

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlagen und Notation	3
1.1	Logik	4
1.2	Mengen und Abbildungen	9
1.3	Zahlen	16
2	Analysis Teil I	29
2.1	Einige elementare Ungleichungen	30
2.2	Folgen und Grenzwerte	32
2.3	Konvergenz von Reihen	46
3	Lineare Algebra	62
3.1	Vektorräume	63
3.2	Matrizen und der Gauß-Algorithmus	74
3.3	Die Determinante	87
3.4	Skalarprodukte	94
3.5	Eigenwertprobleme	100
4	Analysis Teil II	104
4.1	Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit	105
4.2	Differenzialrechnung	119
4.3	Das Riemann-Integral	130
5	Topologie in metrischen Räumen	148
5.1	Metrische und normierte Räume	149
5.2	Folgen, Reihen und Grenzwerte	153
5.3	Offene und abgeschlossene Mengen	158
5.4	Grenzwerte von Abbildungen	165
5.5	Stetigkeit	167
5.6	Konvergenz von Funktionenfolgen	173
6	Differenzialrechnung von Funktionen in mehreren Variablen	179
6.1	Lineare und Multilineare Abbildungen	180
6.2	Partielle und totale Differenzierbarkeit	189
6.3	Höhere Ableitungen	200
6.4	Funktionenfolgen und Differenzierbarkeit	205
6.5	Der Banachsche Fixpunktsatz und der Satz über implizite Funktionen	211

7	Gewöhnliche Differenzialgleichungen	221
7.1	Lösungsmethoden	222
7.2	Der Satz von Picard-Lindelöf	231
7.3	Lineare Systeme	238
8	Maße und Integrale	248
8.1	Inhalte und Maße	249
8.2	Integrale	259
8.3	Der Zusammenhang mit dem Riemann-Integral	274
8.4	Der Satz von Lebesgue	278
8.5	Produktmaße und der Satz von Fubini	282
9	Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik	287
9.1	Wahrscheinlichkeitsräume	288
9.2	Bedingte Wahrscheinlichkeit	293
9.3	Bildmaße	297
9.4	Zufallsgrößen	301
9.5	Konvergenz von Zufallsgrößen	307
9.6	Einführung in die Begriffe der mathematischen Statistik	312
10	Koordinatentransformationen und Integration über Untermannigfaltigkeiten	319
10.1	Diffeomorphismen	320
10.2	Der Transformationssatz	323
10.3	Eingebettete Mannigfaltigkeiten	333
10.4	Differenzierbare Abbildungen und der Tangentenraum	341
10.5	Alternierende Formen	349
10.6	Differentialformen	361
10.7	Integration über Mannigfaltigkeiten	371
10.8	Der Satz von Stokes	389
10.9	Riemannsche Mannigfaltigkeiten	395
11	Funktionalanalysis	404
11.1	Hilberträume	405
11.2	Lineare Operatoren	423
11.3	Stetig invertierbare Operatoren	439
11.4	Der Satz von Stone-Weierstraß und der stetige Funktionenkalkül	448
12	Partielle Differenzialgleichungen	461
12.1	Einführung	462
12.2	Harmonische Funktionen	465
12.3	Distributionen und Fundamentallösungen	473
12.4	Die Fouriertransformation	490

1 Grundlagen und Notation

1.1 Logik

Das Hauptziel dieses Abschnitts ist es, Notation einzuführen, die wir in den kommenden Semestern ständig benutzen werden. Es handelt sich also um einen Art „Vokabelteil“ der Vorlesung. Es gibt in (mathematischer) Logik und Mengenlehre tiefe und überraschende Resultate, mit denen wir uns jedoch – zumindest zunächst – nicht befassen werden.

Da wir keinen vollständigen Kurs in Logik und Beweistheorie absolvieren wollen, wird dieser Abschnitt mehr Ungenauigkeiten und Halbwahrheiten enthalten als wir uns üblicherweise erlauben wollen. Einige Definitionen in diesem Abschnitt werden notgedrungen etwas unscharf bleiben. So zum Beispiel der folgende Begriff der Aussage: Eine Aussage ist ein Satz (mathematisch oder anderweitig), der (im Prinzip) wahr oder falsch sein kann. Dabei geht es zunächst nicht darum, ob der Satz tatsächlich wahr oder falsch ist (was je nach Kontext unterschiedlich sein kann), sondern nur darum, dass es prinzipiell möglich ist ihm einen Wahrheitswert zuzuschreiben.

Beispiel 1.1. Aussagen:

- Morgen ist Montag.
- $x > 1$ (für eine natürliche Zahl x)
- Bei Vollmond sprießen grüne Hasen im Meer.
- Wenn es den Weihnachtsmann gibt, dann versteckt er zu Ostern die Eier.

keine Aussagen:

- Was ist eine Aussage?
- $x + 20y$ (für natürliche Zahlen x und y)
- Dieser Satz ist falsch.

Bemerkung 1.2. (i) Im folgenden wollen wir vorwiegend mathematische Beispielaussagen verwenden, dummerweise stehen uns aber zu diesem Zeitpunkt noch keine mathematischen Inhalte zur Verfügung. Wir werden daher bis auf Weiteres wie oben geschehen die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ mit den üblichen arithmetischen Operationen und der üblichen Ordnungsrelation für Beispiele verwenden auch wenn wir streng genommen noch nicht wissen was das sein soll.

- (ii) Aussagen (sowohl alltagssprachliche als auch mathematische) können unsinnig sein (und zwar selbst dann wenn sie wahr sind).
- (iii) Aussagen (und damit deren Wahrheitswert) können von Variablen abhängen.

Wir können nur mittels logischer Operationen (sogenannter Junktoren) aus einfachen Aussagen neue, komplexere Aussagen bilden:

Definition 1.3. Seien Φ und Ψ Aussagen, dann sind auch die folgenden Ausdrücke Aussagen (in Klammern die Alltagssprachliche Umschreibung):

- (i) $\neg\Phi$ (nicht Φ),
- (ii) $\Phi \wedge \Psi$ (Φ und Ψ),
- (iii) $\Phi \vee \Psi$ (Φ oder Ψ),
- (iv) $\Phi \longrightarrow \Psi$ (aus Φ folgt Ψ),
- (v) $\Phi \longleftrightarrow \Psi$ (Φ genau dann wenn Ψ).

Ihre Bedeutung erhalten diese logischen Operationen durch die folgenden Wahrheitswerttabellen, die den Wahrheitswert des zusammengesetzten Ausdrucks in Abhängigkeit des Wahrheitswertes der einzelnen Bestandteile wiedergeben:

		Φ		$\neg\Phi$	
		w	f	f	w
		f	w	w	f
Φ	Ψ	$\Phi \wedge \Psi$	$\Phi \vee \Psi$	$\Phi \longrightarrow \Psi$	$\Phi \longleftrightarrow \Psi$
w	w	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	f	w	w	f
f	f	f	f	w	w

Bemerkung 1.4. Oben verwenden wir Φ und Ψ als Variablen so wie zuvor bereits in den Beispielen x und y . Variablen sind Platzhalter für Objekte eines ganz bestimmten Typs (das ist wiederum etwas ungenau, soll aber hier genügen). Wir verwenden meist lateinische oder griechische Buchstaben dafür. Für welches Objekt eine Variable steht bleibt häufig während des gesamten Arguments unbestimmt (es interessiert uns oben nicht welche Aussagen sich genau hinter Φ und Ψ verbergen), es ist jedoch stets notwendig den Typ des Objektes zu kennen (es ist entscheidend, dass Φ und Ψ Aussagen sind, andernfalls ergeben die Wahrheitswerttabellen keinen Sinn) da es vom Typ der Variablen abhängt, ob ein mathematischer Ausdruck sinnvoll ist oder nicht. Ähnlich wie in vielen Programmiersprachen sollten Variablen in mathematischen Argumenten daher stets „deklariert“ – also ihr Typ festgelegt – werden.

Einige weitere Bemerkungen zu obiger Tabelle:

Bemerkung 1.5. (i) Das mathematische „oder“ \vee wird stets als „inclusives oder“ interpretiert ($\Phi \vee \Psi$ ist wahr auch dann, wenn Φ , Ψ beide wahr sind) welches alltags-sprachlich manchmal als „und/oder“ geschrieben wird. Das gilt auch dann wenn wir es in Alltagssprache aufschreiben. Ein mathematischer Satz „Aus Voraussetzung A folgt B oder C .“ bedeutet also stets, dass falls A erfüllt ist, auch B oder C oder beide erfüllt sind.

- (ii) Die Wahrheitstabelle für $\Phi \rightarrow \Psi$, $\Psi \rightarrow \Phi$ und $\Phi \leftrightarrow \Psi$ unterscheiden sich. Das wird an sehr einfachen Beispielen offensichtlich:

$$x > 1 \rightarrow x + y > 1$$

ist für alle natürlichen Zahlen x und y wahr, die Umkehrung

$$x + y > 1 \rightarrow x > 1$$

jedoch falsch falls $x = 1$ ist.

Entsprechende Fehler treten jedoch sehr häufig auf es wird also statt „Aus A folgt B .“ der Satz „Aus B folgt A .“ bewiesen oder in einem mathematischen Argument statt des bekannten Satzes „Aus C folgt D .“ der (möglicherweise falsche) Satz „Aus D folgt C .“ verwendet.

- (iii) Ist die Voraussetzung Φ einer Implikation falsch, dann ist die Implikation $\Phi \rightarrow \Psi$ unabhängig von Ψ wahr. („Aus Falschem folgt Beliebiges.“) Nimmt man auch nur eine einzige falsche Aussage als wahr an, dann kann damit jede beliebige Aussage als wahr bewiesen werden, was natürlich jeden Versuch sinnvoller Mathematik ad absurdum führen würde. Diese Darstellung ist extrem verkürzt. Das sich dahinter verbergende Problem ist die Konsistenz mathematischer Theorien, worauf wir jedoch hier nicht näher eingehen.

Mit Hilfe der logischen Operationen können nun beliebig komplexe logische Ausdrücke zusammengesetzt werden. Dabei wird es häufig nötig sein Klammern zu setzen, um Ausdrücke eindeutig interpretieren zu können (die Wahrheitstabelle für $(\neg\Phi) \rightarrow \Psi$ und $\neg(\Phi \rightarrow \Psi)$ zum Beispiel unterscheiden sich). Um die Zahl der Klammern in einem erträglichen Maß zu halten führen wir eine Rangfolge der entsprechenden Operationen ein, ähnlich der Regel „Punktrechnung vor Strichrechnung“. Wir sagen, dass \neg stärker bindet als \wedge und \vee und diese wiederum stärker als \rightarrow und \leftrightarrow .

Beispiel 1.6. Die unten stehenden Ausdrücke werden also folgendermaßen interpretiert:

$$\begin{array}{ll} \neg\Phi \wedge \Psi & (\neg\Phi) \wedge \Psi \\ \neg\Phi \rightarrow \Psi & (\neg\Phi) \rightarrow \Psi \\ \Phi \wedge \Psi \leftrightarrow \Psi & (\Phi \wedge \Psi) \leftrightarrow \Psi \\ \neg\Phi \vee \neg\Psi \rightarrow \neg\Psi \wedge \Psi & ((\neg\Phi) \vee (\neg\Psi)) \rightarrow ((\neg\Psi) \wedge \Psi). \end{array}$$

Wir führen keine Reihenfolge zwischen \wedge und \vee beziehungsweise \rightarrow und \leftrightarrow ein, das heißt wir wollen Ausdrücke wie $\Phi \wedge \Psi \vee \Phi$ vermeiden.

Sehen wir uns die Wahrheitstabelle für einige komplexere Ausdrücke an.

Φ	Ψ	$\neg\Psi \rightarrow \neg\Phi$	$(\Phi \rightarrow \Psi) \wedge (\Psi \rightarrow \Phi)$	$\Phi \rightarrow \Phi \vee \Psi$	$\Phi \rightarrow \Psi$	$\Phi \leftrightarrow \Psi$
w	w	w	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	w	w	w	w

Die 3. und die vorletzte Spalte der Tabelle stimmen überein (genau wie die 4. und die letzte Spalte). Das heißt die Wahrheitswerte der entsprechenden Aussagen stimmen für beliebige der Wahrheitswerte von Φ und Ψ überein. Man nennt solche Aussagen logisch äquivalent. Die Aussage $\Phi \longrightarrow \Phi \wedge \Psi$ ist, unabhängig von Φ und Ψ immer wahr. Solche Aussagen bezeichnen wir als Tautologien. Wir werden logische Äquivalenzen häufig verwenden ohne explizit darauf hinzuweisen. So kann zum Beispiel die Aussage „aus A folgt B “ bewiesen werden, indem gezeigt wird „gilt B nicht, so gilt auch A nicht“. Man kann stets einen logischen (Teil-)Ausdruck durch einen äquivalenten Ausdruck ersetzen, wir können logische Äquivalenzen also als „Rechenregeln“ für die logischen Operationen ansehen.

Es folgen einige dieser Rechenregeln (Übung). Zunächst können wir alle logischen Operationen durch lediglich \neg und \wedge ausdrücken:

$$\begin{aligned}(\Phi \longrightarrow \Psi) \wedge (\Psi \longrightarrow \Phi) &\text{ äquivalent } \Phi \longleftrightarrow \Psi \\ \neg\Phi \vee \Psi &\text{ äquivalent } \Phi \longrightarrow \Psi \\ \neg(\neg\Phi \wedge \neg\Psi) &\text{ äquivalent } \Phi \vee \Psi.\end{aligned}$$

Es gelten die de Morganschen Gesetze:

$$\begin{aligned}\neg(\Phi \wedge \Psi) &\text{ äquivalent } \neg\Phi \vee \neg\Psi \\ \neg(\Phi \vee \Psi) &\text{ äquivalent } \neg\Phi \wedge \neg\Psi\end{aligned}$$

Sowohl \wedge als auch \vee verhalten sich kommutativ

$$\begin{aligned}\Phi \wedge \Psi &\text{ äquivalent } \Psi \wedge \Phi \\ \Phi \vee \Psi &\text{ äquivalent } \Psi \vee \Phi\end{aligned}$$

und assoziativ

$$\begin{aligned}\Phi \wedge (\Psi \wedge \Theta) &\text{ äquivalent } (\Phi \wedge \Psi) \wedge \Theta \\ \Phi \vee (\Psi \vee \Theta) &\text{ äquivalent } (\Phi \vee \Psi) \vee \Theta.\end{aligned}$$

außerdem gelten die Distributivgesetze

$$\begin{aligned}\Phi \wedge (\Psi \vee \Theta) &\text{ äquivalent } (\Phi \wedge \Psi) \vee (\Phi \wedge \Theta) \\ \Phi \vee (\Psi \wedge \Theta) &\text{ äquivalent } (\Phi \vee \Psi) \wedge (\Phi \vee \Theta).\end{aligned}$$

Wie wir oben gesehen haben, können Aussagen von Variablen abhängen. Damit eröffnet sich eine weitere Möglichkeit komplexere Aussagen zu erhalten mittels sogenannter Quantoren.

Definition 1.7 (Quantoren). Sei $\Phi(x)$ eine von x abhängige Aussage. Dann sind auch $\forall x\Phi(x)$ und $\exists x\Phi(x)$ Aussagen. Wir interpretieren sie als „für jedes x gilt $\Phi(x)$ “ beziehungsweise „es gibt ein x , so dass $\Phi(x)$ “. Wir bezeichnen \forall als „Allquantor“ und \exists als „Existenzquantor“. Manchmal wird $\exists!$ für „es existiert genau ein x “ verwendet.

Bemerkung 1.8. (i) Der Wahrheitswert einer Aussage mit Quantoren hängt davon ab, was die möglichen Werte für die Variable x sind (wir sprechen vom Wertebereich oder Universum). Die Aussage $\forall x \quad x > 0$ zum Beispiel ist für die natürlichen Zahlen wahr, für die ganzen Zahlen jedoch falsch. In den meisten Fällen werden wir den Wertebereich explizit angeben wie wir später sehen werden.

(ii) Für ein unendliches Universum kann man nicht mehr algorithmisch überprüfen ob Aussagen mit Quantoren wahr sind. Um $\forall x \Phi(x)$ zu verifizieren, müssten wir ja alle (unendlich vielen) möglichen Werte von x durchprobieren, was in endlicher Zeit nicht möglich ist. Ob solche Aussagen wahr oder falsch sind, können wir also im Allgemeinen nur mit Hilfe von Beweisen feststellen.

(iii) Der Name der Variablen im „Wirkungsbereich“ eines Quantors (einer sogenannten gebundenen Variablen) spielt keine Rolle. Die Aussagen $\forall x \Phi(x)$ und $\forall y \Phi(y)$ sind äquivalent. Aussagen können natürlich auch von mehreren Variablen abhängen. Um Mehrdeutigkeiten im Ausdruck $\forall x \Phi(x)$ zu vermeiden, muss darauf geachtet werden, dass in $\Phi(x)$ nicht bereits über x quantifiziert wird (wir sagen x ist eine freie Variable in $\Phi(x)$). Ausdrücke wie

$$\exists x \forall x \quad x > x$$

sind also nicht erlaubt. Dadurch werden die möglichen Ausdrücke nicht eingeschränkt, da wir gebundene Variablen im Zweifel stets umbenennen können.

(iv) Quantoren gleicher Art können vertauscht werden ohne den logischen Inhalt der Aussage zu ändern, wir dürfen jedoch nicht \forall und \exists vertauschen. Die Aussagen $\forall x \forall y \quad x > y$ und $\forall y \forall x \quad x > y$ sind gleich, die Aussagen

$$\begin{aligned} \forall x \exists y \quad y > x \text{ und} \\ \exists y \forall x \quad y > x \end{aligned}$$

unterscheiden sich.

Für die Natürlichen Zahlen beispielsweise ist die erste Aussage wahr, die zweite falsch.

(v) Im Prinzip genügt einer der Quantoren, da die Aussagen

$$\forall x \quad \Phi(x) \text{ und } \neg \exists x \quad \neg \Phi(x)$$

den gleichen Sachverhalt ausdrücken (analog für $\exists x \quad \Phi(x)$ und $\neg \forall x \quad \neg \Phi(x)$).

1.2 Mengen und Abbildungen

Definition 1.9. Eine Menge ist ein gedanklicher „Behälter“ für beliebige (mathematische) Objekte. Für eine Menge A interpretieren wir die Aussage $x \in A$ als „ x ist ein Element von A oder x ist enthalten in A “. Für $\neg x \in A$ schreiben wir abkürzend $x \notin A$.

Ähnlich wie „Zahl“ ist auch „Menge“ ein abstraktes Konzept. Mengen besitzen also keine „natürlichen“ Eigenschaften. Vielmehr legen wir fest, welche Eigenschaften Mengen unserer Meinung nach haben sollten und untersuchen dann, welche logischen Konsequenzen daraus folgen. Das kann vollständig formal mittels gewisser Axiomensysteme der Mengenlehre geschehen, wir werden Mengen hier jedoch nur informell beschreiben. Große Teile der Mathematik (insbesondere alles was wir in diesem Kurs besprechen werden) können formuliert werden indem man ausschließlich die Sprache der Mengenlehre verwendet. Das heißt alle mathematischen Objekte sind spezielle Mengen, alle Elemente von Mengen sind selbst Mengen und alle Eigenschaften und Beziehungen von mathematischen Objekten untereinander werden mittels der \in -Relation ausgedrückt. Diese Darstellung ist jedoch weder besonders intuitiv noch erhellend und wir werden sie daher nur am Rande erwähnen.

Die obige Definition ist genaugenommen nicht korrekt. Mengen können nicht beliebige Objekte zusammenfassen, die Betrachtung der Menge aller Mengen zum Beispiel führt unweigerlich zu Widersprüchen. Entscheidend ist jedoch, dass Mengen unendlich viele Objekte enthalten können (was für tatsächliche physische Behälter unmöglich ist).

Wir spezifizieren Mengen üblicherweise auf die folgende Art:

- (i) \emptyset bezeichnet die leere Menge, also die Menge ohne Elemente. Es gibt genau ein solches Objekt und $x \in \emptyset$ ist falsch für beliebiges x . (Die Existenz eines solchen Objektes muss in der formalen Darstellung durch ein Axiom sichergestellt werden: $\exists x \quad \forall y \quad y \notin x$.)
- (ii) Endliche Mengen können wir durch Aufzählung der Elemente angeben, z. B.

$$\{1, 3, 7, 20\}.$$

- (iii) Häufig wollen wir aus einer bereits bekannten Menge A diejenigen Elemente auswählen die eine bestimmte Eigenschaft besitzen (die x , so dass $\Phi(x)$ wahr ist). Dazu verwenden wir die Notation

$$\{x \in A \mid \Phi(x)\}.$$

Dabei muss $\Phi(x)$ eine Aussage mit einer einzigen freien Variablen x sein (für jede Wahl von x ist damit $\Phi(x)$ entweder wahr oder falsch). Die folgende Menge bezeichnet beispielsweise die geraden Zahlen:

$$\left\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{x}{2} \in \mathbb{N}\right\}.$$

Zwischen Mengen A und B gibt es die folgenden Relationen:

- (i) A ist eine Teilmenge von B oder B ist eine Obermenge von A , geschrieben $A \subset B$ falls B alle Elemente von A enthält, falls also gilt

$$\forall x \quad x \in A \longrightarrow x \in B.$$

Daraus folgt insbesondere, dass die leere Menge Teilmenge jeder anderen Menge ist.

- (ii) A und B sind identisch, geschrieben $A = B$ falls A genau die selben Elemente wie B enthält, falls also gilt

$$\forall x \quad x \in A \longleftrightarrow x \in B.$$

Aus dieser Aussage folgt direkt, dass Mengen Elemente nicht „mehrfach“ enthalten können. Die Elemente einer Menge stehen auch nicht in einer festen Reihenfolge (auch wenn wir sie natürlich in irgendeiner Reihenfolge aufschreiben). Beispielsweise sind die Mengen

$$\{1, 3, 3, 7\} \quad \text{und} \quad \{3, 1, 7\}$$

gleich.

Darüber hinaus gibt es einige Operationen auf Mengen. Seien A, B wiederum Mengen.

- (i) Die Menge $A \cup B$ heißt Vereinigung von A und B und enthält genau die Elemente die in A oder B vorkommen also

$$x \in A \cup B \longleftrightarrow x \in A \vee x \in B.$$

Wir können auch Vereinigungen von mehr als zwei ($A \cup B \cup C$) oder sogar beliebig vielen Mengen betrachten. Sei dazu A eine Menge (von Mengen), dann ist

$$\bigcup_{C \in A} C$$

die Menge, deren Elemente genau die Elemente von mindestens einem $C \in A$ sind. Formal als Axiom aufgeschrieben können wir die Existenz dieses Objektes folgendermaßen ausdrücken:

$$\forall A \exists B \quad x \in B \longleftrightarrow (\exists C \quad x \in C \wedge C \in A).$$

- (ii) Die Menge $A \cap B$ heißt Durchschnitt von A und B . Sie enthält genau die Elemente, die sowohl in A als auch in B enthalten sind:

$$x \in A \cap B \longleftrightarrow x \in A \wedge x \in B.$$

Analog wie oben können wir auch Durchschnitte über mehr als zwei Mengen bilden:

$$\bigcap_{C \in A} C.$$

(Übung: Schreibe eine formale Aussage auf, die die Existenz des obigen Objektes postuliert.)

- (iii) Die Menge $A \setminus B$ heißt Differenz von A und B . Sie enthält genau die Elemente, die in A aber nicht in B enthalten sind:

$$x \in A \setminus B \longleftrightarrow x \in A \wedge x \notin B.$$

- (iv) Die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ ist die Menge aller Teilmengen von A . Für endliche Mengen können wir die Potenzmenge explizit aufschreiben:

$$\mathcal{P}(\{*, +\}) = \{\emptyset, \{*\}, \{+\}, \{*, +\}\}$$

Für unendliche Mengen (z.B. \mathbb{N}) existiert die Potenzmenge ebenfalls, wir können sie aber nicht mehr explizit aufschreiben und ihre Existenz ist weniger selbstverständlich. (Übung: Schreibe einen formalen Ausdruck auf, der die Existenz der Potenzmenge postuliert.)

Auch für die Mengenoperationen gibt es wieder einige „Rechenregeln“.

Satz 1.10. Seien A, B, C Mengen. Dann gelten die folgenden Gleichheiten:

$$\begin{aligned} A \setminus (B \cup C) &= (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \\ A \setminus (B \cap C) &= (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

Beweis. Man kann sich relativ einfach mittels Venn-Diagrammen von der Gültigkeit dieser Gleichheiten überzeugen. Das ist jedoch kein Beweis sondern lediglich eine Gedächtnisstütze. Wir werden hier nur die letzte Gleichheit formal beweisen, die anderen Beweise sind sehr ähnlich. Seien also A, B, C beliebige Mengen. Dann gilt

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) &\iff x \in A \wedge x \in B \cup C \\ &\iff x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \\ &\iff (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \\ &\iff x \in A \cap B \vee x \in A \cap C \\ &\iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C). \end{aligned}$$

Dabei haben wir in den ersten beiden Zeilen die Definitionen von Durchschnitt und Vereinigung verwendet, in der dritten Zeile eines der Distributivgesetze der Logik aus dem vorhergehenden Kapitel und schließlich wieder die Definitionen von Durchschnitt und Vereinigung verwendet. Wir haben also gesehen, dass $x \in A \cap (B \cup C)$ ist, genau dann wenn $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Da zwei Mengen gleich sind, wenn sie die gleichen Elemente enthalten muss die gesuchte Gleichheit gelten. \square

Definition 1.11. Seien A, B Mengen und $x \in A, y \in B$. Dann bezeichnet (x, y) das geordnete Paar aus x und y . Die einzelnen Einträge x, y werden in diesem Fall Koordinaten des Paares (x, y) genannt.

Die Menge aller möglichen geordneten Paare wird als das kartesische Produkt $A \times B$ von A und B bezeichnet:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}.$$

Bemerkung 1.12. (i) Das Paar (x, y) und die Menge $\{x, y\}$ sind unterschiedliche Objekte. Ersteres ist **geordnet**, letzteres ungeordnet. (Wir können jedoch geordnete Paare – so wie alle mathematischen Objekte – als Mengen darstellen zum Beispiel durch $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$.) Im Paar (x, y) gibt es ein erstes und ein zweites Element, was für die Menge $\{x, y\}$ keinen Sinn ergibt.

Die entscheidende Eigenschaft von Paaren ist

$$(x, y) = (a, b) \iff x = a \wedge y = b.$$

(ii) Analog zu Paaren können wir auch Tripel, Quadrupel und allgemeinere n -tupel von Objekten definieren. Zum Beispiel für A, B, C Mengen:

$$A \times B \times C := \{(x, y, z) \mid x \in A \wedge y \in B \wedge z \in C\}.$$

Für das Kartesische Produkt einer Menge mit sich selbst schreiben wir abkürzend

$$A^2 = A \times A \quad A^3 = A \times A \times A$$

und so weiter.

(iii) Im Beispiel \mathbb{R}^2 (\mathbb{R} die reellen Zahlen) können wir das Paar (x, y) als Koordinaten eines Punktes in der Ebene interpretieren und uns das kartesische Produkt entsprechend als diese Ebene vorstellen. Wir können jedoch kartesische Produkte beliebiger Mengen bilden und im Allgemeinen wird es keine gute bildliche Darstellung für diese geben.

Definition 1.13. Seien A und B Mengen. Eine Abbildung f ist eine Zuordnung, die jedem Element $x \in A$ **eindeutig** ein Element von B zuordnet, das wir als $f(x)$ schreiben. Die Menge A bezeichnen wir als Definitionsbereich, die Menge B als Wertebereich der Abbildung. Häufig geben wir Definitions- und Wertebereich an indem wir schreiben: Sei $f : A \rightarrow B$ eine Abbildung. Abbildungen deren Wertebereich Zahlen sind (\mathbb{N} , \mathbb{R} , \mathbb{C}) nennen wir Funktionen.

Beispiel 1.14. (i) Für endlichen Definitionsbereich können wir Abbildungen in Tabellenform angeben. Die folgende Tabelle beispielsweise ordnet einigen Katzen ihre Besitzer zu:

Katze	Besitzer
Mimi	Klara
Kitti	Klara
Paul	Paul

- (ii) Für unendlichen Definitionsbereich ist das natürlich nicht möglich und wir geben Abbildungen häufig durch Angabe von „Formeln“ an.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ n &\mapsto 2n + 1. \end{aligned}$$

Genaugenommen führen wir hier die Abbildung f auf bereits bekannte Abbildungen (Addition und Multiplikation) zurück.

- (iii) Funktionen müssen nicht immer so „schön“ sein wie im vorhergehenden Beispiel:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 0 & x \text{ rational} \\ 1 & x \text{ irrational.} \end{cases} \end{aligned}$$

- (iv) Die Addition natürlicher Zahlen ist eine Abbildung von $\mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$. Anstatt $f(n, m)$ schreiben wir in diesem Falle jedoch meist $n + m$.

- (v) Für jede Menge A gibt es die Identitätsabbildung

$$\begin{aligned} \text{id}_A : A &\rightarrow A \\ x &\mapsto x. \end{aligned}$$

Bemerkung 1.15. (i) Auch eine Abbildung $f : A \rightarrow B$ kann als spezielle Menge dargestellt werden. Sie ordnet allen Elementen des Definitionsbereichs eindeutig Elemente des Wertebereichs zu, die Abbildung wird also durch eine Teilmenge F von Paaren in $A \times B$ gegeben. Es repräsentiert jedoch nicht jede mögliche Teilmenge von $A \times B$ eine Abbildung sondern es muss gelten:

$$\begin{aligned} \forall x \in A \forall y \in B \forall z \in B \quad (x, y) \in F \wedge (x, z) \in F &\longrightarrow y = z \\ \forall x \in A \exists y \in B \quad (x, y) \in F. \end{aligned}$$

Die erste Zeile formalisiert die Eindeutigkeit der Zuordnung, die zweite Zeile sagt aus, dass jedem $x \in A$ ein Element zugeordnet wird.

Die Aussage $y = f(x)$ ist in dieser Darstellung abkürzende Schreibweise für $(x, y) \in F$. Häufig bezeichnet man die Menge F als den Graphen der Abbildung.

- (ii) Definitions- und Wertebereich sind integraler Bestandteil einer Abbildung. Die meisten Eigenschaften einer Abbildung hängen davon ab und nicht nur von der Abbildungsvorschrift. „Betrachte die Funktion $f(x) = x^2 \dots$ “ ist also nicht hinreichend präzise da hier viele verschiedene Definitionen und Wertebereiche möglich sind.
- (iii) Wir müssen unterscheiden zwischen der Abbildung f , welche die gesamte Zuordnungsvorschrift beschreibt und $f(x)$ welches lediglich ein Element in B ist.

- (iv) Zwei Funktionen $f, g : A \rightarrow B$ sind gleich, genau dann wenn $f(x) = g(x)$ für alle $x \in A$.

Beliebige Abbildungen können die folgenden Eigenschaften besitzen:

Definition 1.16. Eine Abbildung $f : A \rightarrow B$ heißt injektiv, falls jedes Element von B Bild höchstens eines Elementes von A ist, falls also gilt

$$\forall x, \tilde{x} \in A \quad f(x) = f(\tilde{x}) \longrightarrow x = \tilde{x}.$$

Eine Abbildung heißt surjektiv, falls jedes Element von B Bild mindestens eines Elementes von A ist, falls also gilt

$$\forall y \in B \exists x \in A \quad f(x) = y.$$

Eine Abbildung heißt bijektiv, falls sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

Beispiel 1.17. (i) Die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ n &\mapsto n^2 \end{aligned}$$

ist injektiv, aber nicht surjektiv.

(ii) Die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{N} \\ n &\mapsto n^2 \end{aligned}$$

ist weder injektiv noch surjektiv.

(iii) Die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ n &\mapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & n \text{ gerade} \\ \frac{n+1}{2} & n \text{ ungerade} \end{cases} \end{aligned}$$

ist surjektiv aber nicht injektiv.

Definition 1.18 (Verkettung). Seien A, B, C Mengen und $f : A \rightarrow B$ und $g : B \rightarrow C$ Abbildungen, dann ist die Verkettung oder Hintereinanderausführung $g \circ f$ von f und g die Abbildung

$$\begin{aligned} g \circ f : A &\rightarrow C \\ x &\mapsto g(f(x)). \end{aligned}$$

Bemerkung 1.19. Die Verkettung von Abbildungen ist assoziativ (Warum?), daher können wir Verkettungen von mehr als zwei Abbildungen ohne Klammern aufschreiben ($f \circ g \circ h$).

Für $f : A \rightarrow B$ und $g : B \rightarrow C$ ergibt die Verkettung in umgekehrter Reihenfolge nur Sinn, falls $C = A$ ist, aber selbst im Fall $A = B = C$ ist die Verkettung im Allgemeinen nicht kommutativ. Für $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ gegeben durch $f(n) = 2n$ und $g(n) = n + 3$ erhalten wir $f \circ g(n) = 2n + 6$ aber $g \circ f(n) = 2n + 3$.

Satz 1.20. *Sei $f : A \rightarrow B$ eine bijektive Abbildung, dann existiert genau eine Abbildung $f^{-1} : B \rightarrow A$, die sogenannte Umkehrabbildung, so dass*

$$f \circ f^{-1} = \text{id}_B \text{ und } f^{-1} \circ f = \text{id}_A.$$

Beweis. Sei $y \in B$ beliebig. Da f surjektiv ist, existiert $x \in A$ so, dass $f(x) = y$. Dieses x ist eindeutig bestimmt denn falls $f(\tilde{x}) = y$ für ein $\tilde{x} \in A$, dann gilt

$$f(x) = y = f(\tilde{x})$$

und wegen der Injektivität $x = \tilde{x}$.

Wir können also definieren: $f^{-1}(y) = x$ genau dann wenn $f(x) = y$ (für alle $x \in A$ und $y \in B$). Das heißt der Graph von f^{-1} ergibt sich als

$$\{(y, x) \in B \times A \mid (x, y) \text{ ist im Graphen von } f\}.$$

Es folgt dann einerseits

$$f \circ f^{-1}(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y = \text{id}_B(y).$$

Da das für alle $y \in B$ gilt, ist $f \circ f^{-1} = \text{id}_B$.

Ist andererseits $x \in A$ beliebig, dann gilt offensichtlich $f(x) = f(x)$ und damit nach Definition von f^{-1}

$$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = x = \text{id}_A(x).$$

Da x wiederum beliebig ist folgt $f^{-1} \circ f = \text{id}_A$. □

Die Umkehrung dieses Satzes gilt ebenfalls (Übung).

1.3 Zahlen

Ziel dieses Abschnitts ist es, die reellen Zahlen formal einzuführen. Sie bilden die Grundlage für alles Folgende. Es geht hier nicht darum neue Geheimnisse über die reellen Zahlen zu enthüllen, sondern darum festzulegen, was wir über die reellen Zahlen voraussetzen – und was nicht. Das geschieht, indem wir eine Reihe von Forderungen – sogenannten Axiomen – aufschreiben, die die reellen Zahlen erfüllen sollen.

Die reellen Zahlen sind eine Menge \mathbb{R} mit den folgenden Strukturen:

(i) Addition

Mit $+$ wird eine Abbildung von $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichnet. Abweichend von der üblichen Notation für Abbildungen schreiben wir $a + b$ statt $+(a, b)$.

(ii) Multiplikation

Mit \cdot wird eine weitere Abbildung von $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichnet. Wir schreiben $a \cdot b$ oder auch ab statt $\cdot(a, b)$.

(iii) Ordnungsrelation

Mit \leq wird eine Relation auf \mathbb{R} bezeichnet, das heißt $x \leq y$ ist eine Aussage die – in Abhängigkeit von x und y – wahr oder falsch sein kann. (Genau genommen handelt es sich um eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und wir verwenden $x \leq y$ als abkürzende Schreibweise für $(x, y) \in M$.)

An die Strukturen stellen wir nun eine Reihe von Anforderungen die wir Axiome nennen.

A1 Assoziativität

Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt

$$(x + y) + z = x + (y + z).$$

A2 Existenz eines neutralen Elements (der Addition)

Es gibt ein Element 0 , so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $x + 0 = x$.

A3 Existenz eines inversen Elements (der Addition)

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert $-x \in \mathbb{R}$, so dass $x + (-x) = 0$ gilt.

A4 Kommutativität

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $x + y = y + x$.

Aus diesen Axiomen können wir nun bereits die ersten Schlussfolgerungen ziehen. Da es sich hierbei um sehr einfache Aussagen handelt, die uns seit langem bekannt sind, liegt die Schwierigkeit bei diesen Beweisen darin, tatsächlich lediglich die Axiome zu verwenden und nicht irgendwelche weiteren Informationen die uns über die reellen Zahlen bekannt sind.

Satz 1.21. Seien $x, y \in \mathbb{R}$.

- (i) Das neutrale Element ist eindeutig bestimmt.
- (ii) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist das inverse Element eindeutig bestimmt.
- (iii) Es gilt $-(-x) = x$.
- (iv) Es gilt $-(x + y) = -x + (-y)$.

Beweis. (i) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ zwei neutrale Elemente, das heißt es gilt $x + a = x = x + b$ für jedes $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt insbesondere $b + a = b$ und $a + b = a$. Mit der Kommutativität folgt dann $a = b$.

(ii) Seien nun c, d inverse Elemente zu x , das heißt $x + c = 0 = x + d$. Es folgt

$$c = 0 + c = x + d + c = x + c + d = 0 + d = d.$$

(iii) Übung.

(iv) Es gilt

$$x + y + (-x + (-y)) = x + y + (-x) + (-y) = x + (-x) + y + (-y) = 0 + 0 = 0.$$

Da das inverse Element eindeutig bestimmt ist folgt daraus $-(x + y) = -x + (-y)$.
 \square

Üblicherweise schreiben wir $x - y$ statt $x + (-y)$. Die Existenz des inversen Elements erlaubt es uns, Summanden von einer Seite einer Gleichung auf die andere zu schreiben wie im Beispiel

$$\begin{aligned}x + 4 &= 3 \\x + 4 + (-4) &= 3 + (-4) \\x + 0 &= 3 + (-4) \\x &= 3 + (-4).\end{aligned}$$

Analoge Axiome fordern wir auch für die Multiplikation.

M1 Assoziativität

Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt

$$(xy)z = x(yz).$$

M2 Existenz eines neutralen Elements (der Multiplikation)

Es gibt ein Element 1, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $x \cdot 1 = x$.

M3 Existenz eines inversen Elements (der Multiplikation)

Für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existiert $x^{-1} \in \mathbb{R}$, so dass $xx^{-1} = 1$.

M4 Kommutativität

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $xy = yx$.

Übung: Formuliere und beweise die zu Satz 1.21 äquivalenten Aussagen für die Multiplikation.

Die Addition und die Multiplikation sollen auf die folgende Art kompatibel sein.

R1 Distributivität

Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt

$$x(y + z) = xy + xz.$$

R2 \mathbb{R} ist nicht trivial

$$0 \neq 1$$

Satz 1.22. Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$(i) \quad x \cdot 0 = 0,$$

$$(ii) \quad -(x \cdot y) = (-x) \cdot y = x \cdot (-y),$$

$$(iii) \quad (-x)(-y) = xy,$$

$$(iv) \quad (-x)^{-1} = -x^{-1} \text{ (falls } x \neq 0),$$

$$(v) \quad \text{aus } xy = 0 \text{ folgt } x = 0 \text{ oder } y = 0.$$

Beweis. (i) Sei $x \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0.$$

Ziehen wir auf beiden Seiten $x \cdot 0$ ab, so folgt $0 = x \cdot 0$.

(ii) Weiter erhalten wir

$$0 = x \cdot 0 = x(y + (-y)) = xy + x(-y).$$

Da das (additive) inverse zu jedem Element eindeutig bestimmt ist erhalten wir $-(xy) = x(-y)$ und aus der Kommutativität der Multiplikation $-(xy) = y(-x)$.

(iii) Übung.

(iv) Aus dem Vorhergehenden folgt für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$x(-(-x)^{-1}) = (-x)(-x)^{-1} = 1 = xx^{-1}.$$

Eindeutigkeit des multiplikativen Inversen ergibt $-(-x)^{-1} = x^{-1}$ oder (Warum genau?) $(-x)^{-1} = -x^{-1}$.

(v) Falls $y = 0$ ist, ist nichts zu zeigen. Fall $y \neq 0$ gilt existiert y^{-1} und wir erhalten

$$x = xyy^{-1} = 0 \cdot y^{-1} = 0. \quad \square$$

Für $x, y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$ schreiben wir häufig $\frac{x}{y}$ statt xy^{-1} . Das multiplikative Inverse von y kann dann auch als $\frac{1}{y}$ geschrieben werden.

Bis hierher haben wir die Ordnungsrelation nicht verwendet. Eine Menge mit Operationen $+$ und \cdot die die bisherigen Axiome erfüllen heißt Körper. Neben den reellen Zahlen gibt es viele weitere Beispiele für Körper (die für uns relevanten werden die rationalen Zahlen \mathbb{Q} und die komplexen Zahlen \mathbb{C} sein).

Für die Ordnungsrelation fordern wir:

O1 Reflexivität

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $x \leq x$.

O2 Transitivität

Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ folgt aus $x \leq y$ und $y \leq z$ auch $x \leq z$.

O3 Antisymmetrie

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ folgt aus $x \leq y$ und $y \leq x$, dass $x = y$ ist.

O4 Totalität

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $x \leq y$ oder $y \leq x$.

Darüber hinaus fordern wir auch hier gewisse Kompatibilität mit Addition und Multiplikation.

O5 Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ folgt aus $x \leq y$ auch $x + z \leq y + z$.

O6 Für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq x$ und $0 \leq y$ folgt $0 \leq xy$.

Satz 1.23. Sei $x, y \in \mathbb{R}$ es gelten

(i) aus $x \leq y$ folgt $-y \leq -x$,

(ii) aus $0 \leq x$ und $y \leq 0$ folgt $xy \leq 0$,

(iii) aus $x \leq 0$ und $y \leq 0$ folgt $0 \leq xy$,

(iv) $0 \leq 1$,

(v) aus $0 \leq x$ folgt $0 \leq x^{-1}$ (falls $x \neq 0$),

(vi) aus $0 \leq x \leq y$ folgt $y^{-1} \leq x^{-1}$ (falls $x \neq 0$).

Beweis. (i) Wir addieren $-x + (-y)$ zur Ungleichung $x \leq y$ und erhalten

$$-y = x + (-x) + (-y) \leq y + (-x) + (-y) = -x.$$

- (ii) Nach dem vorhergehenden Punkt folgt aus $y \leq 0$ die Ungleichung $0 \leq -y$ (Warum ist $-0 = 0$?) und damit $0 \leq x(-y) = -xy$. Wir nutzen erneut den vorhergehenden Punkt und erhalten $xy \leq 0$.
- (iii) In diesem Fall gilt $0 \leq -x$ und $0 \leq -y$ und damit $0 \leq (-x)(-y) = xy$.
- (iv) Angenommen es gilt nicht $0 \leq 1$, dann muss $1 \leq 0$ gelten. Dann folgt aus dem vorhergehenden Punkt $0 \leq 1 \cdot 1 = 1$ im Widerspruch zur Voraussetzung.
- (v) Übung.
- (vi) Es gilt $0 \leq x^{-1}$ und $0 \leq y^{-1}$ und damit auch $0 \leq x^{-1}y^{-1}$. Aus $x \leq y$ folgt $0 \leq y - x$. Multiplizieren wir das mit $x^{-1}y^{-1}$, so erhalten wir $0 \leq yx^{-1}y^{-1} - xx^{-1}y^{-1} = x^{-1} - y^{-1}$ und damit schließlich $y^{-1} \leq x^{-1}$. \square

Definition 1.24. Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Wir verwenden die folgende Notation

$$\begin{aligned} x < y &\text{ für } x \leq y \wedge x \neq y, \\ x \geq y &\text{ für } y \leq x, \\ x > y &\text{ für } y < x. \end{aligned}$$

Unser Axiomensystem ist nun fast vollständig. Eine Struktur die alle bisher erwähnten Axiome erfüllt heißt angeordneter Körper. Auch für angeordnete Körper gibt es viele Beispiele (für uns ist \mathbb{Q} neben \mathbb{R} das interessanteste).

Das letzte Axiom ist nicht so selbstverständlich wie die vorhergehenden. Es ist eine Formalisierung der Aussage, dass die reellen Zahlen „keine Lücken“ lassen. Um es formulieren zu können benötigen wir etwas Vorbereitung.

Definition 1.25. Sei $A \subset \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$.

- (i) x heißt obere Schranke für A , falls für jedes $y \in A$ gilt $y \leq x$,
- (ii) x heißt Maximum von A , falls es eine obere Schranke ist und $x \in A$ gilt,
- (iii) x heißt Supremum von A , falls es eine obere Schranke von A ist und für jede weitere obere Schranke y gilt $x \leq y$, falls x also die kleinste obere Schranke ist.

Die Menge A heißt nach oben beschränkt, falls sie eine obere Schranke besitzt.

Analog sind die Begriffe untere Schranke, nach unten beschränkt, Minimum und Infimum (das heißt größte untere Schranke definiert).

Supremum und Infimum von A sind – so sie existieren – eindeutig bestimmt (Warum?) und wir bezeichnen sie mit $\sup A$ und $\inf A$.

Die folgenden Teilmengen von \mathbb{R} werden häufig auftreten:

Definition 1.26. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass $a < b$. Wir definieren die folgenden Intervalle:

$$\begin{aligned}(a, b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \wedge x < b\} \\[a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \wedge x \leq b\} \\(a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \wedge x \leq b\} \\[a, b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \wedge x < b\} \\(a, \infty) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\} \\[a, \infty) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\} \\(-\infty, b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\} \\(-\infty, b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}.\end{aligned}$$

Beispiel 1.27. (i) Das Intervall $(-\infty, 1)$ ist nach oben beschränkt (1, 2, 1000, etc. sind obere Schranken) aber nicht nach unten beschränkt.

(ii) Das Intervall $(0, 1)$ besitzt kein Maximum, denn zu jeder Zahl $x \in (0, 1)$ läßt sich eine größere Zahl (z. B. $\frac{x+1}{2}$) finden, die ebenfalls in $(0, 1)$ liegt. Die Menge besitzt aber ein Supremum.

Wir fordern weiter das sogenannte Vollständigkeitsaxiom.

V Jede nach oben beschränkte, nichtleere Teilmenge von \mathbb{R} besitzt ein Supremum.

Damit ist unsere axiomatische Beschreibung der reellen Zahlen abgeschlossen.

Bemerkung 1.28. Es ist für uns an dieser Stelle nicht ersichtlich, dass ein Objekt welches alle oben geforderten Eigenschaften erfüllt existiert, dass die Axiome konsistent sind. Man kann mit einigem Aufwand, nur auf Grundlage der Axiome der Mengenlehre, die reellen Zahlen konstruieren und damit ihre Existenz nachweisen.

Außerdem wäre es prinzipiell vorstellbar, dass es viele, wesentlich verschiedene Objekte gibt, die die Axiome erfüllen. Obwohl es viele verschiedene Körper und angeordnete Körper gibt, kann man zeigen, dass die reellen Zahlen durch die oben stehenden Axiome „im Wesentlichen“ eindeutig bestimmt sind. Es ist daher gerechtfertigt von **den** reellen Zahlen zu sprechen.

Wir wollen nun in \mathbb{R} die anderen Zahlbereiche wiederfinden.

Definition 1.29. Eine Menge A heißt induktiv, wenn gilt

$$1 \in A \text{ und } \forall x \quad x \in A \longrightarrow x + 1 \in A.$$

Lemma 1.30. Sei I eine (möglicherweise unendliche) Indexmenge und A_i für jedes $i \in I$ eine induktive Menge, dann ist

$$\bigcap_{i \in I} A_i$$

ebenfalls eine induktive Menge.

Beweis. Da A_i für jedes $i \in I$ induktiv ist, gilt $1 \in A_i$ für jedes $i \in I$ und es folgt nach Definition des Durchschnitts

$$1 \in \bigcap_{i \in I} A_i.$$

Sei nun

$$x \in \bigcap_{i \in I} A_i,$$

das heißt für jedes $i \in I$ gilt $x \in A_i$. Da jedes A_i induktiv ist gilt dann auch $x + 1 \in A_i$ für jedes $i \in I$ und damit

$$x + 1 \in \bigcap_{i \in I} A_i. \quad \square$$

Definition 1.31. Die natürlichen Zahlen \mathbb{N} sind die kleinste induktive Menge, das heißt

$$\mathbb{N} = \bigcap_{A \text{ induktiv}} A.$$

Wir schreiben \mathbb{N}_0 für $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

Satz 1.32 (Induktionsprinzip). *Sei $\Phi(x)$ eine Aussage mit einer freien Variablen (Prädikat) und es gelte $\Phi(1)$ und $\Phi(x) \longrightarrow \Phi(x + 1)$, dann gilt $\Phi(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Wir definieren die Menge

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid \Phi(x)\}.$$

Die Voraussetzungen des Satzes bedeuten genau, dass A eine induktive Menge ist. Nach Definition sind die natürlichen Zahlen die kleinste induktive Menge also folgt $\mathbb{N} \subset A$, es gilt also $\Phi(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. \square

Dieser Satz begründet das Beweisverfahren der vollständigen Induktion: um zu zeigen, dass eine Aussage $\Phi(x)$ für alle natürlichen Zahlen gilt muss man zeigen, dass sie für 1 gilt und, dass aus ihrer Gültigkeit für eine natürliche Zahl n bereits die Gültigkeit für die Zahl $n + 1$ folgt.

Satz 1.33. *Seien $n, m \in \mathbb{N}$. Dann gelten*

- (i) $n + m \in \mathbb{N}$,
- (ii) $n \cdot m \in \mathbb{N}$,
- (iii) $1 \leq n$,

(iv) Es gilt

$$\{1\} \cup \{n+1 \mid n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N},$$

außer 1 lässt sich also jede natürliche Zahl als Nachfolger $n+1$ einer natürlichen Zahl n schreiben.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $(n, n+1) \cap \mathbb{N} = \emptyset$, zwischen n und $n+1$ liegt also keine weitere natürliche Zahl.

Beweis. (i) Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir beweisen die Aussage mittels Induktion über m oder, mit anderen Worten wir zeigen, dass die Menge

$$A = \{m \in \mathbb{N} \mid n+m \in \mathbb{N}\}$$

eine induktive Menge ist. Da die natürlichen Zahlen eine induktive Menge sind, gilt $1 \in A$. Angenommen es gilt $m \in A$, also $n+m \in \mathbb{N}$. Dann folgt, wiederum da \mathbb{N} eine induktive Menge ist, dass $n+m+1 \in \mathbb{N}$ ist, also $m+1 \in A$. Damit ist A induktiv und enthält somit mindestens die natürlichen Zahlen \mathbb{N} .

(ii) Übung.

(iii) Übung.

(iv) Die Inklusion \subset ist offensichtlich, die Inklusion \supset folgt da die linke Seite eine induktive Menge ist.

(v) Sei

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid (n, n+1) \cap \mathbb{N} = \emptyset\}.$$

Dann gilt $1 \in A$ denn falls $m \in (1, 2) \cap \mathbb{N}$, dann ist $m = k+1$ für ein $k \in \mathbb{N}$ nach dem vorhergehenden Punkt und dann wäre $k = m-1$ eine natürliche Zahl kleiner 1. Sei nun $n \in A$ also $(n, n+1) \cap \mathbb{N} = \emptyset$, und $m \in (n+1, n+2) \cap \mathbb{N}$, dann ist wiederum $m = k+1$ für ein $k \in \mathbb{N}$ und damit $k = m-1 \in (n, n+1) \cap \mathbb{N}$ im Widerspruch zur Voraussetzung. \square

Satz 1.34 (Archimedisches Prinzip). Für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert $n \in \mathbb{N}$ so, dass $x < n$.

Beweis. Falls $x < 1$ ist, ist nichts zu zeigen. Es gelte also $1 \leq x$. Wir definieren

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq x\}.$$

Da A nach Voraussetzung nicht leer und durch x nach oben beschränkt ist, existiert nach dem Vollständigkeitsaxiom $s = \sup A$. Nach Definition des Supremums ist $s-1$ keine obere Schranke von A , das heißt es existiert $m \in A$ so, dass $s-1 < m$ also $s < m+1$. Da $m \in A$, also eine natürliche Zahl ist, ist auch $m+1 \in \mathbb{N}$ und da s eine obere Schranke von A ist, muss $m+1 \notin A$ gelten. Das bedeutet aber $m+1 > x$. \square

Eine der Bedeutungen der natürlichen Zahlen ist, dass wir sie benutzen können um Objekte zu zählen. Diese Beobachtung scheint absolut trivial, was sie jedoch bei genauerer Betrachtung nicht ist. Um das einzusehen, müssen wir uns überlegen, was beim Zählen eigentlich passiert. Wollen wir eine bestimmte Kollektion (also eine Menge) von Objekten (Menschen, Katzen, Planeten, ...) zählen, dann heften wir (meist nur in Gedanken) natürliche Zahlen an die Objekte. Das tun wir so, dass jedes Objekt eine Zahl bekommt und dass wir zwischendurch keine Zahlen auslassen. Die größte vorkommende Zahl ist dann die Anzahl der Objekte. Mathematischer ausgedrückt: wir erstellen eine Abbildung von der Menge der natürlichen Zahlen kleiner n in die Menge der Objekte, die einerseits injektiv (jedes Objekt bekommt höchstens eine Zahl) und andererseits surjektiv (jedes Objekt bekommt mindestens eine Zahl) also bijektiv ist. Es gibt prinzipiell viele verschiedene solcher Abbildungen (tatsächlich genau $n!$ viele) aber das n ist eindeutig bestimmt. Wir verwenden jetzt $\{1, \dots, n\}$ als Notation für die Menge $\mathbb{N} \cap (-\infty, n]$.

Satz 1.35. *Sei M eine Menge und $\varphi : \{1, \dots, n\} \rightarrow M$ und $\psi : \{1, \dots, m\} \rightarrow M$ bijektive Abbildungen, dann gilt $m = n$.*

Beweis. Wir zeigen zunächst per Induktion über n , falls $\theta : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$ surjektiv, dann gilt $m \leq n$. Für $n = 1$ ist $\{1, \dots, n\} = \{1\}$ und falls $m > 1$ ist enthält $\{1, \dots, m\}$ mindestens die unterschiedlichen Elemente 1 und m von denen dann mindestens eins von $\theta(1)$ verschieden sein muss.

Sei nun die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ bewiesen. Angenommen $\theta : \{1, \dots, n+1\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$ sei surjektiv für $n+1 < m$. Dann existiert $k \in \{1, \dots, n+1\}$ so, dass $\theta(k) = m$ (Surjektivität). Definiere

$$\theta' : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, m-1\}$$

$$x \mapsto \begin{cases} \theta(x) & x \neq k \\ \theta(n+1) & x = k \text{ und } \theta(n+1) \in \{1, \dots, m-1\} \\ 1 & x = k \text{ und } \theta(n+1) \notin \{1, \dots, m-1\}. \end{cases}$$

Die Abbildung θ' ist surjektiv, denn für ein beliebiges $l \in \{1, \dots, m-1\}$ existiert ein $y \in \{1, \dots, n+1\}$ so, dass $\theta(y) = l$. Dieses y ist von k verschieden, da $\theta(k) = m \neq l$. Falls nun $y \neq n+1$ ist folgt aber $\theta'(y) = \theta(y) = l$ und falls $y = n+1$ dann folgt $\theta'(k) = \theta(n+1) = l$. Die Existenz der Abbildung θ' ist aber nach Induktionsvoraussetzung unmöglich also muss unsere Annahme (Existenz eine surjektiven θ) falsch gewesen sein.

Wir beweisen nun schließlich die Aussage des Satzes. Falls $\varphi : \{1, \dots, n\} \rightarrow M$ und $\psi : \{1, \dots, m\} \rightarrow M$ bijektive Abbildungen sind, dann ist $\varphi^{-1} \circ \psi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$ auch bijektiv (Warum?) also insbesondere surjektiv. Daraus folgt aber nach dem ersten Teil $m \leq n$. Andererseits ist $\psi^{-1} \circ \varphi : \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ bijektiv woraus $n \leq m$ folgt. \square

Definition 1.36. Eine Menge M heißt endlich, falls $M = \emptyset$ oder falls es ein $n \in \mathbb{N}$ und eine bijektive Abbildung von M nach $\{1, \dots, n\}$ gibt. In diesem Fall heißt n die Anzahl der Elemente (oder Mächtigkeit) von M .

Eine Menge die nicht endlich ist heißt unendlich.

Man kann in ähnlicher Weise auch unendlichen Mengen Mächtigkeiten zuordnen. Dabei treten jedoch unerwartete Phänomene auf und wir werden uns damit zunächst nicht näher beschäftigen.

Bemerkung 1.37. Einige elementare Aussagen über endliche Mengen:

- (i) Seien M und N Mengen. Falls eine injektive Abbildung $\varphi : M \rightarrow N$ existiert und N endlich ist, dann ist auch M endlich. Falls eine surjektive Abbildung $\varphi : M \rightarrow N$ existiert und M endlich ist, dann ist auch N endlich.
- (ii) Teilmengen von endlichen Mengen sind endlich.
- (iii) Vereinigungen von endlich vielen endlichen Mengen sind endlich.
- (iv) Seien M und N Mengen mit den Mächtigkeiten m und n . Eine injektive Abbildung $\varphi : M \rightarrow N$ existiert genau dann wenn $m \leq n$ ist. Eine surjektive Abbildung $\varphi : M \rightarrow N$ existiert genau dann wenn $m \geq n$ ist.
- (v) Eine Menge M ist endlich genau dann wenn jede injektive Abbildung $\varphi : M \rightarrow M$ auch surjektiv ist genau dann wenn jede surjektive Abbildung $\varphi : M \rightarrow M$ auch injektiv ist.

Man versuche zur Übung einige der obigen Aussagen zu beweisen.

Satz 1.38. *Jede nicht leere, nach oben beschränkte Teilmenge der natürlichen Zahlen besitzt ein Maximum. Jede nicht leere Teilmenge der natürlichen Zahlen besitzt ein Minimum.*

Beweis. Sei $A \subset \mathbb{N}$ nicht leer und nach oben beschränkt. Nach dem archimedischen Prinzip existiert dann eine obere Schranke $m \in \mathbb{N}$ und damit ist

$$A \subset \mathbb{N} \cap (-\infty, m]$$

endlich. Eine endliche Menge besitzt aber stets ein Maximum (Warum?).

Sei nun A nicht leer. Definiere

$$B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist untere Schranke für } A\}.$$

Dann ist $1 \in B$ und damit hat B nach dem eben gezeigten ein maximales Element m . Da $m+1 \notin B$ existiert $k \in A$ so, dass $m \leq k < m+1$. Da sowohl m als auch k natürliche Zahlen sind, ist das lediglich für $m = k$ möglich. Damit ist m ein Minimum von A . \square

Nun, da wir die natürlichen Zahlen in \mathbb{R} wiedergefunden haben, können wir weitere interessante Teilbereiche definieren.

Definition 1.39. Wir definieren die ganzen Zahlen

$$\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{N}_0 \vee -x \in \mathbb{N}_0\}$$

und die rationalen Zahlen

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z} \wedge q \neq 0 \right\}.$$

Bemerkung 1.40. Als Übung beweise man die folgenden Aussagen. Für $x, y \in \mathbb{Z}$ sind auch $x + y$, $x \cdot y$ und $-x$ in \mathbb{Z} .

Für $x, y \in \mathbb{Q}$ sind auch $x + y$, $x \cdot y$, $-x$ in \mathbb{Q} sowie x^{-1} falls $x \neq 0$. Mit anderen Worten: \mathbb{Q} ist ein Körper.

Satz 1.41 (Dichtheit der rationalen Zahlen). Seien $x, y \in \mathbb{R}$ und $x < y$. Dann existiert eine rationale Zahl r so, dass $x < r < y$.

Beweis. Nach dem Archimedisches Prinzip existiert $q \in \mathbb{N}$ so, dass $\frac{1}{y-x} < q$. Sei $p \in \mathbb{Z}$ die größte ganze Zahl kleiner als yq (deren Existenz folgt aus Satz 1.38). Daraus folgt unmittelbar $\frac{p}{q} < y$. Außerdem gilt $p + 1 \geq yq$ also

$$y \leq \frac{p}{q} + \frac{1}{q} < \frac{p}{q} + (y - x).$$

Daraus folgt schließlich $x < \frac{p}{q}$. □

Definition 1.42 (Betragsfunktion). Die Betragsfunktion wird folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} |\cdot| : \mathbb{R} &\rightarrow [0, \infty) \\ x &\mapsto \begin{cases} x & 0 \leq x \\ -x & 0 > x \end{cases}. \end{aligned}$$

Satz 1.43. Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $|xy| = |x| |y|$.

Beweis. Übung. □

Definition 1.44 (Komplexe Zahlen). Auf der Menge $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ definieren wir die Addition und Multiplikation als Abbildungen von $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Für $(x, y), (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathbb{C}$ definieren wir

$$\begin{aligned} (x, y) + (\tilde{x}, \tilde{y}) &:= (x + \tilde{x}, y + \tilde{y}) \\ (x, y) \cdot (\tilde{x}, \tilde{y}) &:= (x\tilde{x} - y\tilde{y}, x\tilde{y} + \tilde{x}y). \end{aligned}$$

Den so entstehenden Körper bezeichnen wir als die komplexen Zahlen.

Die Koordinaten von $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ bezeichnen wir als Real- beziehungsweise Imaginärteil von z und schreiben

$$\operatorname{Re} z = x \text{ und } \operatorname{Im} z = y.$$

Bemerkung 1.45. (i) Das die oben beschriebene Struktur tatsächlich einen Körper darstellt, muss natürlich erst gezeigt werden. Führe zur Übung die entsprechenden Beweise durch. Dazu können die folgenden Hinweise genutzt werden:

$$\begin{aligned} \text{neutrales Element der Addition:} & (0, 0) \\ \text{additives Inverses zu } (x, y): & (-x, -y) \\ \text{neutrales Element der Multiplikation:} & (1, 0) \\ \text{multiplikatives Inverses zu } (x, y) \neq (0, 0): & \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2} \right). \end{aligned}$$

- (ii) Zahlen mit verschwindendem Imaginärteil nennen wir reell. In diesem Fall reduzieren sich die neuen Rechenoperationen auf die Addition und Multiplikation von reellen Zahlen:

$$(x, 0) + (\tilde{x}, 0) = (x + \tilde{x}, 0) \text{ und } (x, 0) \cdot (\tilde{x}, 0) = (x\tilde{x}, 0).$$

Wir können dann die reelle Zahl x mit der komplexen Zahl $(x, 0)$ identifizieren und so die reellen Zahlen in den komplexen Zahlen „wiederfinden“.

- (iii) Wir definieren die imaginäre Einheit $i = (0, 1)$. Dann gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$, dass $i(x, y) = (-y, x)$. Insbesondere ist $i^2 = -(1, 0)$. Es gilt dann

$$(x, y) = (x, 0) + i(y, 0).$$

Wie oben bemerkt schreiben wir statt $(x, 0)$ lediglich x und erhalten so $x + iy$ als die übliche Schreibweise für die komplexe Zahl (x, y) .

Damit benötigen wir lediglich die üblichen Rechenregeln (Kommutativität, Assoziativität und Distributivität), sowie die Formel $i^2 = -1$ um uns die Formel für die Multiplikation komplexer Zahlen

$$(x + iy)(\tilde{x} + i\tilde{y}) = x\tilde{x} + ix\tilde{y} + i\tilde{x}y - y\tilde{y} = (x\tilde{x} - y\tilde{y}) + i(x\tilde{y} + \tilde{x}y)$$

sowie das multiplikative Inverse

$$\frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$$

einzuprägen.

- (iv) Die komplexen Zahlen haben einerseits schlechtere Eigenschaften als die reellen Zahlen, sie lassen sich z.B. nicht mehr mit den arithmetischen Operationen verträglich anordnen. Andererseits haben sie auch bessere Eigenschaften, so gibt es zum Beispiel ein Element x mit $x^2 = -1$.

Definition 1.46. Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Zur komplexen Zahl $z = x + iy$ definieren wir die komplex konjugierte Zahl $\bar{z} := x - iy$.

Bemerkung 1.47. Die folgenden Rechenregeln gelten für alle komplexen Zahlen u, v

- (i) $\overline{u + v} = \bar{u} + \bar{v}$,
- (ii) $\overline{u \cdot v} = \bar{u} \cdot \bar{v}$,
- (iii) $\operatorname{Re}(u) = \frac{1}{2}(u + \bar{u})$,
- (iv) $\operatorname{Im}(u) = \frac{1}{2}(u - \bar{u})$.

Insbesondere ist u reell genau dann wenn $u = \bar{u}$.

Theorem 1.48 (Fundamentalsatz der Algebra). *Jedes nicht konstante, komplexe Polynom besitzt eine Nullstelle. Mit anderen Worten, sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ mit $\alpha_n \neq 0$ dann existiert ein x so, dass*

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i x^i := \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n = 0.$$

Ohne Beweis.

2 Analysis Teil I

2.1 Einige elementare Ungleichungen

Große Teile der Analysis beruhen darauf, dass wir Ergebnisse, die wir nicht explizit „ausrechnen“ können – was immer das im Einzelfall bedeuten mag – zumindest abschätzen können, also zeigen können, dass sie nicht „zu groß“ oder „zu klein“ sind. Dazu werden wir einige Ungleichungen immer wieder verwenden.

Beispiel 2.1. Für jede reelle Zahl x gilt $0 \leq x^2$. Aus dieser einfachen Erkenntnis können wir bereits die ersten interessanten Ungleichungen ableiten, denn es gilt für beliebige $x, y \in \mathbb{R}$

$$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 \geq 0,$$

und daher auch $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

Für $a, b \in [0, \infty)$ ergibt sich, wenn wir $x = \sqrt{a}$ und $y = \sqrt{b}$ einsetzen die Ungleichung zwischen arithmetischen und geometrischen Mittel:

$$\frac{1}{2}(a + b) \geq \sqrt{ab}.$$

(Die genaue Definition der hier auftauchenden Wurfelfunktion werden wir später nachreichen.)

Satz 2.2. Sei $x \in \mathbb{R}$ und $c \in [0, \infty)$. Es gelten

$$(i) \quad -|x| \leq x \leq |x|,$$

$$(ii) \quad |x| \leq c \iff -c \leq x \leq c,$$

$$(iii) \quad |x| \geq c \iff x \geq c \vee x \leq -c,$$

$$(iv) \quad |x| = 0 \iff x = 0.$$

Beweis. Übung. □

Satz 2.3 (Dreiecksungleichung). Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Beweis. Wegen $x \leq |x|$ und $y \leq |y|$ gilt auch $x + y \leq |x| + |y|$. Analog folgt aus $-|x| \leq x$ und $-|y| \leq y$ die Ungleichung $-(|x| + |y|) \leq x + y$ und damit aus dem vorhergehenden Satz

$$|x + y| \leq |x| + |y|. \quad \square$$

Korollar 2.4. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

Beweis. Wir beweisen die Aussage durch Induktion über n . Für $n = 1$ ist sie trivial erfüllt. Sei nun $m \in \mathbb{N}$, $m \leq n$ und es gelte

$$\left| \sum_{i=1}^m x_i \right| \leq \sum_{i=1}^m |x_i|.$$

Dann folgt aus der Dreiecksungleichung sowie der Induktionsannahme

$$\left| \sum_{i=1}^{m+1} x_i \right| = \left| \sum_{i=1}^m x_i + x_{m+1} \right| \leq \left| \sum_{i=1}^m x_i \right| + |x_{m+1}| \leq \sum_{i=1}^m |x_i| + |x_{m+1}| = \sum_{i=1}^{m+1} |x_i|. \quad \square$$

Bemerkung 2.5. Wir haben oben Ungleichungsketten der Form $a \leq b \leq c$ geschrieben. Dabei handelt es sich um eine abkürzende Schreibweise für die Ungleichungen $a \leq b$ und $b \leq c$ die wir häufig verwenden werden. Dahinter steht letztendlich die Transitivität der \leq relation (wenn $a \leq b$ und $b \leq c$ ist dann gilt auch $a \leq c$). Zu beachten ist, dass wir in einer solchen Kette lediglich Ungleichheitszeichen „in die selbe Richtung“ (und eventuell Gleichheitszeichen) verwenden. Ausdrücke der Form $a \leq b \geq c$ sind nicht zulässig, da nicht klar ist ob hier irgendeine Relation zwischen a und c impliziert sein soll.

Satz 2.6 (Bernoulliungleichung). Sei $x \in [-1, \infty]$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Beweis. Wir führen einen Induktionsbeweis über n . Für $n = 1$ ist die Ungleichung trivial erfüllt.

Angenommen es gilt $(1+x)^n \geq 1+nx$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann ist, da $(1+x)$ und damit $(1+x)^n$ nichtnegative Zahlen sind,

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1+nx+x+nx^2 \geq 1+(n+1)x.$$

Im letzten Schritt wurde benutzt, dass $x^2 \geq 0$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt. \square

2.2 Folgen und Grenzwerte

Definition 2.7. Sei M eine Menge (hier zunächst meist \mathbb{R} oder \mathbb{C}). Eine Folge in M ist eine Abbildung von $\mathbb{N} \rightarrow M$. Abweichend von der üblichen Notation für Abbildungen schreiben wir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M$ oder lediglich $(x_n) \subset M$ um eine Folge aus M zu bezeichnen. Dann ist x_n die Auswertung – das sogenannte Folgenglied – der Folge an der Stelle $n \in \mathbb{N}$.

Genauso wie wir bei beliebigen Abbildungen zwischen der Abbildung f und dem Wert der Abbildung an einer Stelle $f(x)$ unterscheiden müssen, sind natürlich auch die Folge (x_n) und ein einzelnes Folgenglied x_n unterschiedliche Objekte.

Beispiel 2.8. Einige Beispiele für reelle Folgen:

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{n} && \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right) \\ x_n &= \sum_{k=1}^n k && (1, 3, 6, 10, 15, 21, \dots) \\ x_n &= \text{kleinster Primfaktor von } n && (*, 2, 3, 2, 5, 2, 7, 2, 3, 2, 11, 2, \dots). \end{aligned}$$

Wie wir am ersten Beispiel sehen, können sich reelle Folgen einem Wert annähern ohne ihn jemals zu erreichen.

Definition 2.9. Sei $(x_n) \subset \mathbb{R}$ eine Folge und $x \in \mathbb{R}$. Wir sagen, dass (x_n) gegen x konvergiert und schreiben $x_n \rightarrow x$ oder $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ falls für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert so, dass $|x_n - x| < \epsilon$ für jedes $n \geq N$.

Wir sagen eine Folge $(z_n) \subset \mathbb{C}$ konvergiert gegen $z \in \mathbb{C}$ falls gilt

$$\operatorname{Re} z_n \rightarrow \operatorname{Re} z \text{ und } \operatorname{Im} z_n \rightarrow \operatorname{Im} z.$$

Die Zahl x (beziehungsweise z) heißt Grenzwert der Folge.

Eine Folge heißt konvergent falls sie einen Grenzwert besitzt, andernfalls heißt sie divergent.

Eine gegen 0 konvergente Folge heißt Nullfolge.

Beispiel 2.10. (i) Sei $x \in \mathbb{R}$ und $(x_n) \subset \mathbb{R}$ die konstante Zahlenfolge $x_n = x$. Dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, denn für $\epsilon > 0$, $N = 1$ und jedes $n > N$ gilt

$$|x_n - x| = 0 < \epsilon.$$

(ii) Die reelle Folge $x_n = \frac{1}{n}$ konvergiert gegen 0. Sei dazu $\epsilon > 0$. Nach dem archimedischen Prinzip existiert $N \in \mathbb{N}$ so, dass $\frac{1}{\epsilon} \leq N$ ist und damit gilt für $n > N$:

$$x_n = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} \leq \epsilon$$

und damit $|x_n - 0| = x_n < \epsilon$.

(iii) Die Folge

$$x_n = \begin{cases} 1 & n \text{ gerade} \\ -1 & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

ist divergent. Wir sehen beispielsweise, dass sie nicht gegen 1 konvergiert, denn für $\epsilon = 1$ und für $N \in \mathbb{N}$ gilt stets $|x_{2N} - 1| = 2 > \epsilon$. (Zeige als Übung, dass auch keine andere Zahl Grenzwert der Folge sein kann.)

Bemerkung 2.11. Wir sagen, dass eine Eigenschaft für fast alle Folgenglieder gilt, falls sie lediglich für endlich viele von ihnen nicht gilt. Eine Folge ist also konvergent, falls für jedes $\epsilon > 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $|x_n - x| < \epsilon$, falls also fast alle Folgenglieder im Intervall $(x - \epsilon, x + \epsilon)$ liegen.

Aus dieser äquivalenten Formulierung können wir die zunächst etwas unerwartete Schlussfolgerung ziehen, dass das Konvergenzverhalten sowie der Grenzwert einer Folge sich nicht ändern falls wir die Folgenglieder umsortieren.

Satz 2.12. Eine Folge $(x_n) \subset \mathbb{R}$ (oder \mathbb{C}) hat stets höchstens einen Grenzwert.

Beweis. Angenommen x und \tilde{x} sind verschiedene Grenzwerte von $(x_n) \in \mathbb{R}$. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x < \tilde{x}$, dann ist $\epsilon = \frac{1}{2}(\tilde{x} - x) > 0$. Da (x_n) gegen x konvergiert, muss x_n für fast alle $n \in \mathbb{N}$ in

$$(x - \epsilon, x + \epsilon) = \left(x - \epsilon, \frac{x + \tilde{x}}{2}\right)$$

liegen. Da (x_n) auch gegen \tilde{x} konvergiert, liegt x_n auch für fast alle $n \in \mathbb{N}$ in

$$(\tilde{x} - \epsilon, \tilde{x} + \epsilon) = \left(\frac{x + \tilde{x}}{2}, \tilde{x} + \epsilon\right)$$

liegen. Das ist jedoch nicht möglich, da die beiden Intervalle disjunkt sind. \square

Satz 2.13. Sei $(x_n) \subset \mathbb{R}$ (oder \mathbb{C}) eine Folge mit Grenzwert $x \in \mathbb{R}$. Sei $m \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+m} = x.$$

Beweis. Übung. \square

Definition 2.14. Eine Folge $(x_n) \subset \mathbb{R}$ heißt nach oben (nach unten) beschränkt falls $\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ die entsprechende Eigenschaft hat.

