Spații vectoriale

Teorie: $\forall$ submulțime a unui SLI este SLI.
$\forall$ supramulțime a unui SG este un SG.
$\forall$ supramulțime a unui SLI este un SLD.

Teorema schimbului: Fie $(V,+,\cdot)_{/\mathbb{K}}$ sp. vect. finit generat.
Fie $\{x_1, \dots x_n\}$ un SG.
$\{y_1, \dots y_n\}$ un SLI $\Bigg| \Rightarrow \{y_1, \dots y_n\}$ este SG.

Teoremă: Fie $(V,+,\cdot)_{/\mathbb{K}}$ sp. vect. finit generat. Fie B_1, B_2 baze în V. $\Rightarrow |B_1| = |B_2|$

$\forall$ SLI (finit) se poate completa la o bază.

Din orice SG (finit), care conține cel puțin un vector nenul, se poate extrage o bază.

Ex 1 $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)_{/\mathbb{R}}$, $S = \{(1,0,1), (-1,1,2)\}$

a) S este SLI

b) Să se completeze S la o bază.

Rezolvare:

a) Fie $a, b \in \mathbb{R}$ a.î. $a(1,0,1) + b(-1,1,2) = (0,0,0) \Rightarrow$
$(a,0,a) + (-b,b,2b) = (0,0,0) \Leftrightarrow (a-b, b, a+2b) =$
$= (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=0 \\ b=0 \\ a+2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=0 \Rightarrow S$ este SLI.

b) $B_0 = \{\underline{(1,0,0)}, (0,1,0), (0,0,1)\}$ bază canonică în $\mathbb{R}^3$. $\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3$.

Fie $B = \{(1,0,1), (-1,1,2), (1,0,0)\}$.

Demonstrăm că B este SLI:

Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ a.î. $a(1,0,1) + b(-1,1,2) + c(1,0,0) = (0,0,0) \Leftrightarrow (a-b+c, b, a+2b) = (0,0,0)$

$$(*)\begin{cases} a - b + c = 0 \\ b = 0 \\ a + 2b = 0 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det A = -1 \neq 0 \Rightarrow rg A = 3$ (rang) $\Rightarrow (*)$ are sol. unică nulă $\Rightarrow a = b = c = 0 \Rightarrow$ B este SLI

dar $|B| = 3 \overset{Obs.}{=} \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3$ $\Big| \Rightarrow$

B este bază.

Obs: $(V, +, \cdot)_{/\mathbb{K}}$

B - bază

$|B| = n = \dim_{\mathbb{K}} V$

$\Rightarrow$ n = nr. maxim de vectori care formează un SLI și nr. minim care formează SG (nr. exact de vectori care formează o bază)

Ex2 $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)_{/\mathbb{R}}$, $S = \{(1,2), (-1,1), (2,3)\}$

a) $\mathbb{R}^2$ este $\langle S \rangle$. (S e SG pentru $\mathbb{R}^2$)

b) Să se extragă din S o bază.

Rezolvare:

a) Dem. că $\mathbb{R}^2 \subset \langle S \rangle$. (Știm deja că $\langle S \rangle \subset \mathbb{R}^2$).

$\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\exists a, b, c \in \mathbb{R}$ a.î. $(x_1, x_2) = a(1,2) + b(-1,1) + c(2,3) \Leftrightarrow (a - b + 2c, 2a + b + 3c) = (x_1, x_2)$

$(*) \begin{cases} a - b + 2c = x_1 \\ 2a + b + 3c = x_2 \end{cases}$ $\quad A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{array} \right) \Bigg| \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array}$

$rg\, A = 2 = rg\, \bar{A} \Rightarrow (*)$ este sistem compatibil nedeterminat $\Rightarrow \exists\, a, b, c \in \mathbb{R}$ a.î. $\mathbb{R}^2 = \langle S \rangle$

b) Fie $B = S \setminus \{(2,3)\} = \{(1,2), (-1,1)\}$

$rg \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow B$ este SLI
(are rangul maxim posibil)

dar $|B| = 2 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow B$ este o bază în $\mathbb{R}^2$.

Un reper este o bază ordonată (canonică)

$R = \{e_1, \dots e_n\}$

ex: $B_0 = \{(1,0), (0,1)\} = \{e_1, e_2\} = R$, reper în $\mathbb{R}^2$.

