + b(8,0,-7,2)}_{\in L} + \underbrace{c(1,0,0,0) + d(0,1,0,0)}_{\in L_0}$

$$\begin{cases} -8a + 8b + c = 1 \\ 2a + d = 2 \\ 5a - 7b = 1 \\ 2b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = \frac{8}{5} \\ d = -\frac{6}{5} \\ c = \frac{29}{5} \end{cases}$$

$\Rightarrow (1,2,1,2) = \left(-\frac{24}{5}, \frac{16}{5}, 1, 2\right) + \left(\frac{29}{5}, -\frac{6}{5}, 0, 0\right)$

Ex 3:

Fie $B = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ baza canonică din $\mathbb{R}^3$ și $B' = \{u_1 = (1,2,1), u_2 = (1,-1,0), u_3 = (3,1,-2)\}$. Să se determine matricea de trecere de la B la B' și coordonatele lui $v = (2,3,-5)$ în raport cu baza B'!

Rezolvare:

$$B_0 \xrightarrow{A} B'$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(2, 3, -5) = a(1, 2, 1) + b(1, -1, 0) + c(3, 1, -2)$$

$$\begin{cases} a + b + 3c = 2 \\ 2a - b + c = 3 \\ a - 2c = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + 3c = 2 \\ 3a + 4c = 5 \\ a - 2c = -5 \;/\cdot 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + 3c = 2 \\ 5a = -5 \\ a - 2c = -5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ c = 3 \\ b = -6 \end{cases} \Rightarrow (-1, -6, 3)$$ sunt coordonatele lui v în raport cu B'.

Ex 6:

Dacă vectorii v_1, v_2, v_3 sunt liniar-dependenți se poate ca $w_1 = v_1 + v_2$, $w_2 = v_2 + v_3$, $w_3 = v_1 + v_3$ să fie liniar independenți?

Rezolvare:

$\{v_1, v_2, v_3\}$ e SLD $\Leftrightarrow$ Matricea ce are pe v_1, v_2, v_3 pe coloane are determinantul 0.

Operațiile $w_1 = v_1 + v_2$, $w_2 = v_2 + v_3$, $w_3 = v_1 + v_3$ sunt echivalente cu operații de adunare pe coloane a matricii anterioare, care nu vor da o matrice echivalentă cu cea anterioară (spre deosebire de operațiile de adunare pe linii). Deci matricea nouă, cu w_1, w_2, w_3 pe coloane nu va fi echivalentă cu cea anterioară. $\Rightarrow$ Determinantul ei poate fi diferit de $0 \Rightarrow \{w_1, w_2, w_3\}$ poate fi un SLI.

Seria 14

Ex 1: Fie $g: V\times V \to \mathbb{R}^3$ formă biliniară simetrică,
$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ matricea asociată în raport cu reperul canonic.

a) $g = ?$
b) Este g nedegenerată?
c) $Q = ?$ $Q: V \to \mathbb{R}$ forma pătratică asociată.
d) Să se determine o formă canonică a lui Q. Este Q pozitiv definită?

Rezolvare:

a) $g(x,y) = X^T G Y$

$g(x,y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2.$

b) $\det G = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow g$ este nedegenerată. $\Rightarrow$
$\Rightarrow \operatorname{Ker} g = \{0_V\}$

c) $Q(x) = g(x,x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3$

d) $Q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 = (x_1+x_2)^2 + x_2^2 -$
$- 2x_2x_3 = (x_1+x_2)^2 + (x_2-x_3)^2 - x_3^2$ (Metoda Gauss).

$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_2 - x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow Q(x) = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$ forma normală

$Q(2,1) \Rightarrow Q$ nu e pozitiv definită.

Metoda Jacobi:

$\Delta_1 = 1 \neq 0$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

$\Rightarrow \exists$ un reper în $\mathbb{R}^3$ a.î. $Q(x) = \frac{1}{\Delta_1} x_1'^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} x_2'^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3} x_3'^2 = 1 x_1'^2 + \frac{1}{1} x_2'^2 - \frac{1}{1} x_3'^2 = x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2$

$Q(2,1)$ signatura $\Rightarrow$ Q nu este pozitiv definită.