Eine Folge heißt beschränkt, wenn sie sowohl nach oben, als auch nach unten beschränkt ist, falls also $K \in (0, \infty)$ existiert so, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$|x_n| \leq K.$$

Satz 2.15. *Jede konvergente Folge ist beschränkt.*

Beweis. Sei $(x_n) \subset \mathbb{R}$ eine Folge die gegen $x \in \mathbb{R}$ konvergiert. Das heißt insbesondere, es existiert $N \in \mathbb{N}$ so, dass $|x_n - x| < 1$ für alle $n \geq N$. Dann gilt für

$$K = \max \{|x_1|, \dots, |x_N|, |x| + 1\},$$

dass $|x_n| \leq K$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ (das Maximum existiert, da die Menge lediglich endlich viele Elemente enthält). Das ist offensichtlich für $n \leq N$ und für $n \geq N$ gilt mit der Dreiecksungleichung

$$|x_n| = |x_n - x + x| \leq |x_n - x| + |x| \leq |x| + 1 \leq K. \quad \square$$

Satz 2.16. *Sei $(x_n) \subset \mathbb{R}$ beschränkt und $(y_n) \subset \mathbb{R}$ Nullfolge, dann ist auch $(x_n y_n)$ eine Nullfolge.*

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Da (x_n) beschränkt ist, existiert $K \in (0, \infty)$ so, dass $|x_n| \leq K$. Da y eine Nullfolge ist, gilt für fast alle $n \in \mathbb{N}$, dass $|y_n| < \frac{\epsilon}{K}$. Damit ist aber für fast alle $n \in \mathbb{N}$

$$|x_n y_n| = |x_n| |y_n| < K \frac{\epsilon}{K} = \epsilon.$$

Damit ist $(x_n y_n)$ eine Nullfolge. \square

Die Definition der Konvergenz ist für praktische Belange etwas unhandlich. Wir werden daher im Folgenden einige Sätze – gewissermaßen Rechenregeln – zusammenstellen, die uns das Bestimmen und die Arbeit mit Grenzwerten erleichtern.

Man beachte, dass häufig die Konvergenz der Folgen als Voraussetzung auftaucht. Eine häufige Fehlerquelle in Übungsaufgaben und Beweisen ist es, Aussagen über konvergente Folgen für divergente Folgen – oder Folgen deren Konvergenz noch nicht klar ist – zu benutzen.

Satz 2.17 (Einschließungssatz, Sandwichkriterium). *Seien $(x_n), (y_n), (z_n) \subset \mathbb{R}$ Folgen und es gelte*

$$x_n \leq y_n \leq z_n$$

für fast alle $n \in \mathbb{N}$, sowie $x_n \rightarrow x$ und $z_n \rightarrow x$. Dann ist (y_n) konvergent mit $y_n \rightarrow x$.

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Nach Voraussetzung existieren $N_1, N_2, N_3 \in \mathbb{N}$ so, dass $x_n \leq y_n \leq z_n$ für alle $n \geq N_1$, $|x_n - x| < \epsilon$ für alle $n \geq N_2$ sowie $|z_n - x| < \epsilon$ für alle $n \geq N_3$ gilt. Setze $N = \max \{N_1, N_2, N_3\}$ dann gilt für jedes $n \geq N$

$$-\epsilon < x_n - x \leq y_n - x \leq z_n - x < \epsilon$$

also $|y_n - x| < \epsilon$. Damit ist die Konvergenz gegen x bewiesen. \square

Beispiel 2.18. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $n \leq n^2$ (Warum?) und damit auch

$$0 < \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}.$$

Mit dem Einschließungssatz folgt also, dass $\frac{1}{n^2}$ gegen 0 konvergiert.

Satz 2.19. Seien $(x_n), (y_n) \subset \mathbb{R}$ konvergente Folgen so, dass für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $x_n \leq y_n$. Dann gilt auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

Beweis. Der Beweis ist sehr ähnlich dem von Satz 2.12 und sollte als Übung durchgeführt werden. \square

Bemerkung 2.20. Man beachte, dass selbst dann, wenn $x_n < y_n$ für (fast) alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, lediglich $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ geschlussfolgert werden kann. Als Beispiel betrachte für $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} x_n &= 0 \\ y_n &= \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Lemma 2.21. Sei $(x_n) \subset \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$. Die Folge (x_n) konvergiert gegen x genau dann, wenn $(|x_n - x|)$ eine Nullfolge ist.

Insbesondere ist (x_n) eine Nullfolge, genau dann wenn $(|x_n|)$ eine Nullfolge ist.

Beweis. Es gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$||x_n - x| - 0| = |x_n - x|.$$

Die Folge (x_n) konvergiert gegen x , falls für jedes $\epsilon > 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $|x_n - x| < \epsilon$. Die Folge $(|x_n - x|)$ ist eine Nullfolge, falls für jedes $\epsilon > 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $||x_n - x| - 0| < \epsilon$.

Die letzte Aussage folgt unmittelbar für $x = 0$. \square

Satz 2.22. Seien $(x_n), (y_n) \subset \mathbb{R}$ (oder \mathbb{C}) Folgen mit $x_n \rightarrow x$ und $y_n \rightarrow y$. Dann gelten

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) &= x + y \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n &= xy \end{aligned}$$

und falls $y \neq 0$ ist auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y}.$$

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Nach Definition der Konvergenz existieren $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ so, dass $|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2}$ für $n \geq N_1$ und $|y_n - y| < \frac{\epsilon}{2}$ für $n \geq N_2$. Setze $N = \max\{N_1, N_2\}$. Dann gilt für $n \geq N$ mit der Dreiecksungleichung

$$|x_n + y_n - (x + y)| = |x_n - x + y_n - y| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Damit ist die Konvergenz $x_n + y_n \rightarrow x + y$ gezeigt.

Wir benutzen erneut die Dreiecksungleichung um die folgende Ungleichungskette zu erhalten.

$$\begin{aligned} 0 &\leq |x_n y_n - xy| = |x_n y_n - x_n y + x_n y - xy| \leq |x_n y_n - x_n y| + |x_n y - xy| \\ &= |x_n| |y_n - y| + |x_n - x| |y|. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung und Lemma 2.21 sind $(|y_n - y|)$ und $(|x_n - x|)$ Nullfolgen. Nach Satz 2.15 und Satz 2.16 sind dann auch $(|x_n| |y_n - y|)$ sowie $(|x_n - x| |y|)$ Nullfolgen und nach der soeben bewiesenen Aussage über Summen konvergenter Folgen konvergiert die rechte Seite gegen 0. Dann muss nach dem Einschließungssatz auch $|x_n y_n - xy|$ eine Nullfolge sein und aus Lemma 2.21 folgt $x_n y_n \rightarrow xy$.

Es sei nun $y \neq 0$ also $|y| > 0$. Wir müssen noch zeigen, dass $\frac{1}{y_n} \rightarrow \frac{1}{y}$ gilt. Nach Definition der Konvergenz existiert $N \in \mathbb{N}$ so, dass $|y_n - y| < \frac{|y|}{2}$ für alle $n \geq N$ gilt. Daraus folgt (Warum?)

$$0 < \frac{|y|}{2} \leq |y_n|$$

für alle $n \geq N$. Damit ist für diese N erstens $\frac{1}{y_n}$ wohldefiniert (wir teilen nicht durch 0) und zweitens ist die Folge $\frac{1}{y_n}$ beschränkt

$$\left| \frac{1}{y_n} \right| = \frac{1}{|y_n|} \leq \frac{2}{|y|}.$$

Dann gilt

$$\left| \frac{1}{y_n} - \frac{1}{y} \right| = \left| \frac{1}{y_n} \left(1 - \frac{1}{y} y_n \right) \right| = \left| \frac{1}{y_n} \right| \left| 1 - \frac{1}{y} y_n \right|.$$

Nach dem bereits bewiesenen konvergiert $\frac{1}{y} y_n$ gegen 1. Damit ist $\left| 1 - \frac{1}{y} y_n \right|$ eine Nullfolge und nach Satz 2.16 auch die rechte Seite der obigen Gleichung. Wir verwenden erneut Satz 2.16 um daraus auf $\frac{1}{y_n} \rightarrow \frac{1}{y}$ zu schließen. \square

Bemerkung 2.23. Selbst für $y \neq 0$ kann $y_n = 0$ für einzelne n gelten. Die Folge $\left(\frac{1}{y_n} \right)$ ist also nicht für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert, aber – wie wir oben gesehen haben – für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Wir werden öfter auf Folgen treffen, die lediglich für fast alle $n \in \mathbb{N}$ definiert sind. Solange wir uns lediglich für das Konvergenzverhalten solcher Folgen interessieren, müssen wir darauf nicht weiter eingehen, da dafür das Verhalten der Folge an lediglich endlich vielen Stellen irrelevant ist.

Korollar 2.24. Sei $K \in \mathbb{N}$ und $a_0, \dots, a_K, b_0, \dots, b_K \in \mathbb{R}$ und sei $b_K \neq 0$. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \dots + a_{K-1} n^{K-1} + a_K n^K}{b_0 + b_1 n + b_2 n^2 + \dots + b_{K-1} n^{K-1} + b_K n^K} = \frac{a_K}{b_K}.$$

Beweis. Wir erweitern den Bruch mit $\frac{1}{n^K}$ und erhalten

$$\frac{a_0 \frac{1}{n^K} + a_1 \frac{1}{n^{K-1}} + a_2 \frac{1}{n^{K-2}} + \dots + a_{K-1} \frac{1}{n} + a_K}{b_0 \frac{1}{n^K} + b_1 \frac{1}{n^{K-1}} + b_2 \frac{1}{n^{K-2}} + \dots + b_{K-1} \frac{1}{n} + b_K}.$$

Wir wissen, dass $\frac{1}{n}$ eine Nullfolge ist und damit – nach dem vorhergehenden Satz – auch $\frac{1}{n^k}$ für beliebiges $k \in \mathbb{N}$. Der Zähler des Ausdrucks konvergiert also gegen a_K und der Nenner gegen b_K . Das Ergebnis folgt dann aus dem vorhergehenden Satz. \square

Satz 2.25. Sei $x \in (-1, 1)$. Dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$.

Beweis. Für $x = 0$ ist die Aussage trivial, es sei also $x \neq 0$. Dann gilt $|x| \in (0, 1)$ und damit $\frac{1}{|x|} \in (1, \infty)$. Wir setzen $s := \frac{1}{|x|} - 1 \in (0, \infty)$ und benutzen die Bernoulli Ungleichung:

$$(1 + s)^n \geq 1 + sn.$$

Daraus folgt

$$0 \leq |x|^n = \frac{1}{(1 + s)^n} \leq \frac{1}{1 + sn} = \frac{1 + 0 \cdot n}{1 + sn} \rightarrow \frac{0}{s} = 0.$$

Nach dem Sandwichkriterium ist also $|x|^n = |x^n|$ eine Nullfolge und damit auch x^n Lemma 2.21. \square

Definition 2.26. Eine Folge $(x_n) \subset \mathbb{R}$ heißt monoton wachsend (fallend) falls für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $x_{n+1} \geq x_n$ ($x_{n+1} \leq x_n$).

Satz 2.27 (Monotoniekriterium). Sei $(x_n) \subset \mathbb{R}$ eine monoton wachsende, nach oben beschränkte (oder monoton fallende, nach unten beschränkte) Folge, dann ist (x_n) konvergent.

Beweis. Wir zeigen die Aussage für monoton wachsende, nach oben beschränkte Folgen $(x_n) \subset \mathbb{R}$. Setze

$$A = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \text{ und } x = \sup A$$

Sei nun $\epsilon > 0$. Nach der Definition des Supremums ist $x - \epsilon$ keine obere Schranke von A und daher existiert $N \in \mathbb{N}$ so, dass $x_N > x - \epsilon$. Wegen der Monotonie der Folge und da x obere Schranke von A ist gilt damit für $n \geq N$

$$-\epsilon < x_N - x \leq x_n - x \leq 0 < \epsilon,$$

also $|x_n - x| \leq \epsilon$. Damit ist die Konvergenz gegen x gezeigt. \square

Man beachte, dass der Satz auch den Grenzwert bestimmt. Wegen Satz 2.13 ist es auch ausreichend, wenn die Folge ab einem Index $N \in \mathbb{N}$ monoton wachsend ist.

Bemerkung 2.28. Um die Monotonie einer positiven Folge $((x_n) \subset (0, \infty))$ zu überprüfen, ist es manchmal einfacher Quotienten statt Differenzen zu betrachten. Man überzeugt sich leicht, dass gilt

$$\begin{aligned}(x_n) \text{ monoton wachsend} &\iff \frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \\(x_n) \text{ monoton fallend} &\iff \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Beispiel 2.29. Sei $a \in [0, \infty)$. Betrachte die rekursiv definierte Folge

$$\begin{aligned}x_1 &= a \\x_{n+1} &= \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right).\end{aligned}$$

Wir wollen mittels des Monotoniekriteriums die Konvergenz dieser Folge nachweisen. Zunächst zeigt ein einfacher Induktionsbeweis (Wie?), dass $0 < x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, die Folge also insbesondere nach unten beschränkt ist.

Wir betrachten für $n \in \mathbb{N}$

$$x_{n+1}^2 = \frac{1}{4} \left(x_n^2 + 2a + \frac{a^2}{x_n^2} \right) = \frac{1}{4} \left(x_n^2 - 2a + \frac{a^2}{x_n^2} \right) + a = \frac{1}{4} \left(x_n - \frac{a}{x_n} \right)^2 + a \geq a.$$

Es gilt also $x_n^2 \geq a$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Daraus folgt aber für jedes solche n auch $\frac{a}{x_n} \leq x_n$ und somit

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) \leq \frac{1}{2} (x_n + x_n) = x_n.$$

Damit ist die Folge monoton fallend (für $n \geq 2$) und nach dem Monotoniekriterium konvergent.

Satz und Definition 2.30. Sei $a \in [0, \infty)$. Dann existiert genau eine Zahl $x \in [0, \infty)$ so, dass $x^2 = a$ gilt. Wir nennen sie die Quadratwurzel (oder nur Wurzel) aus a und schreiben $x = \sqrt{a}$.

Beweis. Zunächst kann es höchstens eine solche Zahl geben, denn falls $x^2 = a = y^2$ für $x, y \in [0, \infty)$ gilt, dann folgt

$$0 = x^2 - y^2 = (x + y)(x - y),$$

also $x + y = 0$, was lediglich für $x = y = 0$ möglich ist, oder $x - y = 0$. In jedem Fall gilt also $x = y$.

Wir müssen nun noch zeigen, dass es überhaupt eine solche Zahl gibt. Dazu betrachten wir die Folge aus dem vorangegangenen Beispiel. Wir haben bereits gezeigt, dass sie

konvergiert. Da alle Folgenglieder positiv sind, ist ihr Grenzwert $x \geq 0$ (Satz 2.19). Stellen wir die Rekursionsformel um, so erhalten wir

$$2x_{n+1}x_n = x_n^2 + a.$$

Nach Satz 2.22 und Satz 2.13 konvergieren beide Seiten dieser Gleichung und wir erhalten

$$2x \cdot x = x^2 + a$$

oder $x^2 = a$. □

Bemerkung 2.31. Die Folge die wir zur Definition der Wurzel verwendet haben liefert auch einen recht schnell konvergierenden Algorithmus zu ihrer Berechnung. Mit analogen Methoden – und etwas mehr Rechenaufwand – kann man auch zeigen, dass es für jedes $a \in [0, \infty)$ und jedes $q \in \mathbb{N}$ ein eindeutig bestimmtes $x \in [0, \infty)$ gibt so, dass $x^q = a$. Wir nennen diese Zahl die q -te Wurzel aus a und schreiben

$$x = \sqrt[q]{a} \text{ oder } x = a^{\frac{1}{q}}.$$

Es gilt dann für beliebiges $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \left(\left(a^{\frac{1}{q}} \right)^p \right)^q &= \left(\left(a^{\frac{1}{q}} \right)^q \right)^p = a^p \text{ also} \\ \left(a^{\frac{1}{q}} \right)^p &= (a^p)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Wir schreiben für die letzten beiden Ausdrücke $a^{\frac{p}{q}}$.

Diese Notation ist deshalb sinnvoll, weil sich die Potenzgesetze – die wir bisher für ganzzahlige Exponenten bewiesen haben – jetzt für rationale Exponenten verallgemeinern lassen. Seien $x, y \in [0, \infty)$ und $u, v \in \mathbb{Q}$, dann gelten (Übung)

$$\begin{aligned} (xy)^u &= x^u y^u \\ x^u x^v &= x^{(u+v)} \\ (x^u)^v &= x^{(u \cdot v)}. \end{aligned}$$

Wir stellen noch einige wichtige Eigenschaften der Wurzelfunktionen zusammen.

Satz 2.32. *Es gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$, falls $0 \leq x < y$ dann ist $\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y}$.*

Seien $n, m \in \mathbb{N}$ und $n < m$ dann gilt für $x \in (1, \infty)$ und $y \in (0, 1)$

$$\sqrt[n]{x} < \sqrt[m]{x} \text{ und } \sqrt[n]{y} > \sqrt[m]{y}.$$

Beweis. Übung. □

Satz 2.33. *Sei $a \in (0, \infty)$, dann gelten*

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} &= 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} &= 1. \end{aligned}$$

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Dann gilt (Übung)

$$\frac{n}{(1+\epsilon)^n} \rightarrow 0,$$

es existiert also $N \in \mathbb{N}$ so, dass für $n \geq N$ gilt

$$\frac{n}{(1+\epsilon)^n} < 1.$$

Für solche n gilt dann $n \leq (1+\epsilon)^n$ und es folgt aus der Monotonie der Wurzelfunktion

$$1 \leq \sqrt[n]{n} \leq 1 + \epsilon$$

also $|\sqrt[n]{n} - 1| < \epsilon$. Damit ist die erste Konvergenz gezeigt.

Die zweite Konvergenz ist klar für $a = 1$. Sei nun zunächst $a \in (1, \infty)$, dann ist wegen des archimedischen Prinzips $a \leq n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und wegen der Monotonie der Wurzel gilt

$$1 \leq \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{n}.$$

Dann folgt die gesuchte Konvergenz aus dem Sandwichkriterium.

Falls schließlich $a \in (0, 1)$, dann ist $\frac{1}{a} \in (1, \infty)$ und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = 1. \quad \square$$

Definition 2.34. Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Der Betrag der komplexen Zahl $z = x + iy$ ist definiert durch

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Man überzeugt sich leicht, dass diese Definition für reelle Zahlen mit der alten übereinstimmt und das gilt $|z| = 0$ genau dann wenn $z = 0$.

Satz 2.35. Seien $u, v \in \mathbb{C}$, dann gelten

$$\begin{aligned} |uv| &= |u| |v| \\ \left| \frac{1}{u} \right| &= \frac{1}{|u|} \text{ falls } u \neq 0 \\ |u + v| &\leq |u| + |v|. \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung ist die Dreiecksungleichung für komplexe Zahlen.

Beweis. Die erste Gleichung folgt unmittelbar aus der Definition des Betrages

$$|uv| = \sqrt{uv\overline{uv}} = \sqrt{u\overline{u}v\overline{v}} = \sqrt{u\overline{u}}\sqrt{v\overline{v}}.$$

Wenden wir das soeben gezeigte auf das folgende Produkt an, erhalten wir

$$\left|\frac{1}{u}\right| |u| = \left|\frac{1}{u} \cdot u\right| = 1$$

und damit die zweite Gleichung.

Um die Dreiecksungleichung zu zeigen betrachte zunächst eine beliebige komplexe Zahl $z = x + iy$. Für jede komplexe Zahl gelten die Ungleichungen (Übung)

$$\operatorname{Re} z \leq |\operatorname{Re} z| \leq |z| \quad \text{und} \quad \operatorname{Im} z \leq |\operatorname{Im} z| \leq |z|.$$

Wir wenden diese Ungleichung auf uv an und erhalten

$$\begin{aligned} |u+v|^2 &= (u+v)(\overline{u}+\overline{v}) = u\overline{u} + v\overline{u} + u\overline{v} + v\overline{v} \\ &= |u|^2 + 2\operatorname{Re}(uv) + |v|^2 \leq |u|^2 + 2|u||v| + |v|^2 = (|u|+|v|)^2 \end{aligned}$$

woraus – mittels der Monotonie der Wurzel – die gesuchte Ungleichung folgt. \square

Lemma 2.36. Sei $(z_n) \subset \mathbb{C}$ eine Folge und $z \in \mathbb{C}$. Dann konvergiert (z_n) gegen z , genau dann wenn $|z_n - z|$ eine Nullfolge ist. Insbesondere ist (z_n) Nullfolge genau dann wenn $(|z_n|)$ Nullfolge ist.

Beweis. Wir setzen

$$x_n = \operatorname{Re} z_n, y_n = \operatorname{Im} z_n, x = \operatorname{Re} z \text{ und } y = \operatorname{Im} z.$$

Sei zunächst $|z_n - z|$ eine Nullfolge, dann gilt

$$0 \leq |x_n - x| = |\operatorname{Re}(z_n - z)| \leq |z_n - z| \rightarrow 0.$$

Damit folgt aus dem Sandwichkriterium die Konvergenz $x_n \rightarrow x$. Mit einem analogen Argument folgt auch $y_n \rightarrow y$. Damit ist die Konvergenz von (z_n) gegen z gezeigt.

Konvergiere andererseits (z_n) gegen z , gelte also $x_n \rightarrow x$ und $y_n \rightarrow y$. Mit der Dreiecksungleichung für komplexe Zahlen folgt

$$0 \leq |z_n - z| = |(x_n - x) + i(y_n - y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| \rightarrow 0.$$

Die gesuchte Aussage folgt damit wieder aus dem Sandwichkriterium. \square

Bemerkung 2.37. Mit dem obigen Lemma kann man nun Satz 2.22 und Korollar 2.24 auf komplexe Zahlen verallgemeinern (Übung).

Definition 2.38. Eine Folge $(x_n) \subset \mathbb{R}$ (oder \mathbb{C}) heißt Cauchy-Folge wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert so, dass für $n, m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq N$ und $n \geq N$ gilt

$$|x_n - x_m| < \epsilon.$$

Satz 2.39 (Cauchy-Kriterium). Sei $(x_n) \subset \mathbb{R}$ (oder \mathbb{C}) eine Folge. Dann ist (x_n) konvergent genau dann wenn es eine Cauchy-Folge ist.

Beweis. Es sei zunächst (x_n) konvergent gegen $x \in \mathbb{R}$. Das heißt es gibt $N \in \mathbb{N}$ so, dass $|x_n - x| \leq \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n \geq N$. Dann gilt für $n, m \geq N$:

$$|x_n - x_m| = |x_n - x + x - x_m| \leq |x_n - x| + |x_m - x| \leq \epsilon.$$

Damit ist (x_n) Cauchy-Folge.

Sei andererseits (x_n) eine Cauchy-Folge. Wir betrachten zunächst den Fall einer reellen Folge. Wir zeigen zunächst, dass (x_n) beschränkt ist. Nach Voraussetzung existiert $N \in \mathbb{N}$ so, dass für $n, m \geq N$ gilt $|x_n - x_m| < 1$. Damit folgt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$|x_n| \leq |x_n - x_N| + |x_N| \leq 1 + |x_N|.$$

Wir definieren nun $A_n = \{x_m \mid m \geq n\}$ und Hilfsfolgen

$$y_n = \sup A_n \text{ und} \\ z_n = \inf A_n.$$

Diese sind ebenfalls beschränkt. Für $\tilde{n} \leq n$ gilt offenbar $A_{\tilde{n}} \supset A_n$ und daher $y_{\tilde{n}} \geq y_n$. Die Folge (y_n) ist also monoton fallend und konvergiert damit gegen ein $y \in \mathbb{R}$. Mit einem analogen Argument folgt, dass (z_n) monoton wachsend ist und damit gegen ein $z \in \mathbb{R}$ konvergiert.

Offenbar gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$z_n \leq x_n \leq y_n.$$

Falls also $z = y$ gilt, folgt aus dem Sandwichkriterium die Konvergenz der Folge x_n .

Sei nun $\epsilon > 0$. Dann existiert eine $N > 0$ so, dass für alle $m, n \geq N$ gilt

$$x_n - x_m \leq |x_n - x_m| < \epsilon.$$

Sei nun $k \geq N$ dann gilt wenn wir das Supremum über alle $n \geq k$ bilden

$$y_k - x_m = \sup \{x_n \mid n \geq k\} - x_m \leq \epsilon.$$

Bilden wir nun das Infimum über alle $m \geq k$ so erhalten wir

$$y_k - z_k = y_k - \inf \{x_m \mid m \geq k\} \leq \epsilon.$$

Damit ist gezeigt, dass $\lim_{k \rightarrow \infty} (y_k - z_k) = 0$ ist. □

Bemerkung 2.40. (i) Für konkrete Folgen ist es häufig schwierig die Cauchybedingung nachzuprüfen, der Satz ist aber ein wichtiges Werkzeug in Beweisen. Außerdem liefert er ein gutes Kriterium um zu zeigen, dass eine Folge **nicht** konvergiert.

- (ii) Für die Cauchy-Bedingung ist es nicht ausreichend zu überprüfen, dass der Abstand aufeinanderfolgender Folgenglieder beliebig klein wird. Die Folge (\sqrt{n}) beispielsweise erfüllt

$$|\sqrt{n+1} - \sqrt{n}| = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \rightarrow 0,$$

ist aber offensichtlich nicht beschränkt, also insbesondere nicht konvergent.

- (iii) Die im Beweis benutzen Konstruktionen

$$\begin{aligned}\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \{x_k \mid k \geq n\} \quad (\text{limes superior}) \text{ und} \\ \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \{x_k \mid k \geq n\} \quad (\text{limes inferior})\end{aligned}$$

sind auch in anderen Zusammenhängen nützlich.

Es gilt stets

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$$

und die Folge ist genau dann konvergent falls Gleichheit gilt.

Der Vorteil ist, dass $\overline{\lim}$ und $\underline{\lim}$ für jede beschränkte Folge existieren. Der Nachteil ist, dass sie sich schlechter mit den arithmetischen Operationen vertragen.

Definition 2.41. Eine Folge $(x_n) \subset \mathbb{R}$ heißt bestimmt divergent gegen $+\infty$ ($-\infty$) falls für jedes $K \in (0, \infty)$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert so, dass $x_n \geq K$ ($x_n \leq -K$) für alle $n \geq N$ gilt. Wir schreiben auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \text{ beziehungsweise } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty.$$

Bemerkung 2.42. Es ist wichtig sich bewusst zu machen, dass $+\infty$ und $-\infty$ oben keine Grenzwerte sind (es sind ja nicht einmal Zahlen). Dennoch wird die Formulierung „ (x_n) konvergiert gegen unendlich“ häufig verwendet.

Satz 2.43. Sei $(x_n) \subset \mathbb{R}$ eine Folge mit $|x_n| \rightarrow \infty$, dann gilt $\frac{1}{x_n} \rightarrow 0$.

Sei umgekehrt $(y_n) \subset (0, \infty)$ eine Nullfolge dann gilt $\frac{1}{y_n} \rightarrow \infty$.

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Dann existiert nach Voraussetzung ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass für $n \geq N$ gilt $|x_n| > \frac{1}{\epsilon}$. Für solche n gilt dann auch

$$\frac{1}{|x_n|} < \epsilon.$$

Damit ist gezeigt, dass $\left(\frac{1}{x_n}\right)$ eine Nullfolge ist und damit auch (Lemma 2.21) $\left(\frac{1}{x_n}\right)$.

Der Beweis der zweiten Aussage kann als Übung durchgeführt werden. \square

Bemerkung 2.44. Die Aussage des obigen Satzes wird häufig mittels der folgenden „Rechenregeln“ – Merkgeln wäre wohl das passendere Wort – ausgedrückt:

$$\frac{1}{\pm\infty} = 0 \text{ und } \frac{1}{+0} = \infty.$$

Es gibt eine Reihe ähnlicher Sätze, die sich mit den Regeln ($a \in \mathbb{R}$, $b \in (0, \infty)$, $c \in (1, \infty)$, $d \in (0, 1)$)

$$\begin{array}{ll} a + \infty = \infty & a - \infty = -\infty \\ \infty + \infty = \infty & -\infty - \infty = -\infty \\ b \cdot \infty = \infty & b \cdot (-\infty) = -\infty \\ \infty \cdot \infty = \infty & \infty \cdot (-\infty) = -\infty \\ c^\infty = \infty & c^{-\infty} = 0 \\ d^\infty = 0 & d^{-\infty} = \infty \end{array}$$

merken lassen. Es ist empfehlenswert zur Übung einige der obigen Merkgeln als tatsächliche mathematische Sätze zu formulieren und zu beweisen. Zu beachten ist, dass es für Ausdrücke der Form

$$\infty - \infty, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty \text{ und } 1^\infty$$

keine allgemeingültigen Regeln gibt.

Satz 2.45. Sei (x_n) eine gegen x konvergente Folge und $(k_n) \subset \mathbb{N}$ erfülle $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = \infty$. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n} = x.$$

Beweis. Sei $\epsilon > 0$, dann existiert $K \in \mathbb{N}$ so, dass $|x_k - x| < \epsilon$ für alle $k \geq K$. Weiter existiert $N \in \mathbb{N}$ so, dass $k_n \geq K$ für jedes $n \geq N$. Für solche n gilt also $|x_{k_n} - x| < \epsilon$ womit die gesuchte Konvergenz gezeigt ist. \square

Beispiel 2.46. Wir möchten den Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2n} + 2n^n - n}{n^{3n} - n^n}$$

bestimmen. Zunächst gilt $\frac{n}{n^{3n} - n^n} = \frac{1}{n^{n-1}(n^{2n} - 1)} \rightarrow 0$ nach den Regeln aus Bemerkung 2.44.

Den anderen Teil können wir mittels der Potenzgesetze wie folgt umschreiben

$$\frac{n^{2n} + 2n^n}{n^{3n} - n^n} = \frac{(n^n)^2 + 2n^n}{(n^n)^3 - n^n}.$$

Wir wissen bereits, dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^2 + 2k}{k^3 - k} = 0$$

ist und es gilt $n^n \rightarrow \infty$ (Warum?). Damit folgt aus dem Satz (sowie den Rechenregeln für Grenzwerte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2n} + 2n^n - n}{n^{3n} - n^n} = 0$$

2.3 Konvergenz von Reihen

Definition 2.47. Sei $(x_k) \subset \mathbb{R}$ (oder \mathbb{C}) eine Folge. Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k$$

ist die Partialsummenfolge (s_n)

$$s_n = \sum_{k=1}^n x_k.$$

Sie heißt konvergent falls (s_n) konvergent ist und andernfalls divergent.

Für konvergente Reihen bezeichnen wir auch den Grenzwert mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x_k.$$

Bemerkung 2.48. Das Symbol $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ steht also sowohl für die Folge (s_n) als auch für ihren Grenzwert falls dieser existiert. Diese Notation ist etwas unglücklich, aber weit verbreitet. Es ist jedoch wichtig sich bewusst zu machen, dass man mit $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ nur wie mit jeder beliebigen Zahl rechnen kann, wenn man die Konvergenz der Reihe bereits gezeigt hat.

Satz 2.49. Sei $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ eine konvergente (reelle oder komplexe) Reihe, dann ist (x_n) eine Nullfolge.

Beweis. Da die Reihe konvergent ist, ist die Partialsummenfolge (s_n) eine Cauchy-Folge. Insbesondere existiert also für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass für jedes $n \geq N$ gilt

$$\epsilon > |s_{n+1} - s_n| = \left| \sum_{k=1}^{n+1} x_k - \sum_{k=1}^n x_k \right| = |x_{n+1}|.$$

Damit ist $(|x_n|)$ eine Nullfolge und somit auch (x_n) . □

Beispiel 2.50 (Geometrische Reihe). Sei $x \in \mathbb{R}$ (oder \mathbb{C}). Die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

ist divergent falls $|x| \geq 1$ und konvergent falls $|x| < 1$. Im Falle der Konvergenz gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}.$$

Beweis. Falls $|x| \geq 1$ so gilt auch $|x^n| = |x|^n \geq 1$ und (x^n) ist somit keine Nullfolge.

Für jedes $x \neq 1$ gilt (Aufgabe 2 vom Blatt 3)

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Falls $|x| < 1$ ist, ist (x^n) eine Nullfolge (Satz 2.25) und es folgt die gesuchte Konvergenz. \square

Beispiel 2.51 (Harmonische Reihe). Die Umkehrung von Satz 2.49 gilt nicht. Die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ beispielsweise ist nicht konvergent, obwohl $(\frac{1}{n})$ eine Nullfolge ist. Um das zu sehen betrachte die endliche Summe

$$\sum_{k=2^{m-1}+1}^{2^m} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=2^{m-1}+1}^{2^m} \frac{1}{2^m} = (2^m - 2^{m-1}) \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2}$$

Für die Partialsummenfolge

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

gilt also für beliebiges $m \in \mathbb{N}$

$$|s_{2^m} - s_{2^{m-1}}| \geq \frac{1}{2}$$

sie ist also keine Cauchy-Folge und somit nicht konvergent.

Mit ähnlichen Methoden (Cauchy'scher Verdichtungssatz) kann man zeigen, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r}$$

konvergiert genau dann, wenn $r > 1$ ist.

Lemma 2.52. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ konvergiert genau dann, wenn es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt so, dass $\sum_{k=N}^{\infty} x_k$ konvergiert.

Beweis. Übung. \square

Auf Grund dieses Lemmas ist es ausreichend, wenn die Voraussetzungen der im Folgenden zu beweisenden Konvergenzkriterien für fast alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt sind.

Satz 2.53 (Leibnitz-Kriterium). Sei $(x_n) \subset [0, \infty)$ eine monoton fallende Nullfolge. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k x_k$ und es gilt

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k x_k - \sum_{k=1}^N (-1)^k x_k \right| \leq x_{N+1}. \quad (2.1)$$

Beweis. Sei (s_n) die Partialsummenfolge

$$s_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k x_k$$

und betrachte die Folgen $a_n = s_{2n}$ und $b_n = s_{2n+1}$. Es gilt

$$a_{n+1} = s_{2n} - (x_{2n+1} - x_{2n+2}) \leq s_{2n} = a_n,$$

die Folge ist also monoton fallend (analog ist b_n monoton wachsend). Dann ist für alle $m, n \in \mathbb{N}$, $n \geq m$

$$b_m \leq b_n = a_n - x_{2n+1} \leq a_n \leq a_m.$$

Insbesondere sind beide Folgen beschränkt und nach dem Monotoniekriterium konvergent gegen a beziehungsweise b . Schließlich stimmen die Grenzwerte überein, da $b_n - a_n = -x_{2n+1} \rightarrow 0$.

Aus der obigen Ungleichungskette folgt dann auch $b_m \leq b = a \leq a_m$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} |s_{2n} - a| &= a_n - a \leq a_n - b_n = x_{2n+1} \text{ und} \\ |s_{2n+1} - a| &= b - b_n \leq a_{n+1} - b_n = x_{2n+2}. \end{aligned}$$

Zusammen ergeben diese Ungleichungen die gesuchte Abschätzung (2.1) sowie die Konvergenz von (s_n) . \square

Bemerkung 2.54. (i) Die Monotonie ist notwendig.

(ii) Die Fehlerabschätzung (2.1) erlaubt es uns zu wissen, wann wir die gewünschte Genauigkeit bei der Berechnung von $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k x_k$ erreicht haben. Alternierende Reihen eignen sich daher besonders gut für numerische Berechnungen.

Beispiel 2.55 (Alternierende Harmonische Reihe). Nach dem obigen Satz konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

gegen einen Grenzwert $s \in [\frac{1}{6}, \frac{5}{6}]$ (den konkreten Wert $s = \ln 2$ können wir an dieser Stelle noch nicht bestimmen).

Wir betrachten nun die folgende überraschende Rechnung. Anstatt positive und negative Summanden im Wechsel schreiben wir nun einen positiven und dann zwei negative

auf:

$$\begin{aligned}
& \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + \cdots \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots \\
&= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots\right) \\
&= \frac{1}{2}s
\end{aligned}$$

Für s scheint also $s = \frac{1}{2}s$ zu gelten, was aber unmöglich ist, da $s \neq 0$. Das ist jedoch nur scheinbar ein Widerspruch. Tatsächlich zeigt es, dass die umgeordnete Reihe einen anderen Grenzwert als die ursprüngliche besitzt.

Bemerkung 2.56. (i) Das Konvergenzverhalten und der Wert einer Reihe ändert sich nicht, wenn nur endlich viele Summanden umgeordnet werden (Warum?).

- (ii) Auch beim Assoziativgesetz gibt es Einschränkungen. Das Konvergenzverhalten – und der Wert im Falle der Konvergenz – einer Reihe ändert sich nicht, wenn ich Gruppen von endlich vielen Summanden zusammenfasse. Es dürfen also beliebig viele Klammern hinzugefügt werden. Beim Weglassen von Klammern können sich Konvergenzverhalten und Grenzwert jedoch ändern.

Es gilt also zum Beispiel für jede Folge (x_n) , dass aus der Konvergenz (beziehungsweise Divergenz) von

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_n$$

auch Konvergenz (beziehungsweise Divergenz) von

$$\sum_{k=0}^{\infty} (x_{2n+1} + x_{2n})$$

folgt und im Falle der Konvergenz stimmen die Grenzwerte überein.

- (iii) Wie wir oben gesehen haben gilt für Reihen das Kommutativgesetz nicht mehr uneingeschränkt. Eine Reihe ist eben nicht „nur“ eine Summe, sondern ein Grenzwert einer Summenfolge. Das Umordnen der Reihe ändert die Folge der Partialsummen und kann damit – vielleicht etwas unerwartet – auch deren Grenzwert verändern.

Häufig ist die Situation folgendermaßen: gegeben ist eine Indexmenge I und zu jedem $i \in I$ eine Zahl a_i (also eine Abbildung $I \rightarrow \mathbb{R}$, $i \mapsto a_i$) und wir möchten die Summe

$$\sum_{i \in I} a_i$$

bestimmen. Für endliches I ist das kein Problem. Falls die Indexmenge unendlich ist, kann natürlich der Fall auftreten, dass das Ergebnis ebenfalls unendlich ist. Es kann aber auch – wie oben gesehen – vorkommen, dass das Ergebnis von der Reihenfolge der Summation abhängt.

Definition 2.57. Sei $(x_n) \subset \mathbb{R}$ (oder \mathbb{C}). Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ heißt absolut konvergent, wenn $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$ konvergent ist.

Bemerkung 2.58 (Konvergenz von nichtnegativen Reihen). Sei $(x_n) \subset [0, \infty)$. Dann ist die zur Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ gehörige Partialsummenfolge (s_n) monoton wachsend. Es gibt also lediglich zwei Möglichkeiten: entweder sie ist beschränkt und konvergiert damit gegen (Satz 2.27)

$$\sup \{s_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \sup \left\{ \sum_{k=1}^n x_k \mid n \in \mathbb{N} \right\},$$

oder sie ist unbeschränkt und divergiert bestimmt gegen $+\infty$. Wir schreiben für den zweiten Fall auch manchmal

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \infty.$$

Entsprechend schreiben wir die absolute Konvergenz häufig als

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty.$$

Lemma 2.59. Sei $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ eine Reihe. Dann sind äquivalent

- (i) $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ ist absolut konvergent,
- (ii) $\{ \sum_{k \in I} |x_k| \mid I \subset \mathbb{N} \text{ endlich} \}$ ist beschränkt,
- (iii) für jedes $\epsilon > 0$ existiert ein endliches $I \subset \mathbb{N}$ so, dass für jedes endliche $J \subset \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k \in J \setminus I} |x_k| < \epsilon.$$

Beweis. Es gelte (i) also

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| = K \in [0, \infty).$$

Sei $I \subset \mathbb{N}$ endlich und $n = \max I$. Dann gilt (Monotonie)

$$\sum_{k \in I} |x_k| \leq \sum_{k=1}^n |x_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| = K$$

also (ii).

Es gelte nun (ii) also sei

$$K := \sup \left\{ \sum_{k \in I} |x_k| \mid I \subset \mathbb{N} \text{ endlich} \right\} \in [0, \infty).$$

Sei $\epsilon > 0$. Nach der Definition des Supremums existiert ein endliches $I \subset \mathbb{N}$ so, dass

$$\sum_{k \in I} |x_k| > K - \epsilon.$$

Dann gilt für jedes endliche $J \subset \mathbb{N}$

$$K - \epsilon < \sum_{k \in I} |x_k| \leq \sum_{k \in I \cup J} |x_k| \leq K$$

also

$$\sum_{k \in J \setminus I} |x_k| = \sum_{k \in I \cup J} |x_k| - \sum_{k \in I} |x_k| < \epsilon.$$

Schließlich gelte (iii). Es sei $I \subset \mathbb{N}$ endlich so, dass für alle endlichen $J \subset \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k \in J \setminus I} |x_k| < 1.$$

Dann ist für jedes endliche $J \subset \mathbb{N}$

$$\sum_{k \in J} |x_k| \leq \sum_{k \in J \setminus I} |x_k| + \sum_{k \in I} |x_k| < \sum_{k \in I} |x_k| + 1.$$

Damit ist die Partialsummenfolge

$$\sum_{k=1}^n |a_k|$$

beschränkt und, da sie auch monoton ist, konvergent. □

Satz 2.60. *Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent und der Grenzwert ändert sich nicht bei Umordnungen.*

Beweis. Sei $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ absolut konvergent und $\epsilon > 0$. Nach dem obigen Lemma existiert ein endliches $I \subset \mathbb{N}$ so, dass für jedes endliche $J \subset \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k \in J \setminus I} |x_k| < \epsilon.$$

Setze $N = \max I$ und seien $n \geq m \geq N$. Für die Partialsummenfolge

$$s_n = \sum_{k=1}^n x_k$$

gilt dann

$$|s_n - s_m| \leq \sum_{k=m+1}^n |x_k| \leq \sum_{k \in \{1, \dots, n\} \setminus I} |x_k| < \epsilon.$$

Damit ist die Folge der Partialsummen eine Cauchy-Folge und somit konvergent.

Sei nun $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung. Aus Bedingung (ii) ist ersichtlich, dass dann auch die umgeordnete Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\varphi(k)}$ absolut konvergent und nach dem eben gezeigten konvergent ist. Sei $\epsilon > 0$ und sei $I \subset \mathbb{N}$ endlich so, dass für jedes endliche $J \subset \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k \in J \setminus I} |x_k| < \frac{\epsilon}{2}$$

Wähle $N \in \mathbb{N}$ so, dass

$$I \subset \{\varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(N)\} \cap \{1, \dots, N\}.$$

Das ist möglich, da φ surjektiv ist. Dann gilt für $n \geq N$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n x_k - \sum_{k=1}^n x_{\varphi(k)} \right| &= \left| \sum_{k \in \{1, \dots, n\} \setminus I} x_k - \sum_{k \in \{\varphi(1), \dots, \varphi(n)\} \setminus I} x_k \right| \\ &\leq \sum_{k \in \{1, \dots, n\} \setminus I} |x_k| + \sum_{k \in \{\varphi(1), \dots, \varphi(n)\} \setminus I} |x_k| < \epsilon. \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n x_k - \sum_{k=1}^n x_{\varphi(k)} \right) = 0$$

gilt, also beide Grenzwerte übereinstimmen. □

Satz 2.61. Sei $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ eine konvergente Reihe. Dann gilt

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|.$$

Beweis. Übung. □

Satz 2.62 (Majoranten-/Minorantenkriterium). Sei $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ eine Reihe. Die Reihe konvergiert absolut, falls es eine konvergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ mit $|x_k| \leq y_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ – eine sogenannte Majorante – gibt. Gibt es eine divergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ mit $0 \leq z_k \leq x_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ – eine sogenannte Minorante – so divergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$.

Beweis. Übung. □

Bemerkung 2.63. Konvergenz und Divergenz einer Reihe hängen nicht von endlich vielen ihrer Terme ab. Es ist also ausreichend, wenn die geforderten Ungleichungen für fast alle $k \in \mathbb{N}$ gelten.

Beispiel 2.64. (i) Betrachte

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-2}{(k+1)^2}.$$

Es gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k-2}{k+1} = 1.$$

Insbesondere gilt also für fast alle $k \in \mathbb{N}$

$$\frac{k-2}{k+1} \geq \frac{1}{2} \text{ und } \frac{k-2}{(k+1)^2} \geq \frac{1}{2} \frac{1}{k+1}.$$

Damit ist die divergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{1}{k+1}$ eine Minorante (für fast alle $n \in \mathbb{N}$) also gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-2}{(k+1)^2} = \infty.$$

(ii) Betrachte $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}$. Wir wissen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{2}{3} \right)^n = 0$$

also gilt insbesondere für große $n \in \mathbb{N}$

$$n \left(\frac{2}{3} \right)^n \leq \frac{1}{2} \text{ und } n \leq \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \right)^n.$$

Damit gilt für große n

$$\frac{n}{2^n} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} \right)^n$$

und da $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n < \infty$ ist auch unsere ursprüngliche Reihe konvergent. Analog kann man zeigen (Übung), dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^d}{s^n} < \infty$$

für jedes $d \in \mathbb{N}$ und jedes $s \in (1, \infty)$.

Korollar 2.65 (Quotientenkriterium). *Sei (x_n) eine Folge. Gibt es ein – von k unabhängiges – $q \in (0, 1)$ so, dass für fast alle $k \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\left| \frac{x_{k+1}}{x_k} \right| \leq q,$$

so konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ absolut, gilt für fast alle $k \in \mathbb{N}$

$$\left| \frac{x_{k+1}}{x_k} \right| \geq 1,$$

so divergiert sie.

Beweis. Es sei $q \in (0, 1)$ und es gelte für fast alle $k \in \mathbb{N}$

$$\left| \frac{x_{k+1}}{x_k} \right| \leq q,$$

das heißt für $k \geq N$ für ein $N \in \mathbb{N}$. Insbesondere muss also $|x_k| \neq 0$ für solche k gelten. Dann folgt mittels eines einfachen Induktionsbeweises

$$|x_{N+1}| \leq |x_N| q, |x_{N+2}| \leq |x_N| q^2, \dots, |x_{N+n}| \leq |x_N| q^n,$$

und damit

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \leq \sum_{k=1}^N |x_k| + \sum_{k=N+1}^{\infty} |x_N| q^{k-N} < \infty.$$

Dabei haben wir benutzt, dass die oben auftretende geometrische Reihe konvergent ist.

Falls andererseits für fast alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left| \frac{x_{k+1}}{x_k} \right| \geq 1,$$

so folgt, analog wie oben für ein hinreichend großes $N \in \mathbb{N}$ und für alle $n \in \mathbb{N}$

$$|x_{N+n}| \geq |x_N| > 0.$$

Die Folge (x_n) ist also keine Nullfolge woraus die Divergenz der Reihe folgt. □

Korollar 2.66 (Wurzelkriterium). Sei (x_n) eine Folge. Gibt es ein $q \in (0, 1)$ so, dass für fast alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sqrt[n]{|x_n|} \leq q$$

dann ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ absolut konvergent. Gilt für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$

$$\sqrt[n]{|x_n|} \geq 1,$$

dann ist die Reihe divergent.

Beweis. Übung. □

Bemerkung 2.67. (i) Die Voraussetzungen für die obigen Kriterien sind insbesondere erfüllt, falls für Konvergenz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n|} < 1$$

oder für Divergenz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| > 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n|} > 1$$

gilt.

(ii) Es gibt Reihen, für die beide Kriterien keine Konvergenzaussage treffen, z. B. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r}$:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^r \rightarrow 1$$

$$\sqrt[n]{x_n} = \frac{1}{\sqrt[n]{n^r}} \rightarrow 1.$$

(iii) Die Bedingung

$$\exists q \in (0, 1) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| \leq q$$

ist stärker als nur

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| < 1.$$

Für $x_n = \frac{1}{n}$ gilt zum Beispiel

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1$$

aber dennoch ist die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergent.

Beispiel 2.68. Sei $z \in \mathbb{C}$. Dann ist die folgende Reihe konvergent

$$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!},$$

denn

$$\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{|z|^n} = \frac{|z|}{n+1} \rightarrow 0.$$

Die so definierte Funktion $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ nennen wir Exponentialfunktion.

Bemerkung 2.69. Um die entscheidende Eigenschaft der Exponentialfunktion nachweisen zu können, benötigen wir einige Fakten über Binomialkoeffizienten, die wir hier kurz zusammenstellen, sie jedoch aus Zeitgründen nicht beweisen. Wir definieren rekursiv für $n, k \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned} \binom{n}{0} &= 1 \\ \binom{n}{k+1} &= \binom{n}{k} \frac{n-k}{k+1}. \end{aligned}$$

Man zeigt nun durch mehr oder weniger gradlinige Induktionsbeweise nacheinander die folgenden Eigenschaften:

(i) $\binom{n}{k} = 0$ falls $k > n$,

(ii) falls $k \leq n$ gilt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

(iii)

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k},$$

Diese Eigenschaft verknüpft die Binomialkoeffizienten mit dem Pascalschen Dreieck.

(iv) für $x, y \in \mathbb{C}$ gilt

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Satz 2.70. *Es gilt für alle $u, v \in \mathbb{C}$*

$$\exp(u+v) = \exp(u) \exp(v).$$

Beweisskizze. Als Vorbetrachtung wollen wir alle Zahlen im folgenden Schema aufsummieren

$$\begin{array}{cccccc} x_{0,0} & x_{0,1} & x_{0,2} & \dots & x_{0,m} & \dots \\ x_{1,0} & x_{1,1} & x_{1,2} & \dots & x_{1,m} & \dots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ x_{n,0} & x_{n,1} & x_{n,2} & \dots & x_{n,m} & \dots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots \end{array}$$

Es gibt dazu verschiedene Möglichkeiten, z. B. kann man zuerst entlang der Zeilen summieren und anschließend diese Zeilensummen addieren. Alternativ kann man zunächst die Spalten aufsummieren und anschließend diese Spaltensummen addieren. In Formeln ausgedrückt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} x_{n,m} \text{ beziehungsweise } \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} x_{n,m}.$$

Man kann auch zunächst entlang der Nebendiagonalen (Summe der Indizes ist konstant) summieren und anschließend diese Zwischensummen aufsummieren

$$\sum_{l=2}^{\infty} \sum_{k=0}^l x_{k,l-k}.$$

Im Allgemeinen werden diese Summen, falls sie überhaupt konvergieren, verschieden sein. Falls die Zahlen jedoch absolut summierbar sind, falls also

$$\left\{ \sum_{(k,l) \in I} |x_{k,l}| \mid I \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N} \text{ endlich} \right\}$$

beschränkt ist, dann führen alle Summationsmethoden zum selben Ergebnis (Großer Umordnungssatz).

Wir wenden dieses Ergebnis nun auf

$$x_{k,l} = \frac{u^k v^l}{k! l!} \quad k, l \in \mathbb{N}_0$$

an. Für jedes endliche $I \subset \mathbb{N}_0^2$ gibt es $N, M \in \mathbb{N}$ so, dass

$$I \subset \{0, 1, \dots, N\} \times \{0, 1, \dots, M\}$$

und es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{(k,l) \in I} |x_{k,l}| &\leq \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M \frac{|u|^k |v|^l}{k! l!} = \left(\sum_{k=1}^N \frac{|u|^k}{k!} \right) \left(\sum_{l=1}^M \frac{|v|^l}{l!} \right) \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|u|^k}{k!} \right) \left(\sum_{l=1}^{\infty} \frac{|v|^l}{l!} \right) = \exp(|u|) \exp(|v|) < \infty. \end{aligned}$$

Damit haben wir die absolute Summierbarkeit gezeigt.

Wir berechnen nun für ein $l \in \mathbb{N}_0$ die Diagonalsumme

$$\sum_{k=0}^l x_{k,l-k} = \sum_{k=0}^l \frac{u^k v^{l-k}}{k!(l-k)!} = \frac{1}{l!} \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} u^k v^{l-k} = \frac{(u+v)^l}{l!}.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \exp(u) \exp(v) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{v^m}{m!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{u^n v^m}{n!m!} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^l \frac{u^k v^{l-k}}{k!(l-k)!} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(u+v)^l}{l!} = \exp(u+v). \end{aligned} \quad \square$$

Bemerkung 2.71. Die Zahl $e = \exp(1)$ heißt Eulersche Zahl. Zunächst gilt für jedes $x \in \mathbb{C}$

$$1 = \exp(0) = \exp(x) \exp(-x)$$

also $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} = \exp(x)^{-1}$. Weiter folgt

$$\exp(nx) = \exp(x + x + \cdots + x) = \exp(x)^n.$$

Wir setzen $x = \frac{y}{n}$, ziehen die n -te Wurzel (wir zeigen gleich noch dass $\exp(x) > 0$) und erhalten

$$\exp\left(\frac{y}{n}\right) = \exp(y)^{\frac{1}{n}}.$$

Zusammen erhalten wir, dass für rationale Zahlen $q \in \mathbb{Q}$ gilt

$$\exp(q) = e^q.$$

Aus diesem Grund schreiben wir häufig statt $\exp(x)$ auch e^x obwohl letzterer Ausdruck für irrationale und echt komplexe Zahlen keinen Sinn ergibt.

Im folgenden Satz stellen wir die wichtigsten Eigenschaften der reellen Exponentialfunktion zusammen:

Satz 2.72. Seien $x, y \in \mathbb{R}$, dann gelten

(i)

$$x < y \implies \exp(x) < \exp(y),$$

(ii) $\exp(x) > 0$,

(iii) $\exp(x) \geq 1 + x$,

(iv)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^d}{\exp(n)} = 0$$

für jedes $d \in \mathbb{N}$, die Exponentialfunktion wächst also schneller als jede Potenz von n .

Beweis. (i) Übung.

(ii) Für $x \in (0, \infty)$ folgt $\exp(x) > 1$ direkt aus der Definition.

$$\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} > 0.$$

(iii) Die Ungleichung $\exp(x) > 1 + x$ folgt für positive x direkt aus der Definition. Für $x \in (-\infty, -1]$ ist $1 + x$ negativ und die geforderte Ungleichung folgt sofort. Für $x \in (-1, 0]$ schließlich, erfüllt die Exponentialreihe die Voraussetzungen des Leibnitzkriteriums und $\exp(x) > 1 + x$ folgt aus Satz 2.53 (Wie genau?).

(iv) Sei $d \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$0 < \frac{n^d}{\exp n} < \frac{n^d}{\sum_{k=1}^{d+1} \frac{n^k}{k!}} \rightarrow 0. \quad \square$$

Definition 2.73. Wir definieren Funktionen $\sin, \cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\begin{aligned} \sin(x) &:= \operatorname{Im} \exp(ix) \\ \cos(x) &:= \operatorname{Re} \exp(ix). \end{aligned}$$

Bemerkung 2.74. (i) Es gilt automatisch die Eulersche Formel $\exp(ix) = \cos(x) + i \sin(x)$.

(ii) Direkt aus der Definition der Exponentialfunktion folgt $\overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z})$ für jedes $z \in \mathbb{C}$. Insbesondere gilt also für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$|\exp(ix)|^2 = \exp(ix) \overline{\exp(ix)} = \exp(ix) \exp(-ix) = 1,$$

die Zahlen $\exp(ix)$ liegen also alle auf dem Einheitskreis um den Koordinatenursprung der komplexen Zahleneben.

Weiterhin folgt unmittelbar die wichtige Gleichung

$$|\exp(ix)|^2 = \cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1.$$

Auch die Symmetrieeigenschaften der trigonometrischen Funktionen lassen sich so herleiten:

$$\cos(-x) + i \sin(-x) = \exp(-ix) = \exp(\overline{ix}) = \overline{\exp(ix)} = \cos(x) - i \sin(x).$$

Durch Vergleich von Real- und Imaginärteil folgt

$$\cos(-x) = \cos(x) \text{ und } \sin(-x) = -\sin(x).$$

(iii) An der Reihendarstellung

$$\exp(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!}$$

können wir erkennen, dass die aufsummierten Terme im Wechsel reell und rein imaginär sind. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\sin(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ \cos(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}.\end{aligned}$$

Beide Reihendarstellungen (sowie die Reihendarstellung für $\exp(x)$ für $x < 0$) erfüllen (ab einem gewissen Index) die Voraussetzungen des Leibnitzkriteriums was für die Fehlerabschätzung bei der numerischen Berechnung der Reihen bedeutsam ist.

(iv) Die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion eignet sich gut, um viele Gleichungen über trigonometrische Funktionen zu beweisen. So gilt zum Beispiel für alle $x \in \mathbb{R}$ einerseits

$$\exp(i2x) = \cos(2x) + i \sin(2x)$$

und andererseits

$$\exp(i2x) = \exp(ix)^2 = (\cos(x) + i \sin(x))^2 = \cos(x)^2 - \sin(x)^2 + 2i \sin(x) \cos(x).$$

Vergleichen wir wieder Real- und Imaginärteil, so folgt

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \cos(x)^2 - \sin(x)^2 \\ \sin(2x) &= 2 \sin(x) \cos(x).\end{aligned}$$

(v) Wir werden später beweisen, dass die Cosinusfunktion genau eine Nullstelle im Intervall $[0, 2]$ besitzt. Wir definieren nun π als diejenige Zahl in $[0, 4]$, die

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

erfüllt. Dann muss

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pm 1$$

gelten (tatsächlich $+1$ aus der Reihendarstellung).

Zusammen ergibt sich

$$\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$$

und somit $\exp(2\pi i) = 1$.

Damit erhalten wir nun die $2\pi i$ Periodizität der Exponentialfunktion:

$$\exp(z + 2\pi i) = \exp(z) \exp(2\pi i) = \exp(z).$$

Daraus ergibt sich auch, dass \sin und \cos 2π -periodisch sind.

Satz 2.75. *Für jedes $z \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right)^{-n} = \exp(z).$$

Ohne Beweis.

3 Lineare Algebra

3.1 Vektorräume

Im folgenden Kapitel bezeichnet \mathbb{K} stets einen der Körper \mathbb{R} oder \mathbb{C} . Die meisten Aussagen sind auch für allgemeinere Körper gültig, was für uns jedoch nicht unmittelbar von Belang ist.

Definition 3.1. Ein Vektorraum über dem Körper \mathbb{K} ist eine Menge V mit den Operationen Addition

$$\begin{aligned} V \times V &\rightarrow V \\ (x, y) &\mapsto x + y \end{aligned}$$

und skalare Multiplikation

$$\begin{aligned} \mathbb{K} \times V &\rightarrow V \\ (\alpha, x) &\mapsto \alpha \cdot x = \alpha x. \end{aligned}$$

Dabei sollen für die folgenden Vektorraumaxiome gelten

- (i) es existiert ein neutrales Element $0 \in V$ so, dass für alle $x \in V$

$$x + 0 = x,$$

- (ii) für jedes $x \in V$ existiert ein inverses Element $-x \in V$ so, dass

$$x + (-x) = 0,$$

- (iii) für alle $x, y \in V$ gilt

$$x + y = y + x,$$

- (iv) für alle $x, y, z \in V$ gilt

$$(x + y) + z = x + (y + z),$$

- (v) für alle $\alpha \in \mathbb{K}$ und $x, y \in V$ gilt

$$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y,$$

- (vi) für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ und $x \in V$ gilt

$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x,$$

- (vii) für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ und $x \in V$ gilt

$$(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x),$$

(viii) für alle $x \in V$ gilt

$$1 \cdot x = x.$$

Die Elemente eines Vektorraums bezeichnen wir als Vektoren, die Elemente von \mathbb{K} in diesem Kontext als Skalare.

Bemerkung 3.2. Im Kontext von Vektorräumen gibt es stets zwei Additionsoperationen, die im Allgemeinen beide mit dem Symbol $+$ bezeichnet werden. Eine ist eine Abbildung von Vektoren $V \times V \rightarrow V$, die andere eine von Skalaren (Zahlen) $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$. Im Distributivgesetz

$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$$

taucht links die Addition von Skalaren und rechts die von Vektoren auf.

Analog gibt es auf \mathbb{K} eine Multiplikation $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ und die skalare Multiplikation $\mathbb{K} \times V \rightarrow V$.

Es gibt auch zwei neutrale Elemente, die üblicherweise beide mit 0 bezeichnet werden. Eines in \mathbb{K} und ein weiteres in V .

Diese Mehrdeutigkeiten in der Notation können wir uns erlauben, da stets aus dem Kontext klar wird, welche Operation gemeint ist. Wir werden zur besseren Unterscheidung versuchen, Skalare stets mit griechischen und Vektoren stets mit lateinischen Buchstaben zu bezeichnen.

Beispiel 3.3. (i) Der Körper $\mathbb{K} = \mathbb{K}^1$ selbst ist mit den Körperoperationen ein Vektorraum.

(ii) Betrachte nun die Menge $V = \mathbb{K}^2$ und definiere für $\alpha \in \mathbb{K}$ und $(\chi_1, \chi_2), (\eta_1, \eta_2) \in V$

$$\begin{aligned}(\chi_1, \chi_2) + (\eta_1, \eta_2) &:= (\chi_1 + \eta_1, \chi_2 + \eta_2) \\ \alpha \cdot (\chi_1, \chi_2) &:= (\alpha\chi_1, \alpha\chi_2).\end{aligned}$$

Diese Operationen erfüllen alle oben genannten Axiome. Das neutrale Element ist $(0, 0)$ und das Inverse zu (χ_1, χ_2) ist $(-\chi_1, -\chi_2)$.

Analog können wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ auf der Menge \mathbb{K}^n eine Vektorraumstruktur definieren. Ob wir die Elemente dieses Vektorraums als Zeilen oder Spalten schreiben spielt hier noch keine Rolle. Wir werden sie aus Platzgründen meist als Zeilen schreiben.

(iii) Wir können auf der Menge aller \mathbb{K} -wertigen Folgen

$$V = \{(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \chi_n \in \mathbb{K} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$$

mittels der Operationen

$$\begin{aligned}(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}} + (\eta_n)_{n \in \mathbb{N}} &= (\chi_n + \eta_n)_{n \in \mathbb{N}} \\ \alpha \cdot (\chi_n)_{n \in \mathbb{N}} &= (\alpha\chi_n)_{n \in \mathbb{N}}\end{aligned}$$

eine Vektorraumstruktur definieren.

- (iv) Sei M eine Menge, dann ist die Menge aller \mathbb{K} -wertigen Funktionen auf M ein Vektorraum

$$\{f \mid f : M \rightarrow \mathbb{K}\}$$

wenn wir die Addition und skalare Multiplikation wie folgt definieren (für $x \in M$)

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &:= f(x) + g(x) \\ (\alpha f)(x) &:= \alpha f(x).\end{aligned}$$

Das neutrale Element ist dabei die Funktion $x \mapsto 0$ und das Inverse zur Funktion f ist $x \mapsto -f(x)$. Das vorhergehende Beispiel ist ein Spezialfall von diesem Raum ($M = \mathbb{N}$).

Definition 3.4. Sei V ein Vektorraum und $x, x_1, \dots, x_n \in V$ und $M \subset V$.

- (i) Falls es Koeffizienten $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ gibt so, dass

$$x = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k,$$

nennen wir x eine Linearkombination von x_1, \dots, x_n .

- (ii) Die Menge aller Linearkombinationen die sich aus Elementen von M bilden lässt, bezeichnen wir als den Spann oder die lineare Hülle von M :

$$\text{lin } M := \left\{ \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k \mid n \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_n \in M, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K} \right\}.$$

- (iii) Wir sagen M ist (oder die Elemente von M sind) linear unabhängig, wenn für alle $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ und $x_1, \dots, x_n \in M$ gilt

$$0 = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.$$

Andernfalls heißen die Elemente von M linear abhängig.

- (iv) Die Teilmenge M heißt Erzeugendensystem, wenn $\text{lin } M = V$ gilt.
 (v) Die Teilmenge M heißt Basis von V falls sie ein linear unabhängiges Erzeugendensystem ist.
 (vi) Der Raum V heißt endlichdimensional, falls es ein endliches Erzeugendensystem gibt andernfalls heißt er unendlichdimensional.

Beispiel 3.5. (i) Sei $V = \mathbb{R}^2$. Die Elemente $x = (1, 0)$ und $y = (1, 1)$ sind linear unabhängig, denn aus

$$\alpha x + \beta y = (0, 0) \quad (3.1)$$

folgen die Gleichungen $\alpha + \beta = 0$ und $\beta = 0$, die ausschließlich die Lösung $\alpha = \beta = 0$ haben.

Das Element $(0, 2)$ ist eine Linearkombination von x und y denn

$$(0, 2) = -2(1, 0) + 2(1, 1).$$

Tatsächlich ist $\text{lin}\{x, y\} = \mathbb{R}^2$, jedes Element von V lässt sich also als Linearkombination von x und y schreiben:

$$(\alpha, \beta) = (\alpha - \beta)x + \beta y.$$

Insbesondere ist damit \mathbb{R}^2 endlichdimensional.

(ii) Die Elemente $x = (1, -1, 2)$, $y = (2, -1, 0)$ und $z = (4, -3, 4)$ aus $V = \mathbb{R}^3$ sind linear abhängig da gilt

$$2x + y - z = (0, 0, 0).$$

(iii) Sei

$$V = \{f \mid f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}.$$

Betrachte für $n \in \mathbb{N}_0$ die Funktionen

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^n. \end{aligned}$$

Dann sind diese Funktionen linear unabhängig, denn falls

$$0 = \sum_{k=1}^N \alpha_k f_k$$

gilt, also falls

$$0 = \sum_{k=1}^N \alpha_k x^k$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt folgt $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. Das gilt daher, dass Polynome vom Grad $n \geq 1$ höchstens n verschiedene Nullstellen haben.

Die lineare Hülle

$$\text{lin} \{f_0, \dots, f_n\}$$

ist dann der Raum aller polynomialen Funktionen vom Grad höchstens n .

Die Funktion $x \mapsto (x-1)^3$ ist eine Linearkombination der f_n denn es gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

Bemerkung 3.6. Uns geht es hier zunächst fast ausschließlich um endlichdimensionale Vektorräume. Das klassische – und in gewissem Sinne einzige – Beispiel für einen endlichdimensionalen Vektorraum ist \mathbb{K}^n .

Später werden auch unendlichdimensionale Vektorräume (meist Funktionenräume) eine wichtige Rolle spielen. So werden in der üblichen Darstellung der Quantenmechanik Hilberträume – spezielle unendlichdimensionale Räume – benutzt.

Für unendlichdimensionale Räume (und bereits für endlichdimensionale Räume mit Dimension > 3) versagt unser geometrisches Vorstellungsvermögen, wir können diese Objekte dennoch untersuchen.

Bemerkung 3.7. Sei V ein Vektorraum, y eine Linearkombination von $y_1, \dots, y_n \in V$ und jedes dieser Elemente sei eine Linearkombination von x_1, \dots, x_m . Es gibt also Skalare $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ und $\beta_{k,l}$ für $(k, l) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}$ so, dass

$$y = \sum_{k=1}^n \alpha_k y_k$$

und für jedes $k \in \{1, \dots, n\}$

$$y_k = \sum_{l=1}^m \beta_{k,l} x_l.$$

Dann gilt auch

$$y = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \alpha_k \beta_{k,l} x_l = \sum_{l=1}^m \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \beta_{k,l} \right) x_l$$

also ist y eine Linearkombination von x_1, \dots, x_m . Insbesondere gilt für jedes $M \subset V$

$$\text{lin lin } M = \text{lin } M.$$

Satz 3.8. Sei V ein (endlichdimensionaler) Vektorraum und $x_1, \dots, x_n \in V$. Dann sind äquivalent

(i) x_1, \dots, x_n ist eine Basis von V ,

- (ii) x_1, \dots, x_n ist ein minimales Erzeugendensystem von V , das heißt es ist ein Erzeugendensystem und jede echte Teilmenge ist kein Erzeugendensystem mehr,
- (iii) x_1, \dots, x_n ist ein maximales linear unabhängiges System, das heißt es ist linear unabhängig und für jedes $y \in V$ ist x_1, \dots, x_n, y linear abhängig,
- (iv) für jedes $x \in V$ existieren eindeutig bestimmte Skalare $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ so, dass

$$x = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k.$$

Beweis. (i) \implies (ii): Sei x_1, \dots, x_n eine Basis von V . Angenommen es gibt ein echt kleineres Erzeugendensystem, also (gegebenenfalls umnummerieren) x_2, \dots, x_n ist auch noch ein Erzeugendensystem also $\text{lin}\{x_2, \dots, x_n\} = V$. Dann existieren insbesondere $\alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ so, dass

$$x_1 = \sum_{k=2}^n \alpha_k x_k.$$

Damit sind aber die Elemente x_1, \dots, x_n linear abhängig, was jedoch nicht möglich ist, da sie eine Basis sind.

(ii) \implies (iii): Sei x_1, \dots, x_n ein minimales Erzeugendensystem. Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ so, das

$$0 = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k.$$

Angenommen mindestens ein Koeffizient sei ungleich 0 (durch umnummerieren können wir annehmen $\alpha_1 \neq 0$). Dann gilt

$$x_1 = \sum_{k=2}^n -\frac{\alpha_k}{\alpha_1} x_k.$$

Da x_1, \dots, x_n ein Erzeugendensystem ist, existieren für $x \in V$ Koeffizienten β_1, \dots, β_n so, dass

$$x = \sum_{k=1}^n \beta_k x_k = \sum_{k=2}^n -\frac{\alpha_k}{\alpha_1} \beta_1 x_k + \sum_{k=2}^n \beta_k x_k,$$

also ist $x \in \text{lin}\{x_2, \dots, x_n\}$. Da $x \in V$ beliebig war folgt $V = \text{lin}\{x_2, \dots, x_n\}$ was im Widerspruch zur Minimalität des Erzeugendensystems steht. Also war die Annahme, einer der Koeffizienten sei ungleich 0 falsch, es muss also $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots, \alpha_n = 0$ gelten und damit sind x_1, \dots, x_n linear unabhängig. Sei nun $y \in V$. Dann existieren $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ so, dass

$$y = \sum_{k=1}^n \gamma_k x_k$$

also sind x_1, \dots, x_n, y linear abhängig.

(iii) \implies (iv): Sei x_1, \dots, x_n ein maximales linear unabhängiges System und $y \in V$. Dann existieren $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta \in \mathbb{K}$ so, dass

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k + \beta y = 0$$

und mindestens einer der Koeffizienten $\neq 0$ ist. Falls $\beta = 0$ wäre, dann wäre

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k = 0,$$

was jedoch nur für $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ möglich ist, da x_1, \dots, x_n linear unabhängig sind. Es muss also $\beta \neq 0$ gelten und damit

$$y = \sum_{k=1}^n -\frac{\alpha_k}{\beta} x_k.$$

Die Eindeutigkeit der Darstellung von y als Linearkombination von x_1, \dots, x_n sollte als Übung gezeigt werden.

(iv) \implies (i): Nach Voraussetzung kann jedes $x \in V$ als Linearkombination von x_1, \dots, x_n geschrieben werden, also gilt $\text{lin}\{x_1, \dots, x_n\} = V$. Falls

$$0 = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k$$

gilt, dann folgt aus der Eindeutigkeit der Darstellung $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$, die Elemente sind also linear unabhängig. \square

Korollar 3.9. *Jeder (endlichdimensionale) Vektorraum besitzt eine Basis.*

Beweis. Wir beweisen die Aussage nur für endlichdimensionale Räume. Da V endlichdimensional ist, existiert ein endliches Erzeugendensystem x_1, \dots, x_n . Wir entfernen nun so lange Elemente, bis wir ein minimales Erzeugendensystem erhalten und dieses ist nach dem vorhergehenden Satz eine Basis. \square

Lemma 3.10. *Sei V ein Vektorraum, $x_1, \dots, x_n \in V$ linear unabhängig und $y \in V$. Dann ist x_1, \dots, x_n, y genau dann linear unabhängig, wenn*

$$y \notin \text{lin}\{x_1, \dots, x_n\}.$$

Beweis. Die Richtung \implies ist klar.

Sei andererseits

$$y \notin \text{lin}\{x_1, \dots, x_n\}$$

und

$$0 = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k + \beta y$$

für Koeffizienten $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta \in \mathbb{K}$. Dann muss $\beta = 0$ gelten – andernfalls könnten wir nach y auflösen. Da die Elemente x_1, \dots, x_n linear unabhängig sind, können wir nun auch $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ schlussfolgern. \square

Satz 3.11 (Basisaustauschsatz). *Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Seien x_1, \dots, x_m ein Erzeugendensystem und y_1, \dots, y_n seien linear unabhängig. Dann gilt $m \geq n$. Insbesondere folgt $m = n$ falls beide Systeme Basen sind.*

Beweis. Wir zeigen, dass wir die Elemente y_1, \dots, y_n stückweise durch die x_i ersetzen können, ohne die lineare Unabhängigkeit zu zerstören.

Sei dazu $k \in \{0, \dots, \min\{m, n\} - 1\}$ und sei $x_1, \dots, x_k, y_{k+1}, \dots, y_n$ linear unabhängig. Angenommen es gilt

$$x_{k+1}, \dots, x_m \in \text{lin}\{x_1, \dots, x_k, y_{k+2}, \dots, y_n\}.$$

Dann gilt, da die x_i ein Erzeugendensystem sind

$$y_{k+1} \in \text{lin}\{x_1, \dots, x_m\} \subset \text{lin}\{x_1, \dots, x_k, y_{k+2}, \dots, y_n\}$$

was jedoch im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von $x_1, \dots, x_k, y_{k+1}, \dots, y_n$ steht. Es muss also eines der Elemente x_{k+1}, \dots, x_m nicht in $\text{lin}\{x_1, \dots, x_k, y_{k+2}, \dots, y_n\}$ liegen und wir können durch Umnummerieren annehmen $x_{k+1} \notin \text{lin}\{x_1, \dots, x_k, y_{k+2}, \dots, y_n\}$. Das System $x_1, \dots, x_{k+1}, y_{k+2}, \dots, y_m$ ist nun nach dem obigen Lemma linear unabhängig.

Wir können also Schritt für Schritt die y_i durch x_i austauschen solange bis entweder die x_i oder die y_i aufgebraucht sind. Falls $n > m$ wäre, erhielten wir auf diesem Wege ein linear unabhängiges System $x_1, \dots, x_m, y_{m+1}, \dots, y_n$. Das ist jedoch unmöglich, da x_1, \dots, x_m ein Erzeugendensystem ist und daher y_{m+1} als Linearkombination dieser Elemente geschrieben werden kann.

Sind schließlich beide Systeme Basen, so so können wir die Rollen von x_i und y_i vertauschen und erhalten so auch $m \leq n$. \square

Definition 3.12. Sei V ein Vektorraum. Die Anzahl $\dim V$ der Elemente einer Basis von V heißt die Dimension von V .

Beispiel 3.13. (i) In \mathbb{R}^n oder \mathbb{C}^n können wir für $k \in \{1, \dots, n\}$ die Elemente e_k betrachten, deren k -ter Eintrag 1 und alle anderen Einträge 0 sind.

Dann sind e_1, \dots, e_n ein Erzeugendensystem denn es gilt für $\alpha_1, \dots, \alpha_n$

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k.$$

Das Erzeugendensystem ist minimal, denn falls wir e_k entfernen, haben alle Linearkombinationen der verbliebenen Elemente den Eintrag 0 in der k -ten Koordinate.

Die Elemente e_1, \dots, e_n sind also eine Basis die wir die Standardbasis von \mathbb{R} oder \mathbb{C} nennen.

(ii) Der Vektorraum aller Polynome

$$\left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \left| \exists n \in \mathbb{N}_0, \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k x^k \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \right. \right\}$$

besitzt die Basis

$$\{x \mapsto x^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Diese ist jedoch unendlich, der Vektorraum daher unendlichdimensional.