Def: Fie $(V, +, \cdot)/_{\mathbb{K}}$ sp. vect. finit generat, $n = \dim_{\mathbb{K}} V$, $R = \{e_1, e_2, \dots e_n\}$ reper în V. Atunci $\forall x \in V, \exists! (x_1, \dots x_n) \in \mathbb{K}^n$

– coordonatele / componentele lui x în raport cu R.

a.î. $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

Ex 3: $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)/_{\mathbb{R}}$ $\quad R = \{(1,1), (2,3)\}$

a) R reper

b) Să se afle coordonatele lui $x = (-1, 2)$ în raport cu R.

Rezolvare:

$R = \{(1,1), (2,3)\} \underset{CLI}{\Rightarrow} C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} rg\, C = 2 \text{ (maxim)} \Rightarrow R \text{ este SLI} \\ \text{dar } |R| = 2 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 \end{array}\right\} \Rightarrow R$ reper.

CLI (criteriul de liniar-independență):

$(V, +, \cdot)_{/\mathbb{K}}$ sp vect, $n = \dim_{\mathbb{K}} V$

$S = \{v_1, \dots, v_m\} \subset V$ sist. de vect., $m \le n$.

$S \neq \emptyset$

$\Rightarrow S$ este SLI $\Leftrightarrow$ matricea componentelor vectorilor din S în raport cu $\forall$ reper din V are rang maxim $= m$.

b) $(-1, 2) = a(1,1) + b(2,3)$

$\begin{cases} a + 2b = -1 \\ a + 3b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = 2 - 9 = -7 \end{cases}$

$(-7, 3)$ = coordonatele în raport cu R.

Operații cu subspații vectoriale

Teorie: $(V, +, \cdot)_{/\mathbb{K}}$ sp. vect., $V' \subset V$ ssp vect. $\neq \emptyset$

$\Leftrightarrow$ 1) $\forall x, y \in V' \Rightarrow x + y \in V'$ (închiderea la adunare)

2) $\forall \alpha \in \mathbb{K}$
$\forall x \in V' \Rightarrow \alpha x \in V'$ (închiderea la înmulțirea cu scalari)

$\Leftrightarrow$ $\forall x, y \in V'$
$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \Rightarrow \alpha x + \beta y \in V'$

Subspațiile vectoriale sunt închise la adunare și la înmulțirea cu scalari!

Prop: $(V, +, \cdot)_{/\mathbb{K}}$ sp. vect, $V_1, V_2 \subset V$ subspații vect $\Rightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \text{subspațiu vect.}}}{V_1 \cap V_2 \subset V}$

Obs: În general, $V_1 \cup V_2 \subset V$ nu este ssp vect. Considerăm $\langle V_1 \cup V_2 \rangle \overset{not}{=} V_1 + V_2$.

$V_1 + V_2 = \{ v_1 + v_2 \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2 \}$

Def: Suma $V_1 + V_2$ s.n. <u>sumă directă</u> și se notează $V_1 \oplus V_2 \Leftrightarrow V_1 \cap V_2 = \{ 0_V \}$

$(V, +, \cdot)_{/\mathbb{K}}$, $V_1, V_2 \subseteq V$ - 2 ssp vect. Suma $V_1 + V_2$ este directă $(V_1 \oplus V_2) \Leftrightarrow \forall v \in V_1 + V_2$, $\exists! \begin{matrix} v_1 \in V_1 \\ v_2 \in V_2 \end{matrix}$ a.î. $v = v_1 + v_2$.

<u>Teorema Grassman</u>; Fie $(V, +, \cdot)_{/\mathbb{K}}$ sp. vect, $V_1, V_2 \subset V$ subspații vect $\Rightarrow \dim_{\mathbb{K}}(V_1 + V_2) = \dim_{\mathbb{K}} V_1 + \dim_{\mathbb{K}} V_2 - \dim_{\mathbb{K}}(V_1 \cap V_2)$.

Obs:

a) $(V, +, \cdot)_{/\mathbb{K}}$, $V_1, V_2 \subseteq V$ ssp. vect. Dacă $V = V_1 \oplus V_2$, atunci $R = R_1 \cup R_2$ reper în V, unde R_i reper în V_i, $i = \overline{1,2}$.

b) $(V, +, \cdot)_{/\mathbb{K}}$, R reper în V. Partiționăm $R = R_1 \cup R_2$.