Spații vectoriale euclidiene

Notăm $(E, <\cdot,\cdot>)$, $(E, (\cdot,\cdot))$, (E, g) spațiu vectorial euclidian, g - formă biliniară simetrică și pozitiv definită.

Fie $g: V \times V \to \mathbb{R}$, formă biliniară simetrică și pozitiv definită, $(V, +, \cdot)_{/\mathbb{R}}$ s.n. produs scalar.

Def: Fie (E, g) sp. vect. euclidian,
$\|x\| = \sqrt{g(x,x)} = \sqrt{Q(x)}$, $\forall x \in V$, unde $Q: V \to \mathbb{R}$ este forma pătratică reală asociată lui g.

Prop: Fie (E, g) sp. vect. euclidian, $S = \{x_1, \dots x_k\}$ sistem de k vectori, nenuli, mutual ortogonali (ie $g(x_i, x_j) = 0$, $\forall i \neq j$, $\forall i,j = \overline{1,k}$), atunci S este SLI.

Teorema Cauchy-Buniakowsky-Schwarz:

Fie (E, g) sp. vect. euclidian.
$\Rightarrow |<x,y>| \leq \|x\| \cdot \|y\|$, $\forall x, y \in E$

Mai mult, $|<x,y>| = \|x\| \cdot \|y\| \Leftrightarrow \{x, y\}$ este SLD.

produs scalar, $g(x,y)$

(Ne amintim ce înseamnă <u>norma unui vector x</u>:
O funcție de tipul $\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, ce are următoarele proprietăți:
(i) $\|x\| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$
(ii) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
(iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n$
(iv) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$)

Def: Fie (E, g) sp. vect. euclidian real;
$R = \{e_1, \dots e_n\}$ reper:
1) R s.n. <u>reper ortogonal</u> $\Leftrightarrow \langle e_i, e_j \rangle = 0, \forall i \neq j, \ i,j = \overline{1,n}$.
2) R s.n. <u>reper ortonormat</u> $\Leftrightarrow \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} \quad \forall i,j = \overline{1,n}$
Un reper ortonormat este un reper ortogonal în care fiecare vector este versor (i.e $\neq 1$).

Prop: Fie (E, g) un sp. vect. euclidian real,
a) $R \xrightarrow{A} R'$, cu R și R' repere ortonormate $\Rightarrow$ $A \in O(n)$ (i.e A este matrice ortogonală: $A \cdot A^T = I_n$)
b) Dacă R, R' sunt repere ortonormate la fel orientate, atunci $A \in SO(n)$ (i.e A este matrice special ortogonală: $A \in O(n)$ și $\det A = 1$).

<u>Procedeul de ortogonalizare Gram-Schmidt</u>

Fie (E, g) sp. vectorial euclidian real, $R = \{f_1, \dots f_n\}$ reper arbitrar în E. $\Rightarrow \exists R' = \{e_1, \dots e_n\}$ reper ortogonal în E a.î. $\langle \{f_1, \dots f_i\} \rangle = \langle \{e_1, \dots e_i\} \rangle, \forall i = \overline{1,n}$.

$e_1 = f_1$

$e_2 = f_2 - \frac{\langle f_2, e_1 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle} \cdot e_1$

$\vdots$

$$e_n = f_n - \frac{\langle f_n, e_1\rangle}{\langle e_1, e_1\rangle}\cdot e_1 - \dots - \frac{\langle f_n, e_{n-1}\rangle}{\langle e_{n-1}, e_{n-1}\rangle}\cdot e_{n-1}$$

$$\underset{\text{reper arbitrar}}{R = \{f_1, \dots f_n\}} \xrightarrow{C} \underset{\text{reper ortogonal}}{R' = \{e_1, \dots e_n\}} \xrightarrow{D} \underset{\text{reper ortonormat}}{R'' = \left\{\frac{e_1}{\|e_1\|}, \dots \frac{e_n}{\|e_n\|}\right\}}$$

$(\|e_1\| = \sqrt{\langle e_1, e_1\rangle})$

R, R' și R'' sunt repere la fel orientate.