Korollar 3.14. *In einem Vektorraum der Dimension n hat jedes Erzeugendensystem mindesten n Elemente und jedes linear unabhängige System höchstens n Elemente.*

Korollar 3.15 (Basisergänzungssatz). *Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Seien x_1, \dots, x_n linear unabhängig und $M \subset V$ ein Erzeugendensystem. Dann existierten $y_{n+1}, \dots, y_{n+m} \in M$ so, dass $x_1, \dots, x_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+m}$ eine Basis für V ist (der Fall $m = 0$ ist hier zugelassen).*

Beweis. Entweder es gilt

$$M \subset \text{lin} \{x_1, \dots, x_n\}$$

und damit

$$V = \text{lin} M \subset \text{lin} \{x_1, \dots, x_n\}.$$

Dann ist x_1, \dots, x_n bereits ein Erzeugendensystem und es ist nichts zu zeigen.

Oder es existiert $y_{n+1} \in M \setminus \text{lin} \{x_1, \dots, x_n\}$. Dann ist x_1, \dots, x_n, y_{n+1} linear unabhängig (Lemma 3.10). Wir können auf diese Weise schrittweise und linear unabhängige Elemente aus M zu x_1, \dots, x_n hinzufügen. Da jedes linear unabhängige System höchstens $\dim V$ Elemente enthalten kann, muss dieser Prozess irgendwann mit einem Erzeugendensystem $x_1, \dots, x_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+m}$ beendet sein. \square

Definition 3.16 (Untervektorraum). Sei V ein Vektorraum. Eine nichtleere Teilmenge $W \subset V$ heißt Untervektorraum wenn für alle $x, y \in W$ und alle $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt

$$x + \alpha y \in W.$$

Beispiel 3.17. Die Menge

$$W = \{(\chi, \chi) \in \mathbb{R}^2 \mid \chi \in \mathbb{R}\}$$

ist ein Untervektorraum von \mathbb{R}^2 , denn für $\alpha, \chi, \eta \in \mathbb{R}$ gilt

$$(\chi, \chi) + \alpha(\eta, \eta) = (\chi + \alpha\eta, \chi + \alpha\eta) \in W.$$

Der Einheitskreis

$$A = \{(\chi, \eta) \in \mathbb{R}^2 \mid \chi^2 + \eta^2 = 1\}$$

ist kein Untervektorraum denn es gilt $(1, 0), (0, 1) \in A$ aber

$$(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin A.$$

Bemerkung 3.18. (i) Jeder Untervektorraum $W \subset V$ enthält für $x \in W$ auch das inverse $-x = x + (-2)x$ und das neutrale Element $0 = x + (-x)$.

(ii) Geometrisch betrachtet sind Untervektorräume von \mathbb{R}^n genau die Punkte, Geraden, Ebenen oder Hyperebenen die den Koordinatenursprung enthalten.

(iii) Ist W ein Untervektorraum von V und $x_1, \dots, x_n \in W$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ dann gilt

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k \in W.$$

Insbesondere folgt aus $M \subset W$ schon $\text{lin } M \subset W$.

(iv) Eine Menge $M \subset V$ ist ein Untervektorraum, genau dann wenn $\text{lin } M = M$ gilt. Die Richtung „ \implies “ erhalten wir aus dem vorhergehenden Punkt, die andere Richtung folgt, da für $x, y \in M$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt

$$x + \alpha y \in \text{lin } M = M.$$

(v) Sei I eine Indexmenge und W_i ein Untervektorraum von V für jedes $i \in I$. Wir setzen

$$W = \bigcap_{i \in I} W_i.$$

Für beliebiges $x, y \in W$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt dann $x, y \in W_i$ für jedes $i \in I$ und da W_i ein Unterraum ist auch $x + \alpha y \in W_i$ für alle $i \in I$. Daraus folgt $x + \alpha y \in W$.

Wir haben gezeigt, dass Durchschnitte von Untervektorräumen wieder Untervektorräume sind.

- (vi) Vereinigungen von Untervektorräumen sind im Allgemeinen keine Untervektorräume. Betrachte zum Beispiel die x - und y -Achse als Untervektorräume von \mathbb{R}^2

$$W_1 = \{(\alpha, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$$W_2 = \{(0, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Dann enthält $W_1 \cup W_2$ die Punkte $(1, 0)$ und $(0, 1)$ aber nicht $(1, 1) = (1, 0) + (0, 1)$.

- (vii) Sei $M \subset V$ eine Teilmenge. Dann ist die lineare Hülle $\text{lin } M$ der kleinste Untervektorraum von V der M enthält, genauer gilt

$$\text{lin } M = \bigcap_{W \text{ Untervektorraum von } V, M \subset W} W.$$

Die Inklusion \supset folgt, da $\text{lin } M$ ein Untervektorraum ist der M enthält. Die andere Inklusion folgt aus

$$M \subset \bigcap_{W \text{ Untervektorraum von } V, M \subset W} W$$

mittels (iii) und (v).

3.2 Matrizen und der Gauß-Algorithmus

Wie gehabt bezeichnet \mathbb{K} stets einen der Körper \mathbb{R} oder \mathbb{C} .

Definition 3.19. Seien $a_{ij} \in \mathbb{K}$ für $i \in \{1, \dots, n\}$ und $j \in \{1, \dots, m\}$. Das rechteckige Zahlenschema

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

heißt $n \times m$ -Matrix. Der erste Index i wird als Zeilenindex, der zweite Index j als Spaltenindex bezeichnet. Das Paar (n, m) heißt Dimension der Matrix. Im Fall $n = m$ nennen wir die Matrix quadratisch.

Die Menge aller $n \times m$ -Matrizen bezeichnen wir mit $\mathbb{K}^{n \times m}$. Alternativ zur obigen Darstellung schreiben wir manchmal in Anlehnung an die Notation bei Folgen $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n \times m}$. Wir werden üblicherweise lateinische Großbuchstaben verwenden um Matrizen zu bezeichnen, und die entsprechenden lateinischen Kleinbuchstaben für deren Einträge.

Wir definieren für Matrizen $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathbb{K}^{n \times m}$ und $C = (c_{ij}) \in \mathbb{K}^{m \times l}$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ die folgenden Rechenoperationen:

(i) Addition:

$$A + B := \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1m} + b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \dots & a_{nm} + b_{nm} \end{pmatrix}$$

(ii) Skalare Multiplikation:

$$\alpha A := \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \dots & \alpha a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{n1} & \dots & \alpha a_{nm} \end{pmatrix}$$

(iii) Matrixmultiplikation:

Wir definieren $AC := A \cdot C$ in $\mathbb{K}^{n \times l}$ durch

$$\begin{pmatrix} a_{11}c_{11} + a_{12}c_{21} + \dots + a_{1m}c_{m1} & \dots & a_{11}c_{1l} + a_{12}c_{2l} + \dots + a_{1m}c_{ml} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}c_{11} + a_{n2}c_{21} + \dots + a_{nm}c_{m1} & \dots & a_{n1}c_{1l} + a_{n2}c_{2l} + \dots + a_{nm}c_{ml} \end{pmatrix}$$

also

$$(AC)_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik}c_{kj}.$$

(iv) Transposition:

Die Transponierte von A ist die Matrix A^T in $\mathbb{K}^{m \times n}$, die entsteht indem wir aus den Zeilen von A die Spalten von A^T machen (oder an der Hauptdiagonalen spiegeln), also

$$(A^T)_{ij} = a_{ji}.$$

(v) Adjungierung:

Die Adjungierte A^* von A entsteht durch Transposition und anschließende komplexe Konjugation

$$A^* = \overline{A}^T.$$

Für reelle Matrizen ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) stimmt diese Operation mit der Transposition überein.

Bemerkung 3.20. (i) Matrizen sind eine Möglichkeit, die in den $n \cdot m$ Zahlen enthaltene Information effizient zu verwalten. Die Sinnhaftigkeit und Nützlichkeit der oben definierten Operationen wird sich erst nach und nach erweisen.

(ii) Der Raum $\mathbb{K}^{n \times m}$ (für festes $n, m \in \mathbb{N}$) ist mit den oben definierten Operationen Addition und skalare Multiplikation ein Vektorraum. Tatsächlich unterscheidet er sich von $\mathbb{K}^{n \cdot m}$ lediglich durch die visuelle Anordnung der Elemente, was jedoch auf die mathematischen Gesetzmäßigkeiten keinen Einfluss hat.

(iii) Das Produkt AB zweier Matrizen ist nur dann definiert, wenn die Anzahl der Spalten von A mit der Anzahl der Zeilen von B übereinstimmt.

(iv) Sowohl der Raum der $n \times 1$ -Matrizen (Spaltenvektoren) als auch der Raum der $1 \times n$ -Matrizen (Zeilenvektoren) können trivial mit \mathbb{K}^n identifiziert werden. Mit Blick auf die Matrixmultiplikation ist es jedoch entscheidend, ob wir die Vektoren als Zeilen oder Spalten schreiben. Wir legen als Konvention fest, dass wir $v \in \mathbb{R}^n$ stets als Spaltenvektor, also als $n \times 1$ -Matrix interpretieren.

(v) Für die Multiplikation von Matrizen A, B, C, D, E und $\alpha \in \mathbb{K}$ gelten – passende Dimensionen vorausgesetzt – die folgenden Rechenregeln

$$(A + B)C = AC + BC$$

$$A(C + D) = AC + AD$$

$$A(CE) = (AC)E$$

$$\alpha(AC) = (\alpha A)C = A(\alpha C)$$

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

$$(\alpha A)^T = \alpha A^T$$

$$(AC)^T = C^T A^T$$

$$\text{und} \quad (A + B)^* = A^* + B^*$$

$$\text{und} \quad (\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$$

$$\text{und} \quad (AC)^* = C^* A^*.$$

Diese Regeln folgen unmittelbar aus den Definitionen. Wir beweisen hier nur die Assoziativität. Seien also $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{K}^{m \times l}$ und $E \in \mathbb{K}^{l \times p}$. Dann ist AC eine $n \times l$ -Matrix und CE eine $m \times p$ -Matrix. Es gilt für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ und jedes $j \in \{1, \dots, p\}$

$$\begin{aligned} ((AC)E)_{ij} &= \sum_{k=1}^l (AC)_{ik} e_{kj} = \sum_{k=1}^l \left(\sum_{\tilde{k}=1}^m a_{i\tilde{k}} c_{\tilde{k}k} \right) e_{kj} = \sum_{k=1}^l \sum_{\tilde{k}=1}^m a_{i\tilde{k}} c_{\tilde{k}k} e_{kj} \\ &= \sum_{\tilde{k}=1}^m a_{i\tilde{k}} \left(\sum_{k=1}^l c_{\tilde{k}k} e_{kj} \right) = \sum_{\tilde{k}}^m a_{i\tilde{k}} \left(\sum_{k=1}^l (CE)_{\tilde{k}k} \right) = (A(CE))_{ij}. \end{aligned}$$

Dabei haben wir lediglich die Definition des Matrixproduktes sowie die Kommutativität, Assoziativität und Distributivität in \mathbb{K} benutzt.

- (vi) Die Matrizenmultiplikation ist nicht kommutativ. Zunächst sind die Produkte AB und BA überhaupt nur beide definiert, wenn A eine $n \times m$ -Matrix und B eine $m \times n$ Matrix ist ($n, m \in \mathbb{N}$). Doch selbst für quadratische Matrizen findet man leicht Gegenbeispiele

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (vii) Für jedes $n, m \in \mathbb{N}$ besitzt $\mathbb{K}^{n \times m}$ genau ein neutrales Element der Addition, die sogenannte Nullmatrix, deren Einträge alle gleich Null sind. Man überzeugt sich leicht, dass Matrixmultiplikation mit der Nullmatrix stets wieder die Nullmatrix (möglicherweise anderer Dimension) ergibt.
- (viii) Wir führen das Symbol

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ein. Die entsprechende Matrix $I = (\delta_{ij}) \in \mathbb{K}^{n \times n}$ heißt $n \times n$ -Einheitsmatrix. Die diversen Einheitsmatrizen sind die neutralen Elemente der Matrixmultiplikation, denn man überzeugt sich leicht, dass – passende Dimensionen vorausgesetzt – für beliebige Matrizen A und B gilt

$$IA = A \text{ und } BI = B.$$

Um die Einheitsmatrizen unterschiedlicher Dimensionen zu unterscheiden, schreiben wir manchmal die Dimension in den Index: I_n .

- (ix) Für Matrizen kann $AB = 0$ gelten, selbst wenn $A \neq 0$ und $B \neq 0$ ist:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt unmittelbar, dass es nicht in jedem Falle multiplikative Inverse zu einer Matrix geben kann, wir können also nicht ohne weiteres „durch A teilen“.

Beispiel 3.21. Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem mit n Gleichungen in m Unbekannten x_1, \dots, x_m :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1m}x_m &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2m}x_m &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nm}x_m &= b_n. \end{aligned}$$

Fassen wir die Unbekannten sowie die rechte Seite zu Spaltenvektoren $x = (x_1, \dots, x_m)^T$ und $b = (b_1, \dots, b_n)^T$ und die Koeffizienten zu einer Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n \times m}$ zusammen, so können wir das Gleichungssystem nun sehr kompakt als

$$Ax = b$$

schreiben. Damit sind wir der Lösung des Gleichungssystems natürlich noch nicht näher gekommen, wir können aber jetzt allgemeine Eigenschaften deutlich einfacher untersuchen.

Wir bezeichnen das obige Gleichungssystem als homogenes System, falls $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$ gilt, andernfalls als inhomogenes System.

Satz 3.22. *Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$ eine Matrix und $b \in \mathbb{K}^n$. Die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$, also die Menge*

$$\{x \in \mathbb{K}^m \mid Ax = 0\} \subset \mathbb{K}^m$$

ist ein Untervektorraum von \mathbb{K}^m .

Seien x und \tilde{x} Lösungen des inhomogenen Gleichungssystems $Ax = b$, dann ist $x - \tilde{x}$ Lösung des homogenen Systems $Ax = 0$.

Beweis. Zunächst gilt

$$A \cdot 0 = 0,$$

das homogene Gleichungssystem hat also stets eine Lösung. Seien $x, y \in \mathbb{K}^m$ Lösungen des homogenen Systems, es gelte also $Ax = Ay = 0$. Dann gilt für beliebiges $\alpha \in \mathbb{K}$ auch

$$A(x + \alpha y) = Ax + \alpha Ay = 0,$$

also ist auch $x + \alpha y$ Lösung des homogenen Systems.

Falls nun x und \tilde{x} das inhomogene System lösen, falls also gilt $Ax = A\tilde{x} = b$, dann folgt

$$A(x - \tilde{x}) = Ax - A\tilde{x} = b - b = 0$$

und damit ist $x - \tilde{x}$ Lösung des zugehörigen homogenen Systems. □

Bemerkung 3.23. Nach dem obigen Satz können wir also die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems angeben, indem wir eine Basis e_1, \dots, e_k für den Raum

$$\{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = 0\} \subset \mathbb{K}^n$$

sowie eine feste Lösung x_0 des inhomogenen Systems angeben. Dann lässt sich jede Lösung eindeutig in der Form

$$x = x_0 + \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k$$

schreiben. Geometrisch bedeutet das, die Lösungsmenge ist stets entweder leer, oder eine Hyperebene in \mathbb{R}^n .

Beispiel 3.24. Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dann hat das Gleichungssystem $Ax = b$ keine Lösung, da in der vierten Zeile $0 = 4$ steht.

Betrachten wir nun das Gleichungssystem $Ax = c$ also

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &+ x_5 = 3 \\ x_3 &= 2 \\ x_4 - x_5 &= 1. \end{aligned}$$

Zunächst können wir, wenn wir $x_2 = x_5 = 0$ setzen, unmittelbar eine Lösung des Inhomogenen Systems gewinnen: $x_1 = 3$, $x_3 = 2$ und $x_4 = 1$.

Sei nun (y_1, \dots, y_5) eine Lösung des zugehörigen homogenen Systems, dann gilt offenbar

$$\begin{aligned} y_1 &= -2y_2 - y_5 \\ y_3 &= 0 \\ y_4 &= y_5 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} y_2 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} y_5.$$

Umgekehrt können wir für y_2 und y_5 beliebige Werte einsetzen und erhalten mittels obiger Formel eine Lösung des homogenen Gleichungssystems. Wir haben also gezeigt

$$\{y \in \mathbb{K}^n \mid Ay = 0\} = \text{lin} \{(-2, 1, 0, 0, 0)^T, (-1, 0, 0, 1, 1)^T\}$$

und kennen damit den vollständigen Lösungsraum des linearen Gleichungssystems $Ax = c$:

$$\{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = c\} = \{(3, 0, 2, 1, 0)^T + (-2, 1, 0, 0, 0)^T \alpha + (-1, 0, 0, 1, 1)^T \beta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{K}\}.$$

Definition 3.25. Eine Zeile einer Matrix heißt Nullzeile, wenn sie alle ihre Einträge null sind.

Das am weitesten links stehende, von Null verschiedene Element einer Zeile heißt Zeilenführer.

Wir sagen eine Matrix hat Zeilenstufenform, wenn

- jede Nullzeile unter jeder Nichtnullzeile steht,
- der Zeilenführer jeder Nichtnullzeile rechts vom Zeilenführer jeder darüber liegenden Zeile steht.

Wir sagen die Matrix hat reduzierte Zeilenstufenform, wenn zusätzlich

- jeder Zeilenführer den Wert 1 hat,
- jeder Zeilenführer in seiner Spalte das einzige von Null verschiedene Element ist.

Bemerkung 3.26. Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$ und $b \in \mathbb{K}^n$. Falls A reduzierte Zeilenstufenform hat, können wir für das Gleichungssystem $Ax = y$ ganz analog zum obigen Beispiel den Raum aller Lösungen angeben. Wir lösen dazu alle Gleichungen nach den Zeilenführern auf und behandeln die Unbekannten, die keine Zeilenführer sind als freie Parameter.

Wir geben nun einen Satz von elementaren Operationen an, der es uns erlauben wird beliebige Matrizen auf Zeilenstufenform zu bringen.

Definition 3.27 (Zeilenoperationen). Sei A eine Matrix (oder ein sonstiges rechteckiges Zahlenschema). Die elementaren Zeilenoperationen sind

- (i) Vertauschen der Zeilen i und j ,
- (ii) Addition der Zeile i zur Zeile j ,
- (iii) Multiplikation der Zeile i mit $\lambda \neq 0$,
- (iv) Addition des λ -fachen der Zeile i zur Zeile j .

Bemerkung 3.28. Die letzte Operation lässt sich aus den vorhergehenden zusammensetzen: zuerst multiplizieren wir die i -te Zeile mit λ , addieren dann Zeile i zu Zeile j und multiplizieren schließlich Zeile i mit λ^{-1} .

Satz 3.29 (Gauß-Algorithmus). *Jede Matrix A kann durch endlich viele elementare Zeilenoperationen auf (reduzierte) Zeilenstufenform gebracht werden.*

Beweisskizze. Falls A die Nullmatrix ist, so ist nichts zu zeigen. Andernfalls wende den folgenden Algorithmus an.

- Finde die erste Spalte, die ein von Null verschiedenes Element enthält – ihr Spaltenindex sei j – und vertausche Zeilen so, dass dieses Element in der obersten Zeile steht.
- Bringe durch Addition passender Vielfacher der ersten Zeile, alle weiteren Elemente der j -ten Spalte zum Verschwinden.
- Entferne die erste Zeile und wende das Verfahren auf die verbleibende Matrix an.

Das Verfahren endet offenbar nach endlich vielen Schritten mit einer Matrix in Zeilenstufenform.

Ausgehend von dieser kann man nun mit weiteren Zeilenoperationen auch die reduzierte Zeilenstufenform erreichen (Übung). \square

Beispiel 3.30. Wir illustrieren den Algorithmus am Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrcr} x_1 - & x_2 + & 2x_3 + 3x_4 = & 3 \\ 2x_1 - 2 & x_2 + & x_3 + 3x_4 = & 3 \\ -x_1 + 3 & x_2 - & x_3 - 6x_4 = & -2 \\ x_1 - 2 & x_2 + & x_3 + 4x_4 = & 2. \end{array}$$

Wir bringen zunächst die Einträge der ersten Spalte zum Verschwinden (wir schreiben nur noch die letzten drei Zeilen)

$$\begin{array}{rrcr} & & -3x_3 - 3x_4 = & -3 \\ 2 & x_2 + & x_3 - 3x_4 = & 1 \\ -x_2 - & x_3 + & x_4 = & -1. \end{array}$$

Vertauschen und Multiplikation liefert:

$$\begin{array}{rrcr} x_2 + & x_3 - & x_4 = & 1 \\ & x_3 + & x_4 = & 1 \\ 2 & x_2 + & x_3 - 3x_4 = & 1. \end{array}$$

Wir bringen nun die zweite Spalte zum Verschwinden (wir schreiben nur noch die letzten beiden Zeilen):

$$\begin{array}{rrcr} x_3 + & x_4 = & 1 \\ -x_3 - & x_4 = & -1. \end{array}$$

Addition beider Zeilen liefert eine Nullzeile und wir erhalten eine Zeilenstufenform:

$$\begin{array}{rclcl} x_1 - & x_2 + & 2x_3 + 3x_4 = & 3 \\ & x_2 + & x_3 - x_4 = & 1 \\ & & x_3 + x_4 = & 1 \\ & & & 0 = 0. \end{array}$$

Einige weitere Zeilenoperationen ergeben dann die reduzierte Zeilenstufenform:

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & & - x_4 = & 1 \\ & x_2 & - 2x_4 = & 0 \\ & & x_3 + x_4 = & 1 \end{array}$$

Daraus können wir nun die allgemeine Lösung ablesen:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1 + \alpha, 2\alpha, 1 - \alpha, \alpha) \quad \alpha \in \mathbb{K}.$$

Analog kann man für jedes lineare Gleichungssystem mittels des Gauß-Algorithmus eine Lösung bestimmen.

Bemerkung 3.31. Die elementaren Zeilenoperationen lassen sich durch elementare Zeilenoperationen rückgängig machen.

Man kann sich überlegen, dass zwei durch elementare Zeilenoperationen auseinander hervorgegangene lineare Gleichungssysteme die selbe Lösungsmenge haben (wir werden weiter unten noch einen Beweis für diese Tatsache geben). Aus diesem Grund führt das obige Verfahren tatsächlich zur Lösung des ursprünglichen Gleichungssystems.

Definition 3.32. Eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ heißt invertierbar, falls es ein multiplikatives Inverses zu A gibt, also eine Matrix $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gibt so, dass

$$AB = BA = I.$$

Wir schreiben A^{-1} für das multiplikative Inverse. Die Menge aller invertierbaren $n \times n$ Matrizen wird mit $\text{Gl}(n)$ bezeichnet und heißt allgemeine lineare Gruppe.

Bemerkung 3.33. Man überzeugt sich leicht (Übung), dass das multiplikative Inverse tatsächlich eindeutig bestimmt ist.

Wir wissen bereits, dass es nichttriviale Matrizen gibt, die $A^2 = 0$ erfüllen. Solche Matrizen können nicht invertierbar sein da Multiplikation mit A^{-1} sonst $A = 0$ ergäbe.

Satz 3.34. Seien $A, B, C \in \mathbb{K}^{n \times n}$, B invertierbar und $A = BC$. Dann ist A invertierbar genau dann wenn C invertierbar ist. Insbesondere ist das Produkt invertierbarer Matrizen wieder invertierbar.

Beweis. Übung. □

Bemerkung 3.35. Wir stellen fest, dass Matrizenmultiplikation von links mit einer Matrix A die Spalten der multiplizierten Matrix B nicht „vermischt“. Das heißt, um die j -te Spalte des Produktes AB zu bestimmen, müssen wir lediglich die j -te Spalte von B kennen, die anderen Einträge haben keinen Einfluss (wir benötigen andererseits alle Einträge von A). In anderen Worten: wir erhalten das Produkt AB auch, indem wir die Spalten von B einzeln mit A multiplizieren und die Ergebnisse zu einer Matrix zusammensetzen.

Die analoge Eigenschaft gilt auch für die elementaren Zeilenoperationen.

Satz 3.36. *Sei A eine Matrix und \tilde{A} sei aus A durch elementare Zeilenoperationen hervorgegangen. Dann existiert eine invertierbare Matrix T so, dass $\tilde{A} = TA$. Wir sagen, die Zeilenoperationen auf A werden durch Linksmultiplikation mit T realisiert.*

Beweisskizze. Wir betrachten zunächst die einzelnen elementaren Zeilenoperationen. Wir geben hier nur Beispiele für die realisierenden Matrizen an, die sich jedoch einfach verallgemeinern lassen.

Auf Grund der obigen Bemerkung müssen wir lediglich untersuchen, wie die entsprechenden Matrizen auf einen Spaltenvektor wirken. Es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_3 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

Multiplikation von links mit der angegebenen Matrix vertauscht also die 2. und 4. Zeile. Analog erhalten wir Addition der ersten zur dritten Zeile

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

sowie Multiplikation der zweiten Zeile mit $\lambda \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \lambda x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Für die erste Matrix finden wir nun leicht

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

die Matrix ist also ihr eigenes Inverses. Man überlege sich als Übung die Inversen der anderen oben stehenden Matrizen (beziehungsweise die inversen Zeilenoperationen).

Sei nun \tilde{A} aus A durch elementare Zeilenoperationen hervorgegangen, dann finden wir für jede einzelne dieser Operationen wie oben eine realisierende Matrix, es gibt also $T_1, \dots, T_n \in \mathbb{K}^{n \times n}$ invertierbar, so dass

$$\tilde{A} = T_n T_{n-1} \cdots T_1 A.$$

Da das Produkt invertierbarer Matrizen wieder invertierbar ist erfüllt $T = T_n T_{n-1} \cdots T_1$ die Anforderungen des Satzes. \square

Korollar 3.37. *Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$ und $b \in \mathbb{K}^n$ und T invertierbar. Dann stimmen die Lösungsmengen der linearen Gleichungssysteme $Ax = b$ und $TAx = Tb$ überein. Insbesondere haben das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ sowie das mittels Gauß-Algorithmus auf (reduzierte) Zeilenstufenform gebrachte Gleichungssystem $\tilde{A}x = \tilde{b}$ die selbe Lösungsmenge.*

Beweis. Sei $x \in \mathbb{K}^m$ eine Lösung, es gelte also $Ax = b$, dann folgt offenbar auch $TAx = Tb$. Falls umgekehrt $TAx = Tb$ für ein $x \in \mathbb{K}^m$ gilt, dann liefert Multiplikation mit der Inversen Matrix T^{-1}

$$Ax = T^{-1}TAx = T^{-1}Tb = b.$$

Insbesondere wissen wir, dass wir jede Matrix A mit dem Gauß-Algorithmus auf (reduzierte) Zeilenstufenform bringen können und nach dem obigen Satz können wir diese Zeilenstufenoperationen durch Multiplikation mit einer invertierbaren Matrix T realisieren ($\tilde{A} = TA$). Dabei wenden wir die selben Operationen auf b an es gilt also $\tilde{b} = Tb$ und das auf (reduzierte) Zeilenstufenform gebrachte Gleichungssystem hat die Form $TAx = Tb$. \square

Lemma 3.38. *Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ in Zeilenstufenform ist invertierbar, genau dann wenn alle Diagonaleinträge von 0 verschieden sind (genau dann wenn die letzte Zeile von A keine Nullzeile ist). Eine Matrix in reduzierter Zeilenstufenform ist invertierbar, genau dann wenn sie die Einheitsmatrix ist.*

Beweis. Sei A invertierbar. Angenommen die letzte Zeile von A sei eine Nullzeile. Dann gilt

$$(0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1) \cdot A = (0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 0).$$

Multiplikation der oberen Gleichung von rechts mit A^{-1} führt jedoch zu einem Widerspruch, also müssen alle Diagonaleinträge von 0 verschieden sein.

Seien andererseits alle Diagonaleinträge von 0 verschieden. Wir können A nun mittels Zeilenstufentransformation – also durch Linksmultiplikation mit einer invertierbaren Matrix T – in die Einheitsmatrix überführen, es gilt also $TA = I$ und damit ist $A = T^{-1}$ invertierbar.

Schließlich ist die Einheitsmatrix die einzige Matrix in reduzierter Zeilenstufenform, deren Diagonaleinträge alle von 0 verschieden sind. \square

Korollar 3.39. Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ eine Matrix. Dann ist A invertierbar genau dann, wenn jede ihrer Zeilenstufenformen von Null verschiedene Einträge auf der Hauptdiagonalen hat, genau dann wenn die reduzierte Zeilenstufenform von A die Einheitsmatrix ist.

Beweis. Wir wissen bereits, dass wir jede Matrix durch elementare Zeilenoperationen auf (reduzierte) Zeilenstufenform bringen können und dass diese Zeilenoperationen durch Linksmultiplikation mit invertierbaren Matrizen realisiert werden. Jede Zeilenstufenform von A hat also die Form TA mit T invertierbar und es gibt S invertierbar so, dass SA reduzierte Zeilenstufenform hat.

Nach Satz 3.34 wissen wir, dass A invertierbar ist genau dann wenn TA invertierbar ist genau dann wenn SA invertierbar ist. \square

Bemerkung 3.40. Das obige Korollar gibt uns eine Möglichkeit zu entscheiden, ob eine Matrix A invertierbar ist. Wir bringen dazu A mittels des Gauß-Algorithmus auf Zeilenstufenform.

Es liefert darüber hinaus auch ein Verfahren zur Berechnung der Inversen. Gegeben seien Matrizen $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ invertierbar und $B \in \mathbb{K}^{n \times m}$. Dann können wir $A^{-1}B$ folgendermaßen berechnen. Wir schreiben A und B nebeneinander bringen die erweiterte Matrix $(A|B)$ mittels des Gauß-Algorithmus auf die Form $(I|\tilde{B})$. Das ist stets möglich, da die reduzierte Zeilenstufenform von A die Einheitsmatrix ist. Wenn T die invertierbare Matrix ist, die die entsprechenden Zeilenoperationen realisiert, dann gilt $TA = I$ und $TB = \tilde{B}$. Daraus folgt dann $T = A^{-1}$ und $\tilde{B} = A^{-1}B$.

Insbesondere erhalten wir falls wir mit $B = I$ starten auf diesem Wege die Inverse.

Beispiel 3.41. Wir wollen die Inverse zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

bestimmen (wir wissen aus unserem Kriterium, dass diese Matrix invertierbar ist). Wir wenden dazu den Gauß-Algorithmus auf das Schema

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

an bis im linken Teil die Einheitsmatrix steht.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Nun finden wir im rechten Teil die gesuchte Inverse.

Definition 3.42. Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$ eine Matrix und seien $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{K}^{1 \times m}$ die Zeilen von A . Wir definieren den Zeilenraum von A als den von z_1, \dots, z_n aufgespannten Untervektorraum von $\mathbb{K}^{1 \times m}$ also

$$\text{lin} \{z_1, \dots, z_n\}$$

und nennen die Dimension dieses Raumes den Zeilenrang von A .

Analog definiert man den Spaltenraum und den Spaltenrang von A .

Man kann zeigen – was wir jedoch hier nicht tun werden – dass der Zeilenrang und der Spaltenrang einer Matrix übereinstimmen, daher nennt man beide Zahlen auch den Rang der Matrix A .

Satz 3.43. *Sei A eine Matrix in Zeilenstufenform. Dann bilden die von Null verschiedenen Zeilen von A eine Basis für den Zeilenraum.*

Beweis. Seien $z_1, \dots, z_k \in \mathbb{K}^{1 \times m}$ ($k \leq n$) die von Null verschiedenen Zeilen von A von oben nach unten. Sie sind ein Erzeugendensystem für den Zeilenraum. Es gelte nun

$$\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \dots + \alpha_k z_k = 0$$

für Koeffizienten $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. Sei $a_{1j} \neq 0$ der Zeilenführer der Zeile z_1 . Dann gilt (Zeilenstufenform) $a_{2j} = a_{3j} = \dots = a_{nj} = 0$ und die j -te Spalte der obigen Gleichung lautet

$$\alpha_1 a_{1j} = 0$$

woraus $\alpha_1 = 0$ folgt. Induktiv folgt nun mit dem selben Argument, dass auch die anderen Koeffizienten verschwinden müssen, die Zeilen sind also linear unabhängig. \square

Satz 3.44. *Die elementaren Zeilenoperationen lassen den Zeilenraum – und damit auch den Rang – unverändert.*

Beweis. Es ist unmittelbar ersichtlich, dass das Vertauschen von Zeilen und die Multiplikation einer Zeile mit $\lambda \neq 0$ den Zeilenraum unverändert lassen. Sei nun A eine Matrix mit den Zeilen z_1, \dots, z_n . Addieren wir (ohne Einschränkung der Allgemeinheit) die zweite zur ersten Zeile. Offenbar ist jede Linearkombination von $z_1 + z_2, z_2, z_3, \dots, z_n$ auch eine Linearkombination von z_1, z_2, \dots, z_n . Andererseits gilt $z_1 = (z_1 + z_2) - z_2$ und so lässt sich jede Linearkombination von z_1, z_2, \dots, z_n auch als Linearkombination von $z_1 + z_2, z_2, z_3, \dots, z_n$ schreiben. \square

Bemerkung 3.45. Die obigen Sätze liefern nun Verfahren zur Lösung diverser Probleme der linearen Algebra.

- (i) Um den Rang einer Matrix zu bestimmen, bringen wir sie mit dem Gauß-Algorithmus auf Zeilenstufenform und zählen die von Null verschiedenen Zeilen.

(ii) Seien $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{K}^m$ gegeben. Wir suchen eine Basis für

$$\text{lin} \{v_1, \dots, v_n\}$$

beziehungsweise wollen die Dimension dieses Raumes bestimmen. Wir schreiben dazu v_1, \dots, v_n als Zeilen einer Matrix und bringen diese auf Zeilenstufenform, die von Null verschiedenen Zeilen sind dann eine Basis des Raumes.

(iii) Natürlich lässt sich auf diese Weise auch feststellen ob ein gegebenes System v_1, \dots, v_n linear unabhängig ist. Das ist genau dann der Fall, wenn bei obigem Verfahren keine Nullzeilen entstehen.

Beispiel 3.46. Wir wollen eine Basis für den Raum

$$\text{lin} \{(3, 2, 2, -1)^T, (-1, 2, 2, 3)^T, (-2, 0, 0, 2)^T\}$$

bestimmen. Dazu schreiben wir die Vektoren als Zeilen in eine Matrix und bringen diese dann mit dem Gauß-Algorithmus auf Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & 8 & 8 \\ 0 & -4 & -4 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Eine Basis ist also durch $(-1, 2, 2, 3)$ und $(0, 1, 1, 1)$ gegeben.

3.3 Die Determinante

In diesem Kapitel sei stets $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und z_1, \dots, z_n die Zeilenvektoren von A . Für Zeilenvektoren $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{K}^{n \times 1}$ sei A die Matrix, die entsteht wenn wir z_1, \dots, z_n von oben nach unten übereinanderschreiben. Dann definieren wir

$$\det(z_1, z_2, \dots, z_n) := \det(A).$$

Definition 3.47. Eine Abbildung $D : \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{K}$ heißt

- (i) linear in der ersten Zeile, falls

$$D(z_1 + \lambda \tilde{z}_1, z_2, \dots, z_n) = D(z_1, z_2, \dots, z_n) + \lambda D(\tilde{z}_1, z_2, \dots, z_n)$$

gilt

- (ii) total antisymmetrisch, falls $D(\tilde{A}) = -D(A)$ wenn \tilde{A} aus A durch Vertauschen zweier Zeilen hervorgeht,
- (iii) eine n -Form, falls sie linear in der ersten Zeile und total antisymmetrisch ist,
- (iv) eine (die) Determinante, falls es eine n -Form ist und zusätzlich $\det(I) = 1$ gilt.

Für die Determinante einer Matrix verwenden wir auch die Notation

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Wir interessieren uns hier primär nur für die Determinante, also für eine ganz spezielle n -Form. Um deren Eigenschaften zu untersuchen ist es aber hilfreich über allgemeinere n -Formen zu sprechen und deren Eigenschaften gelten natürlich insbesondere für die Determinante.

Beispiel 3.48. Für 2×2 und 3×3 -Matrizen kann man sich überzeugen, dass

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

beziehungsweise

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

solche Abbildungen sind (Übung).

Für höhere Dimensionen wächst die Anzahl der Terme in den Formeln jedoch rasant.

Wir werden weiter unten zeigen, dass es für jedes n genau eine Determinante gibt. Bis dahin sprechen wir von einer Determinante, wenn sie die obigen Bedingungen erfüllt.

Bemerkung 3.49. Sei D eine n -Form, dann gelten

- (i) Jede n -Form ist linear bezüglich jeder Zeile (wenn die anderen Zeilen fest gewählt sind), das heißt

$$D(z_1, \dots, z_{i-1}, \sum_{k=1}^l \alpha_k w_k, z_{i+1}, \dots, z_n) = \sum_{k=1}^l \alpha_k D(z_1, \dots, z_{i-1}, w_k, z_{i+1}, \dots, z_n).$$

Man sagt auch sie ist multilinear in den Zeilen von A .

- (ii) Falls zwei Zeilen der Matrix übereinstimmen, dann ist $D(A) = 0$.
 (iii) Falls eine Zeile (oBdA. z_1) eine Linearkombination der anderen ist, falls also

$$z_1 = \alpha_2 z_2 + \dots + \alpha_n z_n$$

für irgendwelche Koeffizienten $\alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ gilt, dann folgt aus der Linearität

$$D(z_1, \dots, z_n) = \alpha_2 D(z_2, z_2, z_3, \dots, z_n) + \dots + \alpha_n D(z_n, z_2, z_3, \dots, z_n) = 0.$$

Insbesondere ist $D(A) = 0$ falls A eine Nullzeile enthält.

- (iv) Es folgt weiterhin

$$\begin{aligned} D(z_1 + \lambda z_2, z_2, z_3, \dots, z_n) &= D(z_1, z_2, z_3, \dots, z_n) + \lambda D(z_2, z_2, z_3, \dots, z_n) \\ &= D(z_1, z_2, z_3, \dots, z_n). \end{aligned}$$

Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen ändert den Wert einer n -Form nicht.

Satz 3.50. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert eine Determinante $\det_n : \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{K}$.

Beweis. Man überprüft leicht, dass für $n = 1$ die Abbildung $(a) \mapsto a$ eine Determinante ist.

Sei nun $n \in \mathbb{N}$ und $\det_n : \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{K}$ eine Determinante. Für eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ bezeichne $A_{i,j}$ die Matrix, die durch Streichen der i -ten Zeile und der j -ten Spalte entsteht. Wir definieren (Entwicklung nach der ersten Spalte)

$$\begin{aligned} \det_{n+1}(A) &= a_{1,1} \det_n(A_{1,1}) - a_{2,1} \det_n(A_{2,1}) + a_{3,1} \det_n(A_{3,1}) - \dots \pm a_{n+1,1} \det_n(A_{n+1,1}) \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_{k,1} \det_n(A_{k,1}). \end{aligned}$$

Diese Abbildung ist linear in der ersten Zeile (Warum?).

Sei nun B die Matrix, die durch Vertauschen der Zeilen i und j aus A hervorgeht (oBdA. sei $i < j$). Für $k \notin \{i, j\}$, gilt dann $b_{k,1} \det_n(B_{k,1}) = -a_{k,1} \det_n(A_{k,1})$. Weiter gilt $b_{i,1} \det_n(B_{i,1}) = (-1)^{j-i} a_{j,1} \det_n(A_{j,1})$ sowie $b_{j,1} \det_n(B_{j,1}) = (-1)^{j-i} a_{i,1} \det_n(A_{i,1})$. Damit ergibt sich tatsächlich $\det(B) = -\det(A)$.

Die Normierung $\det_{n+1}(I) = 1$ überprüfe man als Übung. \square

Lemma 3.51. Sei D eine n -Form und $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ habe obere Dreiecksgestalt, das heißt alle Einträge unterhalb der Diagonalen verschwinden. Dann gilt

$$D(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn} D(I).$$

Beweis. (i) Falls A die Einheitsmatrix ist, dann ist die Gleichung trivial erfüllt.

(ii) Falls A eine Nullzeile enthält gilt $D(A) = 0$. Andererseits verschwindet dann auch mindestens einer der Diagonaleinträge.

(iii) Falls A eine Diagonalmatrix ist, dann erhalten wir die Gleichung aus der Linearität in jeder Zeile.

(iv) Seien nun $i < j$ Zeilenindizes. Addieren wir ein Vielfaches der j -ten Zeile zur i -ten, bleiben $D(A)$ und, da die Matrix obere Dreiecksgestalt, hat auch die Diagonaleinträge unverändert. Falls nun alle Diagonaleinträge von 0 verschieden sind, dann können wir A durch Anwendung solcher Operationen auf Diagonalgestalt bringen und den letzten Punkt benutzen. Verschwindet einer der Diagonaleinträge, können wir durch solche Operationen eine Nullzeile erzeugen (in der Zeile des niedrigsten verschwindenden Diagonaleintrags) und den vorletzten Punkt benutzen. \square

Satz 3.52. Die Menge aller n -Formen ist ein eindimensionaler Untervektorraum (des Raumes aller Abbildungen von $\mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{K}$). Insbesondere gibt es für jedes n genau eine Determinante.

Beweis. Dass Linearkombinationen von n -Formen wieder n -Formen sind, überprüft man durch einfache Rechnungen (Übung). Wir wissen auch bereits, dass eine von 0 verschiedene n -Form existiert, die oben konstruierte Determinante, der Untervektorraum ist also mindestens 1-dimensional. Sei nun \det eine Determinante und D eine n -Form. Wir zeigen, dass dann für jedes $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gilt $D(A) = D(I) \det(A)$. Falls A obere Dreiecksgestalt hat, dann folgt aus dem vorhergehenden Lemma

$$D(A) = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} D(I) = D(I) a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} \det(I) = D(I) \det(A).$$

Sei nun T eine Matrix, die eine elementare Zeilenoperation realisiert. Dann ist $D(TA) = D(I) \det(TA)$ genau dann, wenn $D(A) = D(I) \det(A)$ ist. Da wir jede Matrix mittels elementarer Zeilenoperationen auf Dreiecksgestalt (zum Beispiel Zeilenstufenform) bringen können, gilt die Gleichheit also für beliebige Matrizen.

Falls D eine Determinante ist, gilt also $D(A) = \det(A)$ für jede Matrix A . Es gibt also genau eine Determinante (für jedes $n \in \mathbb{N}$) und wir können jetzt von „der“ Determinante sprechen.

Dann sagt die soeben gezeigte Gleichung aus, dass jede n -Form D sich als $D(I) \det$ schreiben lässt, also ein skalares Vielfaches der Determinante ist. Damit ist \det eine Basis für den Raum aller n -Formen. \square

Bemerkung 3.53. Für obere Dreiecksmatrizen können wir die Determinante direkt ablesen. Eine analoge Aussage gilt auch für untere Dreiecksmatrizen. Für eine allgemeine Matrix können wir nun elementare Zeilenoperationen verwenden um die Determinante zu berechnen, da wir wissen wie sie sich unter diesen Operationen verhält. Das ist im Allgemeinen und insbesondere für große Matrizen deutlich effektiver als der Entwicklungssatz oder die Leibnitz-Formel (Bemerkung 3.58).

Beispiel 3.54.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ -2 & -4 & 2 & 12 \\ -2 & -4 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & -3 & -6 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ -1 & -2 & 1 & 6 \\ -1 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & -3 & -6 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \\ = -4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 24.$$

Satz 3.55. Seien $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$, dann gelten

- (i) $\det(AB) = \det(A) \det(B)$,
- (ii) $\det(A) \neq 0$ genau dann, wenn A invertierbar ist,
- (iii) für invertierbare Matrizen gilt $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$.
- (iv) $\det(A) = \det(A^T)$,
- (v) $\det(A^*) = \overline{\det(A)}$.

Beweis. (i) Sei $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ fest. Betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} D : \mathbb{K}^{n \times n} &\rightarrow \mathbb{K} \\ A &\mapsto \det(AB). \end{aligned}$$

Seien z_1, \dots, z_n die Zeilen von A . Anhand der Definition der Matrixmultiplikation überzeugt man sich leicht, dass dann $z_1 B, \dots, z_n B$ die Zeilen von AB sind. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} D(z_1 + \lambda \tilde{z}_1, z_2, \dots, z_n) &= \det((z_1 + \lambda \tilde{z}_1)B, z_2 B, \dots, z_n B) \\ &= \det(z_1 B + \lambda \tilde{z}_1 B, z_2 B, \dots, z_n B) \\ &= \det(z_1 B, z_2 B, \dots, z_n B) + \lambda \det(\tilde{z}_1 B, z_2 B, \dots, z_n B) \\ &= D(z_1, z_2, \dots, z_n) + \lambda D(\tilde{z}_1, z_2, \dots, z_n), \end{aligned}$$

also die Linearität von D in der ersten Zeile. Vertauschen zweier Zeilen in A vertauscht die entsprechenden Zeilen von AB , also wechselt $D(A)$ beim Vertauschen

zweier Zeilen das Vorzeichen. Damit ist D eine n -Form und mit Satz 3.52 erhalten wir für jedes A

$$\det(AB) = D(A) = D(I) \det(A) = \det(B) \det(A).$$

Da B beliebig war, gilt die Gleichung für beliebige Matrizen A und B .

- (ii) Falls A invertierbar ist, dann gilt $1 = \det(AA^{-1}) = \det(A) \det(A^{-1})$ und damit $\det(A) \neq 0$.

Für jedes A gibt es eine invertierbare Matrix T , so dass TA Zeilenstufenform hat. Falls A nicht invertierbar ist, dann hat TA eine Nullzeile und es gilt daher

$$0 = \det(TA) = \det(T) \det(A).$$

Da T invertierbar ist gilt $\det(T) \neq 0$ also muss $\det(A) = 0$ sein.

- (iii) Das folgt unmittelbar aus der Multiplikativität.
- (iv) Falls A obere Dreiecksgestalt hat, dann hat A^T untere Dreiecksgestalt und damit gilt $\det(A) = \det(A^T)$. Sei nun T eine Matrix, die eine elementare Zeilenoperation realisiert. Dann hat T entweder Dreiecksgestalt (Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen) oder erfüllt $T = T^T$ (Vertauschen zweier Zeilen, Multiplikation einer Zeile). In jedem Falle gilt also $\det(T) = \det(T^T)$ und $\det(T) \neq 0$.

Für eine beliebige Matrix A gibt es elementare Zeilenoperationen T_1, \dots, T_l so, dass $T_l T_{l-1} \cdots T_1 A$ obere Dreiecksgestalt hat. Dann gilt

$$\begin{aligned} \det(T_l) \cdots \det(T_1) \det(A) &= \det(T_l \cdots T_1 A) = \det((T_l \cdots T_1 A)^T) \\ &= \det(A^T T_1^T \cdots T_l^T) = \det(A^T) \det(T_1^T) \cdots \det(T_l^T) \\ &= \det(A^T) \det(T_1) \cdots \det(T_l) \end{aligned}$$

und es folgt $\det(A) = \det(A^T)$.

- (v) Übung. □

Bemerkung 3.56. (i) Auf Grund dieses Satzes gelten alle Aussagen über Zeilen von Determinanten sinngemäß auch für deren Spalten. Die Determinante ist also linear in jeder Spalte, wir können elementare Spaltenoperationen anwenden und so weiter. In einigen Fällen kann sich dadurch der Rechenaufwand substantiell reduzieren.

- (ii) Zusammen mit Satz 3.50 ergibt sich der Entwicklungssatz entlang der i -ten Spalte

$$\det_{n+1}(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+i} a_{j,i} \det_n(A_{j,i})$$

beziehungsweise Zeile

$$\det_{n+1}(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \det_n(A_{i,j})$$

für jedes $i \in \{1, \dots, n+1\}$. Der Entwicklungssatz ist kann hilfreich sein zur Berechnung spezieller Determinanten, insbesondere falls viele Einträge der Matrix verschwinden. Im Allgemeinen ist jedoch der Rechenaufwand sehr hoch.

- (iii) Viele wichtige Fragen in der linearen Algebra lassen sich mit Hilfe von Determinanten charakterisieren (Invertierbarkeit von Matrizen, lineare Unabhängigkeit von n Elementen von \mathbb{R}^n , Lösung linearer Gleichungssysteme, ...). Im Allgemeinen ist der Gauß-Algorithmus die effektivste Methode eine Determinante auszurechnen, allerdings lassen sich die meisten Fragen, die mit der Determinante beantwortet werden könnten, auch direkt mit dem Gauß-Algorithmus beantworten. Faustregel: keine Determinanten von 5×5 oder größeren Matrizen ausrechnen.

Warum haben wir dann den großen Aufwand betrieben und die Existenz der Determinante nachgewiesen und ihre Eigenschaften untersucht? Die Antwort auf diese Frage ist ähnlich wie bereits bei Matrizen. Determinanten erlauben es uns bestimmte Argumente in Beweisen recht elegant zu formulieren. Sie sind nicht „notwendig“ – es handelt sich schließlich bloß um komplizierte Polynome in n^2 Variablen – aber ohne sie müssten wir an den entsprechenden Stellen dann mit Formeln wie dem Entwicklungssatz oder der Leibnitz-Formel hantieren.

Korollar 3.57. Seien $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$, dann gilt $AB = I$ genau dann, wenn $BA = I$ ist. In beiden Fällen ist A invertierbar und es gilt $B = A^{-1}$.

Beweis. Es gelte zum Beispiel $AB = I$. Dann folgt $\det(A)\det(B) = 1$ und damit $\det(A) \neq 0$. Damit ist A invertierbar und es folgt $B = A^{-1}AB = A^{-1}$. Die andere Richtung folgt analog. \square

Bemerkung 3.58 (Leibniz-Formel). Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir nennen $(i_1, i_2, \dots, i_n) \in \{1, \dots, n\}^n$ eine Permutation wenn alle i_k verschieden sind oder – äquivalent – wenn jede der Zahlen von 1 bis n genau einmal vorkommt. Eine Permutation heißt gerade, wenn eine gerade Anzahl von Vertauschungen zweier Elemente nötig ist um sie in die natürliche Reihenfolge zu überführen und andernfalls ungerade. Es ist also beispielsweise $(4, 1, 3, 2)$ gerade und $(2, 1, 4, 5, 3)$ ungerade.

Definiere die Levi-Civita-Symbole

$$\epsilon_{i_1, i_2, \dots, i_n} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i_1, \dots, i_n) \text{ eine gerade Permutation ist} \\ -1 & \text{falls } (i_1, \dots, i_n) \text{ eine ungerade Permutation ist} \\ 0 & \text{falls } (i_1, \dots, i_n) \text{ keine Permutation ist} \end{cases}$$

Dann gilt

$$\det(A) = \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^n \epsilon_{i_1, i_2, \dots, i_n} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}.$$

Ohne Beweis.

3.4 Skalarprodukte

Im Folgenden sei V stets ein (endlichdimensionaler) Vektorraum über dem Körper \mathbb{K} (\mathbb{R} oder \mathbb{C}).

Definition 3.59. Ein Skalarprodukt ist eine Abbildung $\langle \cdot | \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ die die folgenden Bedingungen erfüllt für alle $v_1, v_2, w_1, w_2 \in V$ und alle $\lambda, \rho \in \mathbb{K}$.

- (i) $\langle v_1 | w_1 + \rho w_2 \rangle = \langle v_1 | w_1 \rangle + \rho \langle v_1 | w_2 \rangle$ (Linearität im zweiten Argument),
- (ii) $\langle v_1 | w_1 \rangle = \overline{\langle w_1 | v_1 \rangle}$ (konjugierte Symmetrie)
- (iii) $\langle v_1 | v_1 \rangle \geq 0$ (Positivität),
- (iv) $\langle v_1 | v_1 \rangle = 0 \implies v_1 = 0$ (Definitheit).

Wir nennen die Abbildung $v \mapsto \|v\| := \sqrt{\langle v | v \rangle}$ die zum Skalarprodukt gehörige Norm.

Beispiel 3.60. Auf \mathbb{R}^n können wir durch

$$\langle (x_1, \dots, x_n)^T | (y_1, \dots, y_n)^T \rangle := x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

ein Skalarprodukt (man überprüfe, dass die oben geforderten Eigenschaften erfüllt sind). Es gilt dann der n -dimensionale Satz des Pythagoras

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2.$$

Analog ist auf \mathbb{C}^n die Abbildung

$$\langle (u_1, \dots, u_n)^T | (v_1, \dots, v_n)^T \rangle := \overline{u_1} v_1 + \overline{u_2} v_2 + \dots + \overline{u_n} v_n$$

ein Skalarprodukt.

Diese Abbildungen werden als Standardskalarprodukt bezeichnet, die zugehörige Norm heißt euklidische Norm. Wir werden für eine Weile lediglich mit diesen Skalarprodukten und Normen arbeiten, wir können also $\langle \cdot | \cdot \rangle$ beziehungsweise $\|\cdot\|$ als Abkürzungen für die obigen Formeln auffassen. Man sollte jedoch im Hinterkopf behalten, dass es (selbst auf \mathbb{R}^n) andere Skalarprodukte gibt.

Bemerkung 3.61. Ist V ein reeller Vektorraum, dann ist $\langle v_1 | w_1 \rangle = \langle w_1 | v_1 \rangle$, das Skalarprodukt also symmetrisch. In diesem Fall ist es auch linear im ersten Argument. Im Allgemeinen gilt jedoch

$$\langle v_1 + \rho v_2 | w_1 \rangle = \langle v_1 | w_1 \rangle + \bar{\rho} \langle v_2 | w_1 \rangle,$$

das Skalarprodukt ist also konjugiert linear im ersten Argument.

Bemerkung 3.62. Mittels des Skalarprodukts und der Norm können wir nun über geometrische Konzepte wie die Länge von Vektoren v ($\|v\|$), den Abstand von v und w ($\|v - w\|$) sowie den Winkel φ zwischen zwei Vektoren v und w gegeben durch

$$\cos(\varphi) = \frac{\langle v|w \rangle}{\|v\| \|w\|}$$

sprechen.

Wir können nun auch einige geometrische Objekte wie zum Beispiel die Kugel

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r\}$$

oder Sphäre

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = r\}$$

mit Radius $r \in (0, \infty)$ definieren.

Satz 3.63. *Es gelten für alle $v, w \in V$ die Ungleichungen*

$$\begin{aligned} |\langle v|w \rangle| &\leq \|v\| \|w\| && \text{Cauchy-Schwarz-Ungleichung} \\ \|v + w\| &\leq \|v\| + \|w\| && \text{Dreiecksungleichung.} \end{aligned}$$

Beweis. Es gilt für beliebiges $\lambda \in \mathbb{K}$

$$0 \leq \langle v - \lambda w | v - \lambda w \rangle = \langle v | v \rangle - \lambda \langle v | w \rangle - \bar{\lambda} \langle w | v \rangle + |\lambda|^2 \langle w | w \rangle.$$

Falls $\|w\| \neq 0$ ist, so folgt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung indem wir $\lambda = \frac{\langle w | v \rangle}{\|w\|^2}$ einsetzen:

$$0 \leq \|v\|^2 - \frac{\langle w | v \rangle \langle v | w \rangle}{\|w\|^2} - \frac{\overline{\langle w | v \rangle} \langle w | v \rangle}{\|w\|^2} + \frac{|\langle w | v \rangle|^2}{\|w\|^4} \|w\|^2 = \|v\|^2 - \frac{|\langle w | v \rangle|^2}{\|w\|^2}.$$

Umstellen und Multiplikation mit $\|w\|^2$ ergibt

$$|\langle w | v \rangle|^2 \leq \|v\|^2 \|w\|^2$$

woraus mit der Monotonie der Wurzel die Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt.

Dann gilt auch

$$\begin{aligned} \|v + w\|^2 &= \langle v + w | v + w \rangle = \|v\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle v | w \rangle + \|w\|^2 \\ &\leq \|v\|^2 + 2 |\langle v | w \rangle| + \|w\|^2 \leq \|v\|^2 + 2 \|v\| \|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2 \end{aligned}$$

und wiederum mit der Monotonie der Wurzel folgt die Dreiecksungleichung. \square

Definition 3.64. Wir nennen Vektoren $v, w \in V$ orthogonal, falls sie $\langle v|w \rangle = 0$ erfüllen.

Die Elemente $v_1, \dots, v_n \in V$ bilden ein Orthogonalsystem, wenn sie alle von Null verschieden und paarweise orthogonal zueinander sind, wenn also $\langle v_i|v_j \rangle = 0$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ und $i \neq j$ gilt.

Gilt zusätzlich $\|v_i\| = 1$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$, dann bilden sie ein Orthonormalsystem (ONS).

Spannen die Vektoren den Raum V auf, sprechen wir von einer Orthonormalbasis (ONB).

Definieren wir das Kroneckersymbol

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases},$$

dann kann die Bedingung für ein Orthonormalsystem als $\langle v_i|v_j \rangle = \delta_{ij}$ geschrieben werden.

Satz 3.65. Sei v_1, \dots, v_n ein Orthogonalsystem, dann sind v_1, \dots, v_n linear unabhängig.

Beweis. Falls für $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ gilt

$$0 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n,$$

dann erhalten wir, durch skalare Multiplikation mit v_i von links ($i \in \{1, \dots, n\}$)

$$0 = \langle v_i|\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n \rangle = \alpha_1 \langle v_i|v_1 \rangle + \alpha_2 \langle v_i|v_2 \rangle + \dots + \alpha_n \langle v_i|v_n \rangle = \alpha_i \langle v_i|v_i \rangle.$$

Da $v_i \neq 0$ und damit $\langle v_i|v_i \rangle \neq 0$ folgt $\alpha_i = 0$ und da i beliebig war, haben wir die lineare Unabhängigkeit gezeigt. \square

Beispiel 3.66. (i) Die Standardbasis von \mathbb{R}^n (oder \mathbb{C}^n) ist bezüglich des Standardskalarprodukts eine Orthonormalbasis.

(ii) Sei $\varphi \in \mathbb{R}$. Dann bilden die Vektoren

$$v_1 = (\cos(\varphi), \sin(\varphi))^T, v_2 = (-\sin(\varphi), \cos(\varphi))^T$$

eine Orthonormalbasis von \mathbb{R}^2 denn

$$\|v_1\|^2 = \|v_2\|^2 = \cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2 = 1 \text{ und } \langle v_1|v_2 \rangle = 0.$$

Satz 3.67. Sei v_1, \dots, v_n eine Orthonormalbasis von V , dann gilt

$$v = \sum_{i=1}^n \langle v_i|v \rangle v_i.$$

Beweis. Da v_1, \dots, v_n eine Basis ist, existieren für festes $v \in V$ eindeutig bestimmte Koeffizienten $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ so, dass

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i.$$

Dann gilt

$$\langle v_j | v \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle v_i | v_j \rangle = \alpha_j$$

für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$. □

Satz 3.68. Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und $\langle \cdot | \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt auf \mathbb{K}^n . Dann gilt $\langle v | Aw \rangle = \langle A^* v | w \rangle$ für alle $v, w \in \mathbb{K}^n$.

Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ gilt also $\langle v | Aw \rangle = \langle A^T v | w \rangle$.

Beweis. Nach Definition des Matrizenproduktes gilt

$$(Aw)_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} w_j \text{ und}$$

$$(A^* v)_j = \sum_{i=1}^n \overline{A_{ij}} v_i$$

und damit

$$\begin{aligned} \langle v | Aw \rangle &= \sum_{i=1}^n \overline{v_i} (Aw)_i = \sum_{i=1}^n \overline{v_i} \left(\sum_{j=1}^n A_{ij} w_j \right) = \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \overline{v_i} w_j \\ &= \sum_{j=1}^n \overline{\left(\sum_{i=1}^n A_{ij} v_i \right)} w_j = \sum_{j=1}^n \overline{(A^* v)_j} w_j = \langle A^* v | w \rangle. \end{aligned}$$
□

Definition 3.69. Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ heißt orthogonal, wenn

$$A^T A = A A^T = I$$

gilt, wenn also $A^T = A^{-1}$ ist.

Die Menge der orthogonalen Matrizen

$$O(n) := \{ A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^T A = I \}$$

heißt orthogonale Gruppe, die Menge

$$SO(n) := \{ A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^T A = I \text{ und } \det A = 1 \}$$

heißt spezielle orthogonale Gruppe oder Drehgruppe.

Beispiel 3.70. Für $\varphi \in [0, 2\pi]$ ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

orthogonal. Betrachtet man ihre Wirkung auf die Standardbasis, so erkennt man leicht, dass es sich um eine Drehung um den Winkel φ entgegen des Uhrzeigersinns handelt.

Bemerkung 3.71. (i) Für eine orthogonale Matrix gilt

$$1 = \det I = \det(A^T A) = \det(A^T) \det(A) = \det(A)^2$$

und damit $\det(A) \in \{-1, 1\}$.

- (ii) Gemäß der Definition der Matrizenmultiplikation ergibt sich die (i, j) -Komponente von $A^T A$ als Standardskalarprodukt der i -ten Zeile von A^T mit der j -ten Spalte von A . Die Zeilen von A^T sind aber gerade die Spalten von A . Seien s_1, \dots, s_n die Spalten von A , dann ist A orthogonal genau dann, wenn gilt

$$\langle s_i | s_j \rangle = \delta_{ij}$$

also genau dann, wenn s_1, \dots, s_n eine Orthonormalbasis von \mathbb{R}^n (bezüglich des Standardskalarprodukts) ist. Daher rührt der Name „orthogonale Matrix“.

Analog folgt aus der Bedingung $AA^T = I$, dass eine Matrix orthogonal ist genau dann wenn ihre Zeilen eine Orthonormalbasis von \mathbb{R}^n bilden.

- (iii) Für eine orthogonale Matrix A und beliebiges $x, y \in \mathbb{R}^n$ gelten

$$\begin{aligned} \langle Ax | Ay \rangle &= \langle A^T Ax | y \rangle = \langle x | y \rangle, \\ \|Ax\| &= \sqrt{\langle Ax | Ax \rangle} = \|x\| \quad \text{und} \\ \|Ax - Ay\| &= \|A(x - y)\| = \|x - y\|. \end{aligned}$$

Geometrisch bedeutet die letzte Aussage, dass die Punkte Ax und Ay den selben Abstand haben wie x und y . Multiplikation von links mit A erhält also die Abstände (und Skalarprodukte und Winkel). Der Nullvektor bleibt ebenfalls erhalten.

Operationen die diese Eigenschaften haben, sind Drehungen um den Koordinatenursprung und Spiegelungen am Koordinatenursprung beziehungsweise an einer Ebene durch den Koordinatenursprung. Die orthogonalen Matrizen sind also eine Möglichkeit um solche Operationen – sogenannte Drehspiegelungen – zu beschreiben. Die spezielle orthogonale Gruppe $SO(n)$ enthält dabei die Elemente, die Drehungen im engeren Sinne sind.

- (iv) Wenn $A, B \in O(n)$ orthogonale Matrizen sind, dann gilt

$$(AB)^T(AB) = B^T A^T AB = B^T B = I,$$

also ist auch das Produkt AB eine orthogonale Matrix.

Offensichtlich ist die Einheitsmatrix I eine orthogonale Matrix.

Darüber hinaus gilt für jedes $A \in O(n)$ auch $A^T = A^{-1}$ also

$$(A^{-1})^T A^{-1} = (A^T)^T A^{-1} = AA^{-1} = I.$$

Das heißt A^{-1} ist ebenfalls eine orthogonale Matrix.

Eine solche Struktur, also eine Menge (hier $O(n)$) mit einem Produkt (hier das Matrizenprodukt) einem multiplikativen neutralen Element (hier I) und multiplikativen Inversen zu jedem Element (hier A^{-1}) heißt Gruppe. Gruppen sind die mathematischen Strukturen, die wir zur Beschreibung von Symmetrien verwenden. Wir sind bereits auf andere Beispiele von Gruppen gestoßen: \mathbb{R} und \mathbb{C} (mit der Addition), $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (mit der Multiplikation), jeder Vektorraum (mit der Addition), die allgemeine lineare Gruppe $GL(n)$ (mit der Matrizenmultiplikation), die Drehgruppe $SO(n)$, die Gruppe der Permutationen (mit der Hintereinanderausführung als Multiplikation). Die Menge $\mathbb{K}^{n \times n}$ aller Matrizen ist keine Gruppe da einige Elemente kein multiplikatives Inverses besitzen.

- (v) Analoge Konstruktionen existieren für den komplexen Fall. Eine Matrix U heißt unitär, falls

$$U^*U = UU^* = I$$

gilt. Wir definieren die unitäre Gruppe

$$U(n) := \{U \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid U^*U = I\}$$

sowie die spezielle unitäre Gruppe

$$SU(n) := \{U \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid U^*U = I \text{ und } \det(U) = 1\}.$$

3.5 Eigenwertprobleme

Definition 3.72. Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ eine Matrix. Falls für einen von 0 verschiedenen Vektor $v \in \mathbb{K}^n$ und ein $\lambda \in \mathbb{K}$ die Gleichung

$$Av = \lambda v$$

erfüllt ist, dann nennen wir λ einen Eigenwert von A und v einen Eigenvektor zum Eigenwert λ .

Für einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt die Menge

$$\{v \in \mathbb{K}^n \mid Av = \lambda v\}$$

der Eigenraum zum Eigenwert λ .

Beispiel 3.73. Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

überzeugt man sich leicht, dass gilt

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bemerkung 3.74. Der Eigenraum zum Eigenwert λ ist ein Untervektorraum.

Beweis. Übung. □

Bemerkung 3.75. Wir besitzen bereits die Techniken um das sogenannte Eigenwertproblem, also das Finden von Eigenwerten und Eigenvektoren, zu lösen. Gesucht sind $\lambda \in \mathbb{K}$ und $v \in \mathbb{K}^n$ so, dass die Eigenwertgleichung $Av = \lambda v$ erfüllt ist.

Wir schreiben die Eigenwertgleichung um zu

$$(A - \lambda I)v = 0.$$

Falls die Matrix $A - \lambda I$ invertierbar ist, dann ist die einzige Lösung $v = 0$ und λ ist kein Eigenwert. Wir suchen also die Werte von λ für die $A - \lambda I$ nicht invertierbar ist. Das ist genau dann der Fall, wenn $\det(A - \lambda I) = 0$ ist. Die Funktion $\lambda \mapsto \det(A - \lambda I)$ ist ein Polynom vom Grad n , das charakteristische Polynom. Die Eigenwerte sind also die Nullstellen des charakteristischen Polynoms der Matrix A , welche wir (zumindest numerisch) bestimmen können.

Anschließend können wir für jeden der so bestimmten Eigenwerte das lineare Gleichungssystem $(A - \lambda I)v = 0$ lösen um die Eigenvektoren zu diesem Eigenwert zu bestimmen.

Beispiel 3.76. Wir wollen das Eigenwertproblem für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

lösen. Wir bestimmen dazu zunächst das charakteristische Polynom:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

Die Nullstellen des Polynoms sind i sowie $-i$.

Falls $(x, y)^T \in \mathbb{C}^2$ ein Eigenvektor zum Eigenwert i ist muss gelten

$$\begin{aligned} -ix + y &= 0 \\ -x - iy &= 0 \end{aligned}$$

welches durch $x = -i$ und $y = 1$ gelöst wird.

Ist $(x, y)^T$ Eigenvektor zum zweiten Eigenwert $-i$, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} ix + y &= 0 \\ -x + iy &= 0 \end{aligned}$$

mit der Lösung $x = 1$ und $y = -i$.

Man beachte, dass die Eigenvektoren nicht eindeutig sind (jedes Vielfache ist ebenfalls Eigenvektor).

Die Lösungen für das Eigenwertproblem hängen davon ab, ob der zugrundeliegende Körper \mathbb{R} oder \mathbb{C} ist. Bei dem obigen Beispiel hat das Eigenwertproblem über \mathbb{R} keine Lösungen (das charakteristische Polynom hat keine Nullstellen).

Beispiel 3.77. Sei D eine Diagonalmatrix mit den Diagonaleinträgen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Um das Eigenwertproblem für D zu lösen stellen wir fest, dass $D - \lambda I$ ebenfalls eine Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen $\lambda_1 - \lambda, \lambda_2 - \lambda, \dots, \lambda_n - \lambda$ ist. Damit erhalten wir das charakteristische Polynom

$$(\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda)$$

dessen Nullstellen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ wir unmittelbar ablesen können.

Die zugehörigen Eigenvektoren sind dann gerade die Elemente der Standardbasis (Warum?).

Definition 3.78. Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ heißt diagonalisierbar, wenn \mathbb{K}^n eine Basis besitzt, die aus Eigenvektoren von A besteht.

Satz 3.79. Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ist diagonalisierbar, wenn es eine Diagonalmatrix D und eine invertierbare Matrix T gibt so, dass

$$D = T^{-1}AT.$$

Beweis. Sei e_1, \dots, e_n die Standardbasis von \mathbb{K}^n .

Es gelte zunächst $T^{-1}AT = D$ und es seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Diagonaleinträge der Matrix D , dann gilt nach dem obigen Beispiel $De_i = \lambda_i e_i$ für $i \in \{1, \dots, n\}$. Da T invertierbar ist, sind auch die Vektoren Te_1, \dots, Te_n eine Basis für \mathbb{K}^n (Übung) und es gilt für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$

$$A(Te_i) = T(T^{-1}AT)e_i = TDe_i = \lambda_i Te_i.$$

Damit ist Te_i Eigenvektor von A zum Eigenwert λ_i .

Sei andererseits v_1, \dots, v_n eine Basis aus Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Sei D die Diagonalmatrix mit den Diagonaleinträgen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Wir schreiben die Basisvektoren v_1, \dots, v_n als die Spalten einer Matrix T . Dann gilt offensichtlich $Te_i = v_i$ und

$$ATe_i = Av_i = \lambda_i v_i = \lambda_i Te_i = TDe_i.$$

Es gilt also für $i \in \{1, \dots, n\}$ die Gleichung $(AT - TD)e_i = 0$. Damit sind alle Spalten der Matrix $AT - TD$ Nullspalten und es muss gelten $AT = TD$. Da die Matrix T invertierbar ist (Warum?), folgt daraus $T^{-1}AT = D$. \square

Beispiel 3.80. (i) Wir haben oben bereits das Eigenwertproblem für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

gelöst. Die Transformationsmatrix T ist hier also

$$T = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

Diese Matrix ist invertierbar – mit dem Gauß-Algorithmus bestimmt man die inverse Matrix

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}.$$

Man rechnet nun leicht nach (und wir wissen bereits aus den theoretischen Überlegungen oben) dass gilt

$$D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = T^{-1}AT.$$

- (ii) Nicht alle Matrizen sind diagonalisierbar. Man überzeugt sich beispielsweise leicht, dass die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

lediglich den Eigenvektor $(1, 0)^T$ besitzt.

Bemerkung 3.81. Eine Anwendung der Diagonalisierung von Matrizen, ist das Berechnen hoher Potenzen oder allgemeiner Polynome von Matrizen. Man überzeugt sich leicht, dass für Diagonalmatrizen gilt

$$\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)^k = \text{diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k),$$

Potenzen (und Polynome) von Diagonalmatrizen sind also substantiell einfacher zu berechnen als Potenzen beliebiger Matrizen. Aus der Gleichung $T^{-1}AT = D$ folgt für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$(T^{-1}AT)^k = T^{-1}A^kT = D^k.$$

Wir können also A^k als TD^kT^{-1} bestimmen.

Satz 3.82. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix, das heißt es gilt $A = A^T$ (beziehungsweise $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine selbstadjungierte Matrix also $A = A^*$) dann besitzt A eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren. Insbesondere ist A diagonalisierbar.

Ohne Beweis.

Bemerkung 3.83. Wir zeigen nur einige Eigenschaften selbstadjungierter (symmetrischer) Matrizen. Zunächst gilt für einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ zum Eigenvektor $v \in \mathbb{C}^n$

$$\lambda \langle v|v \rangle = \langle v|Av \rangle = \langle A^*v|v \rangle = \langle Av|v \rangle = \langle \lambda v|v \rangle = \bar{\lambda} \langle v|v \rangle.$$

Es gilt also $(\lambda - \bar{\lambda}) \langle v|v \rangle = 0$ und da $v \neq 0$ und damit auch $\langle v|v \rangle \neq 0$ folgt $\lambda = \bar{\lambda}$ – der Eigenwert ist also reell.

Seien nun $\lambda, \rho \in \mathbb{R}$ Eigenwerte zu den Eigenvektoren v beziehungsweise w und $\lambda \neq \rho$. Dann gilt

$$\rho \langle v|w \rangle = \langle v|Aw \rangle = \langle A^*v|w \rangle = \langle Av|w \rangle = \langle \lambda v|w \rangle = \lambda \langle v|w \rangle.$$

Daraus folgt $(\lambda - \rho) \langle v|w \rangle = 0$ also $\langle v|w \rangle = 0$, das heißt die Eigenvektoren sind orthogonal.

Die hier gezeigten Aussagen gelten natürlich insbesondere auch für den reellen Fall, also für symmetrische Matrizen.

4 Analysis Teil II

4.1 Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit

Wir werden im Folgenden häufig mit Intervallen der Form $(x - \epsilon, x + \epsilon)$ für $x \in \mathbb{R}$ und $\epsilon > 0$ arbeiten. Wir führen für solche Intervalle – sogenannte ϵ -Umgebungen – daher die Bezeichnung $B_\epsilon(x)$ ein. Die ϵ -Umgebung von x ist genau die Menge aller Punkte, deren Abstand zu x kleiner als ϵ ist.

Definition 4.1. Sei $D \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge und $x \in \mathbb{R}$. Dann heißt x Berührungspunkt von D , falls für jedes $\epsilon > 0$ die Menge $D \cap B_\epsilon(x)$ nicht leer ist.

Die Menge aller Berührungspunkte von D heißt der Abschluss von D und wir bezeichnen sie mit \overline{D} .

Beispiel 4.2. (i) Jeder Punkt $x \in D$ ist ein Berührungspunkt von D , denn es gilt für jedes $\epsilon > 0$

$$x \in D \cap B_\epsilon(x).$$

(ii) Es gibt Berührungspunkte, die nicht in der Menge liegen. Für $D = (0, 1)$ ist beispielsweise 0 (und 1) ein Berührungspunkt, denn für $\epsilon > 0$ gilt

$$\frac{\epsilon}{2} \in (0, 1) \cap B_\epsilon(0).$$

Es gilt $\overline{(0, 1)} = [0, 1]$ (Übung).

(iii) Für $D = \mathbb{Q}$ ist jedes $x \in \mathbb{R}$ Berührungspunkt, denn für jedes $\epsilon > 0$ enthält das Intervall $(x - \epsilon, x + \epsilon)$ mindestens eine rationale Zahl (Satz 1.41).