Fie $V_i = \langle R_i \rangle$, $i = \overline{1,2} \Rightarrow V = V_1 \oplus V_2$.

c) $(V, +, \cdot)_{/\mathbb{K}}$, $V_1, V_2 \subseteq$ ssp vect. Dacă $V = V_1 \oplus V_2$, atunci V_2 = ssp complementar lui V_1 și V_1 = ssp complementar pentru V_2.

Ex 1: $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)/\mathbb{R}$

$V_1 = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \{x(1,0,0) + y(0,1,0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

$V_2 = \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \{z(0,0,1),\ z \in \mathbb{R}\}$

$V_2' = \{(t, t, t) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{t(1,1,1),\ t \in \mathbb{R}\}$

Arătați că $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2 = V_1 \oplus V_2'$.

Rezolvare:

$R_0 = \{e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0),\ e_3 = (0,0,1)\}$ reper canonic în $\mathbb{R}^3$.

$rg\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \{e_1, e_2\}$ SLI

$\langle\{e_1, e_2\}\rangle = V_1$ $\Rightarrow R_1 = \{e_1, e_2\}$ reper în V_1.

$R_2 = \{e_3\}$ reper în V_2.

$R_0 = R_1 \cup R_2 \Rightarrow \mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$

$R_2' = \{(1,1,1)\}$ reper în V_2'.

$R = R_1 \cup R_2'$ reper în $\mathbb{R}^3$. demonstrăm:

$rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow R$ este SLI

dar $|R| = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow R$ este reper în $\mathbb{R}^3$.

$\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2'$.

Teorie: $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$

$S(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid AX = O_{m,1}\}$, $X_{n,1}$

mulțimea soluțiilor sistemului liniar și omogen al lui A.

a) $S(A) \subseteq \mathbb{R}^n$ este un ssp vect. al $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)/\mathbb{R}$.

b) $\dim_{\mathbb{R}} S(A) = n - rg(A)$

Ex 2: $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)/\mathbb{R}$

$$V' = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \right\}$$

intersecția a 2 plane = o dreaptă

a) Dem. că $V' \subset \mathbb{R}^3$ ssp vect.

b) $\dim V' = ?$

c) Reper în V'

Rezolvare:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$rg\, A = 2$ = rangul maxim $\Rightarrow S(A) = V' \Rightarrow V' \subset \mathbb{R}^3$.

b) $\dim V' = 3 - rg\, A = 3 - 2 = 1$ (V' este o dreaptă, i.e V' este unidimensională)

c) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = -x_3 \\ x_1 + x_2 = 2x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 = x_3 \\ x_1 + x_2 = 2x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}x_3 \\ x_2 = 2x_3 - \frac{1}{3}x_3 = \frac{5}{3}x_3 \end{cases}$

$V' = \{(\frac{1}{3}x_3, \frac{5}{3}x_3, x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R}\} = \{\frac{x_3}{3}(1, 5, 3) \mid x_3 \in \mathbb{R}\}$

$R = \{(1, 5, 3)\}$ (un vector, fiindcă $\dim V' = 1$)

$\left.\begin{array}{l} R \text{ este SL} \\ |R| = \dim V' = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow R$ este reper.

Aplicații liniare

Teorie: Fie $(V_1, +, \cdot)_{/\mathbb{K}}$, $(V_2, +, \cdot)_{/\mathbb{K}}$ 2 spații vect.

$f: V_1 \to V_2$ s.n. aplicație liniară (sau morfism de spații vectoriale) $\Leftrightarrow$

1) $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in V_1$

2) $f(\alpha x) = \alpha f(x)$, $\forall x \in V_1$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$

Prop: $f: V_1 \to V_2$ apl. liniară $\Leftrightarrow f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$

$\forall x, y \in V_1$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Def: $f: V_1 \to V_2$ s.n. izomorfism de sp. vect. $\Leftrightarrow$

1) f apl. liniară

2) f este bijecție

Def: $(V, +, \cdot)_{/\mathbb{K}}$

1) $f: V \to V$ s.n. endomorfism de spații vect. $\Leftrightarrow f$ e aplicație liniară

2) $f: V \to V$ s.n. automorfism de spații vect. $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ este endomorfism de spații vect.} \\ f \text{ este bijecție} \end{cases}$

Def: $f: V_1 \to V_2$ apl. liniară.

a) $\underset{\text{nucleul lui } f}{\mathrm{Ker}\, f} = \{x \in V_1 \mid f(x) = 0_{V_2}\} = f^{-1}\{0_{V_2}\}$

b) $\underset{\text{imaginea lui } f}{\mathrm{Im}\, f} = \{y \in V_2 \mid \exists x \in V_1 \text{ a.î. } f(x) = y\}$

Prop: a) $\mathrm{Ker}\, f \subset V_1$ ssp vect

b) $\mathrm{Im}\, f \subset V_2$ ssp vect.