Def: $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ spațiu vectorial euclidian real.

a) $x \in V$, $x^\perp = \{y \in V \mid \langle x, y\rangle = 0\}$ (x - ortogonal)

b) $\mathcal{U} \subseteq V$ subspațiu vect. în V.

$\mathcal{U}^\perp = \{y \in V \mid \langle x, y\rangle = 0, \ \forall x \in \mathcal{U}\}$ complement ortogonal.

Obs:

a) $\langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0_V$ (produsul scalar e pozitiv definit).

b) $(\mathcal{U}^\perp)^\perp = \mathcal{U}$

c) Fie $\mathcal{U}, \mathcal{W} \subseteq V$ subspații vect.

Dacă $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{W}$, atunci $\mathcal{W}^\perp \subseteq \mathcal{U}^\perp$.

d) Dacă $x \perp \mathcal{U}$ (ie x construit ortogonal pe $\mathcal{U}$, ie $x \in \mathcal{U}^\perp$), atunci $\langle x, e_i\rangle = 0$, $\forall i = \overline{1,k}$, $\{e_1, \dots e_k\}$ reper ortonormat în $\mathcal{U}$, $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{U} = k$.

Prop: (E, g) spațiu vect. euclidian real, $\mathcal{U} \subseteq E$ ssp. vect $\Rightarrow E = \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}^\perp$

Obs: $\forall \mathcal{U} \subseteq V$ ssp. vect ; $\exists!\ \mathcal{U}^\perp \subseteq V$ complement ortogonal a.î. $V = \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}^\perp$.

Ex 1: $(\mathbb{R}^3, g_0)$, $g_0 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$ produs scalar canonic.

Fie $u = (1, 2, -1)$.

a) $u^\perp = ?$

b) Să se determine un reper ortonormat în $u^\perp$.

Rezolvare:

a) $u^\perp = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid g_0(x, u) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$

$x = (x_1, x_2, x_3)$ $\quad u = (1, 2, -1)$

$\dim u^\perp = 3 - 1 = 2$ (plan care trece prin origine)

b) Gram-Schmidt:

$u^\perp = \{(x_1, x_2, x_1 + 2x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} = \{x_1 \underbrace{(1,0,1)}_{f_1} + x_2 \underbrace{(0,1,2)}_{f_2} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$

$\left.\begin{array}{l} R = \{f_1 = (1,0,1), f_2 = (0,1,2)\} \text{ SG} \\ |R| = 2 = \dim u^\perp \end{array}\right\} \Rightarrow R$ este reper (arbitrar) în $u^\perp$.

Ortogonalizăm:

$e_1 = f_1 = (1,0,1)$

$e_2 = f_2 - \frac{\langle f_2, e_1 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle} \cdot e_1 = (0,1,2) - \frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{2}_{1}} \cdot (1,0,1) =$

$= (0,1,2) - (1,0,1) = (-1,1,1)$

$\langle f_2, e_1 \rangle = \langle (0,1,2), (1,0,1) \rangle = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 2 = 2$

$R = \{f_1, f_2\} \to R' = \{e_1; e_2\} \to R'' = \left\{\frac{e_1}{\|e_1\|}, \frac{e_2}{\|e_2\|}\right\} =$

$= \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1), \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)\right\}$.

Def: Produs vectorial:

$(\mathbb{R}^3, g_0)$, $\{x, y\}$ sistem de vectori.

Definim produsul vectorial w astfel:

a) $w = 0$, dacă $\{x, y\}$ este SLD.

b) Dacă $\{x, y\}$ e SLI, atunci:

1) $$\|w\|^2 = \begin{vmatrix} \langle x, x \rangle & \langle x, y \rangle \\ \langle y, x \rangle & \langle y, y \rangle \end{vmatrix}$$

2) $w \perp x$, $w \perp y$ $(\langle w, x \rangle = 0)$

3) $\{x, y, w\}$ este reper pozitiv orientat, adică este la fel orientat ca și reperul canonic.

$$w = x \times y \text{ (determinant formal)} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} =$$

$$= e_1 \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} - e_2 \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} + e_3 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$