Damit gilt

$$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}.$$

Bemerkung 4.3. Formal aufgeschrieben bedeutet „ x ist ein Berührungspunkt von D “:

$$\forall \epsilon > 0 \exists y \in D : |x - y| < \epsilon.$$

Daraus folgt die Bedeutung von „ x ist kein Berührungspunkt von D “:

$$\exists \epsilon > 0 \forall y \in D : |x - y| \geq \epsilon,$$

oder in Worten – es gibt ein $\epsilon > 0$ so, dass alle Punkte in D mindestens Abstand ϵ zu x haben.

Satz 4.4. Der Punkt $x \in \mathbb{R}$ ist ein Berührungspunkt von $D \subset \mathbb{R}$ genau dann, wenn es eine Folge $(x_n) \subset D$ gibt, die gegen x konvergiert.

Beweis. Sei x Berührungspunkt von D . Dann können wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein

$$x_n \in D \cap \left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right)$$

auswählen. Die so entstehende Folge (x_n) liegt offenbar in D und es gilt

$$|x - x_n| < \frac{1}{n}.$$

Daraus folgt für $n \rightarrow \infty$ dass x_n gegen x konvergiert.

Sei andererseits $(x_n) \subset D$ eine gegen x konvergente Folge. Sei $\epsilon > 0$, dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass $|x - x_N| < \epsilon$ und damit gilt

$$x_N \in D \cap B_\epsilon(x).$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt daraus, dass x Berührungspunkt von D ist. \square

Definition 4.5. Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, x_0 Berührungspunkt von D und $y \in \mathbb{R}$. Wir sagen, dass f für $x \rightarrow x_0$ gegen y konvergiert und schreiben

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y$$

wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert so, dass $|f(x) - y| < \epsilon$ falls $x \in D$ und $|x - x_0| < \delta$.

Wir sagen $f(x)$ konvergiert für $x \rightarrow x_0$ falls es ein $y \in \mathbb{R}$ gibt, mit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y.$$

Bemerkung 4.6. Die Menge D steht in der obigen Definition, da die Funktion f in vielen relevanten Fällen nicht für alle reellen Zahlen definiert ist (weil zum Beispiel ein Ausdruck im Nenner Nullstellen hat oder ein Ausdruck unter einer Wurzel negativ wird). Für x außerhalb des Definitionsbereiches D ergibt aber $f(x)$ und damit der Ausdruck $|f(x) - y| < \epsilon$ keinen Sinn. In dem Fall, den wir am häufigsten antreffen werden, ist $D = (x_0 - a, x_0 + a) \setminus \{x_0\}$ für ein $a > 0$, die obige Definition gilt aber für allgemeinere Definitionsbereiche D . Sie ergibt jedoch nur für Berührungspunkte x_0 von D Sinn, denn andernfalls enthält $B_\delta(x_0)$ für hinreichend kleine δ keinen Punkt mehr aus D . Dann gibt es keine Möglichkeit mehr, festzustellen, ob $f(x)$ „nahe“ bei y liegt.

Beispiel 4.7. (i) Sei $a \in \mathbb{R}$. Für

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto ax \end{aligned}$$

gilt stets

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

Wir betrachten den Fall $a \neq 0$ (der Fall $a = 0$ bleibt zur Übung). Sei $\epsilon > 0$. Wir möchten, dass gilt

$$|f(x) - 0| = |ax| = |a| |x| < \epsilon.$$

Man sieht leicht, dass das der Fall ist falls $|x| < \frac{\epsilon}{|a|}$ gilt. Setzen wir also $\delta = \frac{\epsilon}{|a|}$, dann gilt für jedes x , das

$$|x - 0| = |x| < \delta$$

erfüllt, die gewünschte Ungleichung.

(ii) Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

konvergiert nicht für $x \rightarrow 0$ denn angenommen y wäre der Grenzwert, dann gäbe es $\delta > 0$ so, dass für $|x| < \delta$ gilt $|f(x) - y| < 1$. Dann folgt mit der Dreiecksungleichung für jedes $x \in (0, \delta)$

$$2 = |f(x) - f(-x)| \leq |f(x) - y| + |y - f(-x)| < 2$$

was offensichtlich ein Widerspruch ist.

Satz 4.8. Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 Berührungspunkt von D und $y \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y$$

genau dann, wenn für jede Folge $(x_n) \subset D$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y$.

Beweis. Wir haben oben gesehen, dass es für Berührungspunkte x_0 stets solche Folgen gibt. Angenommen es gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y,$$

und die Folge $(x_n) \subset D$ konvergiert gegen x_0 . Sei $\epsilon > 0$. Dann existiert ein $\delta > 0$ so, dass $|f(x) - y| < \epsilon$ vorausgesetzt $|x - x_0| < \delta$. Auf Grund der Konvergenz von (x_n) existiert $N \in \mathbb{N}$ so, dass $|x_n - x_0| < \delta$ für alle $n > N$ gilt. Für solche n gilt dann aber auch $|f(x_n) - y| < \epsilon$ und damit ist die Konvergenz von $(f(x_n))$ gegen y gezeigt.

Es gelte nun andererseits für jede Folge $(x_n) \subset D$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ dass $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y$. Angenommen $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y$ gilt nicht, das heißt es existiert ein $\epsilon > 0$ so, dass für jedes $\delta > 0$ mindestens ein $x \in D$ existiert mit $|x - x_0| < \delta$ aber $|f(x) - y| \geq \epsilon$. Dann können wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ aus der Menge

$$D \cap \left(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n} \right)$$

eine Element x_n auswählen, dass $|f(x_n) - y| \geq \epsilon$ erfüllt. Die so entstehende Folge (x_n) konvergiert gegen x_0 da $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ ist aber $(f(x_n))$ konvergiert nicht gegen y . Das ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung. \square

Korollar 4.9. Seien $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen, x_0 Berührungspunkt von D und $y, z \in \mathbb{R}$. Falls

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y \text{ und } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = z,$$

so gelten auch

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + g(x) &= y + z, \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) &= yz \end{aligned}$$

sowie falls $z \neq 0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{y}{z}.$$

Beweis. Wir beweisen die letzte Aussage, die Beweise der anderen beiden Aussagen sind analog. Da $g(x)$ Nullstellen besitzen kann, ist der Quotient $\frac{f(x)}{g(x)}$ nicht überall definiert. Es gilt jedoch, da $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = z \neq 0$ ist, dass es ein $\delta > 0$ gibt so, dass $|g(x) - z| < |z|$ falls $|x - x_0| < \delta$. Die Funktion g kann also im Intervall $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ keine Nullstellen besitzen und $\frac{f}{g}$ ist (mindestens) auf $D \cap B_\delta(x_0)$ definiert.

Sei nun $(x_n) \subset D$ eine gegen x_0 konvergente Folge. Dann gilt nach dem vorhergehenden Satz $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = z$ und damit nach den Rechenregeln für Grenzwerte von Folgen auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{y}{z}.$$

Da (x_n) eine beliebige Folge war, können wir den Satz nun in die umgekehrte Richtung verwenden um die gewünschte Aussage zu erhalten. \square

Korollar 4.10 (Einschließungssatz für Funktionen). Seien $f, g, h : D \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen und x_0 Berührungspunkt von D . Gilt für ein $y \in \mathbb{R}$

$$y = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) \text{ und } f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

auf einer ϵ -Umgebung von x_0 so folgt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = y.$$

Beweis. Übung. \square

Beispiel 4.11. (i) Die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\exp(x) - 1}{x} \end{aligned}$$

konvergiert für $x \rightarrow 0$ gegen 1. Zunächst gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ (Satz 2.72)

$$1 + x \leq \exp(x)$$

$$1 - x \leq \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$$

und damit für alle $x \in (-\infty, 1)$

$$x \leq \exp(x) - 1 \leq \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}$$

beziehungsweise für $x > 0$

$$1 \leq \frac{\exp(x) - 1}{x} \leq \frac{1}{1-x}.$$

Das analoge Argument für $x < 0$ wird als Übung überlassen.

Damit folgt aus den obigen Korollaren der Grenzwert 1.

Insbesondere muss auch

$$\lim_{x \rightarrow 0} \exp(x) = 1$$

gelten.

Man beachte, dass wir das Argument

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!} = 1$$

hier noch nicht verwenden können, da dabei zwei Grenzwerte (die Reihe enthält ebenfalls einen Grenzwert) vertauscht werden. Das Vertauschen von Grenzwerten ist nicht ohne weiteres zulässig, wir werden jedoch für diesen konkreten Fall später entsprechende Sätze kennen lernen.

(ii) Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

konvergiert nicht für $x \rightarrow 0$ denn für jedes $\delta > 0$ können wir $n \in \mathbb{N}$ so wählen, dass $\frac{1}{2\pi n} < \delta$. Um das zu zeigen, betrachten wir die Folgen

$$a_n = \frac{1}{2\pi n} \text{ und } b_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}.$$

Beide Folgen sind offenbar Nullfolgen, aber es gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$: $f(a_n) = 0$ sowie $f(b_n) = 1$. Nach Satz Satz 4.8

- (iii) Um Grenzwerte von Funktionen zu untersuchen, reicht es nicht aus einzelne spezielle Folgen (x_n) mit $x_n \rightarrow x_0$ zu untersuchen wie das folgende Beispiel zeigt. Betrachte die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Für $x \rightarrow 0$ konvergiert f nicht, denn für jedes $\delta > 0$ enthält das Intervall $(-\delta, \delta)$ sowohl rationale als auch irrationale Zahlen. Dennoch gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = 1$$

aber eben auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{\sqrt{2}}{n}\right) = 0.$$

Umgekehrt reicht jedoch eine einzige Folge (x_n) mit $x_n \rightarrow x_0$ so, dass $(f(x_n))$ divergiert um zu zeigen, dass f für $x \rightarrow x_0$ nicht konvergent ist. Im obigen Beispiel könnten wir die Nullfolge

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{2}^n}$$

betrachten. Die Folge $(f(x_n))$ ist dann 1 für gerade n und 0 für ungerade n also nicht konvergent.

Wir definieren noch einige uneigentliche Grenzwerte.

Definition 4.12. Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und x_0 Berührungspunkt von D . Wir sagen f divergiert bestimmt gegen $+\infty$ für $x \rightarrow x_0$ und schreiben

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$$

falls für jedes $K \in \mathbb{R}$ ein $\delta > 0$ existiert so, dass $f(x) \geq K$ gilt falls $|x - x_0| < \delta$.

Definition 4.13. Sei $D \subset \mathbb{R}$ nicht nach oben beschränkt und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Wir sagen f konvergiert für $x \rightarrow \infty$ gegen $y \in \mathbb{R}$ und schreiben

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = y$$

falls für jedes $\epsilon > 0$ ein $K > 0$ existiert so, dass $|f(x) - y| < \epsilon$ wenn $x > K$ ist.

Bemerkung 4.14. Für das Rechnen mit solchen uneigentlichen Grenzwerten gelten Satz 4.8 und Korollar 4.9 sinngemäß wenn wir die Merkgeln aus Bemerkung 2.44 hinzuziehen.

Bemerkung 4.15. Analog zum Umgang mit Grenzwerten von Folgen, können wir auch komplexwertige Funktionen behandeln. Für $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ und einen Berührungspunkt x_0 von D gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y \in \mathbb{C}$$

genau dann wenn

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{Re} f(x) &= \operatorname{Re} y \text{ und} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{Im} f(x) &= \operatorname{Im} y \end{aligned}$$

genau dann wenn

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - y| = 0.$$

Definition 4.16. Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \rightarrow \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) eine Funktion und $x_0 \in D$. Die Funktion f heißt stetig im Punkt x_0 genau dann wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert so, dass

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \text{ falls } |x - x_0| < \delta.$$

Die Funktion f heißt stetig, falls sie in jedem Punkt von D stetig ist.

Die Funktion f heißt Lipschitz-stetig falls ein $L \in (0, \infty)$ existiert so, dass für alle $x, y \in D$ gilt

$$|f(x) - f(y)| \leq L |x - y|.$$

Die Zahl L heißt Lipschitzkonstante.

Bemerkung 4.17. Ein Vergleich mit Definition 4.5 zeigt, dass $f : D \rightarrow \mathbb{K}$ in $x_0 \in D$ stetig ist, genau dann wenn

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Beispiel 4.18. Wir wollen zeigen, dass die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

stetig ist. Sei dazu $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\epsilon > 0$. Wir möchten erreichen, dass gilt

$$|f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2| = |x - x_0| |x + x_0| < \epsilon.$$

Wir wählen

$$\delta = \min \left\{ 1, \frac{\epsilon}{2|x_0| + 1} \right\}$$

Dann gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$

$$|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| |x + x_0| < \delta(|x| + |x_0|) \leq \delta(|x_0| + \delta + |x_0|) \leq \delta(2|x_0| + 1) \leq \epsilon.$$

Die Funktion ist also stetig im Punkt x_0 und da x_0 beliebig war ist sie stetig.

Das Beispiel illustriert, dass die gewählte Zahl δ von x_0 abhängen darf (aber natürlich nicht von x).

Satz 4.19. *Jede Lipschitz-stetige Funktion ist stetig.*

Beweis. Sei $f : D \rightarrow \mathbb{K}$ Lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante $L > 0$, das heißt für alle $x, y \in D$ gilt

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\epsilon > 0$ und setze $\delta = \frac{\epsilon}{L}$. Dann folgt aus $|x - x_0| < \delta$ auch

$$|f(x) - f(x_0)| \leq L|x - x_0| < L\delta = \epsilon. \quad \square$$

Beispiel 4.20. (i) Die konstante Funktion $x \mapsto c$ erfüllt die Lipschitzbedingung

$$|f(x) - f(y)| = |c - c| = 0 \leq |x - y|$$

und ist damit stetig.

(ii) Die lineare Funktion $x \mapsto cx$ ist Lipschitz-stetig denn es gilt

$$|f(x) - f(y)| = |cx - cy| = |c||x - y|.$$

(iii) Aus den Ungleichungen

$$\begin{aligned} |\operatorname{Re}(x) - \operatorname{Re}(y)| &= |\operatorname{Re}(x - y)| \leq |x - y| \\ |\operatorname{Im}(x) - \operatorname{Im}(y)| &\leq |x - y| \\ ||x| - |y|| &\leq |x - y| \end{aligned}$$

folgt, dass die Funktionen $x \mapsto \operatorname{Re}(x)$, $x \mapsto \operatorname{Im}(x)$ und $x \mapsto |x|$ stetig sind.

(iv) Die Lipschitzstetigkeit einer Funktion kann von ihrem Definitionsbereich abhängen. So ist zum Beispiel

$$\begin{aligned} f : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

Lipschitz-stetig, denn es gilt

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x - y||x + y| \leq 2|x - y|.$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

nicht Lipschitz-stetig denn es gilt

$$\frac{|f(n+1) - f(n)|}{(n+1) - n} = 2n + 1 \rightarrow \infty.$$

Für Lipschitz-stetige Funktionen mit Lipschitzkonstante L müsste aber für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \neq y$ gelten

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{x - y} \leq L.$$

Bemerkung 4.21. Da sich Stetigkeit in x_0 mittels des Grenzwertes von Funktionen ausdrücken lässt, erhalten wir unmittelbar die folgenden Aussagen: Die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{K}$ ist stetig in x_0 genau dann, wenn für jede Folge $(x_n) \subset D$ mit $x_n \rightarrow x_0$ auch $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ gilt.

Falls f, g in x_0 stetige Funktionen sind, dann sind auch $f + g$ und $f \cdot g$ stetig. Falls $g(x_0) \neq 0$ dann ist auch $\frac{f}{g}$ stetig.

Damit erhalten wir direkt, dass jedes Polynom stetig ist. Eine rationale Funktion (Quotient zweier Polynome) ist stetig in allen Punkten, die nicht Nullstellen des Nenners sind.

Verkettungen stetiger Funktionen sind stetig, genauer gilt der folgende Satz.

Satz 4.22. Sei $D \subset \mathbb{K}$, $f : D \rightarrow \mathbb{K}$ stetig in $x_0 \in D$ und $g : f(D) \rightarrow \mathbb{K}$ stetig in $f(x_0)$, dann ist die Verkettung $g \circ f$ stetig in x_0 .

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Da g stetig in $f(x_0)$ ist existiert $\delta_1 > 0$ so, dass $|g(y) - g(f(x_0))| < \epsilon$ vorausgesetzt $|y - f(x_0)| < \delta_1$. Da f stetig in x_0 ist, existiert $\delta_2 > 0$ so, dass $|f(x) - f(x_0)| < \delta_1$ vorausgesetzt $|x - x_0| < \delta_2$.

Dann ist für solche x

$$|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)| = |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \epsilon$$

und damit ist die Stetigkeit von $g \circ f$ in x_0 gezeigt. □

Beispiel 4.23. Wir wollen zeigen, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1 - |x|}{1 + |x|} \end{aligned}$$

stetig ist. Dazu betrachten wir die Abbildungen

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto |x| \quad \text{und} \\ g : \mathbb{R} \setminus \{-1\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ y &\mapsto \frac{1-y}{1+y}. \end{aligned}$$

Wir wissen bereits, dass f und g stetig sind und offensichtlich gilt $h = g \circ f$. Dann folgt aus dem obigen Satz die Stetigkeit von h .

Beispiel 4.24. Die Funktionen \exp , \sin und \cos sind stetig.

Wir haben in Beispiel 4.11 bereits gezeigt, dass

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(h) - 1}{h} = 1.$$

Dann muss insbesondere gelten

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\exp(h) - \exp(0)) = 0$$

also ist \exp stetig im Punkt 0.

Sei nun $x_0 \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \exp(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \exp(x_0 + h) = \lim_{h \rightarrow 0} \exp(x_0) \exp(h) = \exp(x_0) \lim_{h \rightarrow 0} \exp(h) = \exp(x_0),$$

also ist \exp stetig in x_0 . Da das für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt, ist \exp stetig.

Betrachten wir nun die Funktion $x \mapsto \exp(ix)$. Für $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} |\exp(i(x_0 + h)) - \exp(ix_0)| &= |\exp(ix_0)| |\exp ih - 1| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(ih)^k}{k!} \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|h|^k}{k!} \\ &= \exp(|h|) - 1. \end{aligned}$$

Lassen wir $h \rightarrow 0$ gehen, so konvergiert auch $|h| \rightarrow 0$ (Stetigkeit des Betrages) und damit gilt nach dem Einschließungssatz

$$\lim_{h \rightarrow 0} |\exp(i(x_0 + h)) - \exp(ix_0)| = 0.$$

Die Funktion $x \mapsto \exp(ix)$ ist also ebenfalls stetig.

Damit erhalten wir auch, dass $\sin(x) = \operatorname{Im} \exp(ix)$ und $\cos(x) = \operatorname{Re} \exp(ix)$ als Verkettung stetiger Funktionen stetig sind.

Bemerkung 4.25. Betrachte die folgenden Beispielfunktionen

$$\begin{aligned} f &: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x \text{ und} \\ g &: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} -1 + x & x \leq 0 \\ 1 - x & x > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

In beiden Fällen können wir mit Funktionswerten von f beziehungsweise g beliebig nah an 1 herankommen, das heißt

$$1 = \sup f((-1, 1)) = \sup g([-1, 1])$$

aber es gibt kein x im Definitionsbereich für das dieser Wert tatsächlich erreicht wird.

Satz 4.26. Sei $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt die Funktion f ihr Maximum an, das heißt es existiert $x_M \in [a, b]$ so, dass $f(x) \leq f(x_M)$ für alle $x \in [a, b]$.

Beweis. Wir setzen $a_0 := a$, $b_0 := b$ und

$$M := \sup \{f(x) \mid x \in [a, b]\}.$$

Wir halbieren nun das Intervall $[a, b]$ und untersuchen das Supremum von f auf den Teilintervallen. Setze also $c_0 = \frac{1}{2}(a_0 + b_0)$. Falls

$$M = \sup \{f(x) \mid x \in [a_0, c_0]\}$$

setzen wir $a_1 = a_0$ und $b_1 = c_0$. Andernfalls gilt

$$M = \sup \{f(x) \mid x \in [c_0, b_0]\}$$

und wir setzen $a_1 = c_0$ und $b_1 = b_0$.

Nun verfahren wir analog mit dem kleineren Intervall $[a_1, b_1]$. Auf diese Weise erhalten wir eine monoton wachsende Folge (a_n) und eine monoton fallende Folge (b_n) so, dass

$$M = \sup \{f(x) \mid x \in [a_n, b_n]\}.$$

Beide Folgen konvergieren also gegen einen gemeinsamen Grenzwert x_M (die Grenzwerte stimmen überein, da die Intervalllänge $b_n - a_n$ eine Nullfolge ist). Auf Grund der Definition des Supremums, gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in [a_n, b_n]$ so, dass $f(x_n) \geq M - \frac{1}{n}$. Auf Grund des Einschließungssatzes konvergiert die Folge (x_n) gegen x_M und $(f(x_n))$ gegen M . Aus der Stetigkeit von f folgt aber

$$f(x_M) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = M. \quad \square$$

Eine analoge Aussage gilt natürlich auch für das Minimum einer Funktion.

Satz 4.27 (Zwischenwertsatz). Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) < f(b)$ (beziehungsweise $f(b) < f(a)$). Falls $y \in (f(a), f(b))$ (beziehungsweise $(f(b), f(a))$), dann existiert $x_0 \in (a, b)$ so, dass $f(x_0) = y$.

Beweis. Der Beweis ist ähnlich dem des vorhergehenden Satzes. Wir betrachten den Fall $f(a) < y < f(b)$ und setzen $a_0 := a$ und $b_0 := b$. Wir setzen $c_0 = \frac{1}{2}(a_0 + b_0)$. Falls $f(c_0) = y$, dann sind wir fertig. Falls $f(c_0) > y$ dann setzen wir $a_1 := a_0$ und $b_1 := c_0$, andernfalls $a_1 = c_0$ und $b_1 = b_0$. Wir sind nun in der selben Situation wie zu Beginn, aber mit einem kleineren Intervall $[a_1, b_1]$. Wir halbieren nun dieses neue Intervall und verfahren wie gehabt. Entweder wir erhalten nach endlich vielen Schritten eine Stelle c_n mit $f(c_n) = y$, oder wir erhalten eine monoton wachsende Folge a_n und eine monoton fallende Folge b_n mit $f(a_n) < y$ und $f(b_n) > y$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

und wegen der Stetigkeit der Funktion f

$$f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \leq y$$

$$f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) \geq y.$$

□

Beispiel 4.28. Die Funktion \cos besitzt im Intervall $[0, 2]$ genau eine Nullstelle. Aus der Reihendefinition der Cosinusfunktion

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

erhalten wir unmittelbar $\cos(0) = 1$.

Darüber hinaus folgt aus Satz 2.53 (Wie genau?)

$$-1 = 1 - \frac{2^2}{2!} \leq \cos(2) \leq 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} < 0.$$

Da \cos stetig ist, muss es nach dem Zwischenwertsatz zwischen 0 ($\cos(0) > 0$) und 2 ($\cos(2) < 0$) mindestens eine Nullstelle geben.

Um zu zeigen, dass es tatsächlich nur eine einzige Nullstelle gibt, zeigen wir, dass \cos im betrachteten Intervall streng monoton fallen ist. Zunächst folgt für $z \in [0, 2]$ aus Satz 2.53 (Wie genau?)

$$z - \frac{z^3}{3!} \leq \sin(z)$$

und damit ist $\sin(z)$ auf $(0, 2)$ positiv. Dann folgt aus einem der Additionstheoreme für $x, y \in [0, 2]$ und $x > y$

$$\cos(x) - \cos(y) = -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) < 0.$$

Wir haben diese Nullstelle in Bemerkung 2.74 benutzt um die Zahl π zu definieren.

Korollar 4.29. Sei I ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist $f(I)$ ebenfalls ein Intervall.

Beweis. Übung. □

Der folgende Satz erlaubt uns für viele wichtige Umkehrfunktionen die Stetigkeit zu zeigen.

Satz 4.30. Seien I ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Falls f streng monoton wachsend ist, dann existiert die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \rightarrow \mathbb{R}$ und diese ist ebenfalls stetig und streng monoton wachsend.

Beweisskizze. Nach dem obigen Korollar ist $f(I)$ ein Intervall. Wir definieren die Funktion $g : f(I) \rightarrow \mathbb{R}$ so, dass $g(y) = x$ ist genau dann wenn $y = f(x)$. Falls $f(x) = f(\tilde{x})$ ist, dann widersprechen $x < \tilde{x}$ oder $x > \tilde{x}$ der strengen Monotonie, es muss also $x = \tilde{x}$ gelten. Damit ist die obige Definition eindeutig.

Angenommen es gäbe $y, \tilde{y} \in f(I)$ so, dass $y < \tilde{y}$ und $g(y) \geq g(\tilde{y})$. Dann folgte aus der Monotonie von f auch $f(g(y)) = y \geq \tilde{y} = f(g(\tilde{y}))$. Da das ein Widerspruch ist, muss g ebenfalls streng monoton wachsend sein.

Wir zeigen nun die Stetigkeit von g . Sei dazu $y_0 \in f(I)$ und $\epsilon > 0$ und wir setzen $x_0 = g(y_0)$. Wir behandeln hier nur den Fall, dass x_0 kein Randpunkt von I ist, die Beweise für die anderen Fälle sind jedoch sehr ähnlich. Wenn x_0 kein Randpunkt von I ist, dann können wir $0 < \tilde{\epsilon} \leq \epsilon$ so wählen, dass $x_0 - \tilde{\epsilon}, x_0 + \tilde{\epsilon} \in I$. Wir wählen

$$\delta = \min \{f(x_0 + \tilde{\epsilon}) - y_0, y_0 - f(x_0 - \tilde{\epsilon})\}$$

und stellen fest, dass wegen der strengen Monotonie von f gilt $\delta > 0$. Falls nun $y \in I$ die Ungleichung $|y - y_0| < \delta$ erfüllt, dann gilt insbesondere

$$f(x_0 - \tilde{\epsilon}) \leq y_0 - \delta < y < y_0 + \delta \leq f(x_0 + \tilde{\epsilon}).$$

Aus der strengen Monotonie von g folgt dann

$$x_0 - \tilde{\epsilon} < g(y) < x_0 + \tilde{\epsilon}$$

und damit

$$|g(y) - g(y_0)| = |g(y) - x_0| < \tilde{\epsilon} \leq \epsilon.$$

Damit ist die Stetigkeit von g im Punkt y_0 gezeigt und da y_0 beliebig war, ist g stetig. □

Eine analoge Aussage gilt natürlich auch für streng monoton fallende Funktionen.

Beispiel 4.31. (i) Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Funktion

$$\begin{aligned} f : [0, \infty) &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^n \end{aligned}$$

ist stetig und streng monoton wachsend. Man überzeugt sich leicht (mit Hilfe des Zwischenwertsatzes), dass $f([0, \infty)) = [0, \infty)$ gilt. Aus dem vorhergehenden Satz folgt dann die Existenz und Stetigkeit der Umkehrfunktion $\sqrt[n]{\cdot} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

- (ii) Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist ebenfalls streng monoton wachsend und stetig. Es gilt $\exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x) = \infty$ beziehungsweise $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$ woraus wir mit dem Zwischenwertsatz $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$ erhalten. Dann garantiert uns der vorhergehende Satz die Existenz und Stetigkeit der Umkehrfunktion $\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$.
- (iii) Einige weitere Beispiele sind \sin und \tan im Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sowie \cos im Intervall $[0, \pi]$.

4.2 Differenzialrechnung

Definition 4.32. Sei I ein offenes Intervall (also $I = (a, b)$ mit $a < b$, wobei $a = -\infty$ und $b = \infty$ zugelassen sind), $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ eine Funktion und $x \in I$. Die Funktion f heißt differenzierbar in x wenn der Grenzwert

$$f'(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existiert. Der Ausdruck

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

heißt Differenzenquotient, der Wert $f'(x)$ heißt Differenzialquotient oder Ableitung von f im Punkt x .

Die Funktion heißt differenzierbar, wenn sie in jedem Punkt von I differenzierbar ist.

Beispiel 4.33. (i) Für die konstante Funktion $x \mapsto c$ ($c \in \mathbb{K}$) ergibt sich

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = 0.$$

(ii) Für $n \in \mathbb{N}$ und die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^n \end{aligned}$$

erhalten wir mit dem binomischen Satz

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} h^{k-1} x^{n-k} = nx^{n-1}.$$

(iii) Für die Exponentialfunktion \exp erhalten wir

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \exp(x) \frac{\exp(h) - 1}{h} = \exp(x).$$

(iv) Analog erhält man für die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C} \\ x &\mapsto \exp(ix) \end{aligned}$$

die Ableitung (Übung)

$$f'(x) = i \exp(ix).$$

Wegen der Stetigkeit von Re und Im gilt für jede komplexwertige Funktion f

$$\operatorname{Re} f'(x) = \operatorname{Re} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re}(f(x+h)) - \operatorname{Re}(f(x))}{h} = (\operatorname{Re} f)'(x)$$

und analog $\operatorname{Im} f'(x) = (\operatorname{Im} f)'(x)$. Wenden wir das auf die obige Funktion an, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \sin'(x) &= (\operatorname{Im} f)(x) = \operatorname{Im} f'(x) = \operatorname{Im}(i \exp(ix)) = \operatorname{Im}(i \cos(x) - \sin(x)) = \cos(x) \\ \cos'(x) &= -\sin(x). \end{aligned}$$

(v) Für die Betragsfunktion $x \mapsto |x|$ ist

$$\frac{|h| - |0|}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 & h > 0 \\ -1 & h < 0 \end{cases}.$$

Für $x = 0$ existiert also keine Ableitung, die Funktion ist in diesem Punkt nicht differenzierbar.

Satz 4.34. Sei $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ eine in x differenzierbare Funktion. Dann ist f in x stetig.

Beweis. Da f in x differenzierbar ist konvergiert

$$f(x+h) - f(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} h$$

für $h \rightarrow 0$ gegen 0. Das entspricht aber gerade der Aussage

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x),$$

also der Stetigkeit im Punkt x . □

Bemerkung 4.35. Die Umkehrung dieses Satzes gilt nicht, wie das Beispiel der Betragsfunktion zeigt. Es gibt sogar stetige Funktionen von $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die in keinem Punkt differenzierbar sind.

Aus den Rechenregeln für Grenzwerte von Funktionen ergeben sich die folgenden Rechenregeln für Ableitungen.

Satz 4.36. Sei I ein offenes Intervall und $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ in x differenzierbare Funktionen. Dann sind auch die Funktionen $f + g$ und $f \cdot g$ differenzierbar in x . Falls $g(x) \neq 0$ ist, dann ist auch $\frac{1}{g}$ differenzierbar. Es gilt

$$\begin{aligned} (f + g)'(x) &= f'(x) + g'(x) \\ (f \cdot g)'(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\ \left(\frac{1}{g}\right)'(x) &= -\frac{g'(x)}{g(x)^2}. \end{aligned}$$

Beweis. Da f und g differenzierbar sind, sind sie insbesondere stetig und es gilt

$$f(x+h) \rightarrow f(x) \text{ und } g(x+h) \rightarrow g(x).$$

Dann folgen die Aussagen aus den Formeln

$$\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}g(x) + f(x+h)\frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

beziehungsweise

$$\frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} = -\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \frac{1}{g(x)g(x+h)}. \quad \square$$

Satz 4.37 (Kettenregel). Seien I, J offene Intervalle, $g : J \rightarrow I$ differenzierbar in x und $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ differenzierbar in $g(x)$. Dann ist $f \circ g$ differenzierbar in x und es gilt

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Beweis. Wir betrachten zunächst die folgende Hilfsfunktion auf J

$$\varphi(\xi) := \begin{cases} \frac{f(g(x)+\xi) - f(g(x))}{\xi} & \xi \neq 0 \\ f'(g(x)) & \xi = 0 \end{cases}.$$

Da f in $g(x)$ differenzierbar ist, gilt $\lim_{\xi \rightarrow 0} \varphi(\xi) = f'(g(x)) = \varphi(0)$, also ist φ stetig im Punkt 0. Durch Umstellen erhalten wir $f(g(x) + \xi) - f(g(x)) = \xi\varphi(\xi)$ und stellen fest, dass diese Gleichung auch für $\xi = 0$ erfüllt ist.

In dieser Gleichung setzen wir nun $\xi = g(x+h) - g(x)$ und schreiben damit den Differenzenquotienten für $f \circ g$ wie folgt

$$\begin{aligned} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} &= \frac{f(g(x) + (g(x+h) - g(x))) - f(g(x))}{h} \\ &= \varphi(g(x+h) - g(x)) \frac{g(x+h) - g(x)}{h}. \end{aligned}$$

Im Grenzwert $h \rightarrow 0$ konvergiert $g(x+h) - g(x) \rightarrow 0$ wegen der Stetigkeit von g und damit konvergiert der erste Faktor, wegen der Stetigkeit von φ gegen $\varphi(0) = f'(g(x))$. Auf Grund der Differenzierbarkeit von g konvergiert der zweite Faktor gegen $g'(x)$ und wir erhalten aus den Rechenregeln für Grenzwerte die zu zeigende Gleichung

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f \circ g)(x+h) - (f \circ g)(x)}{h} = f'(g(x))g'(x). \quad \square$$

Definition 4.38. Sei I ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Der Punkt $x_0 \in I$ heißt globales Maximum von f , falls für alle $x \in I$ gilt

$$f(x) \leq f(x_0).$$

Er heißt lokales Maximum von f , falls es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass für alle $x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ gilt

$$f(x) \leq f(x_0).$$

Entsprechend definiert man ein globales beziehungsweise lokales Minimum.

Ist ein Punkt entweder ein (globales oder lokales) Maximum oder ein Minimum bezeichnen wir ihn als Extremum.

Beispiel 4.39. (i) Für $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ liegt bei $x = 0$ ein lokales und globales Minimum und bei $x = -1$ beziehungsweise $x = 1$ ein lokales und globales Maximum vor.

(ii) Die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \cos(x) + \frac{x}{2} \end{aligned}$$

besitzt unendlich viele lokale Maxima und Minima, jedoch kein globales Extremum.

(iii) Die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & x \text{ rational} \\ 0 & x \text{ irrational} \end{cases} \end{aligned}$$

besitzt bei jeder rationalen Zahl ein lokales und globales Maximum und bei jeder irrationalen Zahl ein lokales und globales Minimum.

Satz 4.40. Sei I ein offenes Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ und sei $x_0 \in I$ ein lokales Extremum von f . Falls f in x_0 differenzierbar ist, dann gilt $f'(x_0) = 0$.

Beweis. Falls $f'(x_0) > 0$ gilt (andernfalls betrachte $-f$), dann existiert $\delta > 0$ so, dass

$$\left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right| < f'(x_0)$$

für alle $h \in (-\delta, \delta)$ gilt, das heißt insbesondere

$$0 < \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Für jedes $h \in (0, \delta)$ gilt also $f(x_0) < f(x_0 + h)$ und für jedes $h \in (-\delta, 0)$ gilt $f(x_0 + h) < f(x_0)$. Damit kann x_0 weder ein lokales Minimum noch ein lokales Maximum sein. \square

Bemerkung 4.41. Dank des obigen Satzes können wir zum Auffinden von Extrema einer Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ – Differenzierbarkeit vorausgesetzt – wie folgt vorgehen: Wir bestimmen die Ableitung $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$ sowie deren Nullstellen. Wir untersuchen diese Nullstellen sowie die Randpunkte des Intervalls I darauf, ob es sich tatsächlich um Extrema handelt. Nur das Vorhandensein einer Nullstelle von f' ist nicht ausreichend, wie das Beispiel $x \mapsto x^3$ zeigt.

Satz 4.42 (verallgemeinerter Mittelwertsatz der Differenzialrechnung). *Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a, b) . Dann existiert $\xi \in (a, b)$ so, dass*

$$(f(b) - f(a))g'(\xi) = f'(\xi)(g(b) - g(a)).$$

Bemerkung 4.43. Häufig wird die obige Gleichung in der eingängigeren Form

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

geschrieben, was jedoch nur für $g(b) \neq g(a)$ Sinn ergibt.

Für $g(x) = x$ erhalten wir den Mittelwertsatz der Differenzialrechnung:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Geometrisch bedeutet das, im Intervall (a, b) existiert ein ξ so, dass der Anstieg der Tangente im Punkt ξ gerade dem Anstieg der Verbindungsgerade zwischen $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ entspricht.

Beweis von Satz 4.42. Wir betrachten die Hilfsfunktion $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$h(x) := (f(b) - f(a))g(x) - f(x)(g(b) - g(a)).$$

Sie ist offensichtlich stetig und differenzierbar und es gilt $h(a) = f(b)g(a) - f(a)g(b) = h(b)$. Da

$$h'(x) = (f(b) - f(a))g'(x) - f'(x)(g(b) - g(a))$$

gilt, ist zu zeigen, dass h' im Intervall (a, b) eine Nullstelle hat.

Fall 1: Die Funktion h ist konstant, dann ist $h'(x) = 0$ überall und es ist nichts zu zeigen.

Fall 2: Es existiert ein $x \in (a, b)$ mit $h(x) > h(a)$. Nach Satz 4.26 besitzt h ein globales Maximum auf $[a, b]$, welches offensichtlich weder in a noch in b angenommen wird. Sei also $\xi \in (a, b)$ irgendein lokales Maximum von h . Dann gilt dort nach Satz 4.40 $h'(\xi) = 0$.

Fall 3: Es existiert ein $x \in (a, b)$ mit $h(x) < h(a)$. Wende das obige Argument auf $-h$ an um $-h'(\xi) = h'(\xi) = 0$ zu erhalten. \square

Korollar 4.44. *Sei I ein offenes Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Dann gelten*

- (i) $f'(I) \subset [0, \infty) \iff f$ ist monoton wachsend,
- (ii) $f'(I) \subset (0, \infty) \implies f$ ist streng monoton wachsend,
- (iii) $f'(I) \subset (-\infty, 0] \iff f$ ist monoton fallend,
- (iv) $f'(I) \subset (-\infty, 0) \implies f$ ist streng monoton fallend.

Insbesondere ist $f'(x) = 0$ für alle $x \in I$ genau dann, wenn f konstant ist.

Beweis. Wir zeigen lediglich die erste Aussage. Falls f nicht monoton wachsend ist, dann existieren $a, b \in I$, $a < b$ so, dass $f(a) > f(b)$ ist. Dann existiert nach dem Mittelwertsatz $\xi \in (a, b) \subset I$ so, dass

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < 0.$$

Die Umkehrung der gezeigten Aussage soll als Übung gezeigt werden. □

Beispiel 4.45. Daraus dass f streng monoton wachsend ist, folgt nicht $f'(x) > 0$ wie das Beispiel $x \mapsto x^3$ zeigt.

Korollar 4.46 (Regel von de l'Hospital). Seien $a, b, x_0 \in \mathbb{R}$, $a < x_0 < b$ und $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Falls $g'(x) \neq 0$ für $x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$ und

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

existiert, dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Beweis. Zwischen zwei Nullstellen von g liegt stets eine Nullstelle von g' (Warum?), daher ist x_0 die einzige Nullstelle von g im Intervall (a, b) . Für jedes $x \in (a, x_0)$ existiert dann nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz ein $\xi_x \in (x, x_0)$ so, dass

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}$$

Für $x \rightarrow x_0$ geht auch $\xi_x \rightarrow x_0$ und damit konvergiert die Rechte Seite gegen den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Was wir oben gezeigt haben, ist die Existenz des linksseitigen Grenzwertes

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)},$$

die Existenz des rechtsseitigen Grenzwertes kann jedoch analog gezeigt werden. □

Bemerkung 4.47. (i) Da für die Bestimmung des Grenzwertes lediglich das Verhalten der Funktionen in einer Umgebung $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ nötig ist, reicht es aus, wenn g' in so einer Umgebung keine Nullstelle außer x_0 hat. Mit anderen Worten, es darf keine gegen x_0 konvergente Folge von Nullstellen in $(a, b) \setminus \{x_0\}$ geben.

(ii) Aus dem Beweis ist unmittelbar offensichtlich, dass die Aussage auch für einseitige Grenzwerte gilt und auch für den Fall, dass $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ bestimmt divergiert.

(iii) Die schwächere Voraussetzung $f, g : (a, b) \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$$

ist auch ausreichend (Warum?).

(iv) Die Aussage gilt nicht ohne weiteres für komplexwertige Funktionen, es gibt jedoch komplexwertige Entsprechungen mit zusätzlichen Voraussetzungen.

(v) Durch die Substitutionen $\tilde{f}(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ und $\tilde{g}(x) = g\left(\frac{1}{x}\right)$, erhält man auch, dass

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

falls der rechte Grenzwert existiert und falls die Nullstellenmenge von g nach oben beschränkt ist.

(vi) Mit ähnlichen Argumenten und etwas größerem Aufwand, kann man auch zeigen, dass die Aussage auch unter der alternativen Voraussetzung

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty \text{ (oder } -\infty)$$

gilt.

(vii) Die Regel kann nicht „in die andere Richtung“ angewandt werden, es gibt also differenzierbare Funktionen f, g so, dass

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

existiert, aber

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

divergiert.

Beispiel 4.48. Zu bestimmen ist

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos(x)}.$$

Wir haben also $f(x) = x^2$ und $g(x) = 1 - \cos(x)$ und erhalten $f'(x) = 2x$, $g'(x) = \sin(x)$. Der resultierende Ausdruck ist bei $x = 0$ immernoch unbestimmt, wir berechnen also die höheren Ableitungen $f''(x) = 2$ und $g''(x) = \cos(x)$. Dann gilt

$$2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\cos(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos(x)}.$$

Satz 4.49 (Ableitung der Umkehrfunktion). *Sei I ein offenes Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f'(I) \in (0, \infty)$ (beziehungsweise $f'(I) \in (-\infty, 0)$), dann besitzt f eine differenzierbare Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \rightarrow \mathbb{R}$ und es gilt für $y \in f(I)$*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Beweis. Nach Korollar 4.44 wissen wir, dass f streng monoton wachsend ist und damit folgt die Existenz und Stetigkeit der Umkehrfunktion f^{-1} aus Satz 4.30. Sei nun $y \in f(I)$. Wir setzen $x = f^{-1}(y)$ und

$$\xi(h) = f^{-1}(y + h) - f^{-1}(y)$$

und lösen nach h auf

$$h = f(x + \xi(h)) - f(x).$$

Für $h \rightarrow 0$ konvergiert – wegen der Stetigkeit von f^{-1} – auch $\xi(h) \rightarrow 0$ und damit erhalten wir

$$\frac{f^{-1}(y + h) - f^{-1}(y)}{h} = \left(\frac{f(x + \xi(h)) - f(x)}{\xi(h)} \right)^{-1} \rightarrow (f'(x))^{-1} \neq 0.$$

Damit folgt die Differenzierbarkeit von f^{-1} in y sowie die geforderte Formel für die Ableitung. \square

Die obige Formel für die Ableitung lässt sich auch durch Anwendung der Kettenregel auf

$$f(f^{-1}(y)) = y$$

herleiten, für dieses Argument müssen wir aber bereits wissen, dass f^{-1} differenzierbar ist.

Beispiel 4.50. (i) Wenden wir den Satz auf die Potenzfunktion ($n \in \mathbb{N}$)

$$\begin{aligned} f : (0, \infty) &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^n \end{aligned}$$

mit Ableitung $f'(x) = nx^{n-1}$ an, so erhalten wir die Differenzierbarkeit und Ableitung der Wurzelfunktion $g(y) = \sqrt[n]{y}$

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{y})^{n-1}} = \frac{1}{n} y^{\frac{1}{n}-1}.$$

(ii) Für den natürlichen Logarithmus erhalten wir mit $f(x) = \exp(x)$ für $y > 0$

$$\ln'(y) = \frac{1}{f'(\ln(y))} = \frac{1}{y}.$$

(iii) Die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^3 \end{aligned}$$

ist differenzierbar und streng monoton wachsend und sie besitzt die stetige Umkehrfunktion

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt[3]{y} & y \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-y} & y < 0. \end{cases}$$

Die Umkehrfunktion ist jedoch im Punkt 0 nicht differenzierbar.

Definition 4.51. Sei I ein offenes Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Funktion heißt $n+1$ mal differenzierbar wenn die n -te Ableitung $f^{(n)}$ differenzierbar ist und ihre $n+1$ -te Ableitung $f^{(n+1)}$ ist die Funktion $f^{(n)'}.$ Die Funktion heißt beliebig differenzierbar oder glatt falls sie n mal differenzierbar ist für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Die Funktion heißt n mal stetig differenzierbar, falls $f^{(n)}$ stetig ist.

Definition 4.52. Sei I ein offenes Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine in x differenzierbare Funktion. Dann heißt

$$T_n f(y) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (y-x)^k$$

das n -te Taylor-Polynom um den Entwicklungspunkt x .

Der folgende Satz beschreibt die Approximation einer $n+1$ mal differenzierbaren Funktion durch ihr Taylorpolynom n -ten Grades.

Theorem 4.53 (Satz von Taylor). Sei I ein offenes Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine $n+1$ mal differenzierbare Funktion. Sei $x \in I$ und $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Für jedes $y \in I$ existiert ein ξ zwischen x und y so, dass

$$(f(y) - T_n f(y)) h'(\xi) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (y-\xi)^n (h(y) - h(x)). \quad (4.1)$$

Beweis. Wir wenden den verallgemeinerten Mittelwertsatz auf

$$\begin{aligned} g : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (y-t)^k \end{aligned}$$

und h an, es existiert also ξ , so dass

$$g'(\xi)(h(y) - h(x)) = (g(y) - g(x)) h'(\xi) = (f(y) - T_n f(y)) h'(\xi).$$

Wir müssen nun noch g' ausrechnen:

$$\begin{aligned} g'(t) &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} (y-t)^k - \frac{f^{(k)}(t)}{k!} k(y-t)^{k-1} \right) \\ &= \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (y-t)^n \end{aligned}$$

wobei die letzte Umformung aus der Tatsache folgt, dass es sich um eine Teleskopsumme handelt. Einsetzen von ξ liefert dann die gesuchte Gleichung. \square

Bemerkung 4.54. (i) Nützlich ist der Satz nur dann, wenn h' in einer Umgebung von x keine Nullstellen hat. In diesem Fall liefert er uns eine Aussage darüber, wie gut oder schlecht die Approximation von f durch das Taylor-Polynom $T_n f$ ist.

(ii) Je nach Wahl der Funktion h erhält man nun verschiedene Formen des Restterms

$$R_{n+1}(y, x) := f(y) - T_n f(y).$$

(iii) Wir betrachten hier nur die Lagrange-Form die sich für $h(t) = (y-t)^{n+1}$ also $h'(t) = -(n+1)(y-t)^n$ ergibt:

$$R_{n+1}(y, x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (y-\xi)^n \frac{(y-x)^{n+1}}{(n+1)(y-\xi)^n} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (y-x)^{n+1}.$$

Geben wir uns eine gewünschte Genauigkeit vor und kennen die Ableitung $f^{(n+1)}$ dann erlaubt uns die Formel festzustellen, für welche Werte von y das Polynom $T_n f$ eine hinreichend genaue Approximation von f ist.

(iv) Selbst für den Fall einer glatten Funktion erhalten wir im Allgemeinen keine Aussage über das Verhalten der Taylorreihe.

Korollar 4.55. Sei $(a, b) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ mindestens n mal stetig differenzierbar. Sei $x \in (a, b)$ und es gelte $0 = f'(x) = f''(x) = \dots = f^{(n-1)}(x)$ und $f^{(n)}(x) \neq 0$. Ist n ungerade so liegt bei x kein lokales Extremum vor, ist n gerade, so hat f bei x ein lokales Minimum falls $f^{(n)}(x) > 0$ und ein lokales Maximum falls $f^{(n)}(x) < 0$.

Beweis. Wir setzen oBdA. voraus, dass $f^{(n)}(x) > 0$ ist (sonst betrachte $-f$). Wir verwenden die Taylor-Formel mit Lagrange-Restglied. Nach Voraussetzung verschwinden in der Entwicklung (4.1) die Terme 1 bis $n-1$. Da nach Voraussetzung $f^{(n)}$ stetig ist, existiert $\epsilon > 0$, so dass $f^{(n)} > 0$ auf ganz $(x-\epsilon, x+\epsilon)$ (Warum?). Dann existiert nach der Taylor-Formel für jedes $y \in (x-\epsilon, x+\epsilon)$ ein $\xi_y \in (x-\epsilon, x+\epsilon)$, so dass

$$f(y) - T_n f(y) = f(y) - f(x) = \frac{f^{(n)}(\xi_y)}{n!} (y-x)^n.$$

Falls n ungerade ist, nimmt der letzte Ausdruck in jeder noch so kleinen Umgebung von x sowohl positive als auch negative Werte an, es liegt also kein Extremum vor. Ist n gerade, dann ist die rechte Seite nie negativ, es liegt also ein lokales Minimum vor. \square

4.3 Das Riemann-Integral

Im Folgenden seien stets $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$. Alle in diesem Abschnitt auftretenden Funktionen werden als beschränkt angenommen.

Definition 4.56. Eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ ist eine Unterteilung in Teilintervalle, also ein n -tupel von reellen Zahlen (t_0, t_1, \dots, t_n) , dass

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$$

erfüllt. Die Punkte t_0, \dots, t_n nennen wir Stützstellen der Zerlegung.

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und Z eine Zerlegung wie oben. Dann heißen

$$O(f, Z) = \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) \sup_{x \in (t_i, t_{i+1})} f(x) \text{ und}$$

$$U(f, Z) = \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) \inf_{x \in (t_i, t_{i+1})} f(x)$$

die Ober- beziehungsweise Untersumme von f bezüglich der Zerlegung Z .

Bemerkung 4.57. (i) Es gilt immer

$$O(f, Z) \leq \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) \sup_{x \in (a, b)} f(x) = (b - a) \sup_{x \in (a, b)} f(x).$$

Analog erhalten wir

$$U(f, Z) \geq (b - a) \inf_{x \in (a, b)} f(x).$$

(ii) Offensichtlich ist auch stets $U(f, Z) \leq O(f, Z)$.

(iii) Zerlegen wir die Teilintervalle einer Zerlegung Z in weitere Teilintervalle, so erhalten wir eine Verfeinerung von Z . Genauer: sind Z und \tilde{Z} die Zerlegungen

$$Z = (t_0, \dots, t_n)$$

$$\tilde{Z} = (s_0, \dots, s_m),$$

dann ist \tilde{Z} eine Verfeinerung von Z , wenn

$$\{s_0, \dots, s_m\} \subset \{t_0, \dots, t_n\}.$$

Man prüft nun leicht nach, dass es für endlich viele Zerlegungen Z_1, \dots, Z_k immer eine gemeinsame Verfeinerung \tilde{Z} gibt, also eine Zerlegung, die eine Verfeinerung für jedes Z_i ($i \in \{1, \dots, k\}$) ist (Warum?).

(iv) Seien nun Z und \tilde{Z} wie oben und sei

$$t_i = s_l < s_{l+1} < \dots < s_{l+k} = t_{i+1}.$$

Wenden wir nun Punkt (i) auf das Teilintervall (t_i, t_{i+1}) an, so erhalten wir

$$\sum_{r=0}^{k-1} (s_{l+r+1} - s_{l+r}) \sup_{x \in (s_{l+r}, s_{l+r+1})} f(x) \leq (t_{i+1} - t_i) \sup_{x \in (t_i, t_{i+1})} f(x).$$

Summieren wir nun über alle i ergibt sich

$$O(f, \tilde{Z}) \leq O(f, Z).$$

Analog erhalten wir auch

$$U(f, \tilde{Z}) \geq U(f, Z).$$

Wir die Zerlegung feiner, werden die Obersummen kleiner und die Untersummen größer.

(v) Damit ergibt sich nun für zwei beliebige Zerlegungen Z_1, Z_2 und eine Zerlegung \tilde{Z} , die eine Verfeinerung von beiden ist

$$U(f, Z_1) \leq U(f, \tilde{Z}) \leq O(f, \tilde{Z}) \leq O(f, Z_2).$$

Jede Obersumme von f ist also größer als jede Untersumme.

Definition 4.58. Wir nennen

$$\begin{aligned} O(f) &:= \inf \{O(f, Z) \mid Z \text{ Zerlegung von } [a, b]\} \\ U(f) &:= \sup \{U(f, Z) \mid Z \text{ Zerlegung von } [a, b]\} \end{aligned}$$

das obere beziehungsweise untere Riemann-Integral von f . Wenn wir über unterschiedliche Intervalle integrieren, werden wir manchmal auch die Intervallgrenzen an O oder U anschreiben, also zum Beispiel $O_a^b(f)$.

Eine Funktion f heißt Riemann-integrierbar oder kurz integrierbar, wenn sie beschränkt ist und $O(f) = U(f)$ gilt. In diesem Fall definieren wir

$$\int_a^b f(x) dx = O(f) = U(f)$$

als das Integral der Funktion f .

Bemerkung 4.59. (i) Auf Grund der vorhergehenden Überlegungen wissen wir bereits, dass das obere und das untere Riemann-Integral existieren und dass $U(f) \leq O(f)$ gilt.

- (ii) Wenn $Z = (t_0, \dots, t_n)$ eine Zerlegung und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die auf jedem Intervall (t_i, t_{i+1}) ($i \in \{0, \dots, n-1\}$) konstant ist. Solche Funktionen heißen stückweise konstant oder Treppenfunktionen. Dann gilt

$$O(f) \leq O(f, Z) = U(f, Z) \leq U(f)$$

und die Funktion ist Riemann-integrierbar.

- (iii) Stimmen $f, \tilde{f} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ an allen bis auf endlich viele Stellen überein, dann ist f genau dann integrierbar wenn \tilde{f} es ist und die Integrale stimmen überein.

Beispiel 4.60. Wir betrachten

$$\begin{aligned} f : [0, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x - 1 \end{aligned}$$

und für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Zerlegung

$$Z_n = \left(0, \frac{b}{n}, \frac{2b}{n}, \dots, \frac{(n-1)b}{n}, b\right).$$

Da f monoton wachsend ist, wird auf jedem Teilintervall der kleinste Wert am linken und der größte am rechten Rand angenommen. Es gilt also

$$\begin{aligned} O(f, Z_n) &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{(i+1)b}{n} - \frac{ib}{n} \right) f \left(\frac{(i+1)b}{n} \right) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b}{n} \left(\frac{(i+1)b}{n} - 1 \right) \\ &= \frac{b^2}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) - \frac{b}{n} n = \frac{b^2}{2} \frac{n(n+1)}{n^2} - b \\ U(f, Z_n) &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b}{n} \left(\frac{ib}{n} - 1 \right) = \frac{b^2}{2} \frac{n(n-1)}{n^2} - b. \end{aligned}$$

Beide Folgen konvergieren für $n \rightarrow \infty$ gegen $\frac{b^2}{2} - b$. Auf Grund der Definitionen des oberen und unteren Riemann-Integrals muss nun für jedes $n \in \mathbb{N}$ gelten $O(f, Z_n) \geq O(f)$ und $U(f, Z_n) \leq U(f)$ woraus im Grenzwert $\frac{b^2}{2} - b \geq O(f) \geq U(f) \geq \frac{b^2}{2} - b$ folgt. Das ist aber nur möglich, Wenn oberes und unteres Integral übereinstimmen. Die Funktion ist also Riemann-integrierbar und wir haben das Integral

$$\int_0^b (x-1) dx = \frac{b^2}{2} - b$$

ausgerechnet.

Beispiel 4.61. Wir betrachten wiederum die Funktion

$$\begin{aligned} f : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & x \text{ rational} \\ 0 & x \text{ irrational} \end{cases} \end{aligned}$$

und irgendeine Zerlegung $Z = (t_0, \dots, t_n)$. Da die rationalen Zahlen dicht in den reellen Zahlen sind (Satz 1.41), enthält jedes Teilintervall (t_i, t_{i+1}) sowohl rationale als auch irrationale Zahlen. Es gilt also

$$O(f, Z) = \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) = 1 \text{ und } U(f, Z) = 0.$$

Da das für jede Zerlegung Z gilt, ist $O(f) = 1$ und $U(f) = 0$, die Funktion also nicht Riemann-integrierbar.

Satz 4.62 (Eigenschaften des Integrals). *Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a < b < c$. Seien $f, g : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gelten*

(i) *falls $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$, dann ist auch*

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

(Monotonie),

(ii) *$f + \lambda g$ ist Riemann-integrierbar und es gilt*

$$\int_a^b (f(x) + \lambda g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \lambda \int_a^b g(x) dx$$

(Linearität),

(iii)

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

(Dreiecksungleichung),

(iv) *falls f auf $[a, b]$ und auf $[b, c]$ integrierbar ist, dann auch auf $[a, c]$ und es gilt*

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx.$$

Beweis. (i) Aus der Definition folgt direkt, dass für jede Zerlegung Z gilt $O(f, Z) \leq O(g, Z) \leq O(g)$. Da Z beliebig ist und f, g integrierbar folgt auch

$$\int_a^b f(x) dx = O(f) \leq O(g) = \int_a^b g(x) dx.$$

(ii) Wir betrachten zunächst den Fall $\lambda > 0$. Sei $A \subset [a, b]$ und $x \in A$, dann ist

$$\inf_{y \in A} f(y) + \lambda \inf_{y \in A} g(y) \leq f(x) + \lambda g(x) \leq \sup_{y \in A} f(y) + \lambda \sup_{y \in A} g(y).$$

Bilden wir nun Infimum beziehungsweise Supremum über alle $x \in A$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \inf_{y \in A} f(y) + \lambda \inf_{y \in A} g(y) &\leq \inf_{x \in A} (f(x) + \lambda g(x)) \\ &\leq \sup_{x \in A} (f(x) + \lambda g(x)) \leq \sup_{y \in A} f(y) + \lambda \sup_{y \in A} g(y). \end{aligned}$$

Wählen wir für A die Teilintervalle einer Zerlegung Z ergibt sich

$$U(f, Z) + \lambda U(g, Z) \leq U(f + \lambda g, Z) \text{ und } O(f + \lambda g, Z) \leq O(f, Z) + \lambda O(g, Z).$$

Seien nun Z_1 und Z_2 verschiedene Zerlegungen und Z eine gemeinsame Verfeinerung. Dann gilt

$$U(f, Z_1) + \lambda U(g, Z_2) \leq U(f, Z) + \lambda U(g, Z) \leq U(f + \lambda g, Z) \leq U(f + \lambda g)$$

beziehungsweise

$$O(f + \lambda g) \leq O(f + \lambda g, Z) \leq O(f, Z) + \lambda O(g, Z) \leq O(f, Z_1) + \lambda O(g, Z_2).$$

Bilden wir nun Infima beziehungsweise Suprema bezüglich der Z_1 und Z_2 , dann ergibt sich

$$U(f) + \lambda U(g) \leq U(f + \lambda g) \leq O(f + \lambda g) \leq O(f) + \lambda O(g).$$

Da f und g integrierbar sind, stimmen die linke und die rechte Seite in der obigen Ungleichungskette überein woraus die Integrierbarkeit von $f + \lambda g$ und die Formel

$$\int_a^b f(x) dx + \lambda \int_a^b g(x) dx = \int_a^b (f(x) + \lambda g(x)) dx$$

folgen.

Schließlich zeigt man, dass für jede Zerlegung Z gilt $O(-f, Z) = -U(f, Z)$ und $O(-f) = U(f)$ (Übung). Daraus folgt, dass f genau dann integrierbar ist, wenn es auch $-f$ ist und dass

$$\int_a^b -f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx.$$

(iii) Es gilt für jedes $x \in [a, b]$

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|,$$

woraus mit der Monotonie und der Linearität folgt

$$-\int_a^b |f(x)| \, dx \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b |f(x)| \, dx$$

also

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx.$$

- (iv) Wir zeigen, dass $O_a^b(f) + O_b^c(f) = O_a^c(f)$. Sei zunächst $Z = (t_0, \dots, t_n)$ eine Zerlegung von $[a, c]$. Dann können wir diese durch Hinzufügen des Punktes b (falls nötig) zu einer Zerlegung \tilde{Z} verfeinern und diese in Zerlegungen

$$Z_1 = (t_0, \dots, t_l = b) \text{ und } Z_2 = (t_l, \dots, t_n)$$

von $[a, b]$ beziehungsweise $[b, c]$ „aufteilen“. Dann gilt

$$O_a^b(f) + O_b^c(f) \leq O(f, Z_1) + O(f, Z_2) = O(f, \tilde{Z}) \leq O(f, Z).$$

Da diese Ungleichung für jede Zerlegung Z gilt, folgt auch $O_a^b(f) + O_b^c(f) \leq O_a^c(f)$. Andererseits können wir Zerlegungen $Z_1 = (t_0, \dots, t_n)$ und $Z_2 = (s_0, \dots, s_l)$ von $[a, b]$ beziehungsweise $[b, c]$ zu einer Zerlegung

$$Z = (t_0, \dots, t_n = b = s_0, \dots, s_l)$$

zusammensetzen und es gilt daher

$$O(f, Z_1) + O(f, Z_2) = O(f, Z) \geq O_a^c(f).$$

Daraus folgt dann auch

$$O_a^b(f) + O_b^c(f) \geq O_a^c(f).$$

Damit ist die gesuchte Gleichheit gezeigt. Auf analoge Weise zeigt man auch

$$U_a^b(f) + U_b^c(f) = U_a^c(f).$$

Aus diesen Gleichungen folgt nun sofort, falls f auf $[a, b]$ und auf $[b, c]$ integrierbar ist, dann auch auf $[a, c]$ und es gilt

$$\int_a^b f(x) \, dx + \int_b^c f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx. \quad \square$$

Bemerkung 4.63. Wir haben oben gezeigt, dass die Riemann-integrierbaren Funktionen einen Untervektorraum des Raumes aller Funktionen bilden. Räume integrierbarer Funktionen spielen eine wichtige Rolle in der mathematischen Formulierung der Quantenmechanik. Allerdings ist der dort verwendete Integrierbarkeitsbegriff etwas allgemeiner als der hier definierte. Man kann auch zeigen, dass Produkte von Riemann-integrierbaren Funktionen auch wieder Riemann-integrierbar sind.

Unser nächstes Ziel wird es sein herauszufinden welche Funktionen Riemann-integrierbar sind. Eine Charakterisierung dieser Funktionen können wir hier nicht angeben, aber wir werden die Integrierbarkeit von zwei für die Praxis wichtigen Klassen von Funktionen zeigen.

Definition 4.64. Eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt stückweise monoton, wenn es eine Zerlegung $Z = (t_0, \dots, t_n)$ von $[a, b]$ gibt, so dass f auf (t_i, t_{i+1}) monoton ist für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$. Sie heißt stückweise stetig, wenn sie in höchstens endlich vielen Punkten unstetig ist.

Dazu geben wir zunächst die folgende alternative Charakterisierung von integrierbarkeit an.

Lemma 4.65. Eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ eine Zerlegung Z gibt, so dass $O(f, Z) - U(f, Z) < \epsilon$ ist.

Beweis. Sei f zunächst Riemann-integrierbar und $\epsilon > 0$. Auf Grund der Definitionen von $O(f)$ und $U(f)$ existieren Zerlegungen Z_1 und Z_2 so, dass

$$O(f, Z_1) < O(f) + \frac{\epsilon}{2} \text{ und} \\ U(f, Z_2) > U(f) - \frac{\epsilon}{2}.$$

Sei nun Z eine Verfeinerung von Z_1 und Z_2 . Dann gilt

$$O(f, Z) - U(f, Z) \leq O(f, Z_1) - U(f, Z_2) < O(f) + \frac{\epsilon}{2} - \left(U(f) - \frac{\epsilon}{2} \right) = \epsilon.$$

Andererseits existiere für jedes $\epsilon > 0$ eine Zerlegung Z so, dass $O(f, Z) - U(f, Z) < \epsilon$ ist. Sei $\epsilon > 0$ und Z so eine Zerlegung. Dann ist

$$O(f) \leq O(f, Z) < U(f, Z) + \epsilon \leq U(f) + \epsilon,$$

also $O(f) - U(f) < \epsilon$. Da diese Gleichung für jedes $\epsilon > 0$ gelten soll, muss $O(f) = U(f)$ sein. \square

Nochmals leicht umformuliert bedeutet das, f ist integrierbar genau dann, wenn es eine Folge (Z_n) von Zerlegungen gibt, so dass $O(f, Z_n) - U(f, Z_n)$ eine Nullfolge ist.

Satz 4.66. Jede stückweise monotone Funktion ist Riemann-integrierbar.

Beweis. Wir zeigen die Aussage für eine monoton wachsende Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Die Fälle für monoton fallende Funktionen und für stückweise monotone Funktionen ergeben sich dann aus Satz 4.62 (ii) und (iv).

Sei also $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton wachsend. Wir betrachten die Zerlegung

$$Z_n = \left(a, a + \frac{b-a}{n}, a + \frac{2(b-a)}{n}, \dots, a + \frac{(n-1)(b-a)}{n}, b \right).$$

Es gilt

$$O(f, Z_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} \sup_{x \in (t_i, t_{i+1})} f(x) \leq \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(t_{i+1}) \text{ und}$$

$$U(f, Z_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} \inf_{x \in (t_i, t_{i+1})} f(x) \geq \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)$$

und damit

$$O(f, Z_n) - U(f, Z_n) \leq \frac{b-a}{n} \left(\sum_{i=0}^{n-1} f(t_{i+1}) - \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i) \right) = \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)).$$

Da der letzte Ausdruck eine Nullfolge ist, erhalten wir aus dem obigen Lemma die Integrierbarkeit von f . \square

Satz 4.67. *Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte und stückweise stetige Funktion, dann ist f Riemann-integrierbar.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, ist f nicht integrierbar, dann ist es auch nicht stetig. Sei also f nicht integrierbar und setze $\epsilon := O(f) - U(f) > 0$. Wir setzen nun $a = a_0$ und $b = b_0$ und konstruieren eine Intervallschachtelung. Dazu teilen wir das Intervall $[a, b]$ an seinem Mittelpunkt $c_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$. Ist nun $O_{a_0}^{c_0}(f) - U_{a_0}^{c_0}(f) \geq \frac{\epsilon}{2}$, so wählen wir das linke Teilintervall, setzen also $a_1 = a_0$ und $b_1 = c_0$. Andernfalls muss wegen der Additivität der oberen und unteren Integrale (siehe Beweis von Satz 4.62 (iv)) $O_{c_0}^{b_0}(f) - U_{c_0}^{b_0}(f) \geq \frac{\epsilon}{2}$ gelten und wir wählen das rechte Teilintervall: $a_1 = c_0$ und $b_1 = b_0$.

Wir fahren auf diese Weise fort, und konstruieren so eine Intervallschachtelung $[a_n, b_n]$ so, dass stets gilt

$$O_{a_n}^{b_n}(f) - U_{a_n}^{b_n}(f) \geq \frac{\epsilon}{2^n}.$$

Sei x_0 der in allen Intervallen enthaltene Punkt (vergleiche Satz 4.26). Es gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{b-a}{2^n} \inf_{x \in (a_n, b_n)} f(x) \leq U_{a_n}^{b_n}(f) \leq O_{a_n}^{b_n}(f) \leq \frac{b-a}{2^n} \sup_{x \in (a_n, b_n)} f(x).$$

Es muss also auch

$$(b-a) \left(\sup_{x \in (a_n, b_n)} f(x) - \inf_{x \in (a_n, b_n)} f(x) \right) \geq \epsilon$$

gelten. Wir können also für jedes $n \in \mathbb{N}$ Punkte $x_n, y_n \in (a_n, b_n)$ finden, so dass $f(y_n) - f(x_n) \geq \frac{\epsilon}{2(b-a)}$ ist. Für $n \rightarrow \infty$ gilt natürlich $x_n \rightarrow x_0$ und auch $y_n \rightarrow x_0$. Wäre f in x_0 stetig, müsste nun $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(y_n) - f(x_n)) = 0$ gelten, was jedoch durch

obige Ungleichung ausgeschlossen ist. Ist also f eine stetige Funktion, dann ist es auch beschränkt (Warum?) und integrierbar.

Sei nun f lediglich beschränkt und auf (a, b) stetig und sei $M \in (0, \infty)$ eine Schranke für f (das heißt $-M \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in [a, b]$). Dann ist nach dem bereits gezeigten f auf $[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}]$ integrierbar, es existiert also eine Zerlegung $Z_n = (t_0, \dots, t_l)$ dieses Intervalls, so dass

$$O(f, Z_n) - U(f, Z_n) \leq \frac{1}{n}.$$

Für die Zerlegung

$$\tilde{Z}_n = (a, t_0, \dots, t_l, b)$$

des Intervalls $[a, b]$ gilt dann

$$\begin{aligned} O(f, \tilde{Z}_n) - U(f, \tilde{Z}_n) &= \frac{1}{n} \left(\sup_{x \in (a, t_0)} f(x) + \sup_{x \in (t_l, b)} f(x) \right) + O(f, Z_n) \\ &\quad - \frac{1}{n} \left(\inf_{x \in (a, t_0)} f(x) + \inf_{x \in (t_l, b)} f(x) \right) - U(f, Z_n) \leq \frac{1}{n} 2M - \frac{1}{n} (-2M) + \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Die Rechte Seite ist eine Nullfolge und damit liefert Lemma 4.65 die gewünschte Integrierbarkeit.

Schließlich können wir eine beschränkte, stückweise stetige Funktion mittels Satz 4.62 (iv) „zusammensetzen“. \square

Definition 4.68. Für $a > b$ definieren wir nun

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \text{ und } \int_a^a f(x) dx = 0.$$

Bemerkung 4.69. Mittels einiger Fallunterscheidungen kann man leicht nachprüfen, dass die Gleichung aus Satz 4.62 (iv) mit diesen Definitionen nun für beliebige $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx.$$

Satz 4.70 (Mittelwertsatz der Integralrechnung). Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann existiert $\xi \in (a, b)$ so, dass

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a).$$

Beweis. Die Funktion f nimmt auf dem abgeschlossenen Intervall ihr Maximum und Minimum an. Seien $x_m, x_M \in [a, b]$ eine solche Minimal und Maximalstelle. Aus der Monotonie des Integrals folgt dann

$$f(x_m) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x_m) dx \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x_M) dx = f(x_M).$$

Auf Grund des Zwischenwertsatzes existiert dann ξ zwischen x_m und x_M so, dass

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \quad \square$$

Theorem 4.71 (Hauptsatz der Analysis Teil I). Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar. Dann ist die Funktionen

$$F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_a^x f(t) dt$$

Lipschitz-stetig und damit insbesondere stetig.

Ist f in $x_0 \in (a, b)$ stetig, dann ist F dort sogar differenzierbar und es gilt $F'(x_0) = f(x_0)$.

Beweis. Sei f durch M beschränkt ($|f(x)| \leq M$ für alle $x \in [a, b]$). Seien $x, y \in [a, b]$ und ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei $x < y$, dann gilt

$$\begin{aligned} |F(y) - F(x)| &= \left| \int_a^y f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right| = \left| \int_x^y f(t) dt \right| \leq \int_x^y |f(t)| dt \\ &\leq \int_x^y M dt = M(y - x) = M|y - x|. \end{aligned}$$

Dabei haben wir die Dreiecksungleichung und die Monotonie des Integrals benutzt.

Sei nun f in x_0 stetig und $\epsilon > 0$. Dann existiert $\delta > 0$ so, dass $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ falls $|x - x_0| < \delta$. Dann gilt für jedes $h \in (0, \delta)$

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{h} \left(\int_a^{x_0+h} f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt \right) - f(x_0) \right| &= \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0)) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)| dt < \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} \epsilon dt = \epsilon \end{aligned}$$

Für $h \in (-\delta, 0)$ muss man zusätzliche Vorzeichen beachten (die Dreiecksungleichung gilt nur wenn die untere Integralgrenze kleiner als die obere ist), kommt aber zum selben Ergebnis. Damit haben wir gezeigt, dass die Differenzenquotienten von F im Punkt x_0 gegen $f(x_0)$ konvergieren. \square

Definition 4.72. Sei I ein offenes Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Funktion $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion von f , wenn $F' = f$ gilt.

Bemerkung 4.73. Offensichtlich ist eine Stammfunktion F von f , so fern sie überhaupt existiert, nicht eindeutig bestimmt. Die Funktion $F + c$ ist für jede Konstante $c \in \mathbb{R}$ eine weitere Stammfunktion.

Andererseits hat für eine weitere Stammfunktion \tilde{F} von f die Differenz $F - \tilde{F}$ auf ganz I verschwindende Ableitung und ist daher konstant. Tatsächlich ist also jede weitere Stammfunktion von der Form $F + c$.

Der erste Teil des Hauptsatzes besagt nun, dass stetige Funktionen Stammfunktionen besitzen und dass wir letztere als Integrale schreiben können. Für das praktische Ausrechnen von Stammfunktionen spielt das jedoch im Allgemeinen keine Rolle.

Theorem 4.74 (Hauptsatz der Analysis Teil II). *Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) eine Stammfunktion von f . Dann gilt*

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Beweis. Sei $Z = (t_0, \dots, t_n)$ eine Zerlegung von $[a, b]$. Für jedes $i \in \{0, \dots, n-1\}$ existiert dann nach dem Mittelwertsatz der Differenzialrechnung ein $\xi_i \in (t_i, t_{i+1})$ so, dass

$$f(\xi_i) = \frac{F(t_{i+1}) - F(t_i)}{t_{i+1} - t_i}.$$

Darüber hinaus gilt natürlich

$$(t_{i+1} - t_i) \inf_{x \in (t_i, t_{i+1})} f(x) \leq (t_{i+1} - t_i) f(\xi_i) = F(t_{i+1}) - F(t_i)$$

und damit, nach Summation über alle i ,

$$U(f, Z) \leq \sum_{i=0}^{n-1} (F(t_{i+1}) - F(t_i)) = F(b) - F(a)$$

wobei die Summe wiederum eine Teleskopsumme ist. Da das für jede Zerlegung Z gilt, folgt $U(f) \leq F(b) - F(a)$. Analog zeigt man auch $O(f) \geq F(b) - F(a)$ und da f integrierbar ist folgt

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad \square$$

Bemerkung 4.75. Durch zerlegen des Intervalls $[a, b]$ in Teilintervalle, zeigt man leicht, dass wir auf die Differenzierbarkeit von F – und damit natürlich auch auf die Beziehung $F' = f$ – an endlich vielen Punkten verzichten können. Wir werden auch solche Funktionen manchmal noch als Stammfunktionen bezeichnen. Die Stetigkeit von F ist jedoch unerlässlich. Wendet man die unten beschriebenen Standardmethoden zum Auffinden von Stammfunktionen unvorsichtig an, können – selbst bei stetigem f – unstetige „Stammfunktionen“ entstehen.

Für die häufig auftretenden Ausdrücke $F(b) - F(a)$ verwenden wir als abkürzende Schreibweise $F(x)|_a^b$.

Da wir von den Ableitungsregeln bereits einige Stammfunktionen kennen, können wir nun einfache Integrale berechnen:

Beispiel 4.76. (i)

$$\int_a^b \exp(x) dx = \exp(x)|_a^b$$

(ii) Für die Vorzeichenfunktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

ist $x \mapsto |x|$ eine stetige Stammfunktion (die in 0 natürlich nicht differenzierbar ist). Wir erhalten damit für jedes $a \in (0, \infty)$

$$\int_{-a}^a f(x) dx = |a| - |-a| = 0.$$

(iii) Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

besitzt die Stammfunktion $x \mapsto \ln|x|$. Diese ist im Punkt 0 ebenfalls nicht differenzierbar und nicht einmal stetig. Für $a < 0$ und $b > 0$ existiert zwar $\ln|x| |_a^b$ aber die Funktion ist auf $[a, b]$ unbeschränkt und damit nicht integrierbar.

Bemerkung 4.77. Im Zusammenhang mit dem Hauptsatz erhalten wir nun die üblichen „Integrationsregeln“, bei denen es sich eigentlich um Regeln zum Finden von Stammfunktionen handelt. Dabei schreiben wir $\int f(x) dx$ für eine Stammfunktion von f und sprechen auch vom „unbestimmten Integral“. Diese Notation ist etwas unglücklich, da Stammfunktionen ja nur bis auf eine Konstante bestimmt sind. Außerdem wird der Ausdruck in anderem Zusammenhang auch für bestimmte Integrale über (zum Beispiel) ganz \mathbb{R} verwendet.

Aus den Rechenregeln für die Differenziation erhalten wir unmittelbar die Regel für „partielle Integration“:

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx.$$

Setzen wir für die „unbestimmten Integrale“ beliebige Stammfunktionen der Integranden ein, dann wird die Gleichheit natürlich im Allgemeinen nicht erfüllt sein. Man kann

die Regel in dieser Form entweder als Gleichheit der Mengen aller solcher Funktionen auffassen, oder man interpretiert sie folgendermaßen: für jede Stammfunktion von $f'g'$ erhalten wir durch Einsetzen in die rechte Seite der Gleichung eine Stammfunktion von $f'g$.

Analog erhalten wir die Regel für die Substitution:

$$\int g'(x)f(g(x))dx = \int f(u)du \Big|_{u=g(x)}.$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite bedeutet, dass in die Stammfunktion $\int f(u)du$ die innere Funktion $g(x)$ eingesetzt wird. Die obigen Bemerkungen zur Interpretation dieser Gleichung gelten sinngemäß.

Wenden wir nun den Hauptsatz an, erhalten wir entsprechende Formeln für –diesmal tatsächlich – Integrale:

$$\begin{aligned} \int_a^b f'(x)g(x)dx &= f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx \\ \int_a^b g'(x)f(g(x))dx &= \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du. \end{aligned}$$

Damit diese Formeln gelten, muss der Hauptsatz allerdings anwendbar sein, also die entsprechenden Stammfunktionen auf der rechten Seite existieren.

Beispiel 4.78. (i) Wir wollen eine Stammfunktion der Logarithmusfunktion bestimmen. Dazu verwenden wir partielle Integration mit $f'(x) = 1$ und $g(x) = \ln(x)$

$$\int \ln(x)dx = x \ln(x) - \int x \frac{1}{x}dx = x(\ln(x) - 1).$$

(ii) Um eine Stammfunktion für $x \mapsto \cos(x)^2$ zu bestimmen, können wir ebenfalls partielle Integration verwenden mit $f' = \cos = g$

$$\begin{aligned} \int \cos(x)^2 dx &= \sin(x) \cos(x) + \int \sin(x)^2 dx \\ &= \sin(x) \cos(x) + \int (1 - \cos(x)^2) dx \\ &= \sin(x) \cos(x) + x - \int \cos(x)^2 dx. \end{aligned}$$

Damit steht auf der rechten Seite wieder der ursprüngliche Ausdruck nach dem wir dann auflösen können

$$\int \cos(x)^2 dx = \frac{1}{2} (\sin(x) \cos(x) + x).$$

Dabei haben wir implizit den Hauptsatz verwendet da das obige Argument nur dann funktioniert, wenn bereits bekannt ist, dass es eine Stammfunktion gibt.

(iii) Um eine Stammfunktion der Tangensfunktion zu bestimmen, können wir schreiben

$$\int \tan(x) dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx = - \int \frac{\cos'(x)}{\cos(x)} dx = - \int \frac{1}{u} du \Big|_{u=\cos(x)} = - \ln |\cos(x)|.$$

(iv) Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $\alpha \neq 0$. Für eine lineare Funktion $g(x) = \alpha x + \beta$ mit $g'(x) = \alpha$ können wir immer substituieren

$$\int f(\alpha x + \beta) dx = \frac{1}{\alpha} \int f(u) du \Big|_{u=\alpha x + \beta}.$$

Substitutionen dieser Art kommen so häufig vor, dass man sie auch im Kopf ausführen können sollte.

Die entsprechende Formel für Integrale

$$\int_a^b f(\alpha x + \beta) dx = \frac{1}{\alpha} \int_{\alpha a + \beta}^{\alpha b + \beta} f(u) du$$

gilt selbst dann, wenn der Hauptsatz nicht anwendbar ist. Das heißt, falls f integrierbar ist, dann ist auch die Funktion $x \mapsto f(\alpha x + \beta)$ integrierbar und die obige Formel gilt.

Bemerkung 4.79. Häufig ist die Situation natürlich so, dass zwar mehr oder weniger offensichtlich ist, welchen Term $g(x)$ wir substituieren wollen, aber dass der Integrand keinen passenden Faktor $g'(x)$ enthält. In diesem Fall können wir diesen natürlich hinzufügen

$$\int f(g(x)) dx = \int g'(x) \frac{1}{g'(x)} f(g(x)) dx,$$

müssen dann aber den zusätzlichen Faktor $\frac{1}{g'}$ wieder durch g ausdrücken.

Beispielsweise ist es naheliegend in

$$\int \frac{\tan(x)}{1 + \tan^2(x)} dx$$

die Substitution $g(x) = \tan(x)$ vorzunehmen. Wir können dazu deren Ableitung betrachten

$$g'(x) = \frac{\cos(x)^2 + \sin(x)^2}{\cos(x)^2} = \frac{1}{\cos(x)^2}.$$

und wollen diese nun wiederum durch den \tan ausdrücken. Dazu schreiben wir

$$\tan(x)^2 = \frac{\sin(x)^2}{\cos(x)^2} = \frac{1 - \cos(x)^2}{\cos(x)^2}.$$

Diese Gleichung lässt sich nun nach $\cos(x)^2$ auflösen

$$\cos(x)^2 = \frac{1}{1 + \tan(x)^2} = \frac{1}{1 + g(x)^2}.$$

Setzen wir nun alles ein erhalten wir

$$\int \frac{\tan(x)}{1 + \tan(x)^2} dx = \int g'(x) \frac{g(x)}{(1 + g(x)^2)^2} = \int \frac{u}{(1 + u^2)^2} du \Big|_{u=\tan(x)}.$$

Den Ausdruck auf der rechten Seite könnten wir nun mittels einer weiteren Substitution – zum Beispiel $v = u^2 + 1$ – weiter untersuchen.

Ist schließlich die zu substituierende Funktion $g(x)$ umkehrbar, dann können wir schreiben

$$\int f(g(x)) dx = \int g'(x) \frac{1}{g'(g^{-1}(g(x)))} f(g(x)) dx = \int \frac{1}{g'(g^{-1}(u))} f(u) du \Big|_{u=g(x)}.$$

Der zusätzlich entstandene Faktor lässt sich mit Satz 4.49 leicht als Ableitung der Umkehrfunktion identifizieren. Die obige Formel liefert damit die Begründung für das folgende heuristische Vorgehen bei der Anwendung der Substitutionsregel. Wir schreiben die Substitution $u = g(x)$ und lösen diese nach x auf: $x = g^{-1}(u)$. Nun leiten wir diese Formel nach u ab und „multiplizieren mit du “.

$$\frac{dx}{du} = (g^{-1})'(u) \text{ beziehungsweise } dx = (g^{-1})'(u) du.$$

Nun ersetzen wir im Integranden $g(x)$ durch u , x durch $g^{-1}(u)$ und dx durch $(g^{-1})'(u) du$ und erhalten

$$\int f(g(x)) dx = \int f(u) (g^{-1})'(u) du$$

also die oben bereits hergeleitete Formel.

So können wir beispielsweise in

$$\int \frac{x}{1 + \sqrt{x}} dx$$

substituieren $u = 1 + \sqrt{x}$. Dann gilt $x = (u - 1)^2$ und $dx = 2(u - 1) du$ und wir erhalten

$$\int \frac{x}{1 + \sqrt{x}} dx = 2 \int \frac{(u - 1)^3}{u} du \Big|_{u=1+\sqrt{x}}.$$

Der Integrand auf der rechten Seite ist eine Linearkombination von Potenzfunktionen, eine Stammfunktion also einfach zu bestimmen.

Es bleibt darauf Hinzuweisen, dass Probleme auftreten können, wenn g' Nullstellen hat. Das kann selbst dann auftreten, wenn der ursprüngliche Integrand eine glatte Funktion ist und ist der Hauptgrund für das Entstehen von „unstetigen“ Stammfunktionen. Daher ist auch Vorsicht geboten beim vorzeitigen Einsetzen von Integrationsgrenzen, also bevor die Stammfunktion tatsächlich bestimmt ist.

Definition 4.80. Seien $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : [a, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen und es sei f integrierbar auf $[t, b]$ für jedes $t \in (a, b)$ und g integrierbar auf $[a, t]$ für jedes $t \in (a, \infty)$, dann definieren wir

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x)dx \text{ beziehungsweise} \\ \int_a^\infty f(x)dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x)dx\end{aligned}$$

falls der Grenzwert auf der rechten Seite existiert. Solche Integrale bezeichnet man auch als uneigentliche Integrale.

Beispiel 4.81. Die Funktion $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ ist auf $[0, 1]$ nicht beschränkt und damit nicht Riemann-integrierbar. Dennoch ist die unter dem Graphen liegende Fläche endlich denn

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} 2\sqrt{x} \Big|_t^1 = \lim_{t \rightarrow 0^+} 2(1 - \sqrt{t}) = 2.$$

Bemerkung 4.82. Wir haben bereits gesehen, dass die Funktion

$$t \mapsto \int_t^b f(x)dx$$

stetig ist. Falls f also auf ganz $[a, b]$ integrierbar ist, dann gilt

$$\lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Das uneigentliche Integral stimmt also mit dem bisher betrachteten überein falls letzteres existiert. Es gibt aber Fälle – wie im obigen Beispiel – wo das herkömmliche Integral nicht existiert, das uneigentliche aber sehr wohl. Insofern haben wir den Integralbegriff also auf eine größere Klasse von Funktionen erweitert.

Zu beachten ist, dass bei der Integration „über eine problematische Stelle“ die einseitigen Grenzwerte von beiden Seiten separat gebildet werden müssen. Zum Beispiel ist das unbestimmte Integral

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$$

als

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \frac{1}{x} dx + \lim_{s \rightarrow 0^-} \int_{-1}^s \frac{1}{x} dx$$

aufzufassen und man überprüft leicht, dass keiner der beiden Grenzwerte existiert. Die andere mögliche Interpretation

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\int_t^1 \frac{1}{x} dx + \int_{-1}^{-t} \frac{1}{x} dx \right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} (\ln |-t| - \ln |t|) = 0$$

konvergiert zwar, ist aber hier nicht gemeint.

Durch den Hauptsatz sind Integrale häufig leichter auszurechnen als diskrete Summen was die Nützlichkeit des folgenden Konvergenzkriteriums erklärt.

Satz 4.83 (Integralkriterium für Konvergenz von Reihen). *Sei $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine monoton fallende Funktion. Dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ genau dann konvergent, wenn das uneigentliche Integral*

$$\int_1^{\infty} f(x) dx$$

existiert.

Beweis. Wir definieren Hilfsfunktionen $g, h : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\begin{aligned} g(x) &= f(k) \text{ für } x \in [k, k+1) \\ h(x) &= f(k+1) \text{ für } x \in [k, k+1). \end{aligned}$$

Auf Grund der Monotonie gilt nun für alle $x \in [1, \infty)$ die Ungleichung $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ und wir erhalten aus der Monotonie des Integrals sowie der Integrale der Treppenfunktionen g und h

$$\int_1^n h(x) dx \leq \int_1^n f(x) dx \leq \int_1^n g(x) dx.$$

Falls die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ konvergiert gilt für jedes t und jedes $n > t$

$$\int_1^t f(x) dx \leq \int_1^n f(x) dx \leq \int_1^n g(x) dx = \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} f(k).$$

Die monoton wachsende Funktion auf der linken Seite ist also nach oben beschränkt und konvergiert damit.

Falls andererseits $\int_1^{\infty} f(x) dx$ existiert, dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) = \int_1^n h(x) dx \leq \int_1^n f(x) dx \leq \int_1^{\infty} f(x) dx.$$

Damit ist die monoton wachsende Partialsummenfolge auf der linken Seite beschränkt und konvergiert. \square

Beispiel 4.84. Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$$

konvergiert genau dann, wenn $\alpha > 1$. Für $\alpha \leq 0$ ist die Reihe offensichtlich divergent, es sei also $\alpha > 0$.

Die Funktion

$$\begin{aligned} f_\alpha &: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^{-\alpha} \end{aligned}$$

ist dann monoton fallend und wir können leicht eine Stammfunktion angeben:

$$\begin{aligned} F_\alpha(x) &= \frac{1}{1-\alpha} x^{-\alpha+1} \text{ für } \alpha \neq 1 \text{ beziehungsweise} \\ F_1(x) &= \ln(x). \end{aligned}$$

Der Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t f_\alpha(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} (F_\alpha(t) - F_\alpha(1))$$

existiert genau dann, wenn $-\alpha + 1 < 0$ ist, also für $\alpha > 1$. Nach dem obigen Satz konvergiert die Reihe auch in genau diesen Fällen.

5 Topologie in metrischen Räumen

5.1 Metrische und normierte Räume

Das Ziel dieses Kapitels ist es, Begriffe und Erkenntnisse aus dem vergangenen Semester vom eindimensionalen auf höhere Dimensionen zu übertragen. Insbesondere wollen wir über Konvergenz von Folgen (und Reihen) im \mathbb{R}^n und über Stetigkeit von Abbildungen von \mathbb{R}^n nach \mathbb{R}^m sprechen können. Solche Abbildungen spielen auch in der Physik an vielen Stellen eine Rolle. Sie tauchen dort unter ganz unterschiedlichen Namen auf („skalare Felder“: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, „Vektorfelder“: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, „Tensorfelder“ etc.). Auch höhere Dimensionen als 3 sind praktisch wichtig, da physikalische Größen in einem n -Teilchen-System von (mindestens) $3n$ Variablen abhängen, also Abbildungen auf einem $3n$ -dimensionalen Raum sind.

Formuliert man nun entsprechende Definitionen (für zum Beispiel Konvergenz oder Stetigkeit), stellt sich heraus, dass dazu lediglich der Begriff eines Abstands nötig ist. Wir werden daher die Theorie für die allgemeinere Situation einer Menge mit einem Abstandsbegriff – einem sogenannten metrischen Raum – aufbauen. Die Theorie wird dadurch nicht komplizierter (nur abstrakter) aber wir können später mit den Werkzeugen die wir uns erarbeiten werden auch zum Beispiel die Konvergenz von Funktionenfolgen untersuchen.

Definition 5.1 (Metrischer Raum). Ein metrischer Raum (X, d) ist ein Paar bestehend aus einer Menge X zusammen mit einer Abbildung $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$, die als Metrik bezeichnet wird und die folgenden Bedingungen für alle $x, y, z \in X$ erfüllt:

$$\begin{aligned}d(x, y) &\geq 0 \quad (\text{Positivität}) \\d(x, y) &= 0 \iff x = y \quad (\text{Definitheit}) \\d(x, y) &= d(y, x) \quad (\text{Symmetrie}) \\d(x, y) &\leq d(x, z) + d(z, y) \quad (\text{Dreiecksungleichung}).\end{aligned}$$

Die Elemente eines metrischen Raumes werden oft als Punkte bezeichnet. Die Bezeichnungen „Raum“ und „Punkt“ rühren daher, dass es sich hier um Objekte der Geometrie (in einem sehr weit gefassten Sinn des Wortes) handelt. Ihnen kommt keine tiefere Bedeutung zu. Ein einzelner Punkt eines abstrakten metrischen Raumes besitzt keine besonderen Eigenschaften außer der Element eben dieses Raumes zu sein. Interessante Eigenschaften treten erst durch die Struktur (die Metrik mit ihren Eigenschaften) auf, die verschiedene Punkte des Raumes zueinander in Beziehung setzt.

Beispiel 5.2. (i) Sei M eine beliebige Menge. Dann wird durch

$$d(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

eine Metrik definiert, die als diskrete Metrik bezeichnet wird. Diese Metrik ist meist nicht besonders interessant, da sie der Mengen M tatsächlich keine zusätzliche Struktur verleiht.

- (ii) Seien X Menge der Knoten eines zusammenhängenden Graphen und $d(x, y)$ die minimale Anzahl an Kanten die durchlaufen werden müssen um von x nach y zu kommen. Dann ist d eine Metrik auf X .
- (iii) Sei X die Oberfläche einer Kugel (Erdoberfläche) und $d(x, y)$ der Abstand „Luftlinie“ (minimale Distanz entlang eines Großkreises). Dann ist d eine Metrik.
- (iv) Sei X die Menge der Punkte des europäischen Straßennetzes und $d(x, y)$ die minimale Strecke die zurückzulegen ist um entlang irgendwelcher Straßen von x nach y zu fahren. Dann ist d eine Metrik.
- (v) Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, dann wird durch

$$d_{X \times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2)$$

eine Metrix auf dem direkten Produkt $X \times Y$ definiert.

In vielen für uns wichtigen Beispielen besitzt die Menge X außer der metrischen noch eine damit kompatible Vektorraumstruktur:

Definition 5.3 (Normierter Raum). Ein normierter Raum $(V, \|\cdot\|)$ ist ein Paar bestehend aus einem Vektorraum V über dem Körper \mathbb{K} der reellen oder komplexen Zahlen und einer Abbildung $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$, die als Norm bezeichnet wird und die folgenden Bedingungen für alle $x, y \in V$ erfüllt:

$$\begin{aligned} \|x\| &\geq 0 \quad (\text{Positivität}) \\ \|x\| &= 0 \iff x = 0 \quad (\text{Definitheit}) \\ \|\lambda x\| &= |\lambda| \|x\| \quad (\text{absolute Homogenität}) \\ \|x + y\| &\leq \|x\| + \|y\| \quad (\text{Dreiecksungleichung}). \end{aligned}$$

Die Norm von x interpretieren wir dabei als den Abstand von x zum Nullpunkt und die obigen Axiome fordern dann gerade, dass es sich um einen sinnvollen Abstandsbegriff handelt. Da wir in Vektorräumen Differenzen bilden können, lässt sich damit auch der Abstand zweier beliebiger Punkte eindeutig festlegen. Jeder normierte Raum erhält die Struktur eines metrischen Raumes indem wir definieren $d(x, y) := \|x - y\|$. Man überprüft leicht, dass die so definierte Abbildung eine Metrik ist, sie wird als die von der Norm induzierte Metrik bezeichnet.

Das für uns bei weitem wichtigste Beispiel ist:

Beispiel 5.4 (\mathbb{R}^n mit euklidischer Norm). Definiere die euklidische Norm

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ \|(x_1, \dots, x_n)\| &:= \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}. \end{aligned}$$

Dann ist $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Die Dreiecksungleichung haben wir in Satz 3.63 bewiesen.

Insbesondere im \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 interpretieren wir diese Norm und die zugehörige Metrik gern als den „richtigen“ Abstand. Das ist jedoch trügerisch. Zunächst können die Koordinaten x_1, \dots, x_n beliebig skaliert sein. Für Belange des praktischen Lebens sind außerdem häufig die Metriken aus Beispiel 5.2 (iii) und (iv) wichtiger.

Im Fall des komplexen Vektorraums \mathbb{C}^n müssen wir die Definition leicht abwandeln um eine Norm zu erhalten

$$\|(x_1, \dots, x_n)\| := \sqrt{\overline{x_1}x_1 + \dots + \overline{x_n}x_n}.$$

Bemerkung 5.5. Wir erinnern uns, dass die komplexe Zahlenebene \mathbb{C} als reeller Vektorraum mit \mathbb{R}^2 übereinstimmt. Dabei sind Real- und Imaginärteil die Koordinaten. Der komplexe Betrag

$$|x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

entspricht dabei genau der euklidischen Norm.

Wir haben also im vergangenen Semester bereits mit einem normierten Raum gearbeitet.

Beispiel 5.6. (i) Die Abbildung

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \max \{|x_1|, \dots, |x_n|\}$$

definiert ebenfalls eine Norm auf dem \mathbb{R}^n , die sogenannte Maximumnorm. Bereits auf dem \mathbb{R}^n sind also verschiedene Normen möglich.

(ii) Betrachte die Menge der stetigen Funktionen

$$\mathbf{C}([0, 1]) = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}.$$

Dann ist durch

$$\|f\|_\infty = \sup \{|f(x)| \mid x \in [0, 1]\}$$

eine Norm auf $\mathbf{C}([0, 1])$ definiert. Diese Norm wird als Supremumnorm, beziehungsweise im konkreten Fall auch als Maximumnorm bezeichnet.

Wir zeigen die Dreiecksungleichung: Für beliebige stetige $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ und für jedes $x \in [0, 1]$ gilt

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

und damit auch $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

Anschaulich bedeutet diese Definition das folgende: Wir bestimmen den Abstand einer Funktion zur 0 (also zur Nullfunktion) indem wir an jedem Punkt den Abstand zur 0 (also 0 als Zahl) bestimmen und dann das Maximum dieser Zahlen nehmen (Warum existiert das?). Eine analoge Bemerkung gilt dann für den Abstand zweier Funktionen. Im Gegensatz zum vorhergehenden Beispiel gibt es auf diesem Funktionenraum viele weitere Normen mit unterschiedlichen Eigenschaften und praktischer Relevanz.

- (iii) Analog zu Beispiel 5.2 (v) ist $\|(v, w)\|_{V \times W} := \|v\|_V + \|w\|_W$ eine Norm auf dem direkten Produkt $V \times W$.

Bemerkung 5.7. (i) Sei (X, d) ein metrischer Raum und $Y \subset X$ dann ist $(Y, d|_{Y \times Y})$ ebenfalls ein metrischer Raum. Das ist der Grund dafür, dass wir uns an dieser Stelle überhaupt mit metrischen Räumen beschäftigen. Eine Teilmenge eines normierten Raumes ist nämlich im Allgemeinen kein normierter Raum, weil sie kein Vektorraum mehr ist.

- (ii) Analog sind Untervektorräume (nicht beliebige Teilmengen) normierter Vektorräume ebenfalls normierte Vektorräume.
- (iii) Zu einer vorgegebenen Menge gibt es keine „natürliche“ Metrik. Man kann vielmehr auf ein und der selben Menge unterschiedliche Metriken (im Fall von Vektorräumen auch unterschiedliche Normen) mit ganz unterschiedlichen Eigenschaften betrachten. Im konkreten Fall wählt man sich dann die Metrik, die dem Problem am besten angemessen ist.

Das bedeutet natürlich auch, dass alle Begriffe die die Metrik verwenden (Konvergenz, Stetigkeit, ...) davon abhängen mit welcher Metrik wir arbeiten. Das wird für uns zunächst keine übermäßig große Rolle spielen, da für \mathbb{R}^n die euklidische Norm der Standard ist und alle anderen Normen „im wesentlichen gleich sind“. Für andere Räume wird das jedoch nicht gelten und wir müssen dann jeweils sagen über welche Metrik wir sprechen.

- (iv) Die „Minkowski-Metrik“ die in der Relativitätstheorie eine zentrale Rolle spielt ist keine Metrik im hier eingeführten Sinne.

Definition 5.8 (Kugeln und Beschränktheit). Sei (X, d) ein metrischer Raum, $x \in X$ und $\epsilon > 0$. Die Menge

$$B_\epsilon(x) := \{y \in X \mid d(y, x) < \epsilon\}$$

heißt offene Kugel mit Radius ϵ um x (manchmal auch ϵ -Kugel oder ϵ -Umgebung um x) und die Menge

$$K_\epsilon(x) := \{y \in X \mid d(y, x) \leq \epsilon\}$$

heißt abgeschlossene Kugel mit Radius ϵ um x .

Eine Teilmenge M von X heißt beschränkt, wenn sie in irgendeiner Kugel enthalten ist.

Die Bezeichnungen „offen“ und „abgeschlossen“ werden sich später erschließen.

5.2 Folgen, Reihen und Grenzwerte

Mittels der soeben eingeführten Begriffe können wir nun Konvergenz von Folgen definieren.

Definition 5.9 (Folgen und Konvergenz). Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge in X ist eine Abbildung von \mathbb{N} nach X . Wir schreiben dafür $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oder noch kürzer (x_n) .

Die Folge (x_n) heißt konvergent gegen $x \in X$, wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$d(x_n, x) < \epsilon \text{ für alle } n \geq N.$$

Der Punkt x heißt in diesem Fall der Grenzwert der Folge (x_n) .

Eine Folge die nicht konvergent ist heißt divergent.

Bemerkung 5.10. Auf den reellen Zahlen stimmt die euklidische Norm mit der Betragsfunktion überein. Man überzeuge sich davon, dass in diesem Fall die neue Definition (Konvergenz von Folgen im metrischen Raum) mit der alten Definition Definition 2.9 übereinstimmt. Die obige Definition ist also eine echte Verallgemeinerung der Konvergenz von reellen Zahlenfolgen.

Satz 5.11. Sei (x_n) eine Folge in einem metrischen Raum (X, d) und $x \in X$. Dann sind äquivalent:

- (i) Die Folge (x_n) konvergiert gegen x .
- (ii) Für jedes $\epsilon > 0$ enthält $B_\epsilon(x)$ alle bis auf endlich viele Folgenglieder.
- (iii) Die Folge (reeller Zahlen) $(d(x_n, x))$ ist eine Nullfolge.

Beweis. Die Aussage (ii) ist lediglich eine Umformulierung der Definition der Konvergenz. Wir zeigen $(i) \iff (iii)$. Es gilt $d(x_n, x) = |d(x_n, x) - 0|$. Damit ist $d(x_n, x) < \epsilon$, genau dann wenn $|d(x_n, x) - 0| < \epsilon$. Die Folge (x_n) konvergiert gegen x , genau dann wenn $d(x_n, x)$ gegen 0 konvergiert. \square

Beispiel 5.12. (i) Wir betrachten die Folge $x_n = (2^{-n}, 3^{-n})$ in \mathbb{R}^2 und berechnen

$$\|x_n - 0\| = \|x_n\| = \sqrt{2^{-2n} + 3^{-2n}} \rightarrow 0.$$

Die Folge konvergiert also gegen $(0, 0)$.

- (ii) Wir betrachten hier erneut den Raum $\mathbf{C}([0, 1])$ aus Beispiel 5.6 (ii). Die Elemente des Raumes sind also stetige Funktionen und die Folgen die wir betrachten demensprechend Folgen von Funktionen. Eine solche Folge sei gegeben durch

$$f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{x}{1 + nx}.$$

Wir wollen nun zeigen, dass diese Folge in $(\mathbf{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ konvergiert. Dazu schätzen wir zunächst die Funktionswerte für $x \in [0,1]$ ab

$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx} = \frac{1}{n} \frac{x}{\frac{1}{n} + x} \leq \frac{1}{n}.$$

Damit folgt auch

$$\|f_n - 0\| = \|f_n\|_\infty = \sup \{f_n(x) \mid x \in [0,1]\} \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

also die Konvergenz der Folge gegen die Nullfunktion. Wir werden dazu später sagen, die Funktionenfolge konvergiert gleichmäßig gegen 0.

Satz 5.13. Sei $(x^{(n)}) = (x_1^{(n)}, \dots, x_d^{(n)})$ eine Folge in \mathbb{R}^d und $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$. Dann konvergiert $(x^{(n)})$ gegen x , genau dann wenn für jedes $i \in \{1, \dots, d\}$ die Folge $(x_i^{(n)})$ gegen x_i konvergiert.

Dieser Satz ergibt streng genommen keinen Sinn, da nicht erwähnt wird auf welche Metrik sich die Aussage bezieht. Wird nichts anderes gesagt, dann benutzen wir auf \mathbb{R}^n stets die euklidische Metrik.

Beweis. Man überzeugt sich leicht, dass $|y_i| \leq \|y\|$ für alle $y \in \mathbb{R}^n$ und alle $i \in \{1, \dots, d\}$ gilt. Wenn also $(x^{(n)})$ gegen x konvergiert, dann konvergiert nach Satz 5.11 $\|x^{(n)} - x\|$ gegen 0 und damit auch $|x_i^{(n)} - x_i| \leq \|x^{(n)} - x\|$.

Andererseits können wir für jedes $y = (y_1, \dots, y_d)$ mit der Standardbasis e_1, \dots, e_d und der Dreiecksungleichung schreiben

$$\|y\| = \|y_1 e_1 + y_2 e_2 + \dots + y_d e_d\| \leq \|y_1 e_1\| + \dots + \|y_d e_d\| = |y_1| + \dots + |y_d|.$$

Gilt also $x_i^{(n)} \rightarrow x_i$ für alle $i \in \{1, \dots, d\}$ dann folgt

$$\|x^{(n)} - x\| \leq |x_1^{(n)} - x_1| + \dots + |x_d^{(n)} - x_d| \rightarrow 0$$

woraus nach dem vorhergehenden Satz $x^{(n)} \rightarrow x$ folgt. □

Für viele der folgenden Sätze, verlaufen die Beweise analog zu denjenigen, die wir im vergangenen Semester für den eindimensionalen Fall gesehen haben. Ein solches Beispiel ist der folgende Satz.

Satz 5.14. (i) Jede Folge besitzt höchstens einen Grenzwert.

(ii) Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Beweis. Angenommen x und y seien zwei verschiedene Grenzwerte der Folge (x_n) . Aus der Definitheit der Norm folgt dann $d(x, y) > 0$. Da (x_n) sowohl gegen x als auch gegen y konvergiert, existiert N so, dass $d(x_n, x) < d(x, y)/2$ und $d(x_n, y) < d(x, y)/2$ für alle

$n > N$. Damit gilt für jedes $n > N$, dass $d(x_n, x) + d(x_n, y) < d(x, y)$ was jedoch im Widerspruch zur Dreiecksungleichung steht.

Zur Beschränktheit: Wenn (x_n) eine Folge ist, die gegen x konvergiert, so existiert per definitionem ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass $d(x_n, x) < 1$ für alle $n > N$. Dann gilt $d(x_n, x) \leq \max\{d(x_1, x), \dots, d(x_N, x), 1\}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. \square

Satz 5.15. Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum über dem Vektorraum \mathbb{K} ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), $(x_n), (y_n)$ Folgen in V mit Grenzwerten x und y und (λ_n) eine Folge in \mathbb{K} mit Grenzwert λ . Dann konvergiert die Folge $(x_n + y_n)$ gegen $x + y$ und die Folge $\lambda_n x_n$ gegen λx .

Beweis. Übung \square

Definition 5.16 (Cauchy-Folge und Vollständigkeit). Eine Folge (x_n) im metrischen Raum (X, d) heißt Cauchy-Folge (alternativ besitzt die Cauchy-Eigenschaft oder erfüllt die Cauchy-Bedingung), wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$d(x_n, x_m) < \epsilon \text{ für alle } n, m \geq N.$$

Ein metrischer Raum (X, d) heißt vollständig, wenn jede Cauchy-Folge konvergent ist. Ein vollständiger normierter Raum heißt Banachraum.

Satz 5.17. Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.

Beweis. Sei (x_n) eine konvergente Folge im metrischen Raum (X, d) . Sei $\epsilon > 0$. Da (x_n) konvergent ist, existiert ein Grenzpunkt $x \in X$ und ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $d(x_n, x) < \epsilon/2$ für alle $n \geq N$. Dann gilt für alle $n, m \geq N$, dass

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Die Folge (x_n) ist eine Cauchy-Folge. \square

Beispiel 5.18. (i) Wir wissen bereits, dass der normierte Raum $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ vollständig ist (Satz 2.39).

(ii) Der Raum $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ ist nicht vollständig, denn es gibt Folgen rationaler Zahlen, die gegen einen Grenzwert in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ konvergieren. Sie sind also insbesondere Cauchy-Folgen aber in $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ nicht konvergent.

Bemerkung 5.19. Um an Hand der Definition der Konvergenz zu überprüfen ob eine Folge konvergent ist, muss man ihren Grenzpunkt bereits kennen. Um zu überprüfen ob eine Folge eine Cauchy-Folge ist muss kein Grenzpunkt bekannt sein. Darin liegt die Bedeutung der Vollständigkeit, denn sie erlaubt es auf die Existenz eines Grenzpunktes zu schließen ohne diesen zu kennen.

Satz 5.20. Der \mathbb{R}^d versehen mit der euklidischen Norm ist vollständig (also ein Banachraum).

Beweis. Sei $(x^{(n)}) \subset \mathbb{R}^d$ eine Cauchy-Folge. Es gilt für jedes $i \in \{1, \dots, d\}$ auch die Folge $(x_i^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Cauchy-Folge (Warum?) und damit, da \mathbb{R} vollständig ist, konvergent. Dann ist aber nach 5.13 auch die ursprüngliche Folge konvergent. \square

Definition 5.21 (Reihen und (absolute) Konvergenz). Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum und (x_n) eine Folge in V . Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k$$

ist die Folge der Partialsummen

$$s_n = \sum_{k=1}^n x_k.$$

Falls die Reihe konvergent ist, bezeichnen wir den Grenzwert ebenfalls mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k.$$

Die Reihe heißt absolut konvergent falls

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty.$$

Beispiel 5.22. Betrachte die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{2^k}, \frac{1}{k}, \frac{1}{k^2} \right).$$

Diese Reihe ist konvergent, da die Koordinaten

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2^k} \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^2}$$

alle nach dem Leibnitzkriterium konvergieren. Die Reihe ist jedoch nicht absolut konvergent, da

$$\left\| (-1)^k \left(\frac{1}{2^k}, \frac{1}{k}, \frac{1}{k^2} \right) \right\| = \sqrt{\frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^4}} \geq \frac{1}{k}$$

und wir wissen, dass die harmonische Reihe divergiert.

Satz 5.23. *In Banachräumen sind absolut konvergente Reihen konvergent.*

Beweis. Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ in V absolut konvergent. Es reicht zu zeigen, dass die Partialsummenfolge (s_n) eine Cauchy-Folge ist. Sei dazu $\epsilon > 0$. Bezeichne mit

$$t_n := \sum_{k=1}^n \|x_k\|$$

die Partialsummenfolge der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$. Diese ist monoton wachsend und konvergiert nach Voraussetzung. Insbesondere ist sie also Cauchy-Folge, das heißt es existiert $N \in \mathbb{N}$, so dass $|t_n - t_m| < \epsilon$ für alle $n, m > N$.

Dann gilt für $n > m > N$

$$\|s_n - s_m\| = \left\| \sum_{k=m+1}^n x_k \right\| \leq \sum_{k=m+1}^n \|x_k\| = t_n - t_m = |t_n - t_m| < \epsilon.$$

Die Partialsummenfolge (s_n) ist also eine Cauchy-Folge und damit konvergent. □

Theorem 5.24 (Umordnungssatz). *Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein Banachraum. Sei $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ eine absolut konvergente Reihe und $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung. Dann ist die umgeordnete Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ ebenfalls konvergent mit Grenzwert $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.*

Beweis. Analog zum Umordnungssatz für Zahlenfolgen Satz 2.60. □

Bemerkung 5.25. Da wir obigen Satz insbesondere auf die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_{\sigma(n)}\|$ anwenden können, ist die umgeordnete Reihe auch absolut konvergent.

5.3 Offene und abgeschlossene Mengen

Definition 5.26 (Innere Punkte und Randpunkte). Sei (X, d) ein metrischer Raum, $A \subset X$ und $x \in X$.

- (i) Der Punkt x heißt innerer Punkt von A , wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass $B_\epsilon(x) \subset A$,
- (ii) Der Punkt x heißt Randpunkt von A , wenn für jedes $\epsilon > 0$ die Kugel $B_\epsilon(x)$ mindestens je einen Punkt aus A sowie aus $X \setminus A$ enthält.
- (iii) Die Menge aller inneren Punkte von A heißt das Innere von A und wird mit \mathring{A} bezeichnet.
- (iv) Die Menge aller Randpunkte von A heißt Rand von A und wird mit ∂A bezeichnet.
- (v) Die Menge $A \cup \partial A$ heißt Abschluss von A und wird mit \overline{A} bezeichnet

Beispiel 5.27. (i) Betrachte die Menge

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y < 1\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Dann sind (Warum?)

$$\begin{aligned}\mathring{A} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < 1\} \\ \partial A &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \{0, 1\}\} \\ \overline{A} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1\}.\end{aligned}$$

- (ii) Betrachte $A = \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Dann gelten (Warum?)

$$\begin{aligned}\mathring{A} &= \emptyset \\ \partial A &= \mathbb{R} \\ \overline{A} &= \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Bemerkung 5.28. (i) Aus der Definition ist ersichtlich, dass ein innerer Punkt von A stets selbst in A liegt es gilt also $\mathring{A} \subset A$.

- (ii) Randpunkte von A können in A liegen, müssen es jedoch nicht.
- (iii) Jeder Punkt in A ist entweder ein innerer Punkt oder ein Randpunkt von A (niemals beides). Es gilt also $A \subset \mathring{A} \cup \partial A$ und $\mathring{A} \cap \partial A = \emptyset$.
- (iv) Man überzeugt sich leicht, dass der Rand von A und der Rand von $X \setminus A$ übereinstimmen.
- (v) Ob ein Punkt ein innerer Punkt oder ein Randpunkt von A ist, hängt nicht nur vom Punkt und von A , sondern auch vom „umgebenden Raum“ ab. Diese Aussage

klingt trivial, ist aber eine häufige Fehlerquelle. Wir können zum Beispiel die beiden metrischen Räume

$$M_1 = (\mathbb{R}, |\cdot|) \text{ und } M_2 = ([0, \infty), |\cdot|)$$

betrachten und die Teilmenge $A = [0, 1)$. In M_1 ist 0 ein Randpunkt von A , da für jedes $\epsilon > 0$ die Menge $B_\epsilon(0) = (-\epsilon, \epsilon)$ Punkte enthält die in A liegen und solche die es nicht tun. In M_2 sieht die ϵ -Umgebung um 0 so aus: $B_\epsilon(0) = [0, \epsilon)$, denn diese enthält natürlich nur Punkte aus M_2 . Für $\epsilon < 1$ liegt diese ϵ -Umgebung aber ganz in A und damit ist 0 ein innerer Punkt von A . Der Punkt 1 ist in beiden Räumen ein Randpunkt.

Satz 5.29. *Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$. Dann ist $x \in \overline{A}$ genau dann wenn es eine Folge (x_n) in A gibt die gegen x konvergiert.*

Beweis. Sei zunächst $x \in \overline{A}$. Falls $x \in A$ ist, so liegt die konstante Folge $(x)_{n \in \mathbb{N}}$ in A (und ist natürlich konvergent gegen x). Falls $x \notin A$ ist, dann ist es ein Randpunkt von A . Für jedes $n \in \mathbb{N}$ wähle einen Punkt $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x) \cap A$. Diese Mengen sind alle nicht leer, da x Randpunkt von A ist. Wir zeigen nun $x_n \rightarrow x$. Sei dazu $\epsilon > 0$. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$, so dass $\frac{1}{N} < \epsilon$. Sei $n > N$ dann gilt nach der Definition der Folge (x_n) , dass $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x) \subset B_{\frac{1}{N}}(x)$ also

$$d(x_n, x) < \frac{1}{N} < \epsilon.$$

Damit konvergiert die Folge gegen x .

Sei andererseits $x \in X$ und es existiere eine Folge $(x_n) \subset A$ die gegen x konvergiert. Angenommen $x \notin \overline{A}$, dann ist x weder selbst in A noch ein Randpunkt von A . Das heißt, es gibt ein $\epsilon > 0$ so, dass $B_\epsilon(x) \cap A = \emptyset$. Das bedeutet aber, dass $d(x, x_n) \geq \epsilon$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, was der Konvergenz von (x_n) gegen x widerspricht. \square

Definition 5.30 (Offene und abgeschlossene Mengen). Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt

- (i) offen wenn jeder ihrer Punkte innerer Punkt von A ist, falls also $\mathring{A} = A$ gilt,
- (ii) abgeschlossen wenn die Menge A jeden ihrer Randpunkte enthält, falls also $\overline{A} = A$ gilt.
- (iii) Umgebung von x falls $x \in \mathring{A}$, falls es also $\epsilon > 0$ gibt, so dass $B_\epsilon(x) \subset A$.

Bemerkung 5.31. (i) Aus der Definition ist ersichtlich, dass U genau dann Umgebung von x ist, wenn x innerer Punkt von U ist. Insbesondere sind offene Teilmengen Umgebungen für jedes ihrer Elemente.

- (ii) Mit Satz 5.29 erhalten wir eine häufig nützliche äquivalente Charakterisierung von Abgeschlossenheit: Eine Teilmenge A ist abgeschlossen genau dann, wenn für jede Folge aus A , die in X konvergiert, auch der Grenzwert der Folge in A liegt.

Satz 5.32. *Eine Teilmenge A eines metrischen Raumes (X, d) ist offen genau dann, wenn ihr Komplement $X \setminus A$ abgeschlossen ist.*

Beweis. Per definitionem ist die Menge A offen, genau dann wenn sie nur aus inneren Punkten von A besteht. Da jeder Punkt in A entweder innerer Punkt oder Randpunkt von A ist, ist das der Fall genau dann wenn A keinen Randpunkt von A enthält. Da der Rand von A und der Rand von $X \setminus A$ übereinstimmen, gilt das genau dann wenn A keinen Randpunkt von $X \setminus A$ enthält also genau dann wenn $X \setminus A$ alle Randpunkte von $X \setminus A$ enthält. Das ist per definitionem der Fall genau dann wenn $X \setminus A$ abgeschlossen ist. \square

Bemerkung 5.33. Der vorhergehende Satz bedeutet **nicht**, dass jede Teilmenge entweder offen oder abgeschlossen ist. Es gibt einerseits Teilmengen die weder offen noch abgeschlossen sind (siehe dazu die Beispiele Beispiel 5.27), andererseits gibt es auch Teilmengen die sowohl offen, als auch abgeschlossen sind.

Beispiel 5.34. Sei (X, d) ein metrischer Raum, $x \in X$ und $r > 0$. Die offene Kugel $B_r(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$ ist eine offene, die abgeschlossene Kugel $\{y \in X \mid d(x, y) \leq r\}$ eine abgeschlossene Menge.

Beweis. Übung \square

Bemerkung 5.35. Ein Spezialfall des vorhergehenden Beispiels sind Intervalle der Form (a, b) – offene Intervalle – und $[a, b]$ – abgeschlossene Intervalle – für $a < b$ Elemente der reellen Zahlen.

Satz 5.36. *Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$. Die Menge A ist abgeschlossen genau dann, wenn für jede konvergente Folge (x_n) in A auch ihr Grenzwert in A liegt.*

Beweis. Die Aussage folgt unmittelbar aus Satz 5.29. \square

Satz 5.37. *Sei (X, d) ein metrischer Raum und τ die Menge aller offenen Teilmengen von X . Es gelten:*

- (i) *die leere Menge \emptyset und der ganze Raum X sind in τ ,*
- (ii) *die Vereinigung beliebig vieler Mengen aus τ ist wiederum in τ ,*
- (iii) *der Schnitt endlich vieler Mengen aus τ ist wiederum in τ .*

Beweis. Übung \square

Bemerkung 5.38. • Das System von Teilmengen τ in obigem Satz bezeichnet man als die von der Metrik d induzierte Topologie. (Topologien sind Strukturen – noch allgemeiner als metrische Räume – die es erlauben über Begriffe wie Konvergenz und Stetigkeit zu reden)

- Der obige Satz impliziert für abgeschlossene Mengen mittels Satz 5.32 und der De Morganschen Regeln:
 - (i) die leere Menge \emptyset und der ganze Raum X sind abgeschlossen,
 - (ii) der Schnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen,
 - (iii) die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.
- Unendliche Schnitte offener Mengen müssen nicht mehr offen, unendliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen nicht mehr abgeschlossen sein wie die folgenden Beispiele zeigen

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) = \{0\}$$

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [1/n, 2] = (0, 2].$$

Satz 5.39. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$. Die Menge $\overset{\circ}{A}$ ist offen, die Mengen ∂A und \overline{A} sind abgeschlossen.

Beweis. Sei zunächst $x \in \overset{\circ}{A}$. Wir wissen, dass x innerer Punkt von A ist und wir wollen zeigen, dass es innerer Punkt von $\overset{\circ}{A}$ ist. Nach Voraussetzung existiert $\epsilon > 0$, so dass $B_\epsilon(x) \subset A$. Sei nun $y \in B_\epsilon(x)$. Nach Beispiel 5.34 ist $B_\epsilon(x)$ offen, das heißt es existiert $\delta > 0$, so dass $B_\delta(y) \subset B_\epsilon(x) \subset A$ ist. Damit ist y innerer Punkt von A und da $y \in B_\epsilon(x)$ beliebig war haben wir $B_\epsilon(x) \subset \overset{\circ}{A}$ gezeigt. Dann ist aber x innerer Punkt von $\overset{\circ}{A}$ und da $x \in \overset{\circ}{A}$ beliebig war ist $\overset{\circ}{A}$ offen.

Setze nun $B := X \setminus A$. Dann gilt (Bemerkung 5.28) $\partial A = \partial B$. Damit erhalten wir

$$X = A \cup B = \overset{\circ}{A} \cup \partial A \cup \overset{\circ}{B} \cup \partial B = \overset{\circ}{A} \cup \partial A \cup \overset{\circ}{B} \quad (5.1)$$

Da A und B disjunkt sind, gilt das auch für $\overset{\circ}{A} \subset A$ und $\overset{\circ}{B} \subset B$. Außerdem ist $\partial A = \partial B$ disjunkt zu $\overset{\circ}{A}$ und $\overset{\circ}{B}$ (nochmals Bemerkung 5.28). Wir haben also die disjunkte Zerlegung $X = \overset{\circ}{A} \cup \partial A \cup \overset{\circ}{B}$. Damit sind die Mengen $\overset{\circ}{A} \cup \partial A = X \setminus \overset{\circ}{B}$ und $\partial A = X \setminus (\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B})$ abgeschlossen. \square

Satz 5.40. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$. Es gelten

$$\bigcup_{\substack{O \text{ offen, } O \subset A} } O = \overset{\circ}{A} \text{ und}$$

$$\bigcap_{\substack{C \text{ abgeschlossen, } A \subset C} } C = \overline{A}$$

das heißt $\overset{\circ}{A}$ ist die größte offene Teilmenge von A , \overline{A} ist die kleinste abgeschlossene Teilmenge von X die A enthält.

Beweis. Da $\overset{\circ}{A}$ offen und in A enthalten ist gilt in jedem Fall

$$\bigcup_{O \subset A \text{ offen}} O \supset \overset{\circ}{A}.$$

Sei nun $O \subset A$ offen und $x \in O$. Dann existiert $\epsilon > 0$, so dass $B_\epsilon(x) \subset O \subset A$ also ist x innerer Punkt von A . Da das für jedes $x \in O$ gilt haben wir gezeigt, dass $O \subset \overset{\circ}{A}$ ist. Da das für jedes offene $O \subset A$ gilt ist auch

$$\bigcup_{O \subset A \text{ offen}} O \subset \overset{\circ}{A}.$$

Die zweite Aussage erhält man nun durch Komplementbildung. □

Satz 5.41. *Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $A \subset X$ abgeschlossen. Dann ist (A, d) ebenfalls vollständig.*

Beweis. Übung □

Definition 5.42 (Teilfolge, Folgenkompaktheit). Sei X ein metrischer Raum, $(x_n) \subset X$ und $(n_k) \subset \mathbb{N}$ eine streng monoton wachsende Folge. Dann heißt $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge von (x_n) .

Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt (folgen-)kompakt falls jede Folge $(x_n) \subset A$ eine in A konvergente Teilfolge besitzt.

Bemerkung 5.43. Man überzeugt sich leicht, dass falls (x_n) gegen x konvergiert auch jede ihrer Teilfolgen gegen den selben Grenzwert konvergiert. Andererseits gibt es divergente Folgen mit konvergenten Teilfolgen und mit gegebenenfalls unterschiedlichen Grenzwerten. Zum Beispiel besitzt die Folge $x_n = (-1)^n$ die Teilfolgen $x_{2k} = 1$ mit Grenzwert 1 sowie $x_{2k+1} = -1$ mit Grenzwert -1 .

Beispiel 5.44. Betrachte $X = \mathbb{R}$. Dann sind die Teilmengen $(0, 1)$ sowie \mathbb{N} nicht kompakt. Im ersten Fall besitzt die Folge $x_n = \frac{1}{n}$ keine in $(0, 1)$ konvergente Teilfolge. Im zweiten Fall die Folge $x_n = n$.

Satz 5.45. *Jede kompakte Menge ist beschränkt und abgeschlossen.*

Beweis. Sei $A \subset X$ nicht beschränkt und $x \in X$ ein beliebiger Punkt. Wir definieren nun rekursiv eine Folge, beginnend bei einem willkürlich gewählten $x_0 \in A$. Wenn x_n bereits bekannt ist, dann wählen wir x_{n+1} aus

$$A \setminus B_{d(x_n, x)+1}(x).$$

Ein solcher Punkt muss immer existieren, da A in keiner Kugel enthalten ist. Wäre $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ nun eine konvergente Teilfolge, dann müsste diese Folge insbesondere beschränkt sein und damit in irgendeiner Kugel B enthalten sein. Dann gäbe es ein $r > 0$

so, dass $B \subset B_r(x)$ (Warum?), die Teilfolge müsste also auch in $B_r(x)$ enthalten sein. Das ist jedoch unmöglich, da nach Konstruktion gilt

$$d(x_n, x) \geq n \rightarrow \infty.$$

Damit ist A nicht kompakt.

Sei andererseits $A \subset X$ nicht abgeschlossen. Dann existiert nach Satz 5.29 eine konvergente Folge $(x_n) \subset A$, deren Grenzwert x nicht in A liegt. Jede Teilfolge dieser Folge konvergiert ebenfalls gegen x und – da der Grenzwert eindeutig ist – kann keine solche Folge einen Grenzwert in A besitzen. Damit ist A wiederum nicht kompakt. \square

In allgemeinen metrischen Räumen ist die Umkehrung der obigen Aussage falsch. Für unser wichtigstes Beispiel, den \mathbb{R}^n gilt sie jedoch.

Satz 5.46. *Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist kompakt genau dann, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.*

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall $n = 1$. Sei also $A \subset \mathbb{R}$ beschränkt und abgeschlossen, dann gilt $A \subset I_1 := [-K, K)$ für $K > 0$ hinreichend groß. Sei $(x_n) \subset A$ eine Folge. Beginnend mit I_0 definieren wir rekursiv eine Intervallschachtelung I_k wie folgt. Sei $I_k = [a, b)$ ein Intervall so, dass $x_n \in I_k$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$. Wir halbieren nun das Intervall und wählen

$$\text{entweder } I_{k+1} = \left[a, \frac{b-a}{2} \right) \text{ oder } I_{k+1} = \left[\frac{b-a}{2}, b \right)$$

so, dass $x_n \in I_{k+1}$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es genau einen Punkt x der in allen Intervallen I_k enthalten ist (vergleiche Satz 4.26).

Wir setzen nun $n_0 = 1$ und definieren rekursiv, also für bereits bekannte n_0, \dots, n_k , n_{k+1} als den kleinsten Index so, dass $n_{k+1} > \max \{n_0, \dots, n_k\}$ und $x_{n_{k+1}} \in I_{k+1}$. Nach Konstruktion der Intervalle I_k existiert stets so ein Index. Da stets $x_{n_k} \in I_k$ gilt und die Länge der Intervalle gegen 0 geht, konvergiert die Teilfolge (x_{n_k}) gegen x . Schließlich benutzen wir die Abgeschlossenheit von A um zu schlussfolgern, dass auch der Grenzwert in A liegt.

Sei nun $A \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und abgeschlossen und $(x^{(n)}) \subset A$ eine Folge. Dann sind auch die Koordinatenfolgen $(x_i^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt (Warum?). Damit besitzt nach dem oben gezeigten die Folge $(x_1^{(n)})$ eine konvergente Teilfolge $(x_1^{(n_k)})$. Die (beschränkte) Folge $(x_2^{(n_k)})$ besitzt nun ebenfalls eine konvergente Teilfolge (Teilfolge einer Teilfolge) usw. Auf diese Weise können wir in endlich vielen Schritten eine Teilfolge von $(x^{(n)})$ konstruieren, so dass jede Koordinatenfolge konvergiert. Dann konvergiert nach Satz 5.13 auch die Teilfolge selbst und wegen der Abgeschlossenheit von A liegt ihr Grenzwert in A . \square

Bemerkung 5.47. Es ist wichtig sich bewusst zu machen, dass topologische Eigenschaften – Konvergenz einer Folge (x_n) , Offenheit/Abgeschlossenheit einer Menge – nicht nur von der Folge (x_n) oder Menge A abhängen, sondern auch vom umgebenden metrischen Raum (X, d) .

So ist die Folge $(\frac{1}{n})$ im Raum $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ konvergent, in $((0, 1), |\cdot|)$ jedoch nicht (der Grenzwert liegt nicht im Raum).

In ähnlicher Weise ist $(0, 1)$ im Raum $((0, 1), |\cdot|)$ abgeschlossen (der ganze Raum ist stets abgeschlossen), nicht jedoch im Raum $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

5.4 Grenzwerte von Abbildungen

Bisher haben wir uns mit Funktionen von $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ beschäftigt. Wichtig sind jedoch auch Abbildungen mit komplizierteren Definitionen und Wertebereichen. Die Funktion kann beispielsweise von mehr als nur einer Raumkoordinaten und gegebenenfalls noch von der Zeit abhängen. Darüber hinaus kann die Abbildung auch Vektorwertig, Tensorwertig etc. sein. Mathematisch können wir alle diese Situationen – und noch viele Weitere – gemeinsam behandeln.

Definition 5.48 (Grenzwert von Abbildungen). Seien (X, d_X) , (Y, d_Y) metrische Räume, $U \subset X$, $f : U \rightarrow Y$ eine Abbildung und $x_0 \in \overline{U}$. Wir sagen f konvergiert in x_0 gegen $y \in Y$ (und nennen y den Grenzwert von f im Punkt x_0), wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$d_Y(f(x), y) < \epsilon$$

für jedes $x \in U$ mit $d_X(x, x_0) < \delta$.

Bemerkung 5.49. Analog wie im eindimensionalen Fall, muss f in x_0 selbst nicht definiert sein. Da x_0 aber in \overline{U} liegt, enthält jedes $B_\delta(x_0)$ zumindest irgendwelche Punkte an denen f ausgewertet werden kann.

Mit Hilfe von Kugeln können wir die Bedingung auch sehr prägnant aufschreiben: f konvergiert in x_0 gegen y , wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$f(B_\delta(x_0) \cap U) \subset B_\epsilon(y).$$

Beispiel 5.50. Definiere $f, g : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x) &:= \|x\|^2 \\ g(x) &:= \frac{1}{\|x\|}. \end{aligned}$$

Dann ist f in 0 konvergent gegen 0, denn für jedes $\epsilon > 0$ und $\delta = \sqrt{\epsilon}$ gilt

$$|f(x) - 0| = \|x\|^2 < \epsilon \text{ falls } \|x - 0\| = \|x\| < \delta.$$

Die Funktion g ist in 0 divergent (Warum?).

Satz 5.51. Seien (X, d_X) , (Y, d_Y) metrische Räume, $U \subset X$, $f : U \rightarrow Y$ eine Abbildung und $x_0 \in \overline{U}$. Die Abbildung f konvergiert in x_0 gegen $y \in Y$ genau dann, wenn für jede Folge $(x_n) \subset U$ mit $x_n \rightarrow x_0$ gilt, dass $(f(x_n))$ gegen y konvergiert.

Beweis. Es gelte zunächst $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y$ und (x_n) sei eine gegen x_0 konvergente Folge. Sei $\epsilon > 0$. Dann existiert nach Voraussetzung $\delta > 0$, so dass $f(x) \in B_\epsilon(y)$ für alle $x \in B_\delta(x_0) \cap U$. Da $x_n \rightarrow x_0$ konvergiert, existiert $N \in \mathbb{N}$, so dass $x_n \in B_\delta(x_0) \cap U$ für alle $n \geq N$. Dann gilt für alle solchen n auch $f(x_n) \in B_\epsilon(y)$ womit die Konvergenz von $(f(x_n))$ gegen y gezeigt ist.

Es gelte nun für jede Folge $(x_n) \subset U$ mit $x_n \rightarrow x_0$, dass $(f(x_n))$ gegen y konvergiert. Angenommen f konvergiert in x nicht gegen y , das heißt es existiert ein $\epsilon > 0$ so, dass für jedes $\delta > 0$ ein $x \in B_\delta(x_0) \cap U$ existiert mit $d_Y(f(x), y) \geq \epsilon$. Insbesondere existiert dann für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Element

$$x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x_0) \cap U \text{ mit } d_Y(f(x_n), y) \geq \epsilon.$$

Die Folge x_n konvergiert gegen x da $d_X(x_n, x_0) < \frac{1}{n} \rightarrow 0$. Die Folge $f(x_n)$ konvergiert nicht gegen y , da $d_Y(f(x_n), y) \geq \epsilon$. Da das im Widerspruch zur Voraussetzung steht, muss f in x gegen y konvergieren. \square

Bemerkung 5.52. Wichtig ist hier wieder: Um Konvergenz einer Funktion mittels Folgen zu zeigen, müssen alle gegen x_0 konvergenten Folgen untersucht werden. Insbesondere reicht es nicht aus, Folgen zu betrachten die nur eine Koordinate variieren, also in irgendeiner Koordinatenebene liegen.

Umgekehrt kann man aber zeigen dass eine Funktion nicht gegen y konvergiert, indem man eine einzige Folge findet entlang derer das nicht der Fall ist.

Korollar 5.53. Seien (X, d_X) ein metrischer Raum, $U \subset X$, $f, g : U \rightarrow \mathbb{K}$ Funktionen und $x_0 \in \overline{U}$. Es gelte $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_1$ und $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = y_2$. Dann konvergiert $f + g$ in x gegen $y_1 + y_2$ und $f \cdot g$ gegen $y_1 y_2$. Ist $y_1 \neq 0$, dann gibt es $\epsilon > 0$ so, dass $1/f$ auf $B_\epsilon(x_0) \cap U$ definiert ist und $1/f$ konvergiert gegen $1/y_1$.

Beweis. Sei (x_n) eine beliebige Folge in U mit $x_n \rightarrow x$. Dann gilt nach Voraussetzung $f(x_n) \rightarrow y_1$ und $g(x_n) \rightarrow y_2$. Daraus folgt mittels der Konvergenzregeln für Zahlenfolgen $f(x_n) + g(x_n) \rightarrow y_1 + y_2$ und $f(x_n)g(x_n) \rightarrow y_1 y_2$. Damit gilt nach Satz 5.51, dass die Funktionen $\lim_{x \rightarrow x_0} f + g = y_1 + y_2$, sowie $\lim_{x \rightarrow x_0} f \cdot g = y_1 y_2$.

Sei nun zusätzlich $y_1 \neq 0$, das heißt $|y_1| > 0$. Da f in x gegen y_1 konvergiert, existiert $\delta > 0$, so dass $f(x) \in B_{\frac{|y_1|}{2}}(y_1)$ für alle $x \in B_\delta(x_0) \cap U$. Für solche x gilt also insbesondere (umgekehrte Dreiecksungleichung) $|f(x)| > |y_1| - |f(x) - y_1| > \frac{|y_1|}{2}$. Damit ist die Funktion $1/f$ auf $B_\delta(x_0) \cap U$ definiert. Es gilt jetzt wieder für jede gegen x_0 konvergente Folge (x_n) , dass $f(x_n) \rightarrow y_1$ und damit $\frac{1}{f(x_n)} \rightarrow \frac{1}{y_1}$. Wir verwenden nochmals Satz 5.51 und erhalten $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{y_1}$. \square

5.5 Stetigkeit

Der Begriff der Stetigkeit formalisiert die Eigenschaft einer Funktion f , dass sich die Funktionswerte $f(x)$ „nicht zu stark ändern“, wenn sich das Argument x „nicht zu stark ändert“.

Viele funktionale Zusammenhänge die in der Natur vorkommen (Position eines Objektes in Abhängigkeit von der Zeit, Lufttemperatur in Abhängigkeit vom Ort, ...) sind stetig.

Definition 5.54 (Stetigkeit). Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $U \subset X$. Eine Abbildung $f : U \rightarrow Y$ heißt stetig im Punkt $x_0 \in U$, wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$f(B_\delta(x_0) \cap U) \subset B_\epsilon(f(x_0)).$$

Wir sagen f ist stetig, wenn f in jedem Punkt von X stetig ist.

Offenbar ist eine Funktion genau dann stetig in x_0 , wenn $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ gilt.

Beispiel 5.55. (i) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Die Identitätsabbildung $\text{id} : X \rightarrow X$, $x \mapsto x$ ist stetig in jedem Punkt denn es gilt $f(B_\epsilon(x_0)) = B_\epsilon(x_0)$ und wir können dementsprechend $\epsilon = \delta$ wählen.

(ii) Betrachte $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f(x, y) = (x, -y).$$

Wir wollen zeigen, dass f stetig ist. Es gilt für $(x, y), (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \|f(x, y) - f(x_0, y_0)\|^2 &= \|(x - x_0, y_0 - y)\|^2 = (x - x_0)^2 + (y_0 - y)^2 \\ &= \|(x, y) - (x_0, y_0)\|^2. \end{aligned}$$

Für beliebiges $\epsilon > 0$ können wir also $\delta = \epsilon$ wählen und erhalten, dass aus $(x, y) \in B_\delta(x_0, y_0)$ folgt $f(x, y) \in B_\epsilon(f(x_0, y_0))$. Da der Punkt (x_0, y_0) beliebig war, ist f damit stetig.

(iii) Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} 0 & xy = 0 \\ 1 & xy \neq 0 \end{cases}.$$

Die Funktion ist offensichtlich nicht stetig im Koordinatenursprung, da jede noch so kleine Umgebung sowohl Punkte mit Funktionswert 1 als auch Punkte mit Funktionswert 0 enthält. Halten wir jeweils eine Koordinate fest, so ergibt sich

$$f(0, y) = 0 \text{ sowie } f(x, 0) = 0$$

für beliebiges $x, y \in \mathbb{R}$. Diese beiden Funktionen sind offensichtlich stetig. Das Beispiel zeigt, dass es für Stetigkeit nicht ausreichend ist, nur das Verhalten entlang der Koordinatenlinien zu betrachten. Allgemeiner ist es nicht ausreichend, das Verhalten der Funktion entlang bestimmter Kurven zu untersuchen.

- (iv) Wir definieren die Spiegelung einer Funktion an der y -Achse auf dem Raum der stetigen Funktionen

$$S : \mathbf{C}([-1, 1]) \rightarrow \mathbf{C}([-1, 1])$$

durch $(Sf)(x) = f(-x)$. Wir möchten Zeigen, dass diese Abbildung stetig ist. Seien dazu $f, f_0 \in \mathbf{C}([-1, 1])$, dann gilt für jedes $x \in [-1, 1]$

$$|(Sf)(x) - (Sf_0)(x)| = |f(-x) - f_0(-x)| \leq \|f - f_0\|_\infty$$

und damit $\|Sf - Sf_0\| \leq \|f - f_0\|$ (tatsächlich gilt sogar Gleichheit, was hier aber nicht von Belang ist). Daraus folgt für jedes $\epsilon > 0$

$$S(B_\epsilon(f_0)) \subset B_\epsilon(Sf_0)$$

und damit wiederum die Stetigkeit von S im Punkt f_0 . Da dieser Punkt beliebig war, ist S stetig.

Bemerkung 5.56. Stetigkeit (im Punkt x_0) ist eine sogenannte lokale Eigenschaft, das heißt ob f in x_0 stetig ist oder nicht kann man entscheiden, wenn man f nur in einer beliebig kleinen Umgebung von x_0 kennt. Kenntnis von f lediglich im Punkt x_0 ist jedoch nicht ausreichend.

Formal lautet die Aussage: Seien f, g Funktionen von (X, d_X) nach (Y, d_Y) , U eine Umgebung von x_0 und $f|_U = g|_U$. Dann ist f in x_0 stetig, genau dann wenn g in x_0 stetig ist.

Satz 5.57. Seien (X, d_X) , (Y, d_Y) und (Z, d_Z) metrische Räume, $x_0 \in X$, $g : X \rightarrow Y$ und $f : Y \rightarrow Z$ Abbildungen. Wenn g stetig in x_0 ist und f stetig in $g(x_0)$, dann ist $f \circ g$ stetig in x_0 .

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Stetigkeit von f im Punkt $g(x_0)$ bedeutet, dass es ein $\delta > 0$ gibt, so dass $f(B_\delta(g(x_0))) \subset B_\epsilon(f(g(x_0)))$. Auf Grund der Stetigkeit von g im Punkt x_0 existiert ein $\rho > 0$ so, dass $g(B_\rho(x_0)) \subset B_\delta(g(x_0))$. Dann gilt natürlich auch

$$(f \circ g)(B_\rho(x_0)) = f(g(B_\rho(x_0))) \subset f(B_\delta(g(x_0))) \subset B_\epsilon(f(g(x_0)))$$

womit die Stetigkeit von $f \circ g$ gezeigt ist. □

Definition 5.58 (Lipschitz-Stetigkeit, Kontraktion). Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt Lipschitz-stetig, wenn es ein $L > 0$ gibt, so dass

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq L \cdot d_X(x, y)$$

für alle $x, y \in X$ gilt. Die Konstante L heißt dann Lipschitz-Konstante für die Funktion f . Die Abbildung f heißt Kontraktion falls $d_Y(f(x), f(y)) \leq d_X(x, y)$.

Wir haben (eindimensionale) Beispiele für Lipschitz-stetige Funktionen in Beispiel 4.20 gesehen.

Satz 5.59. *Jede Lipschitz-stetige Funktion ist stetig.*

Beweis. Seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume, $x_0 \in X$ und $f : X \rightarrow Y$ eine Lipschitz-stetige Funktion mit Lipschitz-Konstante L . Sei $\epsilon > 0$. Dann gilt für jedes $x \in B_{\frac{\epsilon}{L}}(x_0)$

$$d_Y(f(x), f(x_0)) \leq L d_X(x, x_0) < \epsilon$$

und die Funktion ist stetig in x_0 . Da x_0 beliebig gewählt war ist f überall stetig. \square

Beispiel 5.60. (i) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Für die Abbildung $\pi_i : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$

$$x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$$

gilt

$$|\pi(x) - \pi(y)| = |x_i - y_i| \leq \|x - y\|.$$

Sie ist also eine Kontraktion und somit stetig.

(ii) Sei (X, d) ein metrischer Raum und $(X \times X, d_{X \times X})$ das Produkt von X mit sich selbst und der Produktmetrik (Beispiel 5.2 (v)). Wir zeigen, dass die Metrik, also die Abbildung

$$\begin{aligned} d : X \times X &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto d(x, y) \end{aligned}$$

eine Kontraktion von $(X \times X, d_{X \times X})$ nach \mathbb{R} ist (insbesondere also stetig).

Für $x_1, x_2, y_1, y_2 \in X$ gilt nach der Dreiecksungleichung

$$d(x_1, y_1) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, y_1) \leq d(x_1, x_2) + d(y_2, y_1) + d(x_2, y_2).$$

Damit erhalten wir

$$|d(x_1, y_1) - d(x_2, y_2)| \leq d(x_1, x_2) + d(y_1, y_2) = d_{X \times X}((x_1, x_2), (y_1, y_2)).$$

(iii) Analog gilt mit der umgekehrten Dreiecksungleichung für die Norm

$$|||x|| - ||y||| \leq \|x - y\|$$

und $\|\cdot\|$ ist eine Kontraktion von $(V, \|\cdot\|)$ nach \mathbb{R} also insbesondere stetig.

Da Stetigkeit in x_0 äquivalent zu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ ist, können wir Aussagen über Grenzwerte von Funktionen in entsprechende Aussagen über stetige Funktionen übersetzen. So zum Beispiel die folgenden Korollare deren Beweise dem Leser zur eigenständigen Übung überlassen werden.

Korollar 5.61. *Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Dann ist f stetig in $x_0 \in X$, genau dann wenn für jede Folge (x_n) in X , die gegen x_0 konvergiert auch $(f(x_n))$ gegen $f(x_0)$ konvergiert.*

Korollar 5.62. Seien $f_1, \dots, f_n : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen. Dann ist die Abbildung $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x \mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x))$ stetig im Punkt x_0 , genau dann wenn f_i für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ stetig im Punkt x_0 ist.

Korollar 5.63. Seien (X, d) ein metrischer Raum und $f, g : X \rightarrow \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) Funktionen die stetig in $x_0 \in X$ sind, dann sind die Funktionen $f + g$ und $f \cdot g$ stetig in x_0 . Ist $f(x_0) \neq 0$, dann ist $1/f$ auf einer Umgebung von x_0 definiert und in x_0 stetig.

Beispiel 5.64. Für $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in \mathbb{N}_0^n$ und $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) definieren wir

$$x^\eta := x_1^{\eta_1} x_2^{\eta_2} \cdots x_n^{\eta_n}.$$

Dabei bezeichnen wir η als Multiindex. Wir setzen außerdem $|\eta| := \eta_1 + \cdots + \eta_n$. Seien $c_\eta \in \mathbb{K}$ Konstanten für jedes η mit $|\eta| \leq N$, dann heißt die Funktion

$$f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$$

$$x \mapsto \sum_{\eta, |\eta| \leq N} c_\eta x^\eta$$

Polynom in n Variablen (über dem Körper \mathbb{K}). Solche Polynome sind stetig.

Bemerkung 5.65. Im Kontext von Polynomen (und später Potenzreihen) interpretieren wir den Ausdruck 0^0 , der auftreten kann wenn $\eta_i = x_i = 0$ ist, als 1.

Der folgende Satz ist eine Charakterisierung stetiger Funktionen, die insbesondere in Beweisen oft hilfreich ist.

Definition 5.66. Das Urbild einer Menge $U \subset Y$ unter einer Abbildung $f : X \rightarrow Y$, ist die Menge aller Punkte von x die durch f nach U abgebildet werden, also

$$f^{-1}(U) := \{x \in X \mid f(x) \in U\}.$$

Das Urbild ergibt auch für nicht invertierbare Funktionen Sinn.

Satz 5.67. Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung.

- (i) Die Abbildung f ist stetig in $x \in X$ genau dann wenn $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von x ist für jede Umgebung U von $f(x)$.
- (ii) Die Abbildung f ist stetig (in jedem Punkt), genau dann wenn $f^{-1}(O)$ offen ist für jede offene Menge $O \subset Y$.
- (iii) Die Abbildung f ist stetig (in jedem Punkt), genau dann wenn $f^{-1}(C)$ abgeschlossen ist für jede abgeschlossene Menge $C \subset Y$.

Beweis. Sei f stetig in x und U eine Umgebung von $f(x)$. Dann existiert $\epsilon > 0$ so, dass $B_\epsilon(f(x)) \subset U$. Wegen der Stetigkeit existiert $\delta > 0$ so, dass $f(B_\delta(x)) \subset B_\epsilon(f(x))$ oder – mit anderen Worten – $B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_\epsilon(f(x))) \subset f^{-1}(U)$. Damit ist $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von x .

Sei andererseits $f^{-1}(U)$ Umgebung von x für jede Umgebung U von $f(x)$ und sei $\epsilon > 0$. Dann ist $f^{-1}(B_\epsilon(f(x)))$ Umgebung von x und daher existiert $\delta > 0$ so, dass $B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_\epsilon(f(x)))$ oder – mit anderen Worten – $f(B_\delta(x)) \subset B_\epsilon(f(x))$. Damit ist die Stetigkeit von f im Punkt x gezeigt.

Der Beweis der beiden anderen Aussagen wird zur Übung überlassen. \square

Der obige Satz kann sowohl dazu benutzt werden, die Stetigkeit von Funktionen nachzuweisen, als auch um Offenheit oder Abgeschlossenheit bestimmter Mengen zu zeigen.

Beispiel 5.68. Betrachte die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \|x\|. \end{aligned}$$

Wir wissen bereits, dass diese Funktion stetig ist. Sei $r > 0$. Dann folgt mit dem vorhergehenden Satz, dass die Sphäre mit Radius r

$$f^{-1}(\{r\}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = r\}$$

und die abgeschlossene Kugel mit Radius r

$$f^{-1}([0, r]) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r\} = K_r(0)$$

abgeschlossen sind, und die offene Kugel

$$f^{-1}((-1, r)) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < r\} = B_r(0)$$

offen ist.

Bemerkung 5.69. (i) Wichtig ist, dass oben jeweils die Urbilder stehen. Die entsprechenden Aussagen für Bilder gelten nicht wie das Beispiel

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

zeigt. Die Funktion ist offensichtlich stetig aber es gilt $f((-1, 1)) = (\frac{1}{2}, 1]$ und $f([0, \infty)) = (0, 1]$.

Satz 5.70. *Stetige Abbildungen bilden kompakte Mengen auf kompakte Mengen ab.*

Beweis. Sei $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung zwischen metrischen Räumen und $A \subset X$ kompakt. Wir wollen zeigen, dass $f(A)$ ebenfalls kompakt ist. Sei also $(y_n) \subset f(A)$ eine Folge. Nach Definition von $f(A)$ existiert dann eine Folge $(x_n) \subset A$ so, dass $f(x_n) = y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da A kompakt ist, existiert eine Teilfolge (x_{n_k}) mit $x_{n_k} \rightarrow x \in A$. Dann gilt auf Grund der Stetigkeit von f auch $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x) \in f(A)$, die Folge (y_n) hat also die in $f(A)$ konvergente Teilfolge (y_{n_k}) . \square

Bemerkung 5.71. Stetige Abbildungen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ bilden also beschränkte, abgeschlossene Mengen auf beschränkte, abgeschlossene Mengen ab. Im allgemeinen werden jedoch weder abgeschlossene Mengen auf abgeschlossene Mengen abgebildet, noch beschränkte Mengen auf beschränkte Mengen. So gilt beispielsweise für die stetige Funktion

$$\begin{aligned} f : (0, \infty) &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$f((0, 1)) = (1, \infty) \text{ sowie } f([1, \infty)) = (0, 1].$$

Korollar 5.72. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge und $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann nimmt f auf A sein Maximum an, das heißt es existiert $x \in A$, so dass $f(y) \leq f(x)$ für alle $y \in A$.

Beweis. Wir wissen bereits, dass $f(A)$ kompakt ist. Wir zeigen daher, dass kompakte Teilmenge von \mathbb{R} ein Maximum hat. Da K beschränkt ist, existiert $M = \sup K$. Wähle eine Folge $(x_n) \subset K$, so dass $x_n \rightarrow M$. Da K abgeschlossen ist liegt der Grenzwert M dieser Folge in K .

Wenden wir dass auf die Menge $f(A)$ an, folgt die Aussage des Korollars. \square

Satz 5.73. Seien X, Y metrische Räume, $A \subset X$ kompakt und $f : A \rightarrow Y$ stetig und injektiv. Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(A) \rightarrow A$ ebenfalls stetig.

Beweis. Da f injektiv ist, existiert die Umkehrabbildung. Setze nun $g = f^{-1} : f(A) \rightarrow A$. Die Abbildung g ist bijektiv. Sei $C \subset A$ abgeschlossen (da A selbst abgeschlossen ist, ist C abgeschlossen als Teilmenge von A genau dann, wenn es als Teilmenge von X abgeschlossen ist). Da A kompakt ist, ist es auch C und wegen der Bijektivität von g gilt Wegen der Bijektivität von g gilt

$$\begin{aligned} f(C) &= \{f(x) \in B \mid x \in C\} \\ &= \{f(g(y)) \in B \mid g(y) \in C\} \\ &= \{y \in B \mid g(y) \in C\} = g^{-1}(C). \end{aligned}$$

Nach Satz 5.70 ist $f(C) = g^{-1}(C)$ kompakt und damit insbesondere abgeschlossen. Da C eine beliebige abgeschlossene Teilmenge von A war, folgt damit aus Satz 5.67 die Stetigkeit von $g = f^{-1}$. \square

5.6 Konvergenz von Funktionenfolgen

Definition 5.74 (Punktweise Konvergenz). Sei M eine Menge, $f_n : M \rightarrow \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) Funktionen für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $f : M \rightarrow \mathbb{K}$ eine weitere Funktion. Die Folge (f_n) heißt punktweise konvergent gegen f , wenn gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \text{ für alle } x \in M.$$

Punktweise Konvergenz von Funktionenfolgen ist oft vergleichsweise einfach zu zeigen, aber oft auch nicht sehr nützlich, da viele wichtige Eigenschaften von Funktionen bei punktwiser Konvergenz nicht erhalten bleiben. Die punktweise Konvergenz läßt sich im Allgemeinen – konkreter falls M überabzählbar ist – auch nicht durch eine Metrik charakterisieren.

Beispiel 5.75. Seien $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ die folgenden Funktionen

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 - nx & x \in [0, 1/n] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist f_n stetig für jedes $n \in \mathbb{N}$ und die Folge (f_n) konvergiert punktweise gegen $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) := \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$

welches nicht mehr stetig ist.

Wir können nun den Formalismus des normierten Raumes nutzen, um einen anderen Konvergenzbegriff für Funktionenfolgen zu definieren, der viele gute Eigenschaften von Funktionen erhält.

Bemerkung 5.76. Sei M eine Menge und $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Betrachte den Raum der beschränkten Funktionen über M , das heißt

$$\mathbf{B}(M) = \{f : M \rightarrow \mathbb{K} \mid \exists K \in \mathbb{R} \text{ so dass } |f(x)| \leq K \text{ für alle } x \in M\}. \quad (5.2)$$

Man überzeugt sich leicht, dass diese Mengen ein Untervektorraum des Raumes aller Funktionen ist.

Auf diesem Raum definiert

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_\infty : \mathbf{B}(M) &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto \sup_{x \in M} |f(x)| \end{aligned}$$

eine Norm auf $\mathbf{B}(M)$. Der Beweis der Normeigenschaften verläuft analog zu Beispiel 5.6 (ii).

Definition 5.77 (Gleichmäßige Konvergenz). Eine Folge von beschränkten Funktionen (f_n) , $f_n : M \rightarrow \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), die bezüglich der Norm $\|\cdot\|_\infty$ gegen $f : M \rightarrow \mathbb{K}$ konvergiert heißt gleichmäßig konvergent. Wenn von dem Funktionenraum $\mathbf{B}(M)$ (und später $\mathbf{C}(M)$) die Rede ist werden wir die Norm $\|\cdot\|_\infty$ oft nicht explizit erwähnen.

Bemerkung 5.78. In formaler Notation bedeutet die punktweise Konvergenz einer Funktionenfolge f_n gegen f , dass

$$\forall \epsilon > 0 \quad \forall x \in M \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

erfüllt ist, bei gleichmäßiger Konvergenz hingegen gilt stärker

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall x \in M \quad \forall n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Die Definitionen unterscheiden sich also nur darin, ob N von x abhängen darf oder nicht. Insbesondere ist jede gleichmäßig konvergente Folge auch punktweise konvergent.

Der Unterschied der beiden Aussagen wird gut vom Beispiel 5.75 verdeutlicht. Man überzeugt sich leicht, dass dort für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $\|f - f_n\|_\infty = 1$, die Funktionenfolge konvergiert also nicht gleichmäßig. Im Gegensatz zum \mathbb{R}^n – auf dem wir im Wesentlichen einen Konvergenzbegriff haben – müssen wir für Funktionen verschieden Arten von Konvergenz unterscheiden.

Die obige Formulierung für gleichmäßige Konvergenz ist sogar etwas allgemeiner als in unserer Definition, da sie auch für Folgen nicht beschränkter Funktionen Sinn ergibt.

Satz 5.79. *Der Funktionenraum $\mathbf{B}(M)$ ist vollständig, also ein Banachraum.*

Beweis. Sei $(f_n) \subset \mathbf{B}(M)$ eine Cauchy-Folge. Wähle $x \in M$ fest. Dann ist die Folge $(f_n(x))$ ebenfalls eine Cauchy-Folge, da

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty$$

gilt. Da \mathbb{K} (also \mathbb{R} oder \mathbb{C}) vollständig sind, konvergiert also die Folge $(f_n(x))$. Wir setzen jetzt

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Damit haben wir einen Grenzwert f für die Folge (f_n) gefunden, allerdings nur bezüglich der punktweisen Konvergenz.

Sei nun $\epsilon > 0$. Wir wählen mit der Cauchy-Eigenschaft $N \in \mathbb{N}$ so, dass $\|f_n - f_m\|_\infty < \epsilon$ für alle $n, m \geq N$. Die Wahl von N ist nicht von x abhängig. Dann gilt für jedes $x \in M$ und jedes $n, m > N$

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \|f_m - f_n\|_\infty < \epsilon.$$

Da die rechte Seite nicht mehr von m abhängt, können wir den Grenzwert $m \rightarrow \infty$ bilden und erhalten, da die Betragsfunktion stetig ist, für jedes $x \in M$

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \epsilon.$$

Da die rechte Seite von x unabhängig ist, folgt aus dieser Abschätzung zunächst

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in M} |f(x)| \leq \sup_{x \in M} |f(x) - f_n(x)| + \sup_{x \in M} |f_n(x)| \leq \epsilon + \|f_n\|,$$

die Grenzfunktion f ist also beschränkt.

Weiterhin gilt

$$\sup_{x \in M} |f(x) - f_n(x)| = \|f - f_n\|_\infty < \epsilon.$$

Damit haben wir die Konvergenz von (f_n) gegen f bezüglich der Norm gezeigt. \square

Definition 5.80. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $\mathbf{B}(X)$ der Raum der beschränkten Funktionen auf X . Der Teilraum der stetigen, beschränkten Funktionen wird mit $\mathbf{C}_b(X)$ bezeichnet.

Bemerkung 5.81. Falls X eine beschränkte, abgeschlossene Teilmenge von \mathbb{R}^n ist, dann ist nach Satz 5.70 jede stetige Funktion beschränkt. In diesem Fall enthält der Raum $\mathbf{C}_b(X)$ alle stetigen Funktionen auf X und wir schreiben $\mathbf{C}(X)$.

Im Gegensatz zur punktweisen Konvergenz erhält die gleichmäßige Konvergenz viele gute Eigenschaften von Funktionen.

Satz 5.82. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Der Unterraum $\mathbf{C}_b(X)$ ist abgeschlossen in $\mathbf{B}(X)$. Insbesondere ist $\mathbf{C}_b(X)$ vollständig.

Beweis. Wir wollen das Folgenkriterium für Abgeschlossenheit aus Satz 5.36 verwenden. Sei also $(f_n) \subset \mathbf{C}_b(X)$ eine Folge stetiger Funktionen, die (gleichmäßig) gegen $f \in \mathbf{B}(X)$ konvergiert. Sei $x \in X$ und $\epsilon > 0$. Da (f_n) gleichmäßig gegen f konvergiert, existiert $N \in \mathbb{N}$ so, dass $\|f - f_n\|_\infty < \frac{\epsilon}{3}$ für jedes $n > N$. Wähle jetzt $n > N$ fest.

Da f_n stetig ist, existiert $\delta > 0$ so, dass $|f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\epsilon}{3}$ für alle $y \in B_\delta(x)$. Dann gilt für jedes solche y

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \\ &\leq 2\|f - f_n\|_\infty + |f_n(x) - f_n(y)| < \epsilon. \end{aligned}$$

Damit ist f stetig in x und da $x \in X$ beliebig war, ist f stetig.

Da die Folge (f_n) beliebig war, ist damit auch die Abgeschlossenheit von $\mathbf{C}_b(X)$ gezeigt. Die Vollständigkeit dieses Raumes folgt dann aus Satz 5.41. \square

Definition 5.83. Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $x_0 \in \mathbb{K}$ und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{K}$. Dann heißt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ eine (formale) Potenzreihe um den Punkt x_0 über dem Körper \mathbb{K} .

Die Zahl

$$\sup \left\{ |x - x_0| \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \text{ konvergiert} \right. \right\}$$

in $[0, \infty) \cup \{\infty\}$ heißt Konvergenzradius der Potenzreihe.

Bemerkung 5.84. Die Ergebnisse dieses Abschnitts bis hierher können – inklusive der Beweise – ohne Weiteres auf \mathbb{R}^n -wertige Funktionen oder sogar auf Funktionen mit Werten in einem beliebigen Banachraum verallgemeinert werden. Dazu ersetzt man lediglich überall den Betrag $|\cdot|$ durch die entsprechende Norm $\|\cdot\|$.

Satz 5.85. Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ eine Potenzreihe über dem Körper \mathbb{K} und $r \in [0, \infty) \cup \{\infty\}$ ihr Konvergenzradius. Für $|x-x_0| < r$ konvergiert die Reihe absolut, für $|x-x_0| > r$ divergiert sie.

Es gilt die Formel

$$\frac{1}{r} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}. \quad (5.3)$$

Wobei wir (nur hier) $\frac{1}{\infty} = 0$ und $\frac{1}{0} = \infty$ setzen.

Beweis. Um die Notation einfach zu halten, führen wir den Beweis nur für $x_0 = 0$. Dass die Reihe für $|x| > r$ divergiert folgt aus der Definition des Konvergenzradius. Wir zeigen zunächst die absolute Konvergenz der Reihe falls $|x| < r$. Falls $r = 0$ ist, so ist nichts zu zeigen. Sei also $r > 0$ und $|x| < r$. Nach der Definition des Konvergenzradius existiert y so, dass $|x| < |y| \leq r$ und $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ konvergiert. Insbesondere muss also $(a_n y^n)$ eine Nullfolge sein und so gilt $|a_n| |y|^n \leq C$ für ein $C \in [0, \infty)$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$. Damit gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |y|^n \left| \frac{x}{y} \right|^n \leq C \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x}{y} \right|^n < \infty.$$

Damit ist die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

absolut konvergent und insbesondere konvergent.

Die Formel für den Konvergenzradius ergibt sich aus dem Wurzelkriterium. Setze

$$b := \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Sei zunächst $b \in (0, \infty)$. Dann gilt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |x| b.$$

Damit ist die Reihe konvergent falls $|x| < \frac{1}{b}$ – also gilt $r \geq \frac{1}{b}$ – und divergent falls $|x| > \frac{1}{b}$ also ist $r \leq \frac{1}{b}$. Schließlich sieht man leicht, dass die Potenzreihe lediglich in $x = 0$ konvergiert falls $b = \infty$ und für jedes $x \in \mathbb{K}$ konvergiert falls $b = 0$ ist. \square

Bemerkung 5.86. (i) Aus dem obigen Beweis ist ersichtlich, dass

$$r = \sup \left\{ a \in [0, \infty) \mid \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| a^n \text{ konvergiert} \right\}.$$

- (ii) Falls der folgende Grenzwert existiert (also insbesondere $a_n \neq 0$ ist ab einem bestimmten Index n), so gilt auch

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}.$$

Beispiel 5.87. Die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

ist konvergent auf $(-1, 1)$ (beziehungsweise auf $B_1(0) \subset \mathbb{C}$) und konvergiert dort gegen die Funktion $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

Man beachte dabei, dass der Grenzwert der Reihe nur auf dem Konvergenzkreis mit f übereinstimmt (außerhalb dieses Kreises existiert der Grenzwert nicht) obwohl der maximale Definitionsbereich von f darüber hinaus geht.

Satz 5.88. Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ eine Potenzreihe über dem Körper \mathbb{K} ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) mit Konvergenzradius $r > 0$. Sei $0 < a < r$. Dann konvergiert die Potenzreihe auf $K_a(x_0)$ gleichmäßig.

Insbesondere ist die Funktion

$$\begin{aligned} f : B_r(x_0) &\rightarrow \mathbb{K} \\ x &\mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \end{aligned}$$

stetig.

Beweis. Wir betrachten wiederum nur den Fall $x_0 = 0$. Sei $0 < a < r$. Wir wissen bereits, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ auf $K_a(0)$ (sogar auf $B_r(0)$) punktweise konvergiert, wir wollen jedoch die Konvergenz bezüglich der Supremumnorm $\|\cdot\|_{\infty}$ zeigen. Setze

$$\begin{aligned} f_n : K_a(0) &\rightarrow \mathbb{K} \\ x &\mapsto x^n \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$\|f_n\|_{\infty} = \sup_{x \in K_a(0)} |x^n| = a^n$$

und wir erhalten

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n f_n\|_{\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| a^n < \infty \quad (5.4)$$

da $a < r$. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n$ ist also absolut konvergent in $\mathbf{B}(K_a(0))$. Da dieser Raum vollständig ist, folgt daraus die Konvergenz der Reihe in $\mathbf{B}(K_a(0))$ (Satz 5.23) also die gleichmäßige Konvergenz.

Da die gleichmäßige Konvergenz die punktweise Konvergenz impliziert (Bemerkung 5.78), muss der gleichmäßige Grenzwert mit dem punktweisen übereinstimmen also mit der

Funktion $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Da die Partialsummen $\sum_{n=0}^N a_n x^n$ für jedes N Polynome und somit stetig sind, ist nach Satz 5.82 auch der Grenzwert stetig (auf $K_a(0)$).

Wir wollen nun noch die Stetigkeit auf $B_r(0)$ zeigen. Wir setzen

$$s : B_r(0) \rightarrow \mathbb{K}$$

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Sei nun $y \in B_r(0)$ und wähle a so, dass $|y| < a < r$. Dann ist nach dem soeben gezeigten $s|_{K_a(0)}$ stetig, also insbesondere stetig in $y \in K_a(0)$. Da $K_a(0)$ eine Umgebung von y enthält, stimmen s und $s|_{K_a(0)}$ auf dieser Umgebung überein und da Stetigkeit eine lokale Eigenschaft ist, folgt daraus die Stetigkeit von s in y . Da das für jedes $y \in B_r(0)$ gilt, ist s stetig. \square

Bemerkung 5.89. Der obige Satz beweist insbesondere, dass die Funktionen \exp , \sin und \cos stetig sind.

Wir werden später sehen, dass solche analytischen Funktionen – also Funktionen die eine konvergente Reihenentwicklung besitzen – sogar beliebig oft differenzierbar sind.

Obwohl wir die Aussagen hier nur für zahlwertige Reihen definiert haben, gelten analoge Aussagen auch für Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

bei denen die Koeffizienten Elemente eines beliebigen Banachraumes sind. Besonders interessant ist das für uns in den Fällen wo a_k Matrizen (oder allgemeinere Operatoren) sind.

6 Differenzialrechnung von Funktionen in mehreren Variablen

6.1 Lineare und Multilineare Abbildungen

Alle in diesem Kapitel vorkommenden Vektorräume sind endlichdimensional und über dem Körper \mathbb{K} der reellen oder komplexen Zahlen.

Definition 6.1. Seien V, V_1, \dots, V_n, W Vektorräume. Eine Abbildung $\varphi : V \rightarrow W$ heißt linear, wenn für alle $\alpha \in \mathbb{K}$ und alle $u, v \in V$ gilt

$$\varphi(u + \alpha v) = \varphi(u) + \alpha \varphi(v).$$

Eine Abbildung $\theta : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \rightarrow W$ heißt multilinear, wenn sie linear in jedem Argument ist, das heißt die Abbildung

$$v \mapsto \theta(v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_n)$$

ist linear für alle $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n$. Solche Abbildungen heißen bilinear im Fall $n = 2$, trilinear im Fall $n = 3$, etc.

Die Menge der linearen beziehungsweise multilinearen Abbildungen bezeichnen wir mit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(V|W) &:= \{\varphi : V \rightarrow W \mid \varphi \text{ linear}\} \\ \mathcal{L}(V_1, \dots, V_n|W) &:= \{\theta : V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow W \mid \theta \text{ multilinear}\}. \end{aligned}$$

Stimmen die Räume V_1, \dots, V_n überein, schreiben wir auch kurz $\mathcal{L}^n(V|W)$.

Beispiel 6.2. (i) Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$, dann ist

$$\begin{aligned} \varphi_A : \mathbb{K}^m &\rightarrow \mathbb{K}^n \\ x &\mapsto Ax \end{aligned}$$

eine lineare Abbildung.

(ii) Die Abbildung

$$\begin{aligned} \theta : (\mathbb{R}^3)^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ ((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3), (z_1, z_2, z_3)) &\mapsto x_1 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 \end{aligned}$$

ist bilinear (Nachrechnen!).

(iii) Skalarprodukte über reellen Vektorräumen sind bilineare Abbildungen.

(iv) Die Determinante $\det : (\mathbb{K}^n)^n \rightarrow \mathbb{K}$ ist eine multilineare Abbildung.

(v) Die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbf{C}([0, 1]) &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto \int_0^1 f(x) dx \end{aligned}$$

ist linear.

Bemerkung 6.3. Analog wie für zahlwertige Funktionen, können wir auf dem Raum der Abbildungen mit Werten in einem Vektorraum V selbst eine Vektorraumstruktur definieren. Seien dazu $\varphi, \psi : M \rightarrow V$ Abbildungen über einer Menge M und $\alpha \in \mathbb{K}$. Wir definieren Abbildungen $\varphi + \psi, \alpha\varphi : M \rightarrow V$ durch

$$(\varphi + \psi)(x) := \varphi(x) + \psi(x) \text{ und } (\alpha\varphi)(x) := \alpha\varphi(x).$$

Dass mit diesen Festlegungen die Vektorraumaxiome erfüllt sind, lässt sich leicht überprüfen.

Ebenso leicht lässt sich überprüfen, dass für (multi-)lineare Abbildungen, linearkombinationen wieder (multi-)linear sind:

$$\begin{aligned} (\varphi + \alpha\psi)(u + \beta v) &= \varphi(u + \beta v) + \alpha\psi(u + \beta v) = \varphi(u) + \beta\varphi(v) + \alpha\psi(u) + \alpha\beta\psi(v) \\ &= (\varphi + \alpha\psi)(u) + \beta(\varphi + \alpha\psi)(v). \end{aligned}$$

Damit ist $\mathcal{L}(V|W)$ ein Untervektorraum des Raums aller Abbildungen von V nach W .

Auch Verkettungen (Hintereinanderausführungen) von linearen Abbildungen sind wieder linear (Warum?).

Bemerkung 6.4. Seien V, W Vektorräume und e_1, \dots, e_n eine Basis für V . Wenn $\varphi : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung ist und $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ bekannt sind, dann ist φ eindeutig bestimmt. Jedes $v \in V$ kann eindeutig als $v = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$ geschrieben werden und daher gilt

$$\varphi(v) = \alpha_1 \varphi(e_1) + \dots + \alpha_n \varphi(e_n).$$

Lineare Abbildungen können also verglichen werden, indem wir ihre Werte auf einer Basis vergleichen.

Sind umgekehrt w_1, \dots, w_n irgendwelche Elemente von W , dann existiert genau eine lineare Abbildung φ die $\varphi(e_i) = w_i$ für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ erfüllt, nämlich

$$\varphi(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n) = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n.$$

Lineare Abbildungen können also definiert werden, indem wir ihre Werte auf einer Basis angeben. Analoge Aussagen gelten natürlich auch für multilineare Abbildungen.

Definition 6.5. Sei $\varphi : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Die Menge

$$\ker \varphi := \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\}$$

heißt Kern von φ , die Menge

$$\operatorname{im} \varphi := \{\varphi(v) \in W \mid v \in V\}$$

heißt Bild von φ .

Satz 6.6. Sei $\varphi : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Der Kern und das Bild von φ sind Untervektorräume von V beziehungsweise W . Die Abbildung φ ist injektiv genau dann wenn $\ker \varphi = \{0\}$.

Beweis. Für beliebiges $v_1, v_2 \in \ker \varphi$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt

$$\varphi(v_1 + \lambda v_2) = \varphi(v_1) + \lambda \varphi(v_2) = 0$$

also ist $v_1 + \lambda v_2 \in \ker \varphi$.

Für beliebiges $w_1, w_2 \in \operatorname{im} \varphi$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ existieren $v_1, v_2 \in V$ so, dass $\varphi(v_1) = w_1$ und $\varphi(v_2) = w_2$. Dann ist

$$\varphi(v_1 + \lambda v_2) = \varphi(v_1) + \lambda \varphi(v_2) = w_1 + \lambda w_2 \in \operatorname{im} \varphi.$$

Falls φ injektiv ist, muss offensichtlich aus $\varphi(v) = 0 = \varphi(0)$ folgen, dass $v = 0$ ist, also ist $\ker \varphi = \{0\}$. Sei andererseits $\ker \varphi = \{0\}$ und es gelte $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$. Dann ist $\varphi(v_1 - v_2) = 0$ also $v_1 - v_2 \in \ker \varphi$ also $v_1 - v_2 = 0$. Damit ist die Injektivität gezeigt. \square

Satz 6.7. Sei $\varphi : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Es gilt $\dim \ker \varphi + \dim \operatorname{im} \varphi = \dim V$.

Beweis. Sei e_1, \dots, e_n eine Basis von $\ker \varphi$ und $e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_m$ eine Vervollständigung zu einer Basis von V (Korollar 3.15).

Wir zeigen, dass $\varphi(f_1), \dots, \varphi(f_m)$ eine Basis für $\operatorname{im} \varphi$ ist. Sei zunächst $w \in \operatorname{im} \varphi$, das heißt es existiert $v \in V$ so, dass $\varphi(v) = w$. Dann existieren Koeffizienten $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m$ so, dass

$$w = \varphi(v) = \varphi(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n + \beta_1 f_1 + \dots + \beta_m f_m) = \beta_1 \varphi(f_1) + \dots + \beta_m \varphi(f_m).$$

Wir haben gezeigt, dass sich jedes Element von $\operatorname{im} \varphi$ als Linearkombination der $\varphi(f_j)$ schreiben lässt, sie sind also ein Erzeugendensystem für $\operatorname{im} \varphi$. Seien nun β_1, \dots, β_m Koeffizienten so, dass

$$0 = \beta_1 \varphi(f_1) + \dots + \beta_m \varphi(f_m) = \varphi(\beta_1 f_1 + \dots + \beta_m f_m).$$

Dann ist also $\beta_1 f_1 + \dots + \beta_m f_m \in \ker \varphi$ also existieren $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ so, dass

$$\beta_1 f_1 + \dots + \beta_m f_m = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n.$$

Da aber die Basiselemente $e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_m$ linear unabhängig sind, müssen alle Koeffizienten verschwinden. Damit haben wir die lineare Unabhängigkeit von $\varphi(f_1), \dots, \varphi(f_m)$ gezeigt.

Es folgt nun

$$\dim V = n + m = \dim \ker \varphi + \dim \operatorname{im} \varphi. \quad \square$$

Bemerkung 6.8. Da $\text{im } \varphi \subset W$, gilt stets $\dim \text{im } \varphi \leq \dim W$. Gleichheit gilt genau dann, wenn $\text{im } \varphi = W$, wenn also φ surjektiv ist. Aus der Dimensionsformel folgt dann, dass φ nur surjektiv sein kann, falls $\dim V \geq \dim W$. Analog kann φ nur injektiv sein (das heißt $\dim \ker \varphi = 0$), falls $\dim V \leq \dim W$. Schließlich kann φ nur dann bijektiv sein, falls $\dim V = \dim W$.

Korollar 6.9. Sei $\varphi : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung und $\dim V = \dim W$. Dann sind äquivalent:

- (i) φ ist injektiv,
- (ii) φ ist surjektiv,
- (iii) φ ist bijektiv.

Ist eine (und damit alle) der Bedingungen erfüllt, ist die Abbildung $\varphi^{-1} : W \rightarrow V$ eine lineare Abbildung.

Beweis. Übung. □

Definition 6.10. Eine bijektive, lineare Abbildung $\varphi : V \rightarrow W$ heißt (Vektorraum-)Isomorphismus. Wir sagen dann, dass die Vektorräume V und W isomorph sind.

Isomorphe Vektorräume sind „im wesentlichen“ – gewissermaßen bis auf die Namen ihrer Elemente – gleich.

Korollar 6.11. Injektive, lineare Abbildungen bilden linear unabhängige Systeme auf linear unabhängige Systeme ab. Surjektive Abbildungen bilden Erzeugendensysteme auf Erzeugendensysteme ab. Isomorphismen bilden Basen auf Basen ab. Isomorphe Vektorräume haben die selbe Dimension.

Beweis. Übung. □

Satz 6.12. Sei V ein Vektorraum und e_1, \dots, e_n eine Basis. Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : V &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n &\mapsto (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \end{aligned}$$

ein Isomorphismus.

Beweis. Die Linearität ist aus der Definition sofort ersichtlich (Warum?). Da die Dimensionen der Räume offenbar gleich sind, bleibt die Surjektivität (oder Injektivität) zu zeigen. Diese folgt aber auch sofort, da für beliebige $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ gilt

$$\varphi(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n). \quad \square$$

Etwas salopp sagt der Satz aus, dass jeder n -dimensionale Vektorraum lediglich der \mathbb{R}^n in Verkleidung ist.

Satz 6.13. Seien V, W Vektorräume und e_1, \dots, e_m und f_1, \dots, f_n Basen von V beziehungsweise W . Für eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n \times m}$ definieren wir eine lineare Abbildung $\varphi_A : V \rightarrow W$ durch

$$\varphi_A(e_i) = \sum_{j=1}^m a_{ji} f_j.$$

Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{K}^{n \times m} &\rightarrow \mathcal{L}(V|W) \\ A &\mapsto \varphi_A \end{aligned}$$

ein Isomorphismus. Insbesondere gilt

$$\dim \mathcal{L}(V|W) = (\dim V)(\dim(W)).$$

Beweis. Die Linearität der Abbildung lässt sich wieder leicht nachrechnen (Wie?). Sei nun $A \in \ker \Phi$, also $\varphi_A = 0$. Das heißt insbesondere, dass für jedes $i \in \{1, \dots, m\}$ gilt

$$\sum_{j=1}^m a_{ji} f_j = 0$$

woraus, da f_1, \dots, f_j linear unabhängig sind, $a_{ji} = 0$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$ folgt. Damit gilt $A = 0$ und wir haben gezeigt, dass $\ker \Phi = \{0\}$, die Abbildung also injektiv ist.

Sei nun $\varphi \in \mathcal{L}(V|W)$ eine lineare Abbildung. Da f_1, \dots, f_n eine Basis sind, gibt es zu jedem $i \in \{1, \dots, m\}$ eindeutig bestimmte Koeffizienten a_{ji} ($j \in \{1, \dots, n\}$) so, dass

$$\varphi(e_i) = \sum_{j=1}^m a_{ji} f_j = \varphi_A(e_i)$$

wobei $A = (a_{ji})$ die zugehörige Matrix ist. Da eine lineare Abbildung durch ihre Werte auf einer Basis eindeutig bestimmt ist, muss $\varphi = \varphi_A = \Phi(A)$ gelten und wir haben die Surjektivität gezeigt.

Die Aussage über die Dimension folgt, da Isomorphismen die Dimension erhalten. \square

Bemerkung 6.14. Legen wir also Basen für V und W fest, dann ist durch obigen Satz jeder linearen Abbildung eindeutig eine Matrix zugeordnet. Auf \mathbb{R}^n arbeiten wir meist mit der Standardbasis. Der Satz sagt dann, dass jede lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ der Linksmultiplikation mit einer eindeutig bestimmten Matrix entspricht. Insbesondere in diesem Fall werden wir häufig nicht zwischen der Matrix A und der durch sie definierten Abbildung $x \mapsto Ax$ unterscheiden.

Ist U ein weiterer Vektorraum mit einer Basis g_1, \dots, g_l und $B \in \mathbb{K}^{m \times l}$, dann gilt für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\begin{aligned} (\varphi_B \circ \varphi_A)(e_i) &= \varphi_B \left(\sum_{j=1}^m a_{ji} f_j \right) = \sum_{j=1}^m a_{ji} \varphi_B(f_j) = \sum_{j=1}^m a_{ji} \sum_{k=1}^l b_{kj} g_k \\ &= \sum_{k=1}^l \left(\sum_{j=1}^m b_{kj} a_{ji} \right) g_k = \sum_{k=1}^l (BA)_{ki} g_k = \varphi_{BA}(e_i) \end{aligned}$$

Es gilt also $\varphi_B \circ \varphi_A = \varphi_{BA}$. Diese Gleichung ist die nachträgliche Begründung für die Form des Matrizenproduktes. Das Produkt ist genau so gewählt, dass die Multiplikation der Matrizen der Verkettung der zugehörigen Abbildungen entspricht. Im Fall von linearen Abbildungen nutzen wir häufig die Produktschreibweise $\psi\varphi$ für die Verkettung.

Genauso wie oben für lineare Abbildungen, können wir auch multilineare Abbildungen bezüglich Basen darstellen. Um die Notation nicht aus dem Ruder laufen zu lassen, schreiben wir hier nur die Formel für ein $\varphi : V \times V \rightarrow W$ auf:

$$\varphi(e_i, e_j) = \sum_{k=1}^n a_{kij} f_k.$$

Das $n \times m \times m$ Zahlenschema (a_{kij}) legt dann die Abbildung φ eindeutig fest.

Satz 6.15. *Seien nun $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$ normierte Vektorräume und $\varphi : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Dann existiert eine Konstante C so, dass für alle $v \in V$ gilt*

$$\|\varphi(v)\|_W \leq C \|v\|_V.$$

Insbesondere ist φ Lipschitz-stetig.

Beweis. Aus der gesuchten Ungleichung und der Linearität folgt sofort

$$\|\varphi(v) - \varphi(\tilde{v})\|_W = \|\varphi(v - \tilde{v})\|_W \leq C \|v - \tilde{v}\|_V,$$

also die Lipschitz-stetigkeit und damit auch die Stetigkeit. Sei e_1, \dots, e_n eine Basis für V .

Wir betrachten nun zunächst einen Spezialfall, die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R}^n &\rightarrow V \\ x = (x_1, \dots, x_n) &\mapsto x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n. \end{aligned}$$

Diese Abbildung ist offensichtlich surjektiv. Setzen wir $K = \max \{\|e_1\|_V, \|e_2\|_V, \dots, \|e_n\|_V\}$, dann folgt aus der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} \|\psi(x)\|_V &= \|x_1 e_1 + \dots + x_n e_n\|_V \leq |x_1| \|e_1\|_V + \dots + |x_n| \|e_n\|_V \\ &\leq K(|x_1| + \dots + |x_n|) = K \langle (|x_1|, \dots, |x_n|) | (1, 1, \dots, 1) \rangle \leq K \sqrt{n} \|x\|. \end{aligned}$$

Dabei haben wir im letzten Schritt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung verwendet ($\langle \cdot | \cdot \rangle$ und $\| \cdot \|$ sind Standardskalarprodukt und zugehörige Norm). Damit erfüllt ψ also eine Ungleichung der geforderten Art und ist damit insbesondere stetig.

Dann ist auch die Abbildung $x \mapsto \|\psi(x)\|_V$ stetig (Verkettung stetiger Abbildungen). Wir betrachten diese Abbildung auf der Einheitskugel

$$S_{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}.$$

Da letztere kompakt ist (Warum?), muss die Abbildung dort ein Minimum annehmen, es muss also $x_0 \in \mathbb{R}^n$ so geben, dass $\|\psi(x_0)\|_V \leq \|\psi(x)\|_V$ für alle $x \in S_{n-1}$ gilt. Wäre $\|\psi(x_0)\| = 0$, dann müsste $\psi(x_0) = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = 0$ sein, was $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ implizieren würde. Dieser Punkt liegt jedoch nicht in S_{n-1} , es muss also $\|\psi(x_0)\| > 0$ gelten. Damit folgt dann für jedes $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} \|\psi(x_0)\| &\leq \left\| \psi \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right\|_V = \frac{\|\psi(x)\|_V}{\|x\|} \text{ bzw.} \\ \|x\| &\leq \frac{1}{\|\psi(x_0)\|} \|\psi(x)\|_V \end{aligned}$$

wobei die letzte Ungleichung offensichtlich auch für $x = 0$ gilt.

Wir setzen nun

$$L = \|(\|\varphi(e_1)\|_W, \|\varphi(e_2)\|_W, \dots, \|\varphi(e_n)\|_W)\|.$$

Dann gilt, wiederum mit Dreiecks- und Cauchy-Schwarz-Ungleichung,

$$\begin{aligned} \|\varphi(\psi(x))\|_W &= \|x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n)\|_W \leq |x_1| \|\varphi(e_1)\|_W + \dots + |x_n| \|\varphi(e_n)\|_W \\ &\leq L \|x\| \leq \frac{L}{\|\psi(x_0)\|} \|\psi(x)\|_V. \end{aligned}$$

Da die Abbildung ψ surjektiv ist, haben wir damit die gesuchte Ungleichung gefunden. \square

Bemerkung 6.16. (i) Als, etwas merkwürdiges aber wichtiges, Beispiel können wir die Identitätsabbildung betrachten. Gegeben sei dazu ein Vektorraum mit zwei verschiedenen Normen $(V, \|\cdot\|_1)$ und $(V, \|\cdot\|_2)$ und die Abbildung $\text{id} : V \rightarrow V$, die offensichtlich linear ist. Der Satz sagt dann, dass die Abbildung (und ihre Umkehrabbildung) stetig ist und dass es Konstanten C_1, C_2 gibt so, dass für alle $v \in V$ gilt

$$\|v\|_1 \leq C_1 \|v\|_2 \quad \text{und} \quad \|v\|_2 \leq C_2 \|v\|_1.$$

Wir sagen, die Normen sind äquivalent.

Praktisch bedeutet das, dass es für alle topologischen Begriffe unerheblich ist, welche Norm wir verwenden: eine Folge ist konvergent bezüglich der einen Norm genau dann wenn sie es auch bezüglich der anderen ist, eine Menge ist offen beziehungsweise abgeschlossen bezüglich der einen Norm, genau dann wenn sie es auch bezüglich der anderen ist, eine Funktion ist stetig bezüglich der einen Norm genau dann, wenn sie es auch bezüglich der anderen ist etc.

- (ii) Insbesondere bedeutet das, dass es egal ist, mit welcher Norm wir auf \mathbb{R}^n arbeiten. Üblicherweise betrachten wir die euklidische Norm, da sie mit unserem Abstandsbegriff aus dem physikalischen Raum übereinstimmt (zumindest in sehr guter Näherung). Jede andere Norm liefert aber die selben konvergenten Folgen, die selben offenen Mengen, die selben stetigen Funktionen und es kann in manchen Fällen leichter sein mit anderen Normen zu arbeiten.
- (iii) Im Gegensatz zu vielen anderen Aussagen dieses Kapitels, gilt dieser Satz nur für endlichdimensionale Räume (genauer falls V endlichdimensional ist). Auf unendlichdimensionalen Räumen gibt es unstetige lineare Abbildungen. Auch müssen auf unendlichdimensionalen Räumen verschiedenen Normen nicht mehr äquivalent sein.
- (iv) Ein analoger Satz gilt (mit ganz ähnlichem Beweis) auch für multilineare Abbildungen. Diese sind (im endlichdimensionalen Fall) immer stetig und es gibt stets eine Konstante C so, dass

$$\|\theta(v_1, \dots, v_n)\|_W \leq C \|v_1\|_{V_1} \|v_2\|_{V_2} \cdots \|v_n\|_{V_n}$$

für alle $v_i \in V_i$ ($i \in \{1, \dots, n\}$) gilt.

Der Raum der linearen Abbildungen $\mathcal{L}(V|W)$ (oder Matrizen $\mathbb{R}^{n \times m}$) ist auch endlichdimensional und damit ist es im Prinzip egal mit welcher Norm wir arbeiten. Die folgende Norm ist jedoch häufig vorteilhaft und wir verwenden sie daher als Standardnorm auf diesen Räumen.

Definition 6.17 (Operatornorm). Seien V, W normierte Vektorräume. Für eine lineare Abbildung $\varphi : V \rightarrow W$ wird die Operatornorm definiert als

$$\|\varphi\| = \sup \{ \|\varphi(v)\|_W \mid \|v\|_V = 1 \}.$$

Bemerkung 6.18. Für $\|v\|_V = 1$ gilt auf Grund der eben bewiesenen Ungleichung

$$\|\varphi(v)\|_W \leq C \|v\|_V = C,$$

so dass das obige Supremum stets endlich ist. Tatsächlich wird es sogar angenommen, da die stetige Funktion $v \mapsto \|\varphi(v)\|_W$ auf der kompakten Menge $\{v \mid \|v\|_V = 1\}$ ihr Maximum annimmt. Natürlich müssen die Normeigenschaften noch gezeigt werden (Übung).

Für ein beliebiges $v \in V \setminus \{0\}$ gilt nun

$$\left\| \varphi \left(\frac{v}{\|v\|_V} \right) \right\|_W \leq \|\varphi\|$$

und damit, für alle v auch $\|\varphi(v)\|_W \leq \|\varphi\| \|v\|_V$. Für eine weitere lineare Abbildung $\psi : W \rightarrow U$ gilt auch (Übung)

$$\|\psi \circ \varphi\| \leq \|\psi\| \|\varphi\|.$$

Beispiel 6.19. Wir wollen die oben definierten Begriffe nutzen um die matrixwertige Exponentialfunktion zu definieren, also für $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$

$$\exp(A) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n.$$

Da die Matrizen einen Vektorraum bilden, ist klar was die Partialsummen dieser Reihe sind. Damit der Grenzwert einen Sinn hat, brauchen wir auf $\mathbb{K}^{n \times n}$ eine Norm (oder mindestens eine Metrik). Da der Raum $\mathbb{K}^{n \times n}$ endlichdimensional ist, sind alle Normen äquivalent und die Reihe konvergiert bezüglich einer Norm wenn sie auch bezüglich jeder anderen konvergiert (Warum?).

Außerdem ist der Raum $\mathbb{K}^{n \times n}$ vollständig. Wir haben diese Aussage in Satz 5.20 zwar nur für die euklidische Norm gezeigt, aber da alle Normen äquivalent sind, gilt sie bezüglich jeder Norm (Warum?). In einem vollständigen Raum ist aber nach Satz 5.23 jede absolut konvergente Reihe konvergent. Wir betrachten also

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{n!} A^n \right\| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \|A^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \|A\|^n = \exp \|A\| < \infty,$$

wobei wir die Submultiplikativität der Operatornorm verwendet haben. Die Reihe ist also absolut konvergent und damit auch konvergent.

Die Abbildung

$$t \mapsto \exp(At) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} t^n$$

ist dann eine Matrixwertige Potenzreihe mit Konvergenzradius ∞ (sie konvergiert für jedes $t \in \mathbb{K}$) und als solche eine stetige Abbildung (tatsächlich sogar beliebig differenzierbar).

6.2 Partielle und totale Differenzierbarkeit

Wir wollen nun den Differenzierbarkeitsbegriff auf mehr als eine Dimension verallgemeinern. Einfach ist die Verallgemeinerung für mehrere Dimensionen im Bildraum, denn auch für Abbildungen $f : \mathbb{R} \rightarrow V$ können wir definieren

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Diese Definition ergibt für jeden normierten Vektorraum V Sinn. Komplizierter ist es, Differenzierbarkeit auf höherdimensionale Urbildräume – mit anderen Worten für von mehreren Variablen abhängige Funktionen zu verallgemeinern.

Definition 6.20 (Richtungsableitungen und partielle Ableitungen). Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$ und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$. Sei $v \in \mathbb{R}^n$. Der Grenzwert

$$\partial_v f(x) = \left. \frac{d}{dt} f(x + tv) \right|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}$$

heißt, wenn er existiert, die Richtungsableitung von f in Richtung v im Punkt x .

Die Richtungsableitungen in Richtung der Basisvektoren der Standardbasis heißen partielle Ableitungen. Wir schreiben dann auch $\partial_i f(x) := \partial_{e_i} f(x)$ oder $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$.

Die Abbildung f heißt partiell differenzierbar in x , wenn die alle partiellen Ableitungen im Punkt x existieren.

Beim Bestimmen der partiellen Ableitung betrachten wir also das Verhalten der Funktion, wenn lediglich eine der Variablen variiert wird. Wir können dabei also die üblichen Ableitungsregeln anwenden und betrachten alle anderen Variablen als Konstanten.

Die Existenz nur der partiellen Ableitungen ist in vielen Fällen eine zu schwache Bedingung wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 6.21. Die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \begin{cases} 1 & x = 0 \text{ oder } y = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist im Punkt $(0, 0)$ partiell differenzierbar, aber nicht stetig.

Über lediglich partiell differenzierbare Funktionen können wir kaum Aussagen treffen, es bedarf also eines stärkeren Differenzierbarkeitsbegriffes. Dazu formulieren wir zunächst den bereits bekannten Differenzierbarkeitsbegriff für Funktionen einer Variablen um.

Satz 6.22. Sei $U \subset \mathbb{R}$ offen und $x \in U$. Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{K}$ ist differenzierbar in x , genau dann wenn $a \in \mathbb{K}$ und $\varphi : U \rightarrow \mathbb{K}$ existieren, so dass

$$f(x+h) = f(x) + ah + \varphi(h)$$

gilt und

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(h)}{|h|} = 0.$$

Beweis. Seien zunächst a und φ wie oben gefordert. Dann gilt

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = a + \frac{\varphi(h)}{|h|} \frac{|h|}{h}$$

und die rechte Seite dieser Gleichung konvergiert für $h \rightarrow 0$ nach Voraussetzung gegen a . Damit ist f in x differenzierbar und $f'(x) = a$.

Sei andererseits f in x differenzierbar und definiere

$$\varphi(h) = f(x+h) - f(x) - f'(x)(h)$$

Dann gilt die geforderte Gleichung (für $a = f'(x)$) und

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(h)}{|h|} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right) \frac{h}{|h|} = 0. \quad \square$$

Der entscheidende Punkt in obiger Definition ist, dass f in der Nähe des Punktes x durch die lineare Funktion $h \mapsto f(x) + ah$ approximiert wird und das der Restterm $\varphi(h)$ schneller als linear gegen 0 geht. In dieser Formulierung können wir den Differenzierbarkeitsbegriff auf Funktionen mehrerer Variabler verallgemeinern.

Definition 6.23. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U$ und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$. Die Abbildung f heißt in $x \in U$ differenzierbar oder total differenzierbar, falls eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ existieren, so dass

$$f(x+h) = f(x) + A(h) + \varphi(h)$$

und

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(h)}{\|h\|} = 0$$

gilt. Wir werden gleich zeigen, dass die lineare Abbildung A , falls sie existiert, eindeutig bestimmt ist. Wir nennen sie die totale Ableitung von f im Punkt x und bezeichnen diese mit $Df(x)$.

Wir nennen f total differenzierbar, falls es in jedem Punkt $x \in U$ total differenzierbar ist.

Durch die Voraussetzung U offen stellen wir sicher, dass für jedes $x \in U$ alle Punkte $x+h$ in U enthalten sind, wenn h hinreichend klein ist. Da auf \mathbb{R}^n alle Normen äquivalent sind, ist es unerheblich welche Norm wir für die Definition verwenden (Warum?).

Bemerkung 6.24. Falls die Funktion total differenzierbar ist, dann gilt natürlich

$$\varphi(h) = f(x+h) - f(x) - A(h).$$

Eine Funktion ist also genau dann total differenzierbar, wenn es eine lineare Abbildung A gibt so, dass

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - A(h)}{\|h\|} = 0$$

gilt.

Beispiel 6.25. (i) Falls $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung ist, dann gilt für alle $x, h \in \mathbb{R}^n$

$$A(x+h) = A(x) + A(h).$$

Damit ist A differenzierbar und die Ableitung ist die konstante Funktion $D\varphi(x) = A$. Die Ableitung einer linearen Abbildung ist also konstant und in jedem Punkt gleich der Abbildung.

(ii) Die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) \mapsto \frac{1}{1 + x_1^2 + x_2^2}$$

Wir schreiben nun für $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2) &= \frac{1}{1 + (x_1 + h_1)^2 + (x_2 + h_2)^2} - \frac{1}{1 + x_1^2 + x_2^2} \\ &= -\frac{2x_1h_1 + 2x_2h_2}{(1 + x_1^2 + x_2^2)^2} \\ &+ \left(\frac{1}{(1 + x_1^2 + x_2^2)^2} - \frac{1}{(1 + (x_1 + h_1)^2 + (x_2 + h_2)^2)(1 + x_1^2 + x_2^2)} \right) (2x_1h_1 + 2x_2h_2) \\ &\quad - \frac{h_1^2 + h_2^2}{(1 + (x_1 + h_1)^2 + (x_2 + h_2)^2)(1 + x_1^2 + x_2^2)}. \end{aligned}$$

Die Abbildung

$$(h_1, h_2) \mapsto -\frac{2x_1h_1 + 2x_2h_2}{(1 + x_1^2 + x_2^2)^2}$$

ist linear (in den Variablen h_1, h_2 , natürlich nicht in den anderen Variablen). Für $(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)$ gilt für die anderen Terme

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{(1 + x_1^2 + x_2^2)^2} - \frac{1}{(1 + (x_1 + h_1)^2 + (x_2 + h_2)^2)(1 + x_1^2 + x_2^2)} \right| \frac{|2x_1h_1 + 2x_2h_2|}{\|(h_1, h_2)\|} &\rightarrow 0 \\ \left| \frac{1}{(1 + (x_1 + h_1)^2 + (x_2 + h_2)^2)(1 + x_1^2 + x_2^2)} \right| \frac{h_1^2 + h_2^2}{\|(h_1, h_2)\|} &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

Da der Punkt (x_1, x_2) beliebig war, ist die Funktion überall total differenzierbar.

(iii) Wir betrachten die Matrixmultiplikation

$$\begin{aligned}\Phi : \mathbb{R}^{n \times m} \times \mathbb{R}^{m \times k} &\rightarrow \mathbb{R}^{n \times k} \\ (A, B) &\mapsto AB.\end{aligned}$$

Für ein Paar von Matrizen (H_1, H_2) im Definitionsbereich können wir schreiben

$$\begin{aligned}\Phi(A + H_1, B + H_2) - \Phi(A, B) &= (A + H_1)(B + H_2) - AB \\ &= AH_2 + H_1B + H_1H_2.\end{aligned}$$

Die Abbildung

$$(H_1, H_2) \mapsto AH_2 + H_1B$$

ist linear. Um die Konvergenz des Restterms zu untersuchen wählen wir eine passende Norm auf dem Definitionsbereich (da alle Normen äquivalent sind, ist egal welche): $\|(H_1, H_2)\| = \|H_1\| + \|H_2\|$ wobei die Normen auf der rechten Seite die Operatornorm bezeichnen. Dann gilt

$$\frac{\|H_1H_2\|}{\|(H_1, H_2)\|} \leq \frac{(\|H_1\| + \|H_2\|)(\|H_1\| + \|H_2\|)}{\|(H_1, H_2)\|} = \|(H_1, H_2)\|$$

und die rechte Seite konvergiert für $(H_1, H_2) \rightarrow 0$ gegen 0. Damit haben wir für die Matrizenmultiplikation die totale Differenzierbarkeit gezeigt und die Ableitung bestimmt.

Satz 6.26. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U$ und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$. Falls f in x total differenzierbar ist, existieren alle Richtungsableitungen und für jedes $v \in \mathbb{R}^n$ gilt $\partial_v f(x) = Df(x)(v)$.

Beweis. Der Fall $v = 0$ ist trivial, es sei also $v \neq 0$. Nach Voraussetzung existiert eine lineare Abbildung A so, dass

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - A(h)}{\|h\|} = 0$$

ist. Sei $\epsilon > 0$ dann existiert also $\delta > 0$ so, dass für alle $h \in B_\delta(0)$ gilt

$$\frac{\|f(x+h) - f(x) - A(h)\|}{\|h\|} < \frac{\epsilon}{\|v\|}.$$

Für $t \in \left(-\frac{\delta}{\|v\|}, \frac{\delta}{\|v\|}\right)$ gilt dann $\|tv\| < \delta$ und damit auch

$$\frac{\|f(x+tv) - f(x) - tA(v)\|}{|t| \|v\|} = \frac{1}{\|v\|} \left\| \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} - A(v) \right\| < \frac{\epsilon}{\|v\|}.$$

Wir haben also gezeigt, dass die Richtungsableitung im Punkt x in Richtung v existiert und $\partial_v f(x) = A(v)$ ist. Insbesondere haben wir dadurch gezeigt, dass die lineare Abbildung A eindeutig bestimmt ist. Es ist also gerechtfertigt $Df(x) = A$ zu schreiben. \square

Bemerkung 6.27. Wir können nun insbesondere die Matrixdarstellung der totalen Ableitung bestimmen. Dazu seien $f_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ die Komponentenfunktionen von f , das heißt es gilt $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$ für alle $x \in U$. Sind nun e_1, \dots, e_n und $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_m$ die Standardbasis von \mathbb{R}^n beziehungsweise \mathbb{R}^m , dann gilt $f(x) = f_1(x)\tilde{e}_1 + \dots + f_m(x)\tilde{e}_m$ und

$$Df(x)(e_i) = \partial_i f(x) = \partial_i f_1(x)\tilde{e}_1 + \dots + \partial_i f_m(x)\tilde{e}_m.$$

Die zur linearen Abbildung $Df(x)$ gehörige Matrix hat also in der j -ten Zeile und der i -ten Spalte den Eintrag $\partial_i f_j(x)$. Wir nennen diese Matrix die Jacobi-Matrix (oder Funktionalmatrix) der Abbildung f an der Stelle x . Falls eine Abbildung total differenzierbar ist, dann entspricht ihre totale Ableitung der Linksmultiplikation mit der Jacobi-Matrix. Für die Existenz der Jacobi-Matrix ist aber natürlich nur die partielle Differenzierbarkeit notwendig. Diese ist also nicht hinreichend für die totale Differenzierbarkeit.

Insbesondere ist die Ableitung einer „gewöhnlichen“ Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an der Stelle x also streng genommen nicht die Zahl (beziehungsweise 1×1 Jacobi-Matrix) $f'(x)$ sondern die zugehörige lineare Abbildung $h \mapsto f'(x)h$. Wie in diesem eindimensionalen Fall, werden wir jedoch häufig nicht streng zwischen der Jacobi-Matrix und der durch sie definierten linearen Abbildung unterscheiden. Insbesondere werden wir auch die Jacobi-Matrix mit $Df(x)$ bezeichnen.

Bemerkung 6.28. (i) Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar, dann ist die Ableitung eine Funktion von $U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n | \mathbb{R}^m)$, bildet also nicht mehr in den selben Raum ab. Lediglich für Funktionen einer Variablen können wir $\mathcal{L}(\mathbb{R} | \mathbb{R}^m)$ mit $\mathbb{R}^{1 \times m}$ und \mathbb{R}^m identifizieren, so dass die Abbildung und ihre Ableitung „im selben Raum leben“.

- (ii) Eine Abbildung f ist total differenzierbar in x genau dann, wenn die Jacobi-Matrix $Df(x)$ existiert (f also in x partiell differenzierbar ist) und es gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - Df(x)h}{\|h\|} = 0.$$

Die Jakobi-Matrix anzugeben ist eine Möglichkeit die totale Ableitung zu spezifizieren, aber nicht in allen Fällen die beste.

- (iii) Aus dieser Formulierung ist ersichtlich, dass eine Abbildung $f = (f_1, \dots, f_m)$, mit $f_1, \dots, f_m : U \rightarrow \mathbb{R}$ total differenzierbar ist, genau dann wenn f_i total differenzierbar ist für jedes $i \in \{1, \dots, m\}$. Die Jakobi-Matrix $Df_i(x)$ ist gerade die i -te Zeile der Jakobi-Matrix $Df(x)$.
- (iv) Wie im eindimensionalen Fall folgt aus der totalen Differenzierbarkeit insbesondere die Stetigkeit von f , denn

$$\lim_{h \rightarrow 0} (f(x+h) - f(x)) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x) - Df(x)h}{\|h\|} \|h\| + Df(x)h \right) = 0.$$

- (v) Sowohl partielle, als auch totale Differenzierbarkeit sind lokale Eigenschaften.
- (vi) Um Verwirrung zu vermeiden: Wenn f auf einer offenen Menge U differenzierbar ist, dann ist die Abbildung $h \mapsto Df(x)h$ linear für jedes $x \in U$. Die Abbildung $x \mapsto Df(x)$ ist in den meisten Fällen nicht linear.
- (vii) Wir haben die Definition hier für Abbildungen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ definiert, sie ergibt jedoch für Abbildungen $f : V \rightarrow W$ Sinn, wenn V, W normierte Vektorräume sind. Dabei kann V auch unendlichdimensional sein (zum Beispiel ein Funktionenraum), f also eine Abbildung von „unendlich vielen Variablen“. In diesem Fall gibt es aber wesentlich verschiedene Normen und damit auch wesentlich verschiedene Differenzierbarkeitsbegriffe.

Satz 6.29 (Kettenregel). *Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ offen, $x \in U$, $g : U \rightarrow V$ total differenzierbar in x und $f : V \rightarrow \mathbb{R}^k$ total differenzierbar in $g(x)$. Dann ist $f \circ g$ total differenzierbar in x und es gilt*

$$D(f \circ g)(x) = Df(g(x)) \circ Dg(x).$$

Beweis. Wir definieren die folgende Hilfsabbildung

$$\psi(z) := \begin{cases} \frac{f(g(x)+z) - f(g(x)) - Df(g(x))z}{\|z\|} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0, \end{cases}$$

welche für z in einer Umgebung \tilde{U} der 0 definiert ist. Da f im Punkt $g(x)$ differenzierbar ist, ist diese Abbildung stetig im Punkt 0 und es gilt für alle $z \in \tilde{U}$

$$f(g(x) + z) = \|z\| \psi(z) + f(g(x)) + Df(g(x))z. \quad (6.1)$$

Da g im Punkt x differenzierbar ist, ist es dort insbesondere stetig, so dass für hinreichend kleine h

$$g(x + h) - g(x) \in \tilde{U}$$

ist und es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\|g(x + h) - g(x)\|}{\|h\|} &= \left\| \frac{g(x + h) - g(x) - Dg(x)h}{\|h\|} + Dg(x) \frac{h}{\|h\|} \right\| \\ &\leq \left\| \frac{g(x + h) - g(x) - Dg(x)h}{\|h\|} \right\| + \left\| Dg(x) \frac{h}{\|h\|} \right\|. \end{aligned}$$

Für $h \rightarrow 0$ konvergiert der erste Term gegen 0, ist also insbesondere beschränkt für kleine h . Der zweite Term ist ebenfalls beschränkt durch die Operatornorm $\|Dg(x)\|$.

Nutzen wir nun Gleichung (6.1) für $z = g(x + h) - g(x)$, erhalten wir

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\|h\|} (f \circ g(x + h) - f \circ g(x) - Df(g(x)) \circ Dg(x)h) \\ &= \frac{\|g(x + h) - g(x)\|}{\|h\|} \psi(g(x + h) - g(x)) + Df(g(x)) \left(\frac{g(x + h) - g(x) - Dg(x)h}{\|h\|} \right). \end{aligned}$$

Der erste Summand auf der rechten Seite konvergiert gegen 0, da er ein Produkt aus einer beschränkten und einer gegen 0 konvergenten Funktion ist (g ist stetig in x und ψ stetig in 0). Der zweite Term konvergiert ebenfalls gegen 0, da g im Punkt x total differenzierbar ist und $Df(g(x))$ als lineare Abbildung stetig ist. Damit ist aber die totale Differenzierbarkeit von $f \circ g$ im Punkt x sowie die Kettenregel gezeigt. \square

Korollar 6.30. *Sei $\varphi : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung, und $f : \mathbb{R}^m \rightarrow V$ differenzierbar, dann gilt*

$$D\varphi \circ f(x) = D\varphi(f(x)) \circ Df(x) = \varphi \circ Df(x).$$

Die totale Ableitung vertauscht also mit beliebigen linearen Abbildungen.

Wie wir im Beispiel 6.25 (ii) gesehen haben, ist das Überprüfen von totaler Differenzierbarkeit anhand der Definition sehr aufwändig. Der folgende Satz erlaubt es uns jedoch in vielen relevanten Fällen, die totale Differenzierbarkeit zu schlussfolgern.

Satz 6.31. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$. Wenn für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ die partielle Ableitung $\partial_i f$ existiert und stetig ist, dann ist f total differenzierbar.*

Lemma 6.32. *Sei $x \in U$ und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar. Sei $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ so, dass $K_{\|h\|}(x) \subset U$. Dann existieren $\xi_1, \dots, \xi_n \in K_{\|h\|}(x)$ so, dass*

$$f(x+h) - f(x) = \partial_1 f(\xi_1)h_1 + \dots + \partial_n f(\xi_n)h_n.$$

Beweis. Sei e_1, \dots, e_n die Standardbasis des \mathbb{R}^n und definiere $x_0 = x$, $x_i = x_{i-1} + h_i e_i$. Dann ist $x_n = x + h$. Weiter gilt

$$\|x_i - x\| = \|h_1 e_1 + \dots + h_i e_i\| = \sqrt{|h_1|^2 + \dots + |h_i|^2} \leq \sqrt{|h_1|^2 + \dots + |h_n|^2} = \|h\|$$

die Punkte x_i sind also alle in $K_{\|h\|}(x) \subset U$ enthalten.

Für ein festes $i \in \{1, \dots, n\}$ verfahren wir wie folgt, falls $h_i \neq 0$ ist. Wir betrachten die Hilfsfunktion

$$g(t) := f(x_{i-1} + t h_i e_i).$$

Da $K_{\|h\|}(x)$ konvex ist, ist g auf $[0, 1]$ definiert und da U offen ist sogar auf $(-\epsilon, 1 + \epsilon)$ für ein hinreichend kleines $\epsilon > 0$. Es gilt

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{g(t+s) - g(t)}{s} = h_i \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(x_{i-1} + (t+s)h_i e_i) - f(x_{i-1} + t h_i e_i)}{s h_i} = h_i \partial_i f(x_{i-1} + t h_i e_i).$$

Damit ist g differenzierbar und es gilt $g'(t) = h_i \partial_i f(x_{i-1} + t h_i e_i)$. Insbesondere ist g stetig auf $[0, 1]$ und wir können den Mittelwertsatz anwenden um $\theta \in (0, 1)$ zu erhalten, so dass

$$h_i \partial_i f(x_{i-1} + \theta h_i e_i) = g'(\theta) = g(1) - g(0) = f(x_i) - f(x_{i-1}).$$

Für $\xi_i := x_{i-1} + \theta e_i$ erhalten wir also

$$h_i \partial_i f(\xi_i) = f(x_i) - f(x_{i-1}).$$

Da die Kugel $K_{\|h\|}(x)$ konvex ist und x_i und x_{i-1} enthält, ist auch $\xi_i \in K_{\|h\|}(x)$.

Schließlich erhalten wir

$$f(x+h) - f(x) = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) = \sum_{i=1}^n \partial_i f(\xi_i) h_i.$$

Dabei ist zu beachten, dass falls $h_i = 0$ ist, der betreffende Term in beiden Summen verschwindet, unabhängig vom Wert von ξ_i . Wir können für diese Fälle also willkürlich z.B. $\xi_i = x_i$ setzen. \square

Beweis von Satz 6.31. Da totale Differenzierbarkeit komponentenweise festgestellt werden kann, reicht es den Fall $m = 1$ zu betrachten. Wähle $x \in U$ fest und sei $\epsilon > 0$ so, dass $B_\epsilon(x) \subset U$. Nach dem vorhergehenden Lemma existieren für jedes $h = (h_1, \dots, h_n) \in B_\epsilon(0)$ Punkte $\xi_1(h), \dots, \xi_n(h) \in K_{\|h\|}(x)$, so dass

$$f(x+h) - f(x) = \partial_1 f(\xi_1(h)) h_1 + \dots + \partial_n f(\xi_n(h)) h_n.$$

Wir setzen

$$a(h) := (\partial_1 f(\xi_1(h)) - \partial_1 f(x), \dots, \partial_n f(\xi_n(h)) - \partial_n f(x))$$

und erhalten

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) - Df(x)h &= (\partial_1 f(\xi_1(h)) - \partial_1 f(x)) h_1 + \dots + (\partial_n f(\xi_n(h)) - \partial_n f(x)) h_n \\ &= \langle a(h) | h \rangle, \end{aligned}$$

wobei $\langle \cdot | \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt im \mathbb{R}^n ist.

Dann folgt mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|f(x+h) - f(x) - Df(x)h| = |\langle a(h) | h \rangle| \leq \|a(h)\| \|h\|.$$

Da $\|\xi_i(h) - x\| \leq \|h\|$ gilt $\lim_{h \rightarrow 0} \xi_i(h) = x$ für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$. Nach Voraussetzung ist $\partial_i f$ stetig, also gilt $\lim_{h \rightarrow 0} \partial_i f(\xi_i(h)) = \partial_i f(x)$. Also konvergiert $a(h)$ gegen 0 und es gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - Df(x)h|}{\|h\|} \leq \lim_{h \rightarrow 0} \|a(h)\| = 0.$$

Damit ist f in x total differenzierbar und da $x \in U$ beliebig war ist f total differenzierbar auf ganz U . \square

Definition 6.33. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Die Abbildung $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt stetig differenzierbar, wenn alle ihre partiellen Ableitungen stetig sind. Den Vektorraum aller stetig differenzierbaren Funktionen bezeichnen wir mit $\mathbf{C}^1(U, \mathbb{R}^m)$ beziehungsweise – im Fall $m = 1$ – mit $\mathbf{C}^1(U)$.

Der obige Satz sagt dann aus, dass jede stetig differenzierbare Funktion insbesondere total differenzierbar ist.

Beispiel 6.34. (i) Wir betrachten nochmal Beispiel 6.25 (ii). Für die Abbildung

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{1 + x_1^2 + x_2^2}$$

rechnen wir leicht die partiellen Ableitungen aus

$$Df(x_1, x_2) = \left(-\frac{2x_1}{(1 + x_1^2 + x_2^2)^2}, -\frac{2x_2}{(1 + x_1^2 + x_2^2)^2} \right)$$

und überprüfen, dass diese stetig sind. Damit ist die Abbildung total differenzierbar und die obige Jacobi-Matrix (oder richtiger die Multiplikation mit dieser) ist ihre totale Ableitung. Seien $N \in \mathbb{N}$ und $c_\eta \in \mathbb{K}$ Koeffizienten für jeden Multiindex $\eta \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\eta| \leq N$. Dann ist das Polynom

$$p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K} \\ x \mapsto \sum_{\eta, |\eta| \leq N} c_\eta x^\eta$$

total differenzierbar.

Dazu sehen wir uns die partielle Ableitung eines Monoms an:

$$\partial_i x^\eta = \partial_i x_1^{\eta_1} \cdots x_{i-1}^{\eta_{i-1}} x_i^{\eta_i} x_{i+1}^{\eta_{i+1}} \cdots x_n^{\eta_n} = \eta_i x_1^{\eta_1} \cdots x_{i-1}^{\eta_{i-1}} x_i^{\eta_i-1} x_{i+1}^{\eta_{i+1}} \cdots x_n^{\eta_n}$$

und stellen fest, dass diese ein Polynom ist. Damit ist jede partielle Ableitung eines Polynoms wiederum ein Polynom also insbesondere stetig. Dann folgt mit Satz 6.31, dass p total differenzierbar ist.

Für die Mittelwertsätze verwenden wir die folgende Notation für die Verbindungsstrecke von x und y :

$$S_{xy} := \{x + t(y - x) \mid t \in (0, 1)\} \\ \overline{S}_{xy} := \{x + t(y - x) \mid t \in [0, 1]\}$$

Satz 6.35 (Mittelwertsatz für reellwertige Funktionen). *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$, $x, y \in U$ und $\overline{S}_{xy} \subset U$. Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar auf S_{xy} und stetig in x und y , dann existiert $\xi \in S_{xy}$ so, dass*

$$f(y) - f(x) = Df(\xi)(y - x).$$

Beweis. Wir definieren die Hilfsfunktion

$$\begin{aligned} g : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(x + t(y - x)). \end{aligned}$$

Nach der Kettenregel und der Voraussetzung ist g differenzierbar auf $(0, 1)$ und stetig auf $[0, 1]$, also können wir den (eindimensionalen) Mittelwertsatz anwenden. Wir erhalten also $\theta \in (0, 1)$, so dass $g(1) - g(0) = g'(\theta)$. Daraus folgt mit der Kettenregel

$$f(y) - f(x) = g(1) - g(0) = g'(\theta) = Df(x + \theta(y - x))(y - x)$$

also für $\xi = x + \theta(y - x)$ die gesuchte Aussage. \square

Satz 6.36 (Allgemeiner Mittelwertsatz). *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$, $x, y \in U$ und $\bar{S}_{xy} \subset U$. Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar auf S_{xy} und stetig in x und y , dann existiert $\xi \in S_{xy}$ so, dass*

$$\|f(y) - f(x)\| \leq \|Df(\xi)(y - x)\|.$$

Beweis. Wir betrachten zunächst für festes $a \in \mathbb{R}^m$ die (skalarwertige) Hilfsfunktion $a^T f(x) = \langle a | f(x) \rangle$. Nach dem vorhergehenden Satz existiert $\xi \in S_{xy}$ so, dass

$$a^T f(y) - a^T f(x) = a^T Df(\xi)(y - x).$$

Dabei haben wir zum Ausrechnen der Ableitung die Kettenregel (Satz 6.29) sowie Beispiel 6.25 (i) verwendet. Wir setzen nun $a = f(y) - f(x)$ ein, nutzen Skalarproduktschreibweise und erhalten

$$\|f(y) - f(x)\|^2 = \langle f(y) - f(x) | Df(\xi)(y - x) \rangle \leq \|f(y) - f(x)\| \|Df(\xi)(y - x)\|.$$

Dabei haben wir die Cauchy-Schwarz Ungleichung genutzt und wir erhalten durch Division durch $\|f(y) - f(x)\|$ das gewünschte Ergebnis. \square

Korollar 6.37. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar. Falls $Df \equiv 0$ auf U gilt, so ist f lokal konstant, das heißt für jedes $x \in U$ existiert eine Umgebung V so, dass f auf V konstant ist.*

Beweis. Sei $x \in U$ und wähle $\epsilon > 0$ so, dass $B_\epsilon(x) \subset U$. Dann existiert für alle $y \in B_\epsilon(x)$ nach dem allgemeinen Mittelwertsatz ein $\xi \in S_{xy} \subset B_\epsilon(x)$ so, dass

$$\|f(y) - f(x)\| \leq \|Df(\xi)(y - x)\| = 0$$

gilt, es ist also $f(y) = f(x)$. Damit ist f auf $B_\epsilon(x)$ konstant. \square

Bemerkung 6.38. Eine Funktion mit verschwindender Ableitung muss nicht konstant sein wie bereits im Eindimensionalen durch das Beispiel

$$f : (-2, -1) \cup (1, 2) \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

illustriert wird.

Aus der lokalen Konstanz aus dem obigen Korollar folgt die Konstanz auf zusammenhängenden Mengen (zum Beispiel Intervallen). Wir werden hier jedoch nicht definieren was zusammenhängend bedeutet.

6.3 Höhere Ableitungen

Wir können prinzipiell ohne weiteres partielle und totale Differenzierbarkeit höherer Ordnung definieren. Dabei ist lediglich zu beachten, dass wir für die Definition der höheren Ableitungen das Verhalten der Funktion in einer Umgebung des untersuchten Punktes kennen müssen.

Definition 6.39. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Für $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ definieren wir rekursiv für $k \geq 1$:

- (i) f ist $k+1$ mal partiell differenzierbar, wenn alle partiellen Ableitungen der Ordnung k partiell differenzierbar sind,
- (ii) f ist $k+1$ mal total differenzierbar, wenn die totale Ableitung $D^k f$ total differenzierbar ist,
- (iii) die partiellen Ableitungen der Ordnung $k+1$ von f sind die Abbildungen $\partial_i g$ wobei $i \in \{1, \dots, n\}$ und g eine partielle Ableitung von f der Ordnung k ist,
- (iv) die totale Ableitung $D^{k+1} f$ der Ordnung $k+1$ ist die Abbildung $D(D^k f)$.

Die Funktion f heißt k mal stetig differenzierbar, falls alle partiellen Ableitungen der Ordnung höchsten k stetig sind. Der Vektorraum aller k mal stetig differenzierbaren Funktionen wird mit $\mathbf{C}^k(U, \mathbb{R}^m)$ bezeichnet beziehungsweise – im Fall $m = 1$ mit $\mathbf{C}^k(U)$. Die Funktion f heißt beliebig differenzierbar oder glatt, falls sie k mal stetig differenzierbar ist für jedes $k \in \mathbb{N}$. Den Vektorraum der glatten Funktionen bezeichnen wir mit $\mathbf{C}^\infty(U, \mathbb{R}^m)$.

Wir sagen eine Funktion ist k mal (partiell) differenzierbar im Punkt x , wenn es eine offene Umgebung U von x gibt so, dass f auf U k mal (partiell) differenzierbar ist.

Bemerkung 6.40. (i) Wir haben gesehen, dass für differenzierbares $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ die totale Ableitung eine Abbildung

$$Df : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n | \mathbb{R}^m)$$

ist. Die zweite totale Ableitung ist dann, falls sie existiert, die Ableitung dieser Abbildung, also eine Abbildung

$$D^2 f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n | \mathcal{L}(\mathbb{R}^n | \mathbb{R}^m)).$$

Für höhere Ableitungen wird das natürlich schnell unübersichtlich. Wir können die Situation jedoch etwas verbessern, indem wir den folgenden Isomorphismus von Vektorräumen verwenden:

$$\Phi : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n | \mathcal{L}(\mathbb{R}^n | \mathbb{R}^m)) \rightarrow \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n | \mathbb{R}^m)$$

gegeben durch $\Phi(\varphi)(u, v) = \varphi(u)(v)$ für alle $u, v \in \mathbb{R}^n$ (siehe Übungsaufgabe). Wir werden also die n -te totale Ableitung meist als multilineare Abbildung mit n Argumenten auffassen. Den Isomorphismus Φ werden wir dabei meist nicht explizit aufschreiben.

- (ii) Sei $u \in \mathbb{R}^n$ fest. Dann ist $x \mapsto Df(x)u$ die Verkettung der Abbildung $x \mapsto Df(x)$ mit der linearen Abbildung $A \mapsto A(u)$ (letztere ist auf $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n | \mathbb{R}^m)$ definiert). Da die Ableitung mit beliebigen linearen Abbildungen vertauscht (Korollar 6.30) erhalten wir für $v \in \mathbb{R}^n$

$$D(Df(\cdot)u)v = D^2f(\cdot)(u, v).$$

Diese Gleichung liefert uns eine geometrische Interpretation der zweiten Ableitung. Der Ausdruck in Klammern auf der linken Seite ist die Richtungsableitung in Richtung u als Funktion von x . Die zweite Ableitung $D^2f(\cdot)(u, v)$ ist also die Ableitung dieser Richtungsableitung in Richtung v . Analoge Interpretationen erhalten wir natürlich für die höheren Ableitungen. Wichtig ist, dass es hier im Allgemeinen noch auf die Reihenfolge der Argumente u, v ankommt.

- (iii) Aus der obigen Überlegung ergeben sich durch Anwendung auf die Standardbasisvektoren e_1, \dots, e_n auch die „Komponentenfunktionen von $D^k f$ “

$$D^n f(x)(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}) = \partial_{i_k} \partial_{i_{k-1}} \cdots \partial_{i_1} f(x).$$

Wir können also $D^n f(x)$ auch als „höherdimensionale“ Jacobi-Matrix auffassen, was aber nur bedingt hilfreich ist.

- (iv) Wenden wir Satz 6.31 iterativ an, dann erhalten wir, dass Abbildungen aus $\mathbf{C}^k(U, \mathbb{R}^m)$ stets k mal total differenzierbar sind und dass $D^k f$ stetig ist. Glatte Abbildungen sind beliebig oft total differenzierbar und alle totalen Ableitungen stetig.

Beispiel 6.41. Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ x = (x_1, x_2) &\mapsto x_1^2 \cos(x_2) \end{aligned}$$

Für $u = u_1 e_1 + u_2 e_2$ und $v = v_1 e_1 + v_2 e_2$ erhalten wir dann für die zweite Ableitung

$$\begin{aligned} D^2 f(x)(u, v) &= u_1 v_1 D^2 f(x)(e_1, e_1) + u_1 v_2 D^2 f(x)(e_1, e_2) + u_2 v_1 D^2 f(x)(e_2, e_1) + u_2 v_2 D^2 f(x)(e_2, e_2) \\ &= u_1 v_1 2 \cos(x_2) - 2u_1 v_2 x_1 \sin(x_2) - 2u_2 v_1 x_1 \sin(x_2) - u_2 v_2 x_1^2 \cos(x_2). \end{aligned}$$

Wie erwartet hängt dieses Ergebnis linear von u und v ab (aber natürlich nicht von linear von x). Weiter fällt auf, dass die Koeffizienten der gemischten Terme $u_1 v_2$ und $u_2 v_1$ übereinstimmen.

Satz 6.42 (Satz von Schwarz). Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in \mathbf{C}^2(U, \mathbb{R}^m)$, dann gilt für alle $x \in U$ und alle $u, v \in \mathbb{R}^n$

$$D^2 f(x)(u, v) = D^2 f(x)(v, u).$$

Insbesondere gilt für die partiellen Ableitungen

$$\partial_{i_1} \partial_{i_2} f(x) = \partial_{i_2} \partial_{i_1} f(x)$$

für alle $i_1, i_2 \in \{1, \dots, n\}$.

Beweis. Es genügt den Fall $m = 1$ zu betrachten, da alle Ableitungen komponentenweise berechnet werden können.

Sei $x \in U$ fest und $\epsilon > 0$ so, dass $B_\epsilon(x) \subset U$. Falls $u = 0$ oder $v = 0$, verschwinden beide Seiten der zu beweisenden Gleichung (Warum?). Seien also $u, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und

$$0 < t < c := \frac{\epsilon}{2 \max \{\|u\|, \|v\|\}}.$$

Die Konstante c ist dabei so bemessen, dass die Argumente, auf die f im folgenden angewendet wird, tatsächlich im Definitionsbereich U liegen.

Wir wenden den (eindimensionalen) Mittelwertsatz auf die Hilfsfunktion

$$\begin{aligned} g_1 : [0, t] &\rightarrow \mathbb{R} \\ s &\mapsto f(x + tv + su) - f(x + su) \end{aligned}$$

an und finden $\xi \in (0, t)$ so, dass

$$g_1(t) - g_1(0) = g_1'(\xi)t = (Df(x + tv + \xi u)(u) - Df(x + \xi u)(u))t.$$

Dabei haben wir die Kettenregel verwendet um die Ableitung g' zu bestimmen. Wir wenden nun erneut den Mittelwertsatz an, diesmal auf die Hilfsfunktion

$$\begin{aligned} g_2 : [0, t] &\rightarrow \mathbb{R} \\ s &\mapsto Df(x + sv + \xi u)(u) \end{aligned}$$

und erhalten $\eta \in (0, t)$ so, dass

$$g_2(t) - g_2(0) = g_2'(\eta)t = D(Df(\cdot)(u))(x + \eta v + \xi u)v = D^2f(x + \eta v + \xi u)(u, v)t.$$

Für die letzte Umformung haben wir wiederum die Kettenregel sowie die Definition der zweiten Ableitung benutzt.

Zusammen haben wir für jedes $t \in (0, c)$ Zahlen $\xi, \eta \in (0, t)$ gefunden so, dass

$$\begin{aligned} f(x + tv + tu) - f(x + tv) - f(x + tu) + f(x) \\ &= g_1(t) - g_1(0) = (Df(x + tv + \xi u)(u) - Df(x + \xi u)(u))t \\ &= (g_2(t) - g_2(0))t = D^2f(x + \eta v + \xi u)(u, v)t^2. \end{aligned}$$

Da die zweite Ableitung als stetig vorausgesetzt wurde und ξ und η für $t \rightarrow 0$ gegen 0 konvergieren, erhalten wir

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x + tv + tu) - f(x + tv) - f(x + tu) + f(x)}{t^2} = D^2f(x)(u, v). \quad (6.2)$$

Diese Gleichung gilt für jedes $u, v \in \mathbb{R}^n$. Die linke Seite der Gleichung ist symmetrisch unter Vertauschung von u und v , also muss die rechte Seite es auch sein und es gilt $D^2f(x)(u, v) = D^2f(x)(v, u)$.

Setzen wir für u und v Elemente der Standardbasis ein, also $u = e_{i_1}$ und $v = e_{i_2}$, so erhalten wir die Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen. \square

Bemerkung 6.43. (i) Mittels Induktion folgt, dass $D^k f(x)(u_1, \dots, u_k)$ seinen Wert unter beliebigen Vertauschungen der u_i nicht ändert vorausgesetzt $D^k f$ ist stetig. Man sagt, die Multilinearform $D^k f(x)$ ist symmetrisch. Die Reihenfolge der Anwendung von höchstens k partiellen Ableitungen ist also unerheblich falls $f \in \mathbf{C}^k(U, \mathbb{R}^m)$ ist.

(ii) Gleichung (6.2) stellt die zweite Ableitung mittels eines einfachen Grenzwertes dar. Eine solche Darstellung kann zum Beispiel für die Diskretisierung von Differenzialgleichungen hilfreich sein. Es wurde jedoch zweimal stetig differenzierbares f vorausgesetzt. Es gibt Funktionen, für die der Grenzwert auf der linken Seite existiert, die aber nicht zweimal differenzierbar sind.

Definition 6.44. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine l mal differenzierbare Funktion und $x \in U$. Dann heißt

$$T_x^l f(h) := \sum_{k=0}^l \frac{1}{k!} D^k f(x)(h, \dots, h)$$

das Taylorpolynom der Abbildung f vom Grad k im Punkt x .

Bemerkung 6.45. Stellen wir h bezüglich der Standardbasis dar, also $h = \sum_{i=1}^n h_i e_i$, dann können wir Koordinatendarstellungen der einzelnen Terme bestimmen wie wir hier exemplarisch für den Term zweiter Ordnung zeigen:

$$D^2 f(x)(h, h) = \sum_{i,j=1}^n h_i h_j D^2 f(x)(e_i, e_j) = \sum_{i,j=1}^n h_i h_j \partial_i \partial_j f(x).$$

Verwenden (und erweitern) wir die Multiindexnotation noch um die Festlegungen

$$\partial^\eta f(x) := \partial_1^{\eta_1} \partial_2^{\eta_2} \cdots \partial_n^{\eta_n} f(x) \eta! := \eta_1! \eta_2! \cdots \eta_n!$$

für den Multiindex $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$, dann können wir das Taylorpolynom vom Grad $l \in \mathbb{N}$ kompakt aufschreiben

$$\sum_{\eta, |\eta| \leq l} \frac{1}{\eta!} \partial^\eta f(x) h^\eta.$$

Satz 6.46 (Taylorformel). Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine $l+1$ mal differenzierbare Funktion und sei $h \in \mathbb{R}^n$ so, dass $x+th \in U$ für jedes $t \in [0, 1]$. Dann gilt für ein $\theta \in (0, 1)$

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^l \frac{1}{k!} D^k f(x)(h, \dots, h) + \frac{1}{(l+1)!} D^{l+1} f(x+\theta h)(h, \dots, h).$$

Beweisidee. Wende die eindimensionale Taylorformel mit Lagrange-Restglied auf die Hilfsfunktion

$$\begin{aligned} g : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(x+th) \end{aligned}$$

an. □

Bemerkung 6.47. (i) Analog zum eindimensionalen Fall approximiert die Taylorformel eine $l + 1$ mal differenzierbare Funktion also durch ein Polynom (in n Variablen) dessen Koeffizienten partielle Ableitungen von f an der Stelle x sind. Wenn f sogar $l + 1$ mal stetig differenzierbar ist, dann ist $D^{l+1}f$ in einer Umgebung von x beschränkt und wir können den Restterm in dieser Umgebung abschätzen

$$\left| f(x+h) - T_x^l f(h) \right| \leq L \|h\|^{l+1}$$

für ein $L > 0$. Eine $l + 1$ mal differenzierbare Funktion kann also in einer Umgebung von x durch ein Polynom vom Grad l approximiert werden und der Restterm geht schneller gegen 0 als $\|h\|^l$.

(ii) Analog zu Korollar 4.55 ist es im Prinzip möglich lokale Extrema von hinreichend differenzierbaren Funktionen mittels der Ableitungen zu charakterisieren (mit ähnlichem Beweis). Es gilt zum Beispiel: Falls $Df(x) = 0, \dots, D^{l-1}f(x) = 0$ und $D^l f(x) \neq 0$ so liegt in x

- ein Minimum vor, falls l gerade und $D^l f(x)$ positiv definit ist, das heißt $D^l f(x)(h, \dots, h) > 0$ für alle $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,
- ein Maximum vor, falls l gerade und $D^l f(x)$ negativ definit ist,
- kein Extremum vor, falls l ungerade oder $D^l f(x)$ indefinit ist, das heißt es existieren $h_1, h_2 \in \mathbb{R}^n$, so dass $D^l f(x)(h_1, \dots, h_1) > 0$ und $D^l f(x)(h_2, \dots, h_2) < 0$.

Im Allgemeinen ist diese Charakterisierung jedoch weniger hilfreich als im eindimensionalen Fall. Zum Einen ist es insbesondere für $l > 2$ relativ kompliziert zu bestimmen ob eine multilineare Abbildung positiv definit ist. Zum Anderen deckt die Charakterisierung nicht alle Fälle ab, da die Ableitungen auch semidefinit sein können, also $D^l f(x)(h, \dots, h) \geq 0$ für alle $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ aber $D^l f(x)(h, \dots, h) = 0$ für bestimmte $h \neq 0$.

6.4 Funktionenfolgen und Differenzierbarkeit

Beispiel 6.48. Betrachte die Funktionenfolge (f_n) gegeben durch

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C} \\ x &\mapsto \frac{1}{n} e^{inx}. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n}$$

also konvergiert die Folge (f_n) gleichmäßig gegen 0.

Die Folge der Ableitungen

$$f'_n(x) = ie^{inx} = i(e^{ix})^n$$

konvergiert jedoch nur für $x \in \{2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Das obige Beispiel suggeriert, dass die Bedingungen an die Konvergenz der Funktionenfolge nicht ausreichen um gutes Verhalten bezüglich der Ableitungen zu erreichen. Das liegt daran, dass selbst Funktionen mit beliebig kleinen Normen sehr stark oszillieren können, so dass die Ableitung entsprechend große Werte annimmt. Wir müssen also zusätzlich Bedingungen an die Konvergenz der Folge der Ableitungen stellen.

Bemerkung 6.49. Wir haben in Abschnitt 5.6 die Supremumnorm für zahlwertige Funktionen eingeführt und damit die gleichmäßige Konvergenz definiert. Falls $f : X \rightarrow V$ eine Abbildung von einem metrischen Raum in einen normierten Raum $(V, \|\cdot\|)$ ist, dann können wir analog definieren

$$\|f\|_\infty = \sup \{ \|f(x)\| \mid x \in X \}.$$

Auch die Räume der beschränkten $\mathbf{B}(X, V)$ beziehungsweise stetigen beschränkten $\mathbf{C}_b(X, V)$ Funktionen können damit analog definiert werden. Gleichmäßige Konvergenz einer Folge solcher Funktionen ist dann die Konvergenz bezüglich dieser Norm.

Satz 5.79 und Satz 5.82 gelten dann entsprechend, vorausgesetzt der Raum V ist vollständig. Dazu muss in den entsprechenden Beweisen nur jeweils der Betrag durch die Norm $\|\cdot\|$ ersetzt werden.

Satz 6.50. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ und $f_n : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar für jedes $n \in \mathbb{N}$. Falls die Folgen (f_n) und (Df_n) gleichmäßig gegen Funktionen $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ beziehungsweise $g : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n | \mathbb{R}^m)$ konvergieren, dann ist f differenzierbar und es gilt $Df = g$.

Beweis. Es genügt wiederum den Fall $m = 1$ zu betrachten, da wir im allgemeinen Fall den Satz komponentenweise anwenden können. Wie zuvor verwenden wir auf $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n | \mathbb{R}^m)$ die Operatornorm. Da die f_n stetig differenzierbar sind und Df_n gleichmäßig gegen g konvergieren, folgt aus Satz 5.82 die Stetigkeit von g .

Sei nun $x \in U$ fest und $\epsilon > 0$. Dann gibt es $\delta \geq 0$ so, dass $\|g(x+h) - g(x)\| < \frac{\epsilon}{3}$ falls $\|h\| < \delta$. Außerdem existiert $N \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n \geq N$ gilt $\|Df_n - g\|_\infty < \frac{\epsilon}{3}$.

Sei $h \in B_\delta(0)$. Dann existiert nach dem Mittelwertsatz für jedes n ein

$$\xi_n \in \{x + th \mid t \in (0, 1)\}$$

so, dass $f_n(x+h) - f_n(x) = Df_n(\xi_n)h$. Wir stellen fest, dass auch $\xi_n \in B_\delta(x)$. Dann gilt für $n \geq N$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|h\|} |f_n(x+h) - f_n(x) - Df_n(x)(h)| &= \frac{1}{\|h\|} |(Df_n(\xi_n) - Df_n(x))h| \\ &\leq \|Df_n(\xi_n) - Df_n(x)\| \\ &\leq \|Df_n(\xi_n) - g(\xi_n)\| + \|g(\xi_n) - g(x)\| + \|g(x) - Df_n(x)\| \\ &\leq 2\|Df_n - g\|_\infty + \|g(\xi_n) - g(x)\| < \epsilon. \end{aligned}$$

Für $n \rightarrow \infty$ erhalten wir

$$\frac{1}{\|h\|} |f(x+h) - f(x) - g(x)(h)| \leq \epsilon.$$

Da ϵ beliebig positiv gewählt war, haben wir gezeigt, dass die linke Seite für $h \rightarrow 0$ gegen 0 konvergiert. Damit ist nach Bemerkung 6.28 f in x (total) differenzierbar mit Ableitung $Df(x) = g(x)$. \square

Bemerkung 6.51. Wir können nun auf $\mathbf{C}_b^1(U, \mathbb{R}^m)$, dem Raum der differenzierbaren, beschränkten Funktionen mit beschränkten Ableitungen, eine Norm wie folgt definieren:

$$\|f\|_{\mathbf{C}^1} := \|f\|_\infty + \|Df\|_\infty. \quad (6.3)$$

Konvergenz bezüglich dieser Norm bedeutet dann genau gleichmäßige Konvergenz und gleichmäßige Konvergenz der Ableitungen. Dann ist der obige Satz äquivalent zu der Aussage, dass $\mathbf{C}_b^1(U, \mathbb{R}^m)$ mit dieser Norm vollständig ist (Warum?).

Wir formulieren die folgenden Resultate über Potenzreihen lediglich für Entwicklungen um 0, sie gelten aber sinngemäß für beliebige Entwicklungspunkte.

Satz 6.52. Sei $f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius r . Dann ist f auf $B_r(0)$ differenzierbar und es gilt $f'(x) = \sum_{n=0}^\infty n a_n x^{n-1}$.

Beweis. Wir untersuchen zunächst den Konvergenzradius R der formal abgeleiteten Reihe

$$\sum_{n=0}^\infty n a_n x^{n-1} = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^\infty n a_n x^n.$$

Da $(\sqrt[n]{n})$ gegen 1 konvergiert, gilt für $\epsilon > 0$ für hinreichend große n

$$(1 - \epsilon) \sqrt[n]{|a_n|} \leq \sqrt[n]{n |a_n|} \leq (1 + \epsilon) \sqrt[n]{|a_n|}$$

und damit

$$\frac{1-\epsilon}{r} = (1-\epsilon) \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n|a_n|} = \frac{1}{R} \leq \frac{1+\epsilon}{r}.$$

Da diese Gleichung für jedes positive ϵ gilt, muss $r = R$ sein.

Setze nun für $x \in B_r(0)$

$$g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Sei nun $x \in B_r(0)$ fest und wähle $a > 0$ so, dass $|x| < a < r$. Nach Satz 5.88 konvergieren die Partialsummenfolgen

$$f_N := \sum_{n=0}^N a_n x^n$$

$$g_N := \sum_{n=0}^N n a_n x^{n-1}$$

auf $B_a(0)$ (sogar auf $K_a(0)$) gleichmäßig gegen f beziehungsweise g . Offensichtlich gilt $f'_N = g_N$. Damit folgt aus Satz 6.50, dass die Grenzfunktion f differenzierbar auf $B_a(0)$ ist und $f' = g$.

Da Differenzierbarkeit eine lokale Eigenschaft ist und x innerer Punkt von $B_a(0)$ ist gilt $f'(x) = g(x)$. Da $x \in B_r(0)$ beliebig war, gilt $f' = g$ auf $B_r(0)$. \square

Korollar 6.53. Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius. Dann ist f beliebig differenzierbar, und es gilt $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$. Daraus folgt insbesondere, dass die Reihendarstellung einer Funktion f – so es eine solche gibt – eindeutig bestimmt ist.

Beweis. Die beliebige Differenzierbarkeit folgt induktiv aus dem vorhergehenden Satz. Ebenfalls induktiv folgt, dass wir auch die höheren Ableitungen gliedweise berechnen dürfen. Es gilt also

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) a_n x^{n-k}.$$

Setzen wir $x = 0$ ein erhalten wir $f^{(k)}(0) = k! a_k$. \square

Beispiel 6.54. Wir können jetzt nochmals die bereits bekannte Ableitung der Exponentialfunktion bestimmen

$$(e^x)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = e^x.$$

Bemerkung 6.55. Der obige Satz und das Korollar gelten – mit analogen Beweisen – auch für Potenzreihen, mit Banachraumwertigen Koeffizienten. Für uns ist hier insbesondere der Fall von Matrixwertigen Potenzreihen interessant. Die Matrixexponentialfunktion

$$t \mapsto \exp(At)$$

ist also beliebig differenzierbar und es gilt $\exp(At)' = A \exp(At)$.

Bemerkung 6.56. Es liegt nun nahe, für beliebige glatte Funktionen f die Taylorreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

zu betrachten und für Rechnungen zu verwenden. Falls es überhaupt möglich ist, eine Funktion durch eine Potenzreihe (mit positivem Konvergenzradius) auszudrücken, dann ist das die einzige Möglichkeit.

Es gibt aber Funktionen, die nicht als Potenzreihe geschrieben werden können. Zum Einen ist es möglich, dass der Konvergenzradius der obigen Reihe 0 ist. Zum anderen gibt es aber auch Funktionen, die nicht mit ihrer (konvergenten) Taylorreihe übereinstimmen. So ist die Funktion

$$x \mapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

in $x = 0$ beliebig differenzierbar und es gilt $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die zugehörige Taylorreihe konvergiert also auf ganz \mathbb{R} , hat aber offensichtlich nichts mit der ursprünglichen Funktion zu tun.

Definition 6.57. Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und seien $a_\eta \in \mathbb{K}$ Koeffizienten für jedes $\eta \in \mathbb{N}_0^d$. Dann ist

$$\sum_{\eta \in \mathbb{N}_0^d} a_\eta x^\eta$$

eine (formale) Potenzreihe in d Variablen (wobei wir Multiindexnotation verwendet haben).

Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{K}$ für eine offene Nullumgebung $U \subset \mathbb{R}^d$ heißt analytisch in 0, wenn sie in eine Potenzreihe um 0 entwickelt werden kann, das heißt es existieren $\epsilon > 0$ und $a_\eta \in \mathbb{K}$ für jedes $\eta \in \mathbb{N}_0^d$ so, dass

$$f(x) = \sum_{\eta \in \mathbb{N}_0^d} a_\eta x^\eta$$

für alle $x \in B_\epsilon(0)$.

Bemerkung 6.58. (i) Die Konvergenz der auftretenden Reihen kann zum Beispiel wie folgt definiert werden: wir nennen $\sum_{\eta \in \mathbb{N}_0^d} a_\eta x^\eta$ konvergent gegen S , falls für jedes $\epsilon > 0$ eine endliche Teilmenge $A \subset \mathbb{N}_0^d$ existiert, so dass für jede endliche Teilmenge $A \subset B \subset \mathbb{N}_0^d$ gilt

$$\left| \sum_{\eta \in B} a_\eta x^\eta - S \right| < \epsilon.$$

- (ii) Der Konvergenzbereich einer Potenzreihe in mehr als einer Variablen ist nicht mehr so einfach zu charakterisieren wie im eindimensionalen Fall (siehe Beispiel 6.59). Es gilt aber analog zum eindimensionalen Fall: falls $y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$ ein Punkt ist mit $y_1 \neq 0, \dots, y_d \neq 0$, so dass

$$\sum_{\eta \in \mathbb{N}_0^d} a_\eta y^\eta$$

konvergiert, dann konvergiert die Reihe für jedes x im offenen Quader

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^d \mid |x_i| < |y_i| \text{ für alle } i \in \{1, \dots, d\} \right\}$$

absolut, das heißt es gilt

$$\sum_{\eta \in \mathbb{N}_0^d} |a_\eta| (|x_1|, \dots, |x_d|)^\eta < \infty.$$

- (iii) Konvergiert eine Potenzreihe auf einer offenen Umgebung U von 0, so ist sie dort beliebig differenzierbar und es gilt

$$a_\eta = \frac{\partial^\eta f(0)}{\eta!}.$$

- (iv) Aus der vorhergehenden Bemerkung folgt insbesondere, dass die Koeffizienten der Potenzreihendarstellung einer Funktion (falls diese existiert) eindeutig bestimmt sind. Die obige Gleichung ist selten nützlich um die Potenzreihendarstellung einer Funktion zu finden. Umgekehrt kann sie jedoch hilfreich sein, falls man viele (partielle) Ableitungen einer Funktion gleichzeitig berechnen will um zum Beispiel Extrema zu untersuchen oder die Taylorformel aufzustellen. Wir kennen bereits einige Reihendarstellungen, z.B. für $e^x, \sin(x), \cos(x), \frac{1}{1-x}$ sowie alle Polynome. In vielen Fällen kann man nun Reihendarstellungen für Funktionen finden, indem man sie mittels geschickter Umformungen als Summen oder Produkte (manchmal auch Verkettungen) dieser Funktionen darstellt:

$$f(x) = xe^{x^2} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!}.$$

(v) Es gilt

$$\mathbf{C}(U) \supset \mathbf{C}^1(U) \supset \mathbf{C}^2(U) \supset \dots \supset \mathbf{C}^k(U) \supset \dots \supset \mathbf{C}^\infty(U) \supset \mathbf{C}^\omega(U).$$

Dabei bezeichnet $\mathbf{C}^\omega(U)$ den Raum der analytischen Funktionen, das heißt Funktionen die in einer Umgebung jedes Punktes einer Reihendarstellung besitzen. Alle Inklusionen in obiger Kette sind echt.

(vi) Die analytischen Funktionen sind abgeschlossen unter Summen, Produkten und Verkettungen. Eine Potenzreihe ist auf ihrem Konvergenzkreis analytisch. Die Beweise für diese Aussagen sind nicht trivial.

Beispiel 6.59. Die Potenzreihe in zwei reellen Variablen

$$\sum_{n=0}^{\infty} (xy)^n$$

konvergiert auf $\{(x, y) \mid |xy| < 1\}$ gegen $\frac{1}{1-xy}$. Diese Funktion ist also analytisch in 0.

6.5 Der Banachsche Fixpunktsatz und der Satz über implizite Funktionen

Theorem 6.60 (Banachscher Fixpunktsatz). *Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $\varphi : X \rightarrow X$ eine streng kontraktive Abbildung, das heißt es gibt $c \in [0, 1)$ so, dass*

$$d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq cd(x, y)$$

für alle $x, y \in X$ gilt. Dann hat φ genau einen Fixpunkt, das heißt es existiert genau ein $x \in X$ so, dass $\varphi(x) = x$.

Beweis. Zunächst stellen wir fest, dass φ insbesondere Lipschitz-stetig, also stetig ist. Sei $x_0 \in X$ und definiere rekursiv die Folge $x_n := \varphi(x_{n-1})$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt auf Grund der strengen Kontraktivität

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(\varphi(x_n), \varphi(x_{n-1})) \leq cd(x_n, x_{n-1})$$

und mit Induktion folgt

$$d(x_{n+k}, x_{n+k-1}) \leq c^k d(x_n, x_{n-1})$$

für alle $k, n \in \mathbb{N}$. Insbesondere folgt

$$d(x_n, x_{n-1}) \leq c^{n-1} d(x_1, x_0)$$

Aus der Dreiecksungleichung folgt dann

$$\begin{aligned} d(x_{n+k}, x_{n-1}) &\leq d(x_{n+k}, x_{n+k-1}) + d(x_{n+k-1}, x_{n+k-2}) + \cdots + d(x_n, x_{n-1}) \\ &\leq (c^k + c^{k-1} + \cdots + c + 1) d(x_n, x_{n-1}) \\ &= \frac{1 - c^{k+1}}{1 - c} d(x_n, x_{n-1}) \leq \frac{1 - c^{k+1}}{1 - c} c^{n-1} d(x_1, x_0) \\ &\leq \frac{c^{n-1}}{1 - c} d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Da der letzte Term unabhängig von k ist und für $n \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert, haben wir damit die Cauchy-Eigenschaft der Folge (x_n) gezeigt. Nach Voraussetzung ist X vollständig, also konvergiert (x_n) gegen ein $x \in X$. Dann gilt

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_{n-1}) = \varphi\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1}\right) = \varphi(x)$$

wobei wir im vorletzten Schritt die Stetigkeit von φ verwendet haben.

Es bleibt noch die Eindeutigkeit des Fixpunktes zu zeigen. Seien $x, y \in X$ Fixpunkte von φ . Dann gilt

$$d(x, y) = d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq cd(x, y).$$

Da $c < 1$ folgt daraus $d(x, y) = 0$ und aus der Definitheit der Metrik $x = y$. □

Bemerkung 6.61. (i) Eine Folgerung aus dem Banachschen Fixpunktsatz: läßt man in diesem Hörsaal einen Stadtplan von Leipzig zufällig auf den Boden fallen, dann gibt es genau einen Punkt auf dem Stadtplan, der genau über dem entsprechenden Punkt der Stadt liegt.

- (ii) Aus dem Beweis ist auch ein Verfahren zum Bestimmen des Fixpunktes ersichtlich: man wendet φ wiederholt auf einen beliebigen Startpunkt an. Läßt man in einer der obigen Abschätzungen $k \rightarrow \infty$ gehen, so erhält man

$$d(x, x_{n-1}) \leq \frac{1}{1-c} d(x_n, x_{n-1}),$$

also eine Abschätzung für den Fehler.

- (iii) Viele Probleme lassen sich in Fixpunktprobleme überführen. Die Schwierigkeit liegt dann häufig darin, einen passenden metrischen Raum zu finden, so dass man den Satz anwenden kann.

Beispiel 6.62. Betrachte die Gleichung $x - y^2 = 0$. Für $x \in (0, \infty)$ gibt es die beiden Lösungen

$$y = \sqrt{x} \text{ beziehungsweise } y = -\sqrt{x}.$$

Für jeden Lösungspunkt (ξ, η) der Gleichung gibt es also eine Umgebung U und eine Funktion f , so dass alle in U liegenden Lösungen der Gleichung durch $(x, f(x))$ gegeben sind. Darüber hinaus ist f sogar stetig differenzierbar.

Bemerkung 6.63. In vielen Fällen wird es nicht mehr möglich sein, Formeln für die Lösungen von Gleichungssystemen anzugeben. Der Satz über implizite Funktionen erlaubt es unter bestimmten Voraussetzungen zumindest die Existenz und bestimmte Eigenschaften solcher Lösungen nachzuweisen.

Sei $F : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^q$ eine Abbildung. Betrachten wir x_1, \dots, x_p als unabhängige Variablen und y_1, \dots, y_q als abhängige Variablen und setzen $x = (x_1, \dots, x_p)$, $y = (y_1, \dots, y_q)$, dann ist durch

$$F(x, y) = 0$$

ein Gleichungssystem gegeben. Wir betrachten hier nur den Fall, in dem die Anzahl der Gleichungen mit der Anzahl der unabhängigen Variablen übereinstimmt.

Gehen wir nun davon aus, dass (ξ, η) eine Lösung ist, dass also $F(\xi, \eta) = 0$ gilt, dann stellt sich die Frage, ob das Gleichungssystem zumindest für x in der Nähe von ξ Lösungen hat und ob diese eindeutig sind. Ist das der Fall, dann können wir uns für Eigenschaften der durch $F(x, f(x)) = 0$ definierten Funktion interessieren.

Ist so ein F gegeben und differenzierbar, so bezeichnen wir mit $D_y F(x, \eta) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^q | \mathbb{R}^q)$ die Ableitung der Funktion $y \mapsto F(x, y)$ an der Stelle η , also für festes x . Analog ist $D_x F(\xi, y) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p | \mathbb{R}^q)$ die Ableitung der Funktion $x \mapsto F(x, y)$ an der Stelle ξ für festes y .

Die grundlegende Idee ist dabei die folgende. Ist F differenzierbar, dann verhält es sich in der Nähe des Punktes (ξ, η) wie eine lineare Funktion. Dann erhalten wir also näherungsweise ein Gleichungssystem welches linear in den abhängigen Variablen y ist

$$0 = F(x, y) \approx F(x, \eta) + D_y F(x, \eta)(y - \eta),$$

und welches lösbar ist, falls $D_y F(x, \eta)$ invertierbar ist.

Theorem 6.64 (Satz über implizite Funktionen). *Seien $U \subset \mathbb{R}^p$ und $V \subset \mathbb{R}^q$ offen. Sei $F : U \times V \rightarrow \mathbb{R}^q$ stetig differenzierbar und es seien $\xi \in U$ und $\eta \in V$ so, dass $F(\xi, \eta) = 0$ und $D_y F(\xi, \eta)$ invertierbar ist.*

Dann existieren Umgebungen $\tilde{U} \subset U$ von ξ und $\tilde{V} \subset V$ von η und eine stetige Funktion $f : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$, so dass $f(\xi) = \eta$ und $F(x, f(x)) = 0$ für alle $x \in \tilde{U}$.

Beweis. Wir setzen $D = D_y F(\xi, \eta)$. Wir betrachten die folgende Abbildung φ die Funktionen auf Funktionen abbildet (den genauen Definitionsbereich von φ werden wir weiter unten festlegen)

$$\varphi(g)(x) = g(x) - D^{-1}F(x, g(x)).$$

Da D^{-1} invertierbar ist, gilt $\varphi(f) = f$ genau dann, wenn $F(x, f(x)) = 0$ ist, wenn f also unser ursprüngliches Problem löst. Wir haben unser Problem also in ein Fixpunktproblem umgeformt auf dass wir den Banachschen Fixpunktsatz anwenden wollen. Wir stellen noch fest, dass φ stetige Funktionen auf stetige Funktionen abbildet.

Bezeichne $I : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^q$ die identische Abbildung. Die Funktion

$$(x, y) \mapsto \|I - D^{-1}D_y F(x, y)\|$$

ist nach Voraussetzung stetig und verschwindet im Punkt (ξ, η) . Es existieren also $\delta, \epsilon > 0$ so, dass $B_\delta(\xi) \subset U$, $B_\epsilon(\eta) \subset V$ und

$$\|I - D^{-1}D_y F(x, y)\| \leq \frac{1}{2}$$

für alle $x \in B_\delta(\xi)$ und $y \in \tilde{V} := B_\epsilon(\eta)$. Auf Grund der Stetigkeit von $x \mapsto \|D^{-1}F(x, \eta)\|$ können wir ein (möglicherweise kleineres) $\delta > 0$ wählen, so dass

$$\|D^{-1}F(x, \eta)\| \leq \frac{\epsilon}{4}$$

für alle $x \in \tilde{U} = B_\delta(\xi)$.

Sei nun X die Menge aller stetigen Funktionen $g : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^q$ die

- (i) $g(\xi) = \eta$ und
- (ii) $\|g(x) - \eta\| \leq \frac{\epsilon}{2}$ für alle $x \in \tilde{U}$

erfüllen. Die zweite Bedingung impliziert insbesondere, dass $g(x) \in \tilde{V}$ für alle $g \in X$ und $x \in \tilde{U}$. Damit ist X Teilmenge des Banachraumes $\mathbf{C}_b(\tilde{U}, \mathbb{R}^q)$ mit der Supremumnorm

$$\|g\|_\infty = \sup \left\{ \|g(x)\| \mid x \in \tilde{U} \right\}.$$

Darüber hinaus ist X in diesem Raum abgeschlossen, da die obigen Bedingungen unter gleichmäßigen Grenzwerten erfüllt bleiben also nach Satz 5.41 vollständig. Außerdem ist X nicht leer, denn es enthält mindestens die konstante Funktion η . Wir wollen nun zeigen, dass φ Funktionen aus X nach X abbildet und dass es die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt.

Betrachte nun für festes $x \in \tilde{U}$ die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi : \tilde{V} &\rightarrow \mathbb{R}^q \\ y &\mapsto y - D^{-1}F(x, y). \end{aligned}$$

Dann folgt mit dem allgemeinen Mittelwertsatz Satz 6.36 für alle $y, z \in V$

$$\|\Phi(y) - \Phi(z)\| \leq \sup_{v \in \tilde{V}} \|I - D^{-1}D_y F(x, y)\| \|y - z\| \leq \frac{1}{2} \|y - z\|.$$

Insbesondere gilt für $g_1, g_2 \in X$ und $x \in \tilde{U}$

$$\begin{aligned} \|(\varphi(g_1))(x) - (\varphi(g_2))(x)\| &= \|\Phi(g_1(x)) - \Phi(g_2(x))\| \\ &\leq \frac{1}{2} \|g_1(x) - g_2(x)\| \leq \frac{1}{2} \|g_1 - g_2\|_\infty \end{aligned}$$

und damit ist φ eine strenge Kontraktion

$$\|\varphi(g_1) - \varphi(g_2)\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|g_1 - g_2\|_\infty.$$

Wir müssen nun noch zeigen, dass φ die Menge X auf sich selbst abbildet. Aus der Definition von φ ist unmittelbar ersichtlich, dass für jedes $g \in X$ gilt $(\varphi(g))(\xi) = \eta$ und dass $\varphi(g)$ wiederum eine stetige Funktion ist. Schließlich gilt

$$\begin{aligned} \|(\varphi(g))(x) - \eta\| &\leq \|(\varphi(g))(x) - (\varphi(\eta))(x)\| + \|(\varphi(\eta))(x) - \eta\| \\ &\leq \frac{1}{2} \|g(x) - \eta\| + \|D^{-1}F(x, \eta)\| \leq \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Jetzt sind alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt. Die Abbildung φ hat also genau einen Fixpunkt $f \in X$ und für dieses f gilt $F(x, f(x)) = 0$ für alle $x \in \tilde{U}$. \square

Für die folgenden Aussagen behalten wir die Voraussetzungen sowie die Notation des Theorems und seines Beweises bei.

Bemerkung 6.65. Die Eindeutigkeitsaussage des Banachschen Fixpunktsatzes besagt, dass es für fest gewähltes \tilde{U} und \tilde{V} genau eine Funktion in X gibt, die $F(x, f(x))$ erfüllt. Es gilt jedoch etwas stärker: für festes $x \in \tilde{U}$ ist $f(x)$ die einzige Lösung des Gleichungssystems $F(x, y) = 0$ in \tilde{V} denn für jede solche Lösung y gilt

$$\|y - f(x)\| = \|\Phi(y) - \Phi(f(x))\| \leq \frac{1}{2} \|y - f(x)\|,$$

was nur durch $y = f(x)$ zu erfüllen ist.

Eine alternative Sichtweise ist: für jedes $x \in \tilde{U}$ erfüllt die Abbildung $\Phi : \tilde{V} \rightarrow \tilde{V}$ die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes.

Satz 6.66. *Es gibt eine (möglicherweise kleinere) Umgebung \tilde{U} von ξ auf der f stetig differenzierbar ist. Die Ableitung ist durch*

$$Df(x) = - (D_y F(x, f(x)))^{-1} D_x F(x, f(x))$$

gegeben.

Beweis. Wir zeigen zunächst die Differenzierbarkeit im Punkt ξ . Dazu definieren wir – unser Ergebnis vorwegnehmend – $Df(\xi) = - (D_y F(\xi, \eta))^{-1} D_x F(\xi, \eta)$. Da F differenzierbar ist, existiert eine Funktion φ so, dass

$$F(x, y) = F(\xi, \eta) + DF(\xi, \eta)(x - \xi, y - \eta) + \varphi(x, y)$$

und

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\xi,\eta)} \frac{\varphi(x, y)}{\|(x - \xi, y - \eta)\|} = 0.$$

Setzen wir nun $f(x)$ in die obige Gleichung ein, erhalten wir

$$0 = F(x, f(x)) = D_x F(\xi, \eta)(x - \xi) + D_y F(\xi, \eta)(f(x) - \eta) + \varphi(x, f(x))$$

und damit für $x \neq \xi$

$$\frac{f(x) - f(\xi) - Df(\xi)(x - \xi)}{\|x - \xi\|} = -D^{-1} \frac{\varphi(x, f(x))}{\|(x - \xi, f(x) - \eta)\|} \frac{\|(x - \xi, f(x) - \eta)\|}{\|x - \xi\|}.$$

Für $x \rightarrow 0$ konvergiert wegen der Stetigkeit von f der erste Bruch auf der rechten Seite gegen 0. Es bleibt also noch zu zeigen, dass der zweite Bruch in einer Umgebung von ξ beschränkt ist, damit die rechte Seite gegen 0 konvergiert. Es gilt aber

$$\begin{aligned} \frac{\|(x - \xi, f(x) - \eta)\|}{\|x - \xi\|} &\leq \frac{\|(x - \xi, 0)\|}{\|x - \xi\|} + \frac{\|(0, f(x) - \eta)\|}{\|x - \xi\|} = 1 + \left\| \frac{f(x) - \eta}{\|x - \xi\|} \right\| \\ &\leq 1 + \left\| \frac{f(x) - f(\xi) - Df(\xi)(x - \xi)}{\|x - \xi\|} \right\| + \left\| \frac{Df(\xi)(x - \xi)}{\|x - \xi\|} \right\| \\ &\leq 1 + \left\| D^{-1} \frac{\varphi(x, f(x))}{\|(x - \xi, f(x) - \eta)\|} \right\| \frac{\|(x - \xi, f(x) - \eta)\|}{\|x - \xi\|} + \|Df(\xi)\|. \end{aligned}$$

Wir wissen bereits, dass der Vorfaktor auf der rechten Seite gegen 0 konvergiert, das heißt es existiert eine Umgebung von ξ , auf der er durch $\frac{1}{2}$ beschränkt ist. Auf dieser Umgebung gilt dann

$$\frac{1}{2} \frac{\|(x - \xi, f(x) - \eta)\|}{\|x - \xi\|} \leq 1 + \|Df(\xi)\|,$$

der Ausdruck ist also wie behauptet beschränkt.

Damit haben wir gezeigt: f ist im Punkt ξ beschränkt und die Ableitung dort ist

$$Df(\xi) = -D_y F(\xi, \eta)^{-1} D_x F(\xi, \eta) = -D_y F(\xi, f(\xi))^{-1} D_x F(\xi, f(\xi)).$$

Die Abbildung

$$\begin{aligned} \theta : \tilde{U} &\rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^q | \mathbb{R}^q) \\ x &\mapsto D_y F(x, f(x)) \end{aligned}$$

ist nach Voraussetzung stetig. Die Menge $\text{Gl}(\mathbb{R}^q)$ aller invertierbaren linearen Abbildungen (oder invertierbaren Matrizen) ist offen in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^q | \mathbb{R}^q)$ (vergleiche die Zusatzaufgaben vom Blatt 4 und 7) und damit auch das Urbild

$$\theta^{-1}(\text{Gl}(\mathbb{R}^q)).$$

Außerdem enthält dieses Urbild den Punkt ξ den $\theta(\xi) = D_y F(\xi, \eta)$ ist nach Voraussetzung invertierbar. Damit existiert eine Kugel $B_\epsilon(\xi)$ auf der $\theta(x)$ invertierbar ist. Da die Abbildung $\text{Gl}(\mathbb{R}^q) \ni A \mapsto A^{-1} \in \text{Gl}(\mathbb{R}^q)$ stetig ist, existiert die Abbildung $x \mapsto D_y F(x, f(x))^{-1}$ auf $B_\epsilon(\xi)$ und ist dort stetig. Für jedes $x \in B_\epsilon(\xi)$ können wir nun den Satz über implizite Funktionen mit der initialen Lösung $(x, f(x))$ anwenden. Die Lösungsfunktion die der Satz liefert, muss wegen der Eindeutigkeit natürlich auf einer Umgebung von x mit f übereinstimmen. Wir erhalten damit aber, dass f in jedem Punkt von $B_\epsilon(\xi)$ differenzierbar ist und dass die oben bewiesene Formel für die Ableitung gilt

$$Df(x) = -D_y F(x, f(x))^{-1} D_x F(x, f(x)).$$

Aus der Formel wird auch ersichtlich, dass die Ableitung stetig ist. □

Korollar 6.67. Falls $F \in \mathbf{C}^k(U, \mathbb{R}^q)$ ist für $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, dann ist $f \in \mathbf{C}^k(\tilde{U}, \mathbb{R}^q)$.

Beweisidee. Mit der oben bewiesenen Formel, lassen sich induktiv Formeln für die höheren Ableitungen von f bestimmen. □

Bemerkung 6.68 (Extrema unter Nebenbedingungen). Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und es seien Abbildungen $h, \varphi_1, \dots, \varphi_k : U \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Wir suchen nun Punkte in

$$M = \{x \in U \mid \varphi_1(x) = \dots = \varphi_k(x) = 0\},$$

an denen h extremal wird. Ein gängiges Verfahren dazu ist die Methode der Lagrange-Multiplikatoren. Wir definieren zunächst für $x = (x_1, \dots, x_n)$ und $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$

$$\tilde{h}(x, \lambda) = h(x) + \lambda_1 \varphi_1(x) + \dots + \lambda_k \varphi_k(x),$$

und suchen dann nach stationären Punkten von \tilde{h} . Die Gleichungen die sich für die stationären Punkte ergeben sind ($i \in \{1, \dots, n\}$ und $j \in \{1, \dots, k\}$)

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_i h(x) + \lambda_1 \partial_i \varphi_1(x) + \dots + \lambda_k \partial_i \varphi_k(x) \\ 0 &= \varphi_j(x). \end{aligned} \tag{6.4}$$

Dadurch wird zwar sichergestellt, dass jeder der so gefundenen Punkte tatsächlich in M liegt. Ansonsten wirkt das Verfahren aber zunächst wie schwarze Magie. Tatsächlich können wir auf diese Weise auch nur die Extremstellen finden, die eine zusätzliche Bedingung erfüllen.

Definition 6.69. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine differenzierbare Abbildung. Ein Punkt $x \in U$ heißt regulärer Punkt von φ , falls die lineare Abbildung $D\varphi(x)$ surjektiv ist.

Bemerkung 6.70. Wir kennen aus der linearen Algebra einige äquivalente Charakterisierungen für die Surjektivität von $A = D\varphi(x)$. Diese lineare Abbildung ist surjektiv genau dann, wenn die Spalten von A , also die Vektoren Ae_1, \dots, Ae_n einen k -dimensionalen Raum aufspannen, was genau dann der Fall ist, wenn wir unter diesen Spalten k linear unabhängige finden können. Da der Zeilenrang und der Spaltenrang einer Matrix immer übereinstimmen, ist A genau dann surjektiv wenn die k Zeilen von A , also die Vektoren $(\partial_1 \varphi_i(x), \dots, \partial_n \varphi_i(x))$ für $i \in \{1, \dots, k\}$ linear unabhängig sind.

Der folgende Satz sagt aus, dass das oben beschriebene Verfahren zur Bestimmung von Extrema unter Nebenbedingungen unter bestimmten Voraussetzungen tatsächlich zum Erfolg führt.

Satz 6.71 (Lagrange-Multiplikatoren). Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $h, \varphi_1, \dots, \varphi_k : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Abbildungen, $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x))$ und

$$M = \{x \in U \mid \varphi(x) = 0\}$$

die durch die Nebenbedingungen spezifizierte Menge. Sei nun $a \in M$ ein lokales Extremum von h unter den Nebenbedingungen, das heißt es gibt eine Umgebung V von a so, dass $h(x) \geq h(a)$ für alle $x \in V \cap M$ oder $h(x) \leq h(a)$ für alle $x \in V \cap M$ gilt. Ist a zusätzlich ein regulärer Punkt, dann existiert $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$ so, dass

$$Dh(a) = \lambda D\varphi(a).$$

Beweis. Nach Voraussetzung ist $D\varphi(a)$ surjektiv, die Matrix hat also k linear unabhängige Spalten. Wir ändern nun die Nummerierung der Variablen so, dass dies die

letzten k Spalten der Matrix sind. Um unsere Notation an diejenige des Satzes über implizite Funktionen anzupassen schreiben wir $(x_1, \dots, x_{n-k}) = (z_1, \dots, z_{n-k}) = z$ und $(x_{n-k+1}, \dots, x_n) = y$ und setzen entsprechen $\xi = (a_1, \dots, a_{n-k})$ und $\eta = (a_{n-k+1}, \dots, a_n)$. Dann sind unsere Nebenbedingungen durch $\varphi(z, y) = 0$ gegeben. Die Matrix $D_y\varphi(a)$ besteht dann genau aus den k letzten Spalten von $D\varphi(a)$. Da wir diese als linear unabhängig angenommen hatten, ist $D_y\varphi(a)$ invertierbar und unser Problem erfüllt die Voraussetzungen des Satzes über implizite Funktionen. Es gibt nun also Umgebungen \tilde{U} von ξ und \tilde{V} von η und eine stetig differenzierbare Abbildung $f: \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ so, dass

$$M \cap \tilde{U} \times \tilde{V} = \left\{ (z, f(z)) \mid z \in \tilde{U} \right\}$$

ist. Insbesondere gilt natürlich $a = (\xi, f(\xi))$.

Betrachten wir nun die Hilfsfunktion

$$\begin{aligned} H: \tilde{U} &\rightarrow \mathbb{R} \\ z &\mapsto h(z, f(z)). \end{aligned}$$

Diese ist stetig differenzierbar und muss, da $(z, f(z))$ stets in M liegt an der Stelle ξ ein lokales Extremum haben. Dann gilt nach der Kettenregel

$$0 = DH(\xi) = D_z h(\xi, f(\xi)) + D_y h(\xi, f(\xi)) Df(\xi).$$

(Die Überprüfung, dass es sich hier tatsächlich um die Kettenregel handelt wird zur Übung überlassen.) Nutzen wir nun die Formel für die Ableitung der implizit definierten Abbildung f , erhalten wir

$$D_z h(a) = D_y h(a) D_y \varphi(a)^{-1} D_z \varphi(a) = \lambda D_z \varphi(a).$$

Dabei ist $\lambda = D_y h(a) D_y \varphi(a)^{-1}$ eine $1 \times k$ Matrix. Es gilt natürlich auch

$$D_y h(a) = D_y h(a) D_y \varphi(a)^{-1} D_y \varphi(a) = \lambda D_y \varphi(a).$$

Die beiden auf diese Weise erhaltenen Gleichungen entsprechen gerade den ersten $n - k$ beziehungsweise den letzten k Spalten der zu zeigenden Gleichung. \square

Beispiel 6.72. Wir suchen nach dem Maximum der linearen Funktion $h(x) = x_1 + 3x_2 - 2x_3$ auf der Einheitssphäre. Die Einheitssphäre wird durch die Gleichung $\varphi(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$ charakterisiert. Die Jacobi-Matrix

$$D\varphi(x) = (2x_1, 2x_2, 2x_3)$$

verschwindet auf der Späre nirgends und ist (als lineare Abbildung von $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$) damit stets surjektiv. Wir können also jedes Extremum mit der Methode der Lagrange-Multiplikatoren finden. Die resultierenden Gleichungen sind

$$\begin{aligned} Dh(x) &= (1, 3, -2) = 2\lambda(x_1, x_2, x_3) \text{ und} \\ 0 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 \end{aligned}$$

Lösen wir die ersten Gleichungen nach x_1, x_2, x_3 auf und setzen in die letzte Gleichung ein, dann erhalten wir

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{9}{4\lambda^2} + \frac{4}{4\lambda^2} = 1.$$

Damit ergeben sich die Lösungen

$$(x_1, x_2, x_3, \lambda) = \pm \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, -\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{\sqrt{14}}{2} \right).$$

Das Maximum ergibt sich für das positive Vorzeichen.

Bemerkung 6.73. Der Satz sagt aus, dass wir mit der Methode der Lagrange-Multiplikatoren nur die lokalen Extrema sicher finden können, die sich an regulären Punkten befinden. Die Methode ist dennoch in überraschend vielen Fällen anwendbar. Zunächst kommt der Fall – wie im obigen Beispiel – dass jeder Punkt von M regulär ist häufig vor. Ist das nicht der Fall, dann müssen wir natürlich überprüfen, dass sich keine lokalen Extrema unter den nicht regulären Punkten „verstecken“. Meist ist die Menge der nicht regulären Punkte jedoch „klein“.

Korollar 6.74 (Satz über die Umkehrfunktion). Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Falls $Df(\xi)$ invertierbar ist für ein $\xi \in U$, dann gibt es eine Umgebung \tilde{U} von ξ und eine Umgebung \tilde{V} von $\eta = f(\xi)$, so dass f die Umgebung \tilde{U} bijektiv auf \tilde{V} abbildet und dass die Umkehrfunktion

$$\begin{aligned} g : \tilde{V} &\rightarrow \tilde{U} \\ y &\mapsto f^{-1}(y) \end{aligned}$$

stetig differenzierbar ist. Es gilt

$$Dg(y) = (Df(g(y)))^{-1}.$$

Beweisidee. Wende den Satz über implizite Funktionen an, um das Gleichungssystem

$$F(x, y) = f(x) - y = 0$$

(lokal) nach x aufzulösen. □

Beispiel 6.75. Wir wollen mögliche Umkehrungen der komplexen Exponentialfunktion $z \mapsto \exp(z)$ untersuchen. Wir schreiben die Funktion zunächst als Funktion von \mathbb{R}^2 nach \mathbb{R}^2 , also $z = x + iy$ und

$$\exp(z) = \exp(x + iy) = \exp(x)(\cos(y) + i \sin(y)).$$

Wir interessieren uns also für die Funktion

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (\exp(x) \cos(y), \exp(x) \sin(y)). \end{aligned}$$

Diese Abbildung ist offensichtlich (sogar beliebig) differenzierbar und

$$D\varphi(x, y) = \begin{pmatrix} \exp(x) \cos(y) & -\exp(x) \sin(y) \\ \exp(x) \sin(y) & \exp(x) \cos(y) \end{pmatrix}$$

ist stets invertierbar. Nach dem Satz über die Umkehrfunktion besitzt φ auf dem Bild $\exp(\mathbb{C})$ lokal eine stetig differenzierbare (sogar glatte) Umkehrfunktion, eine komplexe Logarithmusfunktion.

Man kann zeigen, dass $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt (Wie?). Üblicherweise wird der sogenannte Hauptzweig des komplexen Logarithmus so definiert, dass er folgendermaßen abbildet

$$\ln : \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\} \rightarrow \{x + iy \mid x \in \mathbb{R}, y \in (-\pi, \pi)\}$$

Man erhält dann weitere „Zweige“ der Logarithmusfunktion durch $\ln + 2\pi k$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Es ist auch möglich, komplexe Logarithmusfunktionen mit anderen Definitionen und Wertebereichen zu definieren, jedoch gibt es keine auf ganz $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ stetige Logarithmusfunktion. Die verschiedenen lokalen Umkehrfunktionen können nicht stetig zu einer zusammengefasst werden deren Definitionsbereich eine Kurve um den Koordinatenursprung enthält.

7 Gewöhnliche Differenzialgleichungen

7.1 Lösungsmethoden

Definition 7.1 (Gewöhnliche Differenzialgleichung). Eine gewöhnliche Differenzialgleichung (GDGl) ist eine Gleichung der Form

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

für ein $F : \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}$. Dabei ist n die Ordnung der Differenzialgleichung.

Sei I ein offenes Intervall. Eine Funktion $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Lösung dieser Differenzialgleichung wenn sie mindestens n mal differenzierbar ist und wenn gilt

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

für alle $x \in I$.

Beispiel 7.2. (i) Die Differenzialgleichung

$$y'' = -\frac{1}{y^2} \text{ beziehungsweise } y'' + \frac{1}{y^2} = 0$$

beschreibt die Bewegung einer Probemasse im Gravitationsfeld außerhalb einer radialsymmetrischen Massenverteilung entlang einer Geraden durch das Zentrum der Massenverteilung.

(ii) Die Differenzialgleichung

$$y'' = -\sin(y) \text{ oder } y'' + \sin(y) = 0$$

beschreibt die Bewegung eines mathematischen Pendels.

Bemerkung 7.3. (i) Auch wenn in unserer Definition die rechte Seite der Gleichung stets 0 ist, also alle Terme auf einer Seite stehen, werden wir natürlich auch mit anderen Differenzialgleichungen arbeiten, die sich immer einfach in diese Form überführen lassen.

(ii) Häufig ist F auch nur auf einer Teilmenge von \mathbb{R}^{n+2} definiert und die Definitionen gelten sinngemäß.

(iii) Das Lösen von (selbst einfach aussehenden) Differenzialgleichungen ist im Allgemeinen schwierig. Wir werden Verfahren für einige Arten von gewöhnlichen Differenzialgleichungen erarbeiten. In vielen (auch praktisch relevanten) Fällen erfordert jedoch jede Gleichung eine eigene Theorie.

(iv) Auch wenn sich eine Differenzialgleichung nicht explizit lösen lässt, kann man dennoch versuchen die folgenden Aspekte zu untersuchen:

- Existenz von Lösungen
- Eindeutigkeit der Lösungen

- Stabilität
 - Näherungsweise und numerische Lösungen
- (v) In der obigen Definition spielt y zwei verschiedene Rollen. Es ist die (funktionswertige) Variable der Differenzialgleichung sowie der Name der Lösungsfunktion. Diese Doppeldeutigkeit ist etwas unglücklich aber weit verbreitet.

Beispiel 7.4. (i) Sei I ein offenes Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann sind die Lösungen der GDGL

$$y' = f(x)$$

genau die Stammfunktionen von f .

Sei nun $x_0 \in I$ dann folgt aus dem Hauptsatz (Theorem 4.71) und aus Bemerkung 4.73, dass die Lösungen genau die Form

$$y(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt + c$$

für beliebiges $c \in \mathbb{R}$ haben.

- (ii) Für die Gleichung $y' = y$ überzeugt man sich leicht, dass $x \mapsto ce^x$ für jedes $c \in \mathbb{R}$ eine Lösung auf ganz \mathbb{R} ist. Um zu zeigen, dass jede Lösung diese Form hat, sei y eine beliebige Lösung der Gleichung und betrachte $u(x) = y(x)e^{-x}$. Dann gilt

$$u'(x) = y'(x)e^{-x} - y(x)e^{-x} = 0$$

woraus $u(x) = c$ für eine Konstante c folgt.

Wie in den obigen Fällen haben Differenzialgleichungen üblicherweise ganze Schaaren von Funktionen als Lösungen. Es können also zusätzliche Bedingungen an die Lösungen gestellt werden.

Definition 7.5 (Anfangswertproblem). Seien $y_0, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$ und $F : \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{K}$. Das System von Gleichungen

$$\begin{aligned} F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) &= 0 \\ y(0) &= y_0 \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(0) &= y_{n-1} \end{aligned}$$

heißt Anfangswertproblem.

Beispiel 7.6. Das Anfangswertproblem (AWP)

$$\begin{aligned}y'' &= -\frac{1}{y^2} \\ y(0) &= y_0 \\ y'(0) &= y_1\end{aligned}$$

legt für die Bewegung des Massenpunktes den Anfangsort y_0 sowie die Anfangsgeschwindigkeit y_1 fest.

Beispiel 7.7. Sei I ein offenes Intervall, dass die 0 enthält. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}y' &= -y^2 \\ y(0) &= 1\end{aligned}$$

Angenommen $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Lösung und es gilt $y(x) > 0$ für $x \in I$. Integrieren wir die Gleichung

$$1 = -\frac{1}{y(t)^2}y'(t)$$

von 0 bis x , so erhalten wir mit der Substitutionsregel

$$x = -\int_0^x \frac{1}{y(t)^2}y'(t)dt = -\int_1^{y(x)} \frac{1}{y^2}dy = \frac{1}{y(x)} - 1,$$

also

$$y(x) = \frac{1}{x+1}.$$

Man überprüft leicht, dass das tatsächlich eine Lösung des Anfangswertproblems ist. Wir haben hier vorausgesetzt, dass $y(x)$ positiv ist, und I muss die 0 enthalten. Daher ist $I = (-1, \infty)$ das größte mögliche Intervall auf dem die Lösung definiert ist.

Auf ähnliche Weise kann verfahren werden, wenn das Anfangswertproblem die Form

$$\begin{aligned}y' &= f(y)g(x) \\ y(x_0) &= y_0\end{aligned}$$

hat. Formal können wir wie oben schreiben

$$\int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{1}{f(y)}dy = \int_{x_0}^x g(x).$$

Es stellt sich aber die Frage, ob die Integrale existieren und ob die entstehende Gleichung nach $y(x)$ aufgelöst werden kann.

Satz 7.8 (Trennung der Variablen). Seien I, J offene Intervalle, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $0 \notin f(I)$. Seien $x_0 \in J$ und $y_0 \in I$.

Dann existiert ein offenes Intervall $\tilde{J} \subset J$, so dass das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y' &= f(y)g(x) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

genau eine Lösung y mit Definitionsbereich \tilde{J} besitzt. Setze

$$F(y) = \int_{y_0}^y \frac{1}{f(t)} dt.$$

Dann ist $y : \tilde{J} \rightarrow I$ eindeutig durch

$$F(y(x)) = \int_{x_0}^x g(t) dt$$

bestimmt.

Beweis. Nach Voraussetzung hat f keine Nullstellen. Wir nehmen hier $f > 0$ an, der Fall $f < 0$ wird analog behandelt. Da die Ableitung von $F'(y) = \frac{1}{f(y)}$ positiv ist, ist F streng monoton wachsend (Korollar 4.44) also insbesondere injektiv. Es besitzt also eine Umkehrfunktion $H : F(I) \rightarrow I$ und nach dem Satz über die Umkehrfunktion (Satz 4.49) ist diese stetig differenzierbar und es gilt

$$H'(z) = \frac{1}{F'(H(z))}$$

für alle $z \in F(I)$.

Setze jetzt

$$G(x) := \int_{x_0}^x g(t) dt,$$

für $x \in J$. Das Bild $F(I)$ ist ein offenes Intervall (Warum?), das die 0 enthält. Wähle ein offenes Intervall \tilde{J} , so dass $x_0 \in \tilde{J}$ und $G(\tilde{J}) \subset F(I)$. (Warum existiert das?) Dann gilt für $y(x) = H(G(x))$ ($x \in \tilde{J}$):

$$y'(x) = H'(G(x))G'(x) = \frac{1}{F'(H(G(x)))}g(x) = \frac{1}{F'(y(x))}g(x) = f(y(x))g(x),$$

und $y'(x_0) = H(0) = y_0$, also löst y das Anfangswertproblem.

Sei andererseits $\tilde{y} : \tilde{J} \rightarrow \mathbb{R}$ irgendeine Lösung des Anfangswertproblems, dann gilt für jedes $x \in \tilde{J}$

$$\int_{x_0}^x g(t) dt = \int_{x_0}^x \frac{\tilde{y}'(t)}{f(\tilde{y}(t))} dx = \int_{y_0}^{\tilde{y}(x)} \frac{1}{f(\tilde{y})} d\tilde{y} = F(\tilde{y}(x)).$$

Nach Voraussetzung ist die linke Seite im Definitionsbereich von H und damit gilt $\tilde{y}(x) = H(G(x)) = y(x)$. \square

Bemerkung 7.9. Die Wahl von \tilde{J} ist natürlich nicht eindeutig. Wir können jedoch das maximale Intervall wählen, das heißt die Vereinigung aller Intervalle die die gestellten Bedingungen erfüllen. In diesem Sinne gibt es für jedes x_0 und y_0 eine eindeutige Lösung der Differenzialgleichung mit maximalem Definitionsbereich.

Praktisch sagt der obige Satz aus, dass die mittels der Trennung der Variablen gefundenen Lösungen für ein Anfangswertproblem eindeutig sind, solange y nicht den Wert einer Nullstelle von f annimmt. Geht die Lösung durch solche Nullstellen, dann macht der Satz keine Aussage. Es ist dann möglich, dass die Lösung trotzdem eindeutig ist, es kann aber auch sein, dass sie sich an so einer Stelle in mehrere mögliche weitere Verläufe aufspaltet.

Analog zum Bestimmen von Stammfunktionen und Integralen mittels Substitution kann man auch Differenzialgleichungen durch Substitution auf bereits bekannte Fälle zurückführen. Ähnlich wie bei Integralen gibt es kein allgemeingültiges „Rezept“ zum Auffinden geeigneter Substitutionen.

Beispiel 7.10. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, $a, b, c \in \mathbb{R}$ und I ein offenes Intervall. Dann ist $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung der Differenzialgleichung

$$y' = f(ax + by + c)$$

genau dann wenn $u(x) = ax + by(x) + c$ eine Lösung von

$$u' = a + bf(u)$$

ist. Letztere Gleichung hat getrennte Variablen.

Der Beweis der Aussage folgt direkt aus der Gleichung

$$u'(x) = a + by'(x).$$

Beispiel 7.11 (eulerhomogene Differenzialgleichung). Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und I ein offenes Intervall das die 0 nicht enthält. Dann ist $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung der Differenzialgleichung

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

genau dann, wenn $u(x) = \frac{y(x)}{x}$ die Differenzialgleichung

$$u' = \frac{f(u) - u}{x}$$

löst.

Beweis. Übung

□

Beispiel 7.12. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Seien \tilde{x} und \tilde{y} die eindeutig bestimmten (Warum?) Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} a_1 \tilde{x} + b_1 \tilde{y} + c_1 &= 0 \\ a_2 \tilde{x} + b_2 \tilde{y} + c_2 &= 0. \end{aligned}$$

Sei I ein offenes Intervall, das die 0 nicht enthält. Dann ist $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung der Differenzialgleichung

$$y' = f \left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2} \right)$$

genau dann wenn

$$\begin{aligned} u : I - \tilde{x} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto y(x + \tilde{x}) - \tilde{y} \end{aligned}$$

eine Lösung von

$$u' = f \left(\frac{a_1 + b_1 \frac{u(x)}{x}}{a_2 + b_2 \frac{u(x)}{x}} \right)$$

ist. Die letzte Gleichung ist eine eulerhomogene Differenzialgleichung.

Wir zeigen nur die eine Richtung der Substitution. Die Rücksubstitution verläuft analog.

$$\begin{aligned} u'(x) = y'(x + \tilde{x}) &= f \left(\frac{a_1(x + \tilde{x}) + b_1 y(x + \tilde{x}) + c_1}{a_2(x + \tilde{x}) + b_2 y(x + \tilde{x}) + c_2} \right) \\ &= f \left(\frac{a_1 x + b_1 u(x) + a_1 \tilde{x} + b_1 \tilde{y} + c_1}{a_2 x + b_2 u(x) + a_2 \tilde{x} + b_2 \tilde{y} + c_2} \right) \\ &= f \left(\frac{a_1 + b_1 \frac{u(x)}{x}}{a_2 + b_2 \frac{u(x)}{x}} \right) \end{aligned}$$

Definition 7.13 (exakte Differenzialgleichung). Seien $D \subset \mathbb{R}^2$ offen und $p, q : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Die Differenzialgleichung

$$p(x, y) + q(x, y)y' = 0$$

heißt exakt, wenn es eine stetig differenzierbare Funktion $H : D \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, so dass $\partial_1 H = p$ und $\partial_2 H = q$ gelten. Die Funktion H heißt Stammfunktion oder Potentialfunktion der exakten Differenzialgleichung.

Im Zusammenhang mit exakten Differenzialgleichungen wird die Gleichung häufig durch „Multiplikation mit dx “ in der Form

$$p(x, y)dx + q(x, y)dy = 0$$

geschrieben. Für uns ist diese Schreibweise jedoch lediglich formal, da wir den allein stehenden Ausdrücken dx und dy noch keinen konkreten Sinn geben können.

Satz 7.14. *Seien $D \subset \mathbb{R}^2$ offen und $p, q : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen, die Differenzialgleichung*

$$p(x, y) + q(x, y)y' = 0$$

exakt und H eine Potentialfunktion. Sei I ein offenes Intervall und $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass der Graph $(x, y(x))$ der Funktion in D enthalten ist. Dann ist y eine Lösung der Differenzialgleichung genau dann wenn es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $H(x, y(x)) = c$ für alle $x \in I$ ist.

Beweis. Die Aussage folgt unmittelbar aus der Gleichung

$$\frac{d}{dx}H(x, y(x)) = \partial_1 H(x, y(x)) + \partial_2 H(x, y(x))y'(x) = p(x, y(x)) + q(x, y(x))y'(x). \quad \square$$

Bemerkung 7.15. Die obige Aussage führt die Lösung einer Differenzialgleichung auf die Lösung einer gewöhnlichen Gleichung zurück (zu beachten ist jedoch, dass die Lösung der Gleichung gewisse Bedingungen erfüllen muss um auch eine Lösung der Differenzialgleichung zu sein). Allerdings ist dazu die Kenntnis der Potentialfunktion notwendig. Eine systematische Methode zur Bestimmung von Stammfunktionen steht uns bisher nicht zur Verfügung. Der folgende Satz gibt uns aber wenigstens ein notwendiges Kriterium zum Erkennen von exakten Differenzialgleichungen an die Hand.

Satz 7.16. *Seien $D \subset \mathbb{R}^2$ offen und $p, q : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen. Falls die Differenzialgleichung*

$$p(x, y) + q(x, y)y' = 0$$

exakt ist, gilt $\partial_2 p(x, y) = \partial_1 q(x, y)$.

Beweis. Sei H eine Potentialfunktion, dann ist H zweimal stetig differenzierbar und nach dem Satz von Schwarz gilt

$$\partial_2 p(x, y) = \partial_2 \partial_1 H(x, y) = \partial_1 \partial_2 H(x, y) = \partial_1 q(x, y). \quad \square$$

Bemerkung 7.17. Unter zusätzlichen Voraussetzungen an den Definitionsbereich D ist die obige „Integrabilitätsbedingung“ auch hinreichend. Wir werden später darauf zurückkommen.

Beispiel 7.18. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} 2x + y^2 + 2xyy' &= 0 \\ y(1) &= 1. \end{aligned}$$

Es sind $p(x, y) = 2x + y^2$ und $q(x, y) = 2xy$ und es gilt $\partial_2 p(x, y) = 2y = \partial_1 q(x, y)$, die notwendige Bedingung für Exaktheit ist also erfüllt.

Für eine Potentialfunktion H muss gelten $\partial_1 H(x, y) = 2x + y^2$, also muss $H(x, y) = x^2 + xy^2 + G(y)$ sein, für eine differenzierbare Funktion G . Außerdem muss gelten

$$\partial_2 H(x, y) = 2xy + G'(y) = 2xy.$$

Also muss G konstant sein und eine mögliche Potentialfunktion ist $H(x, y) = x^2 + xy^2$. Für die gesuchte Lösung gilt also $H(x, y(x)) = x^2 + xy^2 = H(1, 1) = 2$. Die letzte Gleichung hat die beiden Lösungen

$$y(x) = \pm \sqrt{\frac{2}{x} - x}.$$

von denen jedoch nur die mit positivem Vorzeichen die Anfangsbedingung erfüllt. Diese Funktion ist auf $(-\infty, -\sqrt{2}] \cup (0, \sqrt{2}]$ definiert, der maximale (sinnvolle) Definitionsbereich der Lösung ist jedoch $(0, 2)$, da dieses Intervall die Anfangsstelle enthält.

Bemerkung 7.19. Falls eine Differenzialgleichung der Form

$$p(x, y) + q(x, y)y' = 0$$

nicht exakt ist, so kann man versuchen, einen integrierenden Faktor zu finden, das heißt eine nichtverschwindende Funktion $h(x, y)$ so, dass

$$h(x, y)p(x, y) + h(x, y)q(x, y)y' = 0$$

exakt ist. In manchen Fällen ist es möglich, einen integrierenden Faktor zu raten, oder durch bestimmte Ansätze zu ermitteln (zum Beispiel ist es üblich anzunehmen, dass h nur von x oder nur von y abhängt).

Allgemein können wir, hinreichende Differenzierbarkeit vorausgesetzt, mit Satz 7.16 die folgende notwendige Bedingung für einen integrierenden Faktor herleiten:

$$p(x, y)\partial_2 h(x, y) + h(x, y)\partial_2 p(x, y) = q(x, y)\partial_1 h(x, y) + h(x, y)\partial_1 q(x, y).$$

Da es sich hier um eine partielle Differenzialgleichung handelt, wird sich die Lösung des Problems dadurch im Allgemeinen nicht vereinfachen.

Definition 7.20 (Gewöhnliche Differenzialgleichungssysteme). Ein gewöhnliches Differenzialgleichungssystem (GDGS) ist eine Gleichung der Form

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

für ein $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l \times \dots \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Eine mindestens n mal differenzierbare Funktion $y : I \rightarrow \mathbb{R}^l - I$ offenes Intervall – heißt Lösung des Differenzialgleichungssystems, wenn für $x \in I$ gilt

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0.$$

Beispiel 7.21. (i) Das Differenzialgleichungssystem ($z = (z_1, z_2, z_3)$)

$$z'' = -\frac{z}{\|z\|^3} = -\frac{1}{\|z\|^2} \frac{z}{\|z\|}$$

beschreibt die Bewegung einer Punktmasse im Gravitationsfeld außerhalb einer radialsymmetrischen Massenverteilung.

(ii) Die Lotka-Volterra-Gleichungen sind ein Modell für die Entwicklung der Populationsgröße von Räubern r sowie deren Beutetieren b :

$$\begin{aligned} b' &= \alpha_1 b - \gamma_1 b r \\ r' &= -\alpha_2 r + \gamma_2 b r. \end{aligned}$$

Bemerkung 7.22. Das Differenzialgleichungssystem

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$$

ist äquivalent (hat also genau die selben Lösungen) wie das Differenzialgleichungssystem erster Ordnung

$$\begin{aligned} F(x, y, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y'_{n-1}) &= 0 \\ y' &= y_1 \\ y'_1 &= y_2 \\ &\vdots \\ y'_{n-2} &= y_{n-1}. \end{aligned}$$

Diese Substitution bringt uns einer Lösung natürlich nicht näher, wir können uns aber in der theoretischen Behandlung von Differenzialgleichungssystemen auf Systeme erster Ordnung beschränken.

7.2 Der Satz von Picard-Lindelöf

Beispiel 7.23. Betrachte die Differenzialgleichung

$$y' = 2\sqrt{|y|}.$$

Man überzeugt sich leicht, dass $y(x) = (x - c)^2$ für $x > c$, $y(x) = -(x - c)^2$ für $x < c$ und $y(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}$ Lösungen sind. Aus diesen können wir jetzt allerdings weitere Lösungen konstruieren. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $a \leq b$ und

$$y_1(x) = \begin{cases} -(x - a)^2 & x \in (-\infty, a) \\ 0 & x \in [a, b] \\ (x - b)^2 & x \in (b, \infty) \end{cases}$$

Dann ist die Funktionen y_1 eine Lösung der Differenzialgleichung für beliebige Werte von a und b (Warum gilt das auch in a und b ?).

Insbesondere lösen alle diese Funktionen das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y' &= \sqrt{|y|} \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

falls $a \leq 0 \leq b$ ist.

Unser Ziel ist nun ein Satz, der sicherstellt, dass ein gegebenes Anfangswertproblem genau eine Lösung hat. Dazu benötigen wir zunächst noch einige Vorbereitungen.

Definition 7.24. Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $(x_0, y_0) \in D$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$. Wir sagen, dass f eine lokale Lipschitzbedingung in y (oder bezüglich y) erfüllt (im Punkt (x_0, y_0)), wenn es eine Umgebung U von (x_0, y_0) und eine Konstante $L \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$\|f(x, y) - f(x, z)\| \leq L \|y - z\|$$

für alle $(x, y), (x, z) \in U$ erfüllt ist. Wir sagen f erfüllt eine lokale Lipschitzbedingung in y auf D falls das für jeden Punkt gilt.

Falls wir $U = D$ wählen können, so sagen wir, dass f eine globale Lipschitzbedingung bezüglich y erfüllt.

Beispiel 7.25. Der Begriff ist ähnlich dem der Lipschitzstetigkeit, wir interessieren uns jedoch hier nur für das Verhalten in den y -Variablen.

Wir betrachten beispielsweise die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x^2 y^2 \end{aligned}$$

Dann erhalten wir

$$|f(x, y) - f(x, z)| = |x^2(y + z)| |y - z|.$$

Der erste Faktor auf der rechten Seite kann beliebig große Werte annehmen, die Funktion erfüllt also keine globale Lipschitzbedingung. Sei nun $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ fest und wähle $R > \max\{|x_0|, |y_0|\}$. Dann gilt für alle Punkte $(x, y), (x, z) \in (-R, R) \times (-R, R)$

$$|x^2(y + z)| \leq 2R^3.$$

Damit erfüllt f eine lokale Lipschitzbedingung in jedem Punkt.

Wir werden im Zusammenhang mit Differenzialgleichungssystemen auf Ausdrücke der Form

$$\int_a^b f(x) dx$$

stoßen für vektorwertige $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Solche Integrale definieren wir komponentenweise.

Definition 7.26. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Funktion und f_1, \dots, f_n die Komponentenfunktionen von f , das heißt $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$. Dann heißt f Riemann-integrierbar, falls f_1, \dots, f_n Riemann-integrierbar sind und in diesem Falle definieren wir

$$\int_a^b f(x) dx := \left(\int_a^b f_1(x) dx, \dots, \int_a^b f_n(x) dx \right).$$

Satz 7.27. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Dann gilt

$$\left\| \int_a^b f(x) dx \right\| \leq \int_a^b \|f(x)\| dx.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \left\| \int_a^b f(x) dx \right\|^2 &= \sum_{i=1}^n \left(\int_a^b f_i(x) dx \right) \left(\int_a^b f_i(y) dy \right) = \left| \int_a^b \int_a^b \sum_{i=1}^n f_i(x) f_i(y) dx dy \right| \\ &\leq \int_a^b \int_a^b |\langle f(x), f(y) \rangle| dx dy \leq \int_a^b \int_a^b \|f(x)\| \|f(y)\| dx dy \\ &= \left(\int_a^b \|f(x)\| dx \right) \left(\int_a^b \|f(y)\| dy \right) = \left(\int_a^b \|f(x)\| dx \right)^2. \end{aligned}$$

Dabei haben wir – in dieser Reihenfolge – die Linearität des Integrals, die Cauchy-Schwarz-Ungleichung und nochmals die Linearität genutzt. \square

Lemma 7.28. Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $(x_0, y_0) \in D$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig. Sei I ein offenes Intervall, $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und $(x, y(x)) \in D$ für jedes $x \in I$. Dann ist y Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

genau dann, wenn es die Integralgleichung

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

erfüllt.

Beweis. Falls y das Anfangswertproblem löst, dann gilt nach dem Hauptsatz

$$y(x) - y_0 = y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^x y'(t) dt = \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt.$$

Ist die Integralgleichung erfüllt, gilt natürlich $y(x_0) = y_0$ und

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

folgt ebenfalls aus dem Hauptsatz. □

Theorem 7.29 (Satz von Picard-Lindelöf). Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $(x_0, y_0) \in D$. Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und erfülle eine lokale Lipschitzbedingung in (x_0, y_0) bezüglich y . Dann existiert $\epsilon > 0$ so, dass das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

auf $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ genau eine Lösung hat.

Beweis. Wir haben oben die Lösung des Anfangswertproblems zu einem Fixpunktproblem umformuliert und wollen darauf nun den Banachschen Fixpunktsatz anwenden. Wir basteln uns also eine Menge von Funktionen so, dass der Satz für das Fixpunktproblem anwendbar ist. Sei dazu $U \subset D$ eine Umgebung von (x_0, y_0) und $L > 0$, so dass

$$\|f(x, y) - f(x, z)\| \leq L \|y - z\|$$

für alle $(x, y), (x, z) \in U$. Wähle $a, r > 0$ so, dass $\tilde{D} = [x_0 - a, x_0 + a] \times K_r(y_0) \subset U$ (Warum geht das?). Da \tilde{D} abgeschlossen und beschränkt ist, existiert $M > 0$ so, dass $\|f(x, y)\| \leq M$ für $(x, y) \in \tilde{D}$ (Warum?). Wir wählen jetzt $0 < \epsilon \leq a$ so, dass $\epsilon M < r$ und $\epsilon L < 1$ und definieren $I = (x_0 + \epsilon, x_0 - \epsilon)$.

Sei nun

$$X = \{y \in \mathbf{C}(I) \mid y(x) \in K_r(x_0) \text{ für alle } x \in I\}.$$

Wir erinnern uns, dass $\mathbf{C}(I)$ und damit X mit der Supremumnorm ausgestattet sind. Dann ist X bezüglich dieser Norm eine abgeschlossene Teilmenge (Warum?) des vollständigen Raumes $\mathbf{C}(I)$ und somit selbst vollständig (Satz 5.41). Wir definieren die Abbildung $T : X \rightarrow X$ durch

$$T(y)(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt.$$

Dazu müssen wir zunächst zeigen, dass $T(y)$ tatsächlich wiederum in X liegt. Die Stetigkeit folgt dabei aus dem Hauptsatz. Für $x \in I$ und $x \geq x_0$ (der Fall $x < x_0$ wird analog behandelt) folgt weiter

$$\begin{aligned} \|T(y)(x) - y_0\| &= \left\| \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \right\| \leq \int_{x_0}^x \|f(t, y(t))\| dt \\ &\leq \int_{x_0}^x M dt = (x - x_0)M \leq \epsilon M < r, \end{aligned}$$

das heißt $T(y)(x) \in K_r(y_0)$ für alle $x \in I$.

Schließlich gilt für $y, \tilde{y} \in X$ und $x \in I$ (wir betrachten erneut nur $x \geq x_0$)

$$\begin{aligned} \|T(y)(x) - T(\tilde{y})(x)\| &= \left\| \int_{x_0}^x (f(t, y(t)) - f(t, \tilde{y}(t))) dt \right\| \\ &\leq \int_{x_0}^x \|f(t, y(t)) - f(t, \tilde{y}(t))\| dt \\ &\leq \int_{x_0}^x L \|y(t) - \tilde{y}(t)\| dt \leq L \int_{x_0}^x \|y - \tilde{y}\|_\infty dt \leq \epsilon L \|y - \tilde{y}\|_\infty. \end{aligned}$$

Bilden wir nun das Supremum über alle $x \in I$, so folgt

$$\|T(y) - T(\tilde{y})\|_\infty \leq \epsilon L \|y - \tilde{y}\|_\infty,$$

da $\epsilon L < 1$ ist, haben wir gezeigt, dass T eine strenge Kontraktion ist.

Jetzt folgt aus dem Banachschen Fixpunktsatz (Theorem 6.60) die Existenz eines eindeutigen Fixpunktes für die Abbildung T , also einer eindeutigen Lösung für die Gleichung $T(y) = y$. Aus Lemma 7.28 folgt dann, dass das Anfangswertproblem auf I eine eindeutige Lösung hat. \square

Bemerkung 7.30. Aus dem Banachschen Fixpunktsatz folgt auch ein Verfahren zum Bestimmen der Lösung (Bemerkung 6.61). Wir wenden die Abbildung T iterativ auf einen beliebigen Startpunkt in X , also zum Beispiel auf die konstante Funktion $\varphi(x) = y_0$ an:

$$\varphi_0 = \varphi \text{ und } \varphi_i(x) = y_0 + \int_{x_0}^x F(t, \varphi_{i-1}(t)) dt.$$

Dann konvergieren die sogenannten Picard-Iterierten φ_i in X , also gleichmäßig, gegen die gesuchte Lösung. Dieses Verfahren eignet sich prinzipiell auch zum numerischen Lösen von Differenzialgleichungssystemen, der praktische Nutzen hängt jedoch von der Größe des Intervalls $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ ab.

Beispiel 7.31. Wir betrachten erneut die Gleichung $y' = f(x, y) := \sqrt{|y|}$. Es gilt

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{|f(x, y) - f(x, 0)|}{|y - 0|} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{|y|}} = \infty$$

also erfüllt f in keinem Punkt der Form $(x_0, 0)$ eine lokale Lipschitzbedingung.

Satz 7.32. Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, dann erfüllt f eine lokale Lipschitzbedingung bezüglich y .

Beweis. Sei $(x_0, y_0) \in D$. Wähle $r > 0$ so, dass $K_r(x_0, y_0) \subset D$. Da f stetig differenzierbar ist, ist $D_y f$ eine stetige Funktion und damit auf der kompakten Menge $K_r(x_0, y_0)$ beschränkt (Satz 5.70), es gibt also ein $L > 0$ so, dass $\|D_y f(x, y)\| \leq L$ für alle $(x, y) \in K_r(x_0, y_0)$. Mit dem allgemeinen Mittelwertsatz (Satz 6.36) erhalten wir für $(x, y), (x, z) \in K_r(x_0, y_0)$ (der Wert von x ist hier zunächst fest)

$$\|f(x, y) - f(x, z)\| \leq \sup_{t \in [0, 1]} \|D_y f(x, y + t(z - y))\| \|y - z\| \leq L \|y - z\|. \quad \square$$

Beispiel 7.33. Betrachte die Differenzialgleichung

$$y'' = -\frac{y}{\|y\|^3}$$

beziehungsweise das äquivalente Differenzialgleichungssystem

$$(y, z)' = \left(z, -\frac{y}{\|y\|^3} \right).$$

Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \mapsto \left(z, -\frac{y}{\|y\|^3} \right) = \left(z, -(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)^{-\frac{3}{2}}(y_1, y_2, y_3) \right)$$

ist stetig differenzierbar auf ihrem gesamten Definitionsbereich und f erfüllt damit eine lokale Lipschitzbedingung. Das Anfangswertproblem für die Planeten- beziehungsweise Satellitenbewegung hat also (zunächst lokal) eine eindeutige Lösung.

Definition 7.34. Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $(x_0, y_0) \in D$. Eine Lösung $\tilde{y} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ des Anfangswertproblems

$$y' = f(x, y)$$

$$y(x_0) = y_0$$

heißt (echte) Fortsetzung der Lösung $y : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ falls $J \subset I$ ($J \subsetneq I$) und $y(x) = \tilde{y}(x)$ für alle $x \in J$ gilt. Die Lösung y heißt maximale Lösung, falls sie keine echten Fortsetzungen besitzt.

Satz 7.35. Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $(x_0, y_0) \in D$. Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und erfülle eine lokale Lipschitzbedingung (in allen Punkten von D) bezüglich y . Dann besitzt das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned} \tag{7.1}$$

eine eindeutige, maximale Lösung.

Beweis. Wir zeigen zunächst: falls $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\tilde{y} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lösungen des Anfangswertproblems sind, dann gilt $y(x) = \tilde{y}(x)$ für alle $x \in (a, b) := I \cap J$. Sei

$$c = \sup \{ \tilde{c} \in [x_0, b) \mid y = \tilde{y} \text{ auf } [x_0, \tilde{c}] \}.$$

Nach dem Satz von Picard-Lindelöf existieren solche \tilde{c} (Warum?). Dann gibt es eine Folge $(c_n) \subset (x_0, c)$ so, dass $c_n < c$ – also $y(c_n) = \tilde{y}(c_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ – und $c_n \rightarrow c$. Falls $c < b$ ist, folgt aus der Stetigkeit von y und \tilde{y} dann $y(c) = \tilde{y}(c)$. Da f im Punkt $(c, y(c))$ eine lokale Lipschitzbedingung erfüllt, existiert $\epsilon > 0$ so, dass das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u' &= f(x, u) \\ u(c) &= y(c) \end{aligned}$$

auf $(c - \epsilon, c + \epsilon)$ eine eindeutige Lösung hat. Da sowohl y , als auch \tilde{y} dieses Anfangswertproblem erfüllen, muss $y = \tilde{y}$ auf $[x_0, c + \epsilon)$ gelten, was jedoch der Definition von c widerspricht. Es muss also $c = b$ und $y = \tilde{y}$ auf $[x_0, b)$ sein. Analog kann man nun mit dem Intervall $(a, x_0]$ verfahren.

Sei nun I_{\max} die Vereinigung aller offenen Intervalle I , die Definitionsbereich einer Lösung des Anfangswertproblems (7.1) sind. Für $x \in I_{\max}$ wähle eine Lösung $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $x \in I$ und setze $y_{\max}(x) := y(x)$. Nach dem ersten Teil des Beweises ist $y(x)$ nicht von der Wahl der Lösung y abhängig, und y_{\max} daher wohldefiniert. Gemäß seiner Definition stimmt y_{\max} in einer Umgebung jedes Punktes x mit einer Lösung des Anfangswertproblems überein und ist daher selbst eine Lösung dieses Anfangswertproblems. Offensichtlich ist y_{\max} eine maximale Lösung. Falls $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine weitere maximale Lösung ist, so gilt nach Konstruktion $I \subset I_{\max}$, nach dem ersten Teil des Beweises $y = y_{\max}$ auf I und schließlich $I = I_{\max}$ aufgrund der Maximalität von y . \square

Beispiel 7.36. (i) Das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y' &= e^{-y} \\ y(1) &= 0 \end{aligned}$$

hat die Lösung $y : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $y(x) = \ln x$ welche nach dem Satz von Picard-Lindelöf eindeutig ist. Sie ist auch maximal, da sie nach rechts offensichtlich nicht fortgesetzt werden kann, und eine hypothetische Fortsetzung nach links in 0 nicht stetig sein könnte.

(ii) Das Anfangswertproblem

$$y' = -i \frac{y}{x^2}$$

$$y\left(\frac{1}{2\pi}\right) = 1$$

hat die Lösung $y : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$, $y(x) = e^{\frac{i}{x}}$. Da die Funktion

$$f : (\mathbb{R} \setminus 0) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$(x, y) \mapsto -\frac{y}{x^2}$$

stetig differenzierbar ist, ist diese Lösung nach dem Satz von Picard-Lindelöf wiederum eindeutig. Sie ist ebenfalls maximal, da sie dem Rand des Definitionsbereiches von f beliebig nahe kommt.

Im folgenden Satz benutzen wir den Abstand zu einer Menge. Für einen metrischen Raum (X, d) , $x \in X$ und $A \subset X$ ist

$$\text{dist}(x, A) := \inf \{d(x, y) \mid y \in A\}.$$

Satz 7.37. *Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $(x_0, y_0) \in D$. Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und erfülle eine lokale Lipschitzbedingung bezüglich y . Seien $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ so, dass $-\infty \leq a < x_0 < b \leq \infty$ und sei $y : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Lösung des Anfangswertproblems*

$$y' = f(x, y)$$

$$y(x_0) = y_0.$$

Dann ist y die maximale Lösung, genau dann wenn eine der Bedingungen

- (i) $b = \infty$,*
- (ii) $\limsup_{x \rightarrow b} \|y(x)\| = \infty$,*
- (iii) $\liminf_{x \rightarrow b} \text{dist}((x, y(x)), \partial D) = 0$*

und eine der Bedingungen

- (i) $a = -\infty$,*
- (ii) $\limsup_{x \rightarrow a} \|y(x)\| = \infty$,*
- (iii) $\liminf_{x \rightarrow a} \text{dist}((x, y(x)), \partial D) = 0$*

erfüllt ist.

Ohne Beweis.

7.3 Lineare Systeme

Definition 7.38. Sei I ein offenes Intervall und $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ und $b : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ Funktionen. Dann heißt das Differenzialgleichungssystem

$$y' = A(x)y + b(x)$$

lineares Differenzialgleichungssystem.

Falls b die Nullfunktion ist, so nennen wir das System homogen, anderenfalls inhomogen. Falls $A(x)$ konstant ist, sagen wir, dass das System konstante Koeffizienten hat.

Bemerkung 7.39. (i) Mittels der Substitution in Bemerkung 7.22 können wir die lineare Differenzialgleichung

$$y^{(n)} = a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y + b(x)$$

in das System

$$\begin{aligned} y'_{n-1} &= a_{n-1}(x)y_{n-2} + \cdots + a_1(x)y_1 + a_0(x)y + b(x) \\ y_1 &= y' \\ &\vdots \\ y_{n-1} &= y'_{n-2} \end{aligned}$$

überführen, dass von obiger Form ist.

(ii) Seien y und z Lösungen des inhomogenen Systems

$$y' = A(x)y + b(x),$$

dann ist $y - z$ eine Lösung des zugehörigen homogenen Systems

$$y' = A(x)y.$$

Das folgt unmittelbar aus

$$(y - z)'(x) = A(x)y(x) + b(x) - A(x)z(x) - b(x) = A(x)(y - z)(x).$$

Lemma 7.40 (Lemma von Grönwall). Sei I ein Intervall, $x_0 \in I$, $y : I \rightarrow [0, \infty)$ eine stetige Funktion, $a, b \geq 0$ und es gelte für alle $x \in I$

$$y(x) \leq a + b \left| \int_{x_0}^x y(t) dt \right|. \quad (7.2)$$

Dann gilt $y(x) \leq ae^{b|x-x_0|}$.

Beweis. Wir führen den Beweis für $x \geq x_0$, der andere Fall wird analog behandelt. Sei $\epsilon > 0$ beliebig und setze

$$z(x) := a + \epsilon + b \int_{x_0}^x y(t) dt. \quad (7.3)$$

Dann gilt $z'(x) = by(x) \leq bz(x)$. Da $z(t) \geq a + \epsilon > 0$ ist, erhalten wir

$$\ln z(x) - \ln z(x_0) = \int_{x_0}^x \frac{z'(t)}{z(t)} dt \leq \int_{x_0}^x b dt = b(x - x_0)$$

also dank der Monotonie der Exponentialfunktion $z(x) \leq z(x_0)e^{b(x-x_0)} = (a+\epsilon)e^{b(x-x_0)}$. Dann gilt auch $y(x) \leq z(x) \leq (a+\epsilon)e^{b(x-x_0)}$ und da diese Ungleichung für beliebige $\epsilon > 0$ gilt, folgt die gesuchte Ungleichung. \square

Für den Rest dieses Unterkapitels seien stets I ein offenes Intervall, $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ und $b : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetige Funktionen, $x_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}^n$.

Korollar 7.41. *Des Anfangswertproblem*

$$\begin{aligned} y' &= A(x)y + b(x) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

hat eine eindeutige maximale Lösung die auf ganz I definiert ist.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass

$$\begin{aligned} f : I \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, y) &\mapsto A(x)y + b(x) \end{aligned}$$

eine lokale Lipschitzbedingung erfüllt. Sei dazu $(x_1, y_1) \in I \times \mathbb{R}^n$. Wähle ein abgeschlossenes Intervall I_1 so, dass $x_1 \in I_1 \subset I$. Dann existiert $L > 0$ so, dass $\|A(x)\| \leq L$ für alle $x \in I_1$ und somit gilt

$$\|f(x, y) - f(x, z)\| = \|A(x)(y - z)\| \leq \|A(x)\| \|y - z\| \leq L \|y - z\|$$

für alle $x \in I_1$ und $y, z \in \mathbb{R}^n$.

Es folgt also aus Satz 7.35 die Existenz und Eindeutigkeit einer maximalen Lösung. Es seien $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ so, dass $y : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ diese maximale Lösung ist. Angenommen b liegt in I (ist also insbesondere endlich). Dann gibt es $M, K > 0$ so, dass $\|A(x)\| \leq M$ und $\|b(x)\| \leq K$ für alle $x \in [x_0, b]$ und es gilt

$$\begin{aligned} \|y(x)\| &= \left\| y_0 + \int_{x_0}^x (A(t)y(t) + b(t)) dt \right\| \\ &\leq \|y_0\| + \int_{x_0}^x \|A(t)\| \|y(t)\| dt + \int_{x_0}^x \|b(t)\| dt \\ &\leq \|y_0\| + K(b - x_0) + M \int_{x_0}^x \|y(t)\| dt. \end{aligned}$$

Aus dem Lemma von Grönwall (für $\|y\|$) folgt dann, dass

$$\|y(x)\| \leq (\|y_0\| + K(b - x_0))e^{M(x-x_0)} \leq (\|y_0\| + K(b - x_0))e^{M(b-x_0)}.$$

Damit kann keiner der Fälle aus Satz 7.37 erfüllt sein, was im Widerspruch zur Annahme steht, dass y die maximale Lösung ist. Analog zeigt man, dass $a \in I$ zu einem Widerspruch führt. Es muss also $a \notin I$ und $b \notin I$ gelten, was $(a, b) = I$ impliziert. \square

Bemerkung 7.42. Man kann zeigen (und auf diese Weise einen alternativen Beweis für obigen Satz angeben), dass die Picard-Iterierten mit Startfunktion $\varphi_0(x) = y_0$ für lineare Differenzialgleichungen auf ganz I konvergieren.

Korollar 7.43. Seien $y, z : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lösungen der Differenzialgleichung $y' = A(x)y + b(x)$ und $x_0 \in I$ dann sind äquivalent

- (i) $y(x) = z(x)$ für alle $x \in I$,
- (ii) $y(x_0) = z(x_0)$,
- (iii) $y(x) = z(x)$ für ein $x \in I$.

Beweis. Die Implikationen von oben nach unten sind offensichtlich. Sei nun $x_1 \in I$ so, dass $y_1 := y(x_1) = z(x_1)$. Dann sind y und z Lösungen des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} y' &= A(x)y + b(x) \\ y(x_1) &= y_1. \end{aligned}$$

Da dieses Anfangswertproblem eine eindeutige maximale Lösung hat muss gelten $y(x) = z(x)$ für alle $x \in I$. \square

Satz 7.44. Die Lösungsmenge der Differenzialgleichung $y' = A(x)y$, genauer die Menge

$$V := \{y : I \rightarrow \mathbb{R}^n \mid y'(x) = A(x)y(x) \text{ für alle } x \in I\}$$

ist ein n -dimensionaler Untervektorraum von $C^1(I, \mathbb{R}^n)$.

Beweis. Man überprüft leicht, dass für zwei Lösungen $y, z : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ auch $y + \lambda z$ eine Lösung der Differenzialgleichung ist.

Sei nun e_1, \dots, e_n eine Basis für \mathbb{R}^n und seien $y_i : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ die eindeutig bestimmten Lösungen der Anfangswertprobleme

$$\begin{aligned} y' &= A(x)y \\ y(x_0) &= e_i \end{aligned}$$

für $i \in \{1, \dots, n\}$. Dann ist y_1, \dots, y_n eine Basis für V .

Denn falls

$$\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_n y_n = 0$$

ist, so gilt insbesondere

$$\alpha_1 y_1(x_0) + \cdots + \alpha_n y_n(x_0) = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n = 0$$

woraus $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$ folgt, die Funktionen y_1, \dots, y_n sind also linear unabhängig.

Sei nun $z \in V$ und wähle $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ so, dass

$$\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n = z(x_0).$$

Dann sind z und $\alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_n y_n$ maximale Lösungen des Differenzialgleichungssystems die in x_0 übereinstimmen, also folgt aus Korollar 7.43

$$z = \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_n y_n.$$

Die Funktionen y_1, \dots, y_n spannen den Raum V auf. □

Bemerkung 7.45. (i) Der obige Satz ist die mathematisch exakte Formulierung von „die allgemeine Lösung hängt von n unbestimmten Parametern ab“. Er gilt in dieser Form nur für lineare Differenzialgleichungen.

(ii) Mit Bemerkung 7.39 erhalten wir, dass die Lösungsmenge des inhomogenen Differenzialgleichungssystems $y' = A(x)y + b(x)$ durch $y_i + V$ gegeben ist, wobei y_i eine beliebige Lösung der inhomogenen Gleichung ist.

Definition 7.46. Eine Basis y_1, \dots, y_n des Vektorraumes V aus Satz 7.44 heißt Fundamentalsystem des Differenzialgleichungssystems $y' = A(x)y$.

Nach Bemerkung 7.39 sind lineare Differenzialgleichungen n -ter Ordnung äquivalent zu linearen Differenzialgleichungssystemen erster Ordnung (mit n Gleichungen). Wir werden also auch n linear unabhängige Lösungen der Gleichung

$$y^{(n)} = a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y + b(x)$$

als Fundamentalsystem bezeichnen.

Beispiel 7.47. Betrachte die Differenzialgleichung $y' = \sin(x)y + \sin(x)\cos(x)$. Die zugehörige homogene Differenzialgleichung $y' = \sin(x)y$ hat getrennte Variablen und wir lösen sie wie folgt:

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} &= \sin(x) \\ \ln y(x) &= \int \frac{y'(t)}{y(t)} dt = -\cos(x) + c \\ y(x) &= K e^{-\cos(x)}. \end{aligned}$$

Man überprüft leicht, dass die erhaltene Funktion für beliebiges $K \in \mathbb{R}$ tatsächlich eine Lösung der homogenen Differenzialgleichung ist. Darüber hinaus stellt die Menge

aller solcher Funktionen offensichtlich einen eindimensionalen Vektorraum dar und damit haben wir bereits alle Lösungen gefunden.

Um nun die inhomogene Gleichung zu lösen verwenden wir das Verfahren der Variation der Konstanten. Falls $y(x) = C(x)e^{-\cos(x)}$ eine Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung ist, so muss gelten

$$y'(x) = C'(x)e^{-\cos(x)} + C(x)\sin(x)e^{-\cos(x)} = \sin(x)C(x)e^{-\cos(x)} + \sin(x)\cos(x)$$

Es gilt also

$$C'(x) = \sin(x)\cos(x)e^{\cos(x)}$$

$$C(x) = (1 - \cos(x))e^{\cos(x)}.$$

Es genügt eine Lösung der inhomogenen Gleichung zu finden (Bemerkung 7.39).

Bei dem Verfahren „Variation der Konstanten“ handelt es sich wiederum um ein Substitutionsverfahren.

Das im Beispiel illustrierte Verfahren kann zur Lösung beliebiger inhomogener Differenzialgleichungssysteme benutzt werden, vorausgesetzt man kennt bereits ein Fundamentalsystem des zugehörigen homogenen Systems.

Satz 7.48. Sei y_1, \dots, y_n ein Fundamentalsystem der Differenzialgleichung $y' = A(x)y$. Definiere die $n \times n$ -Matrix $W(x) := (y_1(x), \dots, y_n(x))$ (in dieser Fundamentalmatrix stehen die Lösungen des homogenen Systems in den Spalten). Dann ist $W(x)$ für alle $x \in I$ invertierbar und $z : I \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$z(x) := W(x) \int_{x_0}^x W(t)^{-1}b(t)dt$$

ist eine Lösung des inhomogenen Differenzialgleichungssystems.

Beweis. Nach Voraussetzung sind die Funktionen y_1, \dots, y_n linear unabhängig. Für $x \in I$ sind dann auch $y_1(x), \dots, y_n(x)$ linear unabhängig, denn falls

$$\alpha_1 y_1(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0$$

ist für ein $x \in I$, dann muss nach Korollar 7.43

$$\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_n y_n = 0$$

gelten, was lediglich für $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ möglich ist. Damit ist die Matrix $W(x)$ für jedes x invertierbar.

Auf Grund der Definition von W gilt $W'(x) = A(x)W(x)$ (die i -te Spalte dieser Matrixgleichung lautet $y'_i(x) = A(x)y_i(x)$) und wir erhalten

$$z'(x) = W'(x) \int_{x_0}^x W(t)^{-1}b(t)dt + W(x)W(x)^{-1}b(x) = A(x)z(x) + b(x).$$

Für die Anwendung des Hauptsatzes wie oben (und um sicherzustellen, dass z überhaupt wohldefiniert ist) muss der Integrand stetig sein. Das gilt, da die Abbildung $\text{Gl}(n) \ni A \mapsto A^{-1}$ stetig ist (Übungsblatt) \square

Der vorhergehende Satz sagt aus, dass wir stets eine Lösung der inhomogenen Gleichung von der Form $W(x)C(x)$ ($C : I \rightarrow \mathbb{R}^n$) finden können. Er liefert auch einen expliziten Ausdruck für C , in der Praxis ist es jedoch häufig einfacher im Differenzialgleichungssystem $y' = W(x)y$ zu substituieren und das daraus resultierende Gleichungssystem zu lösen wie im folgenden Beispiel illustriert.

Beispiel 7.49. Betrachte das System

$$\begin{aligned} u' &= v + \sin(x) \\ v' &= -u + \cos(x) \end{aligned}$$

Man überzeugt sich leicht, dass

$$y_1(x) := \begin{pmatrix} \sin(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix} \text{ und } y_2 = \begin{pmatrix} \cos(x) \\ -\sin(x) \end{pmatrix}$$

linear unabhängige Lösungen des zugehörigen homogenen Systems

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

sind. Um eine Lösung des inhomogenen Systems zu finden machen wir den Ansatz

$$z(x) := C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) = \begin{pmatrix} \sin(x) & \cos(x) \\ \cos(x) & -\sin(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1(x) \\ C_2(x) \end{pmatrix}.$$

Die Koeffizientenmatrix ist dabei die Matrix W aus dem vorhergehenden Satz. Soll z eine Lösung sein, so muss gelten

$$\begin{aligned} z'(x) &= C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x) \\ &= C_1(x)A(x)y_1(x) + C_2(x)A(x)y_2(x) + b(x), \end{aligned}$$

Um nun C_1' und C_2' zu erhalten muss also das Gleichungssystem

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = b(x)$$

gelöst werden, konkret

$$\begin{aligned} C_1'(x) \sin(x) + C_2'(x) \cos(x) &= \sin(x) \\ C_1'(x) \cos(x) - C_2'(x) \sin(x) &= \cos(x). \end{aligned}$$

Löst man das lineare Gleichungssystem (zum Beispiel mit dem Gaußverfahren) erhält man

$$\begin{aligned} C_1'(x) &= C_1'(x)(\sin^2(x) + \cos^2(x)) = \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \\ C_2'(x) &= C_2'(x)(\cos^2(x) + \sin^2(x)) = \sin(x) \cos(x) - \cos(x) \sin(x) = 0 \end{aligned}$$

und damit $C_1(x) = x$ und $C_2(x) = 0$. Eine Lösung des inhomogenen Systems ist also

$$y_h(x) = \begin{pmatrix} x \sin(x) \\ x \cos(x) \end{pmatrix}$$

Wir wenden uns nun Systemen mit konstanten Koeffizienten zu, wollen also $y' = Ay$ lösen für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Wir werden sehen, dass die „naive“ Verallgemeinerung der Lösung e^{Ax} für $n = 1$ zum Erfolg führt.

Die folgenden Aussagen gelten sinngemäß auch für $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, wir werden sie hier jedoch nur für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ausformulieren.

Bemerkung 7.50. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und betrachte die Funktion

$$e^{Ax} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k x^k. \quad (7.4)$$

Wir wissen, dass für die Konvergenz der Reihe auf der rechten Seite, ihre absolute Konvergenz hinreichend ist. Da

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{k!} A^k x^k \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|A\|^k |x|^k = e^{\|A\||x|}$$

gilt, ist e^{Ax} also für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert.

Konvergenz in $\mathbb{R}^{n \times n}$ entspricht der koordinatenweisen Konvergenz, das heißt die Koordinatenfunktionen der Reihe (7.4) sind Potenzreihen mit Konvergenzradius ∞ . Wir können also den Satz über Differenzierbarkeit von Potenzreihen (Satz 6.52) koordinatenweise anwenden und erhalten

$$\frac{d}{dx} e^{Ax} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k k x^{k-1} = A e^{Ax}.$$

Satz 7.51. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Das Anfangswertproblem mit konstanten Koeffizienten

$$\begin{aligned} y' &= Ay \\ y(x_0) &= y_0. \end{aligned}$$

wird genau von $y(x) = e^{A(x-x_0)} y_0$ gelöst.

Beweis. Das folgt unmittelbar aus der vorhergehenden Bemerkung. □

Bemerkung 7.52. (i) Mit dem vorhergehenden Satz ist das Lösen der Differenzialgleichung auf das Berechnen der Matrixexponentialfunktion zurückgeführt. Letztere Aufgabe läßt sich algorithmisch gut lösen wie wir bald sehen werden.

(ii) Da die Matrixmultiplikation nicht kommutative ist gilt im Allgemeinen *nicht*

$$\frac{d}{dx} e^{A(x)} = A'(x) e^{A(x)},$$

ebensowenig wie $e^{A+B} = e^A e^B$.

- (iii) Ein Fall, in dem wir $e^{Ax}v$ einfach ausrechnen können, ist der, dass v ein Eigenvektor der Matrix A ist, es also ein skalares λ gibt, so dass $Av = \lambda v$ gilt. Dann folgt

$$e^{Ax}v = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k x^k \right) v = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k A^k v = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \lambda^k v = e^{\lambda x} v.$$

Beispiel 7.53. Wir suchen Lösungen für das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y' &= z \\ z' &= y \\ y(0) &= 1 \\ z(0) &= 0. \end{aligned}$$

Wir müssen also $e^{Ax}y_0$ bestimmen für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

In diesem Falle kommt uns zu Gute, dass die Matrix A diagonalisierbar ist. Sie hat die Eigenwerte 1 und -1 und die zugehörigen Eigenvektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Mit der obigen Bemerkung erhalten wir dann

$$e^{Ax}y_0 = e^{Ax} \frac{1}{2}(v_1 + v_2) = \frac{1}{2}(e^x v_1 + e^{-x} v_2),$$

also die Lösung $y(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ und $z(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

Bemerkung 7.54. Häufig wird das oben illustrierte Verfahren etwas anders formuliert: Um das lineare Differentialgleichungssystem $y' = Ay$ zu lösen, macht man den Ansatz $y = Ce^{\lambda x}v$. Diese Funktion ist genau dann eine Lösung, wenn gilt

$$\lambda e^{\lambda x} v = e^{\lambda x} Av$$

also genau dann wenn λ ein Eigenwert von A ist und v der zugehörige Eigenvektor.

Für allgemeine A sind nicht alle Lösungen von der angesetzten Form und wir werden auf diese Weise kein Fundamentalsystem erhalten. Wir können jedoch auf diese Weise ein Anfangswertproblem lösen, dessen Anfangsvektor y_0 sich als Linearkombination von Eigenvektoren von A schreiben lässt.

Insbesondere führt das Verfahren beziehungsweise der obige Ansatz stets zum Erfolg wenn A diagonalisierbar ist.

Satz 7.55. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine diagonalisierbare Matrix, v_1, \dots, v_n eine Basis aus Eigenvektoren und $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die zugehörigen Eigenwerte. Dann bilden die Funktionen $y_i(x) = e^{\lambda_i x} v_i$ für $i \in \{1, \dots, n\}$ ein Fundamentalsystem für das Differenzialgleichungssystem $y' = Ay$.

Beweis. Für beliebiges $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt $e^{Ax}v_i = e^{\lambda_i x}v_i$, die Funktionen sind also tatsächlich Lösungen des Differenzialgleichungssystems. Im Punkt $x = 0$ sind die Funktionswerte $y_1(0) = v_1, \dots, y_n(0) = v_n$ linear unabhängig und damit auch die Funktionen y_1, \dots, y_n (Warum?). \square

Bemerkung 7.56. (i) Im obigen Fall ist das Lösen der Differenzialgleichung also auf die Lösung des Eigenwertproblems $Av = \lambda v$ zurückgeführt, wofür wir bereits Methoden kennen. Insbesondere können so Lösungen für symmetrische A oder allgemeiner normale A (das heißt $A^*A = AA^*$) bestimmt werden.

- (ii) Ein interessanter Spezialfall ergibt sich, wenn $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nicht im reellen, aber im komplexen diagonalisierbar ist (also echt komplexe Eigenwerte besitzt). In diesem Fall können wir dennoch reellwertige Lösungen aus den (zunächst komplexwertigen) Lösungen $Ce^{\lambda x}v$ zusammensetzen. Konkret sind für einen (komplexen) Eigenwert $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$ und den zugehörigen Eigenvektor $v = v_r + iv_i$ ($\lambda_r, \lambda_i \in \mathbb{R}$ und $v_r, v_i \in \mathbb{R}^n$)

$$e^{\lambda_r x}(v_r \sin(\lambda_i x) + v_i \cos(\lambda_i x)) \text{ und } e^{\lambda_r x}(v_r \cos(\lambda_i x) - v_i \sin(\lambda_i x))$$

linear unabhängige reellwertige Lösungen des Differenzialgleichungssystems (Übung).

Will man lediglich ein Anfangswertproblem lösen, so kann man diesen Schritt auslassen. Man startet dann wieder mit dem Ansatz $y = Ce^{\lambda x}v$ und erhält eine allgemeine Lösung von der Form

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} v_1 + \dots + C_n e^{\lambda_n x} v_n.$$

Bestimmt man nun die (komplexen) Konstanten C_1, \dots, C_n aus der Anfangsbedingung

$$y_0 = C_1 v_1 + \dots + C_n v_n$$

so erhält man automatisch eine reellwertige Lösungsfunktion (vorausgesetzt natürlich A und y_0 sind reellwertig).

- (iii) Falls A nicht diagonalisierbar ist, so ist es dennoch möglich e^{At} effektiv zu berechnen. Man bringt dafür die Matrix auf Jordansche Normalform. In jedem Fall kann ein homogenes System linearer Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten mit Methoden der linearen Algebra vollständig gelöst werden.

Beispiel 7.57. Betrachte das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y' &= z \\ z' &= -y \\ y(0) &= 1 \\ z(0) &= 0. \end{aligned}$$

Die zugehörige Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.5)$$

ist im Reellen nicht diagonalisierbar, sie besitzt jedoch im Komplexen die Eigenwerte i und $-i$ mit den zugehörigen Eigenvektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1+i \\ -1+i \end{pmatrix} \text{ und } v_2 = \begin{pmatrix} 1-i \\ -1-i \end{pmatrix}.$$

Soll die allgemeine (komplexe) Lösung $c_1 e^{ix} v_1 + c_2 e^{-ix} v_2$ die Anfangsbedingungen erfüllen, so muss gelten

$$\begin{aligned} (1+i)c_1 + (1-i)c_2 &= 1 \\ (-1+i)c_1 + (-1-i)c_2 &= 0, \end{aligned}$$

also $c_1 = \frac{1}{4}(1-i)$ und $c_2 = \frac{1}{4}(1+i)$.

Damit ergibt sich als Lösung

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{4}(1-i)e^{ix}(1+i) + \frac{1}{4}(1+i)e^{-ix}(1-i) = \frac{1}{2}e^{ix} + \frac{1}{2}e^{-ix} = \cos(x) \\ z(x) &= \frac{1}{4}(1-i)e^{ix}(-1+i) + \frac{1}{4}(1+i)e^{-ix}(-1-i) = \frac{i}{2}e^{ix} - \frac{i}{2}e^{-ix} = -\sin(x). \end{aligned}$$

Als wichtigen Spezialfall wollen wir zuletzt noch lineare Differenzialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten behandeln.

Satz 7.58. Seien $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ die Nullstellen des Polynoms

$$a_0 + a_1 \lambda + \dots + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \lambda^n$$

und ν_1, \dots, ν_k die zugehörigen Vielfachheiten. Dann bilden die Funktionen $x \mapsto x^l e^{\lambda_i x}$ mit $i \in \{1, \dots, k\}$ und $l \in \{0, \dots, \nu_i - 1\}$ ein Fundamentalsystem für die Differenzialgleichung

$$a_0 y + a_1 y' + \dots + a_{n-1} y^{(n-1)} + y^{(n)} = 0.$$

Ohne Beweis.

8 Maße und Integrale

8.1 Inhalte und Maße

Definition 8.1. Eine Menge M heißt abzählbar wenn es eine surjektive Abbildung von \mathbb{N} nach M gibt, also eine Folge $(x_n) \subset M$ so, dass für jedes $y \in M$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, das $x_n = y$ erfüllt. Eine Menge M heißt abzählbar unendlich, wenn sie abzählbar und unendlich ist.

Bemerkung 8.2. (i) Abzählbar unendliche Mengen sind in gewisser Weise die kleinsten unendlichen Mengen.

(ii) Teilmengen von abzählbaren Mengen sind abzählbar (wähle eine entsprechende Teilfolge).

(iii) Die Vereinigung zweier abzählbarer Teilmengen M und K ist abzählbar: Wenn $(x_n) \subset M$ und $(y_n) \subset K$ sind, dann ist die Folge

$$(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \dots)$$

surjektiv auf $M \cup N$.

Wendet man diese Aussage iterativ an, dann erhält man, dass endliche Vereinigungen abzählbarer Mengen abzählbar sind. Insbesondere ist zum Beispiel die Menge \mathbb{Z} abzählbar.

(iv) Die Vereinigung abzählbar vieler abzählbarer Teilmengen ist abzählbar. Sei M eine abzählbare Menge abzählbarer Mengen und $(A_n) \subset M$ eine surjektive Folge und $(x_{nk})_{k \in \mathbb{N}} \subset A_n$ eine surjektive Folge für jedes n , dann ist die Folge

$$(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{13}, x_{22}, x_{31}, x_{14}, x_{23}, x_{32}, x_{41}, \dots)$$

eine surjektive Folge auf $\bigcup_{A \in M} A$.

Insbesondere ist für zwei abzählbare Mengen M und K ihr kartesisches Produkt

$$M \times K = \bigcup_{x \in M} \{(x, y) \mid y \in K\}$$

abzählbar. Damit sind die Mengen $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ und damit auch \mathbb{Q} abzählbar.

(v) Es gibt Mengen, die nicht abzählbar sind, zum Beispiel $[0, 1]$, \mathbb{R} sowie $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Definition 8.3. Sei Ω eine Menge. Ein System von Teilmengen (I eine beliebige Indexmenge) $(A_i)_{i \in I} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heißt paarweise disjunkt, wenn $A_i \cap A_j = \emptyset$ wann immer $i \neq j$.

Bemerkung 8.4. (i) Sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ System von Teilmengen. Eine Abbildung $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ heißt Inhalt, falls für alle $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkt gilt: falls $A_1 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{A}$, dann gilt

$$\mu(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i) \quad (\text{Additivität}).$$

Der Inhaltsbegriff verallgemeinert die Begriffe Länge (1-dim.), Fläche (2-dim.) und Volumen (3-dim.).

(ii) Im Kontext von Maßen und Inhalten (und später Integralen) definieren wir

$$\begin{aligned} c + \infty &= \infty \quad \forall c \in \mathbb{R} \cup \infty \\ 0 \cdot \infty &= 0. \end{aligned}$$

(iii) Ziel wird es sein, das Mengensystem \mathcal{A} möglichst groß zu wählen. Ideal wäre $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, aber das sogenannte Banach-Tarski-Paradoxon besagt: Es existiert eine disjunkte Zerlegung

$$A_1 \cup \dots \cup A_p \cup B_1 \cup \dots \cup B_q = B_1(0) \subset \mathbb{R}^3$$

und Bewegungen (Kombinationen aus Drehungen und Verschiebungen) D_1, \dots, D_p sowie T_1, \dots, T_q , so dass

$$D_1 A_1 \cup \dots \cup D_p A_p = B_1(0) = T_1 B_1 \cup \dots \cup T_q B_q.$$

Es kann also keinen unter Bewegungen invarianten Inhalt auf $\mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$ geben.

Definition 8.5. Sei Ω eine Menge. Ein System \mathcal{A} von Teilmengen von Ω heißt σ -Algebra, wenn

- (i) $\emptyset \in \mathcal{A}$,
- (ii) $A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A}$,
- (iii) für eine abzählbare Teilmenge $\{A_1, A_2, \dots\} \subset \mathcal{A}$ folgt

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}.$$

Eine Abbildung $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ heißt ein Maß, falls $\mu(\emptyset) = 0$ und für paarweise disjunkte Teilmengen $(A_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ gilt

$$\mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i) \quad \sigma\text{-Additivität.}$$

Eine Grundmenge zusammen mit einer σ -Algebra (Ω, \mathcal{A}) heißt messbarer Raum oder Messraum.

Ist zusätzlich ein Maß vorgegeben, so heißt das Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum.

Beispiel 8.6. (i) Sei Ω eine beliebige Menge mit der disjunkten Zerlegung

$$\Omega = A_1 \cup \dots \cup A_n.$$

Dann ist

$$\left\{ \bigcup_{i \in I} A_i \mid I \subset \{1, \dots, n\} \right\}$$

eine σ -Algebra.

(ii) Sei Ω beliebig und $x \in \Omega$. Dann ist

$$\delta_x : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, \infty]$$

$$A \mapsto \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ein Maß.

(iii) Sei Ω beliebig, dann ist

$$\# : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, \infty]$$

$$A \mapsto \begin{cases} \text{Anzahl der Elemente in } A & A \text{ endlich} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

ein Maß, das sogenannte Zählmaß. Dieses Maß ist besonders für endliche oder abzählbare Mengen nützlich.

(iv) Sei Ω abzählbar und $(a_\omega)_{\omega \in \Omega} \subset [0, \infty]$, dann ist

$$\mu : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, \infty]$$

$$A \mapsto \sum_{\omega \in A} a_\omega$$

ein Maß.

(v) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $A \in \mathcal{A}$. Definiere die auf A eingeschränkte σ -Algebra

$$\mathcal{A}|_A := \{B \cap A \mid B \in \mathcal{A}\}.$$

Dann ist $(A, \mathcal{A}|_A, \mu)$ ein Maßraum.

Bemerkung 8.7. Für abzählbare Teilmengen $\{A_1, A_2, \dots\} \subset \mathcal{A}$ einer σ -Algebra \mathcal{A} gilt

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i^c \right)^c.$$

Falls $A, B \in \mathcal{A}$, dann gilt auch $A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{A}$.

Ein Maß ist stets monoton, das heißt falls $A, B \in \mathcal{A}$ und $A \subset B$, dann gilt

$$\mu(B) = \mu(B \setminus A) + \mu(A) \geq \mu(A).$$

Definition 8.8. Eine Abbildung $\mu : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, \infty]$ heißt äußeres Maß, falls $\mu(\emptyset) = 0$ und

$$A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \implies \mu(A) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i)$$

gilt.

Genauso wie Maße, sind auch äußere Maße monoton.

Sei \mathcal{I} die Menge der beschränkten Intervalle

$$\mathcal{I} = \bigcup_{x,y \in \mathbb{R}, x < y} \{[x, y], [x, y), (x, y], (x, y)\}.$$

Wir definieren auf \mathcal{I} die Länge als

$$l([x, y]) := l([x, y)) := l((x, y]) := l((x, y)) = y - x.$$

Satz 8.9. *Die Abbildung*

$$\lambda : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty]$$

$$A \mapsto \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} l(I_i) \mid A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i, I_i \in \mathcal{I} \forall i \in \mathbb{N} \right\}$$

definiert ein äußeres Maß auf den reellen Zahlen.

Beweis. Es gilt $\lambda(\emptyset) \leq l([0, \epsilon]) = \epsilon$ für jedes $\epsilon > 0$ also $\lambda(\emptyset) = 0$.

Sei nun $A \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$. Wir wollen zeigen, dass

$$\lambda(A) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda(A_k)$$

erfüllt ist. Falls die Summe auf der rechten Seite (bestimmt) divergiert, ist nichts zu zeigen, wir können also $\lambda(A_k) < \infty$ annehmen. Sei $\epsilon > 0$, dann existieren für jedes $k \in \mathbb{N}$ Intervalle (I_{ki}) , so dass

$$A_k \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_{ki} \text{ und } \sum_{i \in \mathbb{N}} l(I_{ki}) < \lambda(A_k) + \frac{\epsilon}{2^k}.$$

Dann gilt

$$A \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \subset \bigcup_{k, i \in \mathbb{N}} I_{ki}$$

und

$$\lambda(A) \leq \sum_{k, i \in \mathbb{N}} l(I_{ki}) < \sum_{k \in \mathbb{N}} \left(\lambda(A_k) + \frac{\epsilon}{2^k} \right) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda(A_k) + \epsilon.$$

Da das für jedes $\epsilon > 0$ gilt, folgt die gesuchte Ungleichung. \square

Bemerkung 8.10. Wir haben hier das äußere Lebesgue-Maß konstruiert. Dabei wurden kaum spezifische Eigenschaften der Intervalle aus I benutzt. Eine analoge Konstruktion ist dementsprechend auch auf \mathbb{R}^2 (benutze Rechtecke statt Intervalle), auf \mathbb{R}^3 (Quader statt Intervalle) auf \mathbb{R}^n sowie in vielen weiteren Situationen möglich. Wir erhalten auf diese Weise ein äußeres Lebesgue-Maß auf \mathbb{R}^n für jedes $n \in \mathbb{N}$. Diese äußeren Maße sind noch nicht als unser gesuchter Flächen/Volumenbegriff geeignet, da sie im Allgemeinen nicht endlich additiv sind. Wir können jedoch ein echtes Maß erhalten, indem wir den Definitionsbereich einschränken.

Satz 8.11. Sei μ ein äußeres Maß auf $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. Dann ist das System der messbaren Mengen

$$\mathcal{A} = \{A \subset \Omega \mid \mu(E) \geq \mu(E \cap A) + \mu(E \cap A^c) \forall E \in \mathcal{P}(\Omega)\}$$

eine σ -Algebra und $\mu|_{\mathcal{A}}$ ist ein Maß.

Beweis. Zunächst folgt aus der Subadditivität stets $\mu(E) \leq \mu(E \cap A) + \mu(E \cap A^c)$, eine Menge ist also messbar genau dann wenn

$$\mu(E) = \mu(E \cap A) + \mu(E \cap A^c)$$

für alle $E \in \mathcal{P}(\Omega)$.

Offenbar ist \emptyset messbar und A messbar genau dann wenn A^c messbar ist.

Es gilt für jedes $E \in \mathcal{P}(\Omega)$

$$E \cap (A \cup B) = (E \cap A) \cup (E \cap B) = (E \cap A) \cup (E \cap B \cap A^c)$$

und so folgt für A, B messbar mit der Subadditivität von μ

$$\begin{aligned} \mu(E) &= \mu(E \cap A) + \mu(E \cap A^c) = \mu(E \cap A) + \mu(E \cap A^c \cap B) + \mu(E \cap A^c \cap B^c) \\ &\geq \mu(E \cap (A \cup B)) + \mu(E \cap (A \cup B)^c) \geq \mu(E), \end{aligned}$$

Damit ist $A \cup B$ messbar und die obigen Ungleichungen sind in Wahrheit Gleichungen, es gilt also

$$\mu(E \cap A) + \mu(E \cap A^c \cap B) = \mu(E \cap (A \cup B)).$$

Aus der letzten Gleichung folgt falls A, B zusätzlich disjunkt sind

$$\mu(E \cap (A \cup B)) = \mu(E \cap A) + \mu(E \cap B)$$

und wir erhalten für $E = \Omega$ insbesondere die endliche Additivität von μ für messbare Mengen.

Seien nun $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ paarweise disjunkte, messbare Mengen und setze

$$S_n = \bigcup_{i=1}^n A_i \text{ und } S = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Dann folgt aus dem oben gezeigten induktiv, dass S_n messbar ist und für jedes $E \in \mathcal{P}(\Omega)$ gilt

$$\mu(E \cap S_n) = \sum_{i=1}^n \mu(E \cap A_i).$$

Die Messbarkeit impliziert dann auch

$$\mu(E) \geq \mu(E \cap S_n) + \mu(E \cap S_n^c) \geq \sum_{i=1}^n \mu(E \cap A_i) + \mu(E \cap S^c)$$

wobei wir die Monotonie des äußeren Maßes benutzt haben. Lassen wir nun $n \rightarrow \infty$ gehen und benutzen nochmals die Subadditivität dann folgt

$$\mu(E) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E \cap A_i) + \mu(E \cap S^c) \geq \mu(E \cap S) + \mu(E \cap S^c) \geq \mu(E).$$

Daraus ist wiederum ersichtlich, dass S messbar ist und

$$\mu(E \cap S) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E \cap A_j)$$

gilt. Insbesondere folgt, für $E = \Omega$ die σ -Additivität von μ für messbare Mengen.

Es bleibt noch zu zeigen, dass beliebige abzählbare Vereinigungen messbarer Mengen wieder messbar sind. Das folgt jedoch leicht, da für messbare $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ nach dem bereits gezeigten die Mengen

$$B_i := A_i \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} A_j \right)$$

messbar (Warum?) und paarweise disjunkt sind und es gilt

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i. \quad \square$$

Definition 8.12. Wenden wir den vorhergehenden Satz auf das äußere Maß in Satz 8.9 an, so erhalten wir die σ -Algebra der Lebesgue-messbaren Mengen und das Lebesgue-Maß λ auf den reellen Zahlen. Auf ganz analoge Weise kann man die Lebesgue-Maße auf \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 und \mathbb{R}^n für jedes $n \in \mathbb{N}$ konstruieren.

Bemerkung 8.13. Wir nennen eine Menge $A \subset \mathbb{R}$ eine Nullmenge, wenn ihr äußeres Maß 0 ist, wenn sie sich also durch abzählbar viele Intervalle von beliebig kleiner Gesamtlänge überdecken lässt. Offensichtlich ist $\{x\}$ eine Nullmenge für jedes $x \in \mathbb{R}$. Daraus folgt – nicht mehr ganz so offensichtlich – für jede abzählbare Menge A aus der Subadditivität des äußeren Maßes

$$\lambda(A) = \lambda \left(\bigcup_{x \in A} \{x\} \right) \leq \sum_{x \in A} \lambda\{x\} = 0.$$

Damit sind beispielsweise die rationalen Zahlen \mathbb{Q} eine Nullmenge.

Offensichtlich sind Teilmengen von Nullmengen ebenfalls Nullmengen und daraus folgt insbesondere, dass alle Nullmengen Lebesgue-messbar sind (Warum?).

Wir wollen nun noch zeigen, dass diese σ -Algebra außer \emptyset und Ω noch weitere Mengen enthält und die Begriffe damit sinnvoll sind.

Satz 8.14. *Intervalle sind Lebesgue-messbar und es gilt $\lambda([a, b]) = b - a$*

Beweis. Sei $A \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall. Wir zerlegen \mathbb{R} in drei disjunkte Intervalle

$$\mathbb{R} = I_l \cup A \cup I_r.$$

Für $I \in \mathcal{I}$ überzeugt man sich leicht, dass $I \cap I_l, I \cap A$ und $I \cap I_r$ beschränkte Intervalle (oder leer) sind und

$$l(I) = l(I \cap I_l) + l(I \cap A) + l(I \cap I_r)$$

gilt. Sei nun $E \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ und

$$E \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i$$

eine Überdeckung von E durch Intervalle. Dann sind

$$E \cap A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i \cap A \quad E \cap A^c \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (I_i \cap I_l) \cup (I_i \cap I_r)$$

Überdeckungen von $E \cap A$ und $E \cap A^c$ durch abzählbar viele Intervalle und es gilt

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} l(I_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} l(I_i \cap A) + \sum_{i \in \mathbb{N}} (l(I_i \cap I_l) + l(I_i \cap I_r)) \geq \lambda(E \cap A) + \lambda(E \cap A^c).$$

Da das für jede Überdeckung durch Intervalle von E gilt, folgt

$$\lambda(E) \geq \lambda(E \cap A) + \lambda(E \cap A^c)$$

und da E beliebig war, ist damit die Messbarkeit von A gezeigt. Damit enthält die σ -Algebra der Lebesgue-messbaren Mengen alle Intervalle.

Um nun zu zeigen, dass für $A = [a, b]$ gilt $\lambda(A) = b - a$, nehmen wir an, dass für abzählbar viele Intervalle $(I_n) \subset \mathcal{I}$ gilt

$$l := \sum_{n \in \mathbb{N}} l(I_n) < b - a.$$

Wir nehmen zunächst an, dass die I_n alle offen sind und definieren für $n \in \mathbb{N}$

$$A_n := A \setminus \left(\bigcup_{i=1}^n I_i \right).$$

Die Mengen A_n sind alle nicht leer, da sich A nicht durch endlich viele Intervalle von Gesamtlänge $< b - a$ überdecken lässt (vergleiche Übungsaufgabe 5 vom Blatt 10). Wir wählen nun eine beliebige Folge $(x_n) \subset A$ so, dass $x_n \in A_n$ ist. Da A kompakt ist, existiert eine gegen $x \in A$ konvergente Teilfolge. Wäre $x \in I_k$ für ein $k \in \mathbb{N}$, dann gäbe es – da I_k offen ist – unendlich viele x_i die ebenfalls in I_k enthalten wären, was aber

nach der Definition der Mengen A_n unmöglich ist. Wir haben damit gezeigt, dass die Intervalle I_n die Menge A nicht überdecken.

Seien nun die Intervalle I_n beliebig (also nicht mehr notwendig offen) und wir nehmen an, dass sie A überdecken. Sei (x_k) die Folge der (abzählbar vielen) Randpunkte aller dieser Intervalle. Sei $\epsilon = \frac{b-a-l}{4}$, dann ist

$$\left\{ \overset{\circ}{I}_n \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \left(x_k - \frac{\epsilon}{2^k}, x_k + \frac{\epsilon}{2^k} \right) \mid k \in \mathbb{N} \right\}$$

eine Überdeckung von A durch abzählbar viele offene Intervalle mit Gesamtlänge

$$l + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\epsilon}{2^k} = l + \frac{b-a-l}{2} = \frac{b-a+l}{2} < b-a.$$

Eine solche Überdeckung ist aber nach dem oben gezeigten unmöglich. \square

Satz 8.15. *Jede offene und jede abgeschlossene Menge ist Lebesgue-messbar.*

Beweis. Sei O offen und $x \in O$. Dann existiert $\epsilon > 0$ so, dass $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset O$ ist. Da die rationalen Zahlen dicht in \mathbb{R} sind, existieren l, r in \mathbb{Q} so, dass $x - \epsilon < l < x$ und $x < r < x + \epsilon$, das heißt x ist in einem Intervall (l, r) mit rationalen Randpunkten enthalten, dass vollständig in O liegt. Wir haben also gezeigt, dass

$$O = \bigcup_{l, r \in \mathbb{Q} \text{ und } (l, r) \subset O} (l, r)$$

gilt. Wir wissen bereits, dass Intervalle Lebesgue-messbar sind und dass die Lebesgue-messbaren Mengen eine σ -Algebra sind, damit ist auch O Lebesgue-messbar.

Schließlich ist jede abgeschlossene Menge als Komplement einer offenen Menge ebenfalls Lebesgue-messbar. \square

Bemerkung 8.16. Die Lebesgue- σ -Algebra enthält noch viel mehr Mengen, abzählbare Vereinigungen offener und abgeschlossener Mengen, deren Komplemente, abzählbare Vereinigungen von solchen Mengen etc. Grundsätzlich sind alle Mengen die man auf „natürliche Weise“ antrifft messbar und man muss große Anstrengungen unternehmen um zu zeigen, dass es überhaupt Mengen gibt, die nicht messbar sind. Die diversen Lebesgue-Maße (für unterschiedliche Dimensionen) sind also für hinreichend viele Mengen definiert.

Bemerkung 8.17. Für eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$ bezeichne

$$A + x := \{y + x \mid y \in A\}.$$

Ein Maß μ auf einer σ -Algebra \mathcal{A} über \mathbb{R} heißt translationsinvariant, wenn $\mu(A + x) = \mu(A)$ gilt für alle $A \in \mathcal{A}$ und alle $x \in \mathbb{R}$. Dazu muss insbesondere gelten, dass die σ -Algebra translationsinvariant ist, das heißt $A + x \in \mathcal{A}$ für alle $A \in \mathcal{A}$ und alle $x \in \mathbb{R}$.

Da Translationen von Intervallen wieder Intervalle sind, überzeugt man sich leicht, dass das äußere Lebesgue-Maß, und damit auch das Lebesgue-Maß translationsinvariant sind.

Man kann darüber hinaus zeigen, dass λ das einzige translationsinvariante Maß ist, dass $\lambda([0, 1]) = 1$ erfüllt.

Wir wissen jetzt, dass sich sinnvolle Flächen-, Volumen- und andere Maßbegriffe für hinreichend viele Mengen definieren lassen. Schließlich wollen wir noch sehen, dass die anfänglichen Überlegungen zur Berechnung von Maßen (Approximation der zu untersuchenden Menge von innen oder von außen durch bereits bekannte Mengen) tatsächlich zum Erfolg führen.

Satz 8.18 (Stetigkeit des Maßes). *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Für eine monoton wachsende Folge $(A_n) \subset \mathcal{A}$, das heißt $A_n \subset A_{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}$, gilt*

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Für eine monoton fallende Folge $(B_n) \subset \mathcal{A}$ gilt

$$\mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \mu(B_n),$$

falls $\mu(B_n) < \infty$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Falls $\mu(A_n) = \infty$ für ein $n \in \mathbb{N}$, dann folgt die erste Gleichheit sofort. Sei also $\mu(A_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Setze $A_0 = \emptyset$ und $C_n = A_n \setminus A_{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann sind die C_n paarweise disjunkt und daher gilt

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) &= \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(C_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (\mu(A_n) - \mu(A_{n-1})) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) - \mu(A_0). \end{aligned}$$

Es sein nun $\mu(B_N)$ endlich (und damit auch $\mu(B_n)$ für alle $n \geq N$). Setze

$$B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n.$$

Dann ist die Folge $D_n = B_N \setminus B_n$ für $n \geq N$ monoton wachsend und es gilt

$$\bigcup_{n=N}^{\infty} D_n = \bigcup_{n=N}^{\infty} B_N \cap B_n^c = B_N \cap \left(\bigcap_{n=N}^{\infty} B_n\right)^c = B_N \setminus B.$$

Nach dem eben gezeigten ist dann

$$\mu(B_N) - \mu(B) = \mu(B_N \setminus B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_N \setminus B_n) = \mu(B_N) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n).$$

Die übrigen Gleichheiten folgen dann aus der Monotonie der Folgen $\mu(A_n)$ beziehungsweise $\mu(B_n)$. \square

Bemerkung 8.19. Die Einschränkung $\mu(B_n) < \infty$ für ein $n \in \mathbb{N}$ ist notwendig, wie das Beispiel

$$0 = \lambda(\emptyset) = \lambda\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [n, \infty)\right) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda([n, \infty)) = \infty$$

zeigt.

8.2 Integrale

Wir wollen nun für beliebige Maßräume Integrale konstruieren. Wir werden uns dabei vom Lebesgue-Integral leiten lassen, bei dem wir das Integral als die Fläche unter dem Graphen der integrierten Funktion (versehen mit entsprechenden Vorzeichen für Flächen oberhalb beziehungsweise unterhalb der x -Achse) interpretieren können. Man sollte sich jedoch nicht zu sehr auf diese geometrische Interpretation fixieren. Integrale können, abhängig vom zugrundeliegenden Maß, ganz unterschiedliche Interpretationen haben – Flächen, Volumina, Gesamtmasse, Gesamtladung, Gesamtenergieinhalt, Gesamtwahrscheinlichkeit, etc.

Die Grundidee der Integration ist, dass wir für bestimmte einfache Funktionen die Integrale direkt angeben können. Für kompliziertere Funktionen werden wir dann versuchen, diese durch einfache zu approximieren. Im Folgenden wollen wir zeigen, dass diese Grundidee sich konsistent umsetzen lässt.

Für dieses gesamte Kapitel sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum (wir denken hier in erster Linie natürlich an \mathbb{R} mit der σ -Algebra der Lebesgue-messbaren Mengen und dem Lebesgue-Maß). Wir nehmen an, dass der Maßraum σ -endlich ist, das heißt es existiert eine Folge $(E_n) \subset \mathcal{A}$ so, dass $\mu(E_n) \leq \infty$ und $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n = \Omega$ und nennen eine Folge mit dieser Eigenschaft eine ausschöpfende Folge. Die reellen Zahlen mit dem Lebesgue-Maß erfüllen diese Voraussetzung (setze $A_n = [-n, n]$). Wird nichts anderes gesagt, dann bilden alle Funktionen von Ω nach \mathbb{C} ab und werden als messbar (siehe unten) vorausgesetzt.

Bemerkung 8.20 (Spezielle Notation). Sei $\Phi(x)$ eine Aussage, deren Gültigkeit von einer Variablen $x \in \Omega$ abhängt also zum Beispiel die Aussage $f(x) > g(x)$. Dann verwenden wir $[\Phi]$ als abkürzende Schreibweise für $\{x \in \Omega \mid \Phi(x)\}$. So bezeichnen wir zum Beispiel die Menge der Punkte an denen eine Funktion den Wert $y \in \mathbb{C}$ annimmt mit

$$[f = y] = f^{-1}(\{y\}) = \{x \in \Omega \mid f(x) = y\}.$$

Analog ist

$$[f > g] = \{x \in \Omega \mid f(x) > g(x)\}.$$

Schreiben wir lediglich „es gilt Φ “ ohne Angabe eines Punktes, dann ist damit stets „es gilt $\Phi(x)$ für alle $x \in \Omega$ “ gemeint. Wir schreiben also statt $f(x) > g(x)$ für jedes $x \in \Omega$ nur kürzer $f > g$.

In der Maß- und Integrationstheorie ist es häufig egal was auf einer Nullmenge passiert. Daher sagen wir Φ gilt „fast überall (f. ü.)“, falls die Menge $\{x \mid \neg \Phi(x)\}$ eine Nullmenge ist. So heißt $f > g$ fast überall beispielsweise

$$\mu([f \leq g]) = 0.$$

Die Aussage (f_n) konvergiert fast überall gegen f bedeutet, dass die Menge

$$\left[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \neq f \right]$$

eine Nullmenge ist. Wir werden weiter unten viele Beispiele für Sätze sehen, wo die Voraussetzungen lediglich fast überall erfüllt sein müssen.

Definition 8.21. Sei $A \in \mathcal{A}$ eine Teilmenge von Ω , dann heißt

$$\mathbb{1}_A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

die charakteristische Funktion der Menge A . Wir nennen A den Träger der charakteristischen Funktion.

Mit \mathbf{X} bezeichnen wir den folgenden, von charakteristischen Funktionen aufgespannten Vektorraum

$$\mathbf{X} = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{A_i} \mid n \in \mathbb{N}, A_i \in \mathcal{A}, \mu(A_i) < \infty, a_i \in \mathbb{C}, i \in \{1, \dots, n\} \right\}.$$

Die Elemente von \mathbf{X} bezeichnen wir als einfache Funktionen.

Mit \mathbf{X}^+ bezeichnen wir die Menge der nichtnegativen einfachen Funktionen.

Bemerkung 8.22. (i) Zwischen Mengen $A \in \mathcal{A}$ und den zugehörigen charakteristischen Funktionen besteht ein recht enger Zusammenhang. Die meisten Aussagen über Mengen lassen sich auch über die charakteristischen Funktionen ausdrücken. So gilt für $A, B \in \mathcal{A}$

$$\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B \text{ und}$$

$$\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B.$$

Entsprechend sind A und B disjunkt, genau dann wenn $\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B = 0$, genau dann wenn $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$.

- (ii) Man überzeugt sich leicht, dass die Menge der einfachen Funktionen tatsächlich ein Vektorraum ist. Da das Produkt charakteristischer Funktionen wieder eine charakteristische Funktion ist, sind auch Produkte einfacher Funktionen wieder in \mathbf{X} , die Menge ist also sogar eine Algebra.
- (iii) Falls A_1, \dots, A_n eine Zerlegung von Ω bilden, das heißt sie sind paarweise disjunkt und es gilt $A_1 \cup \dots \cup A_n = \Omega$, dann gilt

$$\mathbb{1} := \mathbb{1}_\Omega = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i}.$$

- (iv) Falls (E_n) eine monotone, ausschöpfende Folge ist, dann konvergiert $\mathbb{1}_{E_n}$ punktweise gegen $\mathbb{1}$ (Warum?).
- (v) Die Darstellung einer einfachen Funktion als Linearkombination charakteristischer Funktionen ist nicht eindeutig wie das folgende Beispiel über \mathbb{R} zeigt:

$$\mathbb{1}_{[0,2]} + \mathbb{1}_{(2,3]} = \mathbb{1}_{[0,1]} + \mathbb{1}_{[1,3]}.$$

- (vi) Man überzeugt sich leicht, dass eine Funktion genau dann einfach ist, wenn sie nur endlich viele verschiedene Werte annimmt und wenn ihr Träger $[f \neq 0]$ endliches Maß hat. Damit erhalten wir die sogenannte kanonische Darstellung von f

$$f = \sum_{y \in f(\Omega)} y \mathbb{1}_{[f=y]}.$$

Die Träger der hier auftretenden charakteristischen Funktionen sind eine Zerlegung von Ω und die auftretenden Koeffizienten sind verschieden.

Wir beginnen nun mit der Definition von Integralen.

Definition 8.23 (Integral für einfache Funktionen). Sei $f \in \mathbf{X}$ und

$$f = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{A_i}$$

die kanonische Darstellung von f . Definiere

$$\int f d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i).$$

Bemerkung 8.24. Man beachte, dass die obige Summe stets endlich ist, da die einzige Menge A_i mit möglicherweise unendlichem Maß den Koeffizienten 0 hat und wir vereinbart hatten, dass wir $0 \cdot \infty$ als 0 interpretieren (wir sehen hier, dass diese Festlegung sinnvoll ist – der Teil wo die Funktion den Wert 0 annimmt, trägt nicht zum Integral bei).

Sei

$$f = \sum_{j=1}^m b_j \mathbb{1}_{B_j}$$

eine andere Darstellung von f wobei die Mengen B_1, \dots, B_m eine Zerlegung von Ω sein sollen. Dann gilt, falls $A_i \cap B_j \neq \emptyset$ für $x \in A_i \cap B_j$

$$f(x) = a_i = b_j,$$

und damit auf Grund der Additivität des Maßes

$$\begin{aligned} \int f d\mu &= \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i) = \sum_{i=1}^n a_i \mu\left(A_i \cap \bigcup_{j=1}^m B_j\right) = \sum_{i=1}^n a_i \mu\left(\bigcup_{j=1}^m A_i \cap B_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n b_j \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^m b_j \mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i \cap B_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^m b_j \mu(B_j). \end{aligned}$$

Satz 8.25. Seien f, g einfache Funktionen und $\alpha \in \mathbb{C}$. Es gilt

$$\int (f + \alpha g) d\mu = \int f d\mu + \alpha \int g d\mu.$$

Falls f und g reellwertig sind und $f \leq g$ fast überall gilt, so ist auch

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu.$$

Insbesondere gilt, falls $f = g$ fast überall, auch

$$\int f d\mu = \int g d\mu.$$

Es gilt stets

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu.$$

Beweis. Seien

$$f = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{A_i} \text{ und } g = \sum_{j=1}^m b_j \mathbb{1}_{B_j}$$

die kanonischen Darstellungen von f und g . Dann können wir $f + \alpha g$ wie folgt darstellen

$$\begin{aligned} f + \alpha g &= \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{A_i} + \alpha \sum_{j=1}^m b_j \mathbb{1}_{B_j} = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{A_i} \sum_{j=1}^m \mathbb{1}_{B_j} + \alpha \sum_{j=1}^m b_j \mathbb{1}_{B_j} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (a_i + \alpha b_j) \mathbb{1}_{A_i \cap B_j} \end{aligned}$$

Die Mengen $A_i \cap B_j$, $i \in \{1, \dots, n\}$ und $j \in \{1, \dots, m\}$ bilden eine Zerlegung von Ω und es gilt nach der vorhergehenden Bemerkung

$$\begin{aligned} \int (f + \alpha g) d\mu &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (a_i + \alpha b_j) \mu(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i \mu(A_i \cap B_j) + \alpha \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m b_j \mu(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i) + \alpha \sum_{j=1}^m b_j \mu(B_j) = \int f d\mu + \alpha \int g d\mu. \end{aligned}$$

Sei nun $f \geq 0$ fast überall. Dann ist $[f < 0]$ eine Nullmenge. Falls $a_i < 0$, dann ist $A_i \subset [f < 0]$ ebenfalls eine Nullmenge. Dann ist das Integral eine Summe über nichtnegative Terme.

Gilt nun $f \leq g$ fast überall, dann folgt aus dem eben Gezeigten, dass

$$0 \leq \int (g - f) d\mu = \int g d\mu - \int f d\mu.$$

Schließlich erhalten wir

$$\left| \int f d\mu \right| = \left| \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i) \right| \leq \sum_{i=1}^n |a_i| \mu(A_i) = \int |f| d\mu. \quad \square$$

Bemerkung 8.26. Aus der Linearität des Integrals folgt, dass für eine beliebige Darstellung

$$f = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{A_i}$$

gilt

$$\int f d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i).$$

Wir hätten also zur Definition des Integrals für einfache Funktionen nicht zwangsläufig die kanonische Darstellung benutzen müssen, hätten dann aber zeigen müssen, dass die Definition von der Darstellung unabhängig ist.

Bemerkung 8.27. In der hier verwendeten Notation schreiben wir die Integrationsvariable nicht mit falls es keinen Grund dazu gibt. Dadurch soll deutlich gemacht werden, dass das Integral Funktionen (nicht deren Werte) auf Zahlen abbildet. Alternativ schreiben wir, falls die Integrationsvariable von Belang ist

$$\int f(x) d\mu(x)$$

oder, speziell im Falle des Lebesgue-Integrals auch

$$\int f(x) dx.$$

Wollen wir nun Integrale durch Approximation des Integranden durch einfache Funktionen definieren, so ergeben sich unmittelbar die folgenden Fragen. Welche Funktionen lassen sich überhaupt durch einfache Funktionen approximieren? Hängt das Ergebnis der Rechnung von der Art und Weise der Approximation ab?

Definition 8.28. Eine Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ heißt messbar, wenn es eine Folge einfacher Funktionen $(f_n) \subset \mathbf{X}$ gibt die punktweise gegen f konvergiert.

Bemerkung 8.29. (i) An dieser Stelle müsste eigentlich ein Abschnitt über messbare Funktionen und ihre Eigenschaften folgen. Wir fassen stattdessen die wichtigsten Ergebnisse stichpunktartig zusammen.

- (ii) Eine reellwertige Funktion f ist messbar genau dann, wenn $[f \leq y] \in \mathcal{A}$ ist für jedes $y \in \mathbb{R}$. Eine komplexwertige Funktion f ist messbar genau dann, wenn ihr Real- und Imaginärteil es sind.
- (iii) Einfache Funktionen sind messbar. Charakteristische Funktionen messbarer Mengen sind messbar (selbst wenn die Menge unendliches Maß hat).
- (iv) Stetige Funktionen sind messbar bezüglich der Lebesgue- σ -Algebra.
- (v) Summen, Produkte und Quotienten (falls letztere existieren) sowie Verkettungen von messbaren Funktionen sind messbar.
- (vi) Falls (f_n) eine Folge messbarer Funktionen ist, dann sind auch (falls sie existieren)

$$\begin{aligned} & \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n \\ & \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \end{aligned}$$

messbar (und analog für \inf und \liminf). Für diese entscheidenden Aussagen ist die „ σ -Eigenschaft“ der σ -Algebren notwendig.

- (vii) Zusammenfassend kann man sagen, dass die Funktionen mit denen man üblicherweise konfrontiert ist, Lebesgue-messbar sind. Ähnlich wie bei nicht messbaren Mengen, muss man besondere Anstrengungen unternehmen, um nicht messbare Funktionen zu konstruieren.

Definition 8.30 (Integral für nichtnegative Funktionen). Für eine messbare Funktion $f : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ definieren wir

$$\int f d\mu = \sup \left\{ \int g d\mu \mid g \in \mathbf{X}^+ \text{ und } g \leq f \right\} \in [0, \infty].$$

Bemerkung 8.31. (i) Das oben definierte Integral kann den „Wert“ ∞ annehmen.

- (ii) Ist f eine nichtnegative, einfache Funktion, dann gilt für jede einfache Funktion $h \leq f$ auch

$$\int h d\mu \leq \int f d\mu.$$

Daraus folgt, dass der neue Integralbegriff für einfache Funktionen mit dem alten übereinstimmt.

- (iii) Das Integral ist monoton: Seien f, g nichtnegative Funktionen die $f \leq g$ fast überall erfüllen. Setze

$$A = [f \leq g].$$

Dann ist für jede einfache Funktion $h \leq f$ die einfache Funktion $h\mathbb{1}_A \leq g$ und es gilt

$$\int h d\mu = \int h\mathbb{1}_A d\mu \leq \int g d\mu.$$

Damit gilt auch

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu.$$

Insbesondere gilt $\int f d\mu = \int g d\mu$, falls $f = g$ fast überall.

- (iv) Falls $[f > 0]$ eine Nullmenge ist, dann stimmt f fast überall mit der Nullfunktion überein und es ist daher $\int f d\mu = 0$. Die Umkehrung gilt auch. Falls $\int f d\mu = 0$ ist für eine nichtnegative Funktion f , dann ist der Träger $[f > 0]$ von f eine Nullmenge. Um das zu sehen setzen wir

$$A_k := \left[f \geq \frac{1}{k} \right] \in \mathcal{A}.$$

und stellen fest, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{1}{k} \mathbb{1}_{A_k} \leq f.$$

Da $\int f d\mu = 0$ ist, muss also $\mu(A_k) = 0$ sein für jedes $k \in \mathbb{N}$. Da die A_k eine monoton wachsende Folge sind folgt aus der Stetigkeit des Maßes (Satz 8.18)

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k) = \mu \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left[f \geq \frac{1}{k} \right] \right) = \mu([f > 0]).$$

- (v) Für $f, g : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ messbar und für $c \in [0, \infty]$ gilt

$$\int (cf) d\mu = c \int f d\mu$$

sowie

$$\int f d\mu + \int g d\mu \leq \int (f + g) d\mu. \quad (8.1)$$

(Übung)

- (vi) Aus der Definition folgt, dass es eine Folge (f_n) einfacher Funktionen gibt die durch f beschränkt ist, das heißt $f_n \leq f$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und erfüllt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

Die Folge (g_n)

$$g_n = \max \{f_1, \dots, f_n\}$$

besteht ebenfalls aus einfachen Funktionen (Warum?), ist durch f beschränkt und erfüllt

$$\int f_n d\mu \leq \int g_n d\mu \leq \int f d\mu$$

und damit ebenfalls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n d\mu = \int f d\mu.$$

Die neue Folge ist jedoch zusätzlich monoton wachsend.

- (vii) Sei nun (g_n) eine Folge wie im letzten Punkt. Da die Folge monoton ist, konvergiert sie punktweise gegen eine Funktion g und es gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$g_n \leq g \leq f.$$

Für die Integrale gilt dann

$$\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n d\mu \leq \int g d\mu \leq \int f d\mu$$

also $\int g d\mu = \int f d\mu$. Außerdem ist wegen der Ungleichung (8.1)

$$\int (f - g) d\mu + \int f d\mu = \int (f - g) d\mu + \int g d\mu \leq \int f d\mu$$

woraus $\int (f - g) d\mu = 0$ folgt. Damit ist aber $[f - g > 0] = [f \neq g]$ eine Nullmenge.

Wir haben damit gezeigt, dass jede monotone Folge nichtnegativer einfacher Funktionen (g_n) , für die

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n d\mu = \int f d\mu$$

gilt, auch punktweise fast überall gegen f konvergiert.

Dass auch die Umkehrung der letzten Aussage gilt, zeigt der folgende – auch unabhängig davon sehr nützliche – Satz.

Satz 8.32 (Satz von der monotonen Konvergenz/Beppo Levi). *Sei (f_n) eine monoton wachsende Folge nichtnegativer Funktionen die punktweise fast überall gegen eine Funktion f konvergiert. Dann gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu$$

Beweis. Wir nehmen zunächst an, