Enunţuri:

1. Fie forma pătratică cu matricea coeficienţilor

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Diagonalizaţi forma pătratică. Este pozitiv definită?

2. Reduceţi forma pătratică

$$Q(\mathbf{x}) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$$

la forma forma canonică.

3. Folosind metoda Jacobi, să se aducă forma biliniară

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2 + x_2y_2 + x_3y_3$$

la forma canonică.

4. (Temă) Să se arate că orice formă biliniară antisimetrică poate fi adusă la forma canonică

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3 + \dots$$

5. (Temă bonus) Fie $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ matricea unei forme pătratice pozitiv definite. Arătaţi că

$$\max_{i,j} |a_{ij}| < \max_{i} |a_{ii}|.$$

6. Fie V un spaţiu euclidian şi $L \subset V$. Să se arate

   (a) $(L^{\perp})^{\perp} = L$;

   (b) Dacă $L_1 \subset L_2$, atunci $L_2^{\perp} \subset L_1^{\perp}$;

   (c) $(L_1 + L_2)^{\perp} = L_1 \perp \cap L_2^{\perp}$;

   (d) $(L_1 \cap L_2)^{\perp} = L_1^{\perp} + L_2^{\perp}$.

7. (a) Fie $V \subset \mathbb{R}^3$, $V = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 | x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\right\}$. Determinaţi o bază în $V^{\perp}$.

   (b) Aceeaşi întrebare pentru $V = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 | x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, x_2 - x_3 = 0\right\}$

8. Să se scrie vectorul f ca suma dintre unul din spaţiul generat de vectorii b_i şi unul din complementul ortogonal al acestuia, unde:

$$f = (5, 2, -2, 2), b_1 = (2, 1, 1, -1), b_2 = (1, 1, 3, 0)$$
$$f = (-3, 5, 9, 3), b_1 = (1, 1, 1, 1), b_2 = (2, -1, 1, 1), b_3 = (2, -7, -1, -1)$$

Seminarul se va desfăşura pe 8x8 cu chat pe Zulip