Ex1: $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)/\mathbb{R}$, $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$f(x) = (x_1 + x_2 - x_3,\ x_1 + x_2,\ x_1 + x_2 + x_3)$

a) f liniară

b) $\mathrm{Ker}\, f$, $\mathrm{Im}\, f$ = ?

c) Precizați câte un reper în $\mathrm{Ker}\, f$, $\mathrm{Im}\, f$.

Rezolvare:

a) $f(ax + by) = af(x) + bf(y)$

Demonstrăm:

$f(ax+by) = (ax_1 + by_1 + ax_2 + by_2 - (ax_3 + by_3),$
$ax_1 + by_1 + ax_2 + by_2,\ ax_1 + by_1 + ax_2 + by_2 + ax_3 + by_3) =$
$= (a(x_1 + x_2 - x_3) + b(y_1 + y_2 - y_3),\ a(x_1 + x_2) + b(y_1 + y_2),$
$a(x_1 + x_2 + x_3) + b(y_1 + y_2 + y_3)) = af(x) + bf(y)$

b) $\mathrm{Ker}\, f = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) = 0_{\mathbb{R}^3}\}$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \qquad A = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \left| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right.$$

$\mathrm{rg}\, A = 2$

$\mathrm{Ker}\, f = S(A)$

$\dim \mathrm{Ker} f = 3 - 2 = 1.$

$$\begin{cases} x_2 - x_3 = -x_1 \\ x_2 = -x_1 \\ x_2 + x_3 = -x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_2 = -x_1 \end{cases}$$

$\mathrm{Ker}\, f = \{(x_1, -x_1, 0) \mid x_1 \in \mathbb{R}\} = \{x_1(1, -1, 0) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$

$R_1 = \{(1, -1, 0)\}$ reper în $\mathrm{Ker}\, f$.

b) $\operatorname{Im} f = \{ y \in \mathbb{R}^3 \mid \exists\, x \in \mathbb{R}^3$ a.î. $f(x) = y \}$

Fie $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} x_1 + x_1 - x_3 = y_1 \\ x_1 + x_2 = y_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = y_3 \end{cases} \quad (*) \qquad A = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \left| \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{array}\right.$$

(*) este sistem compatibil

$$\Delta p = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$\Delta c = \begin{vmatrix} 1 & -1 & y_1 \\ 1 & 0 & y_2 \\ 1 & 1 & y_3 \end{vmatrix} = 0, \text{ pentru ca } (*) \text{ să fie compatibil}$$

$$y_1 - y_2 + y_2 + y_3 = 0 \Leftrightarrow y_1 + y_3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & y_1 \\ 1 & 0 & y_2 \\ 1 & 1 & y_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & y_1 \\ 1 & 0 & y_2 \\ 2 & 0 & y_1 + y_3 \end{pmatrix}$$

$$y_1 + y_3 - 2y_2 = 0$$

Ker f e o dreaptă (dim Ker $f = 1$)

Im f e un plan (dim Im f = dim$_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3$ - dim Ker $f = 3 - 1 = 2$)

$$\operatorname{Im} f = \{ (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 \mid y_1 - 2y_2 + y_3 = 0 \} =$$

$$y_1 = 2y_2 - y_3$$

$$= \{ (2y_2 - y_3, y_2, y_3) \mid y_2, y_3 \in \mathbb{R} \} = \{ y_2 (2, 1, 0) + y_3 (-1, 0, 1) \mid y_2, y_3 \in \mathbb{R} \}.$$

$R_2 = \{ (2, 1, 0), (-1, 0, 1) \}$ este SG. pentru Im f.

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \text{ (maxim)} \overset{CLI}{\Rightarrow} R_2 \text{ e SLI}$$

$\Rightarrow R_2$ e reper în Im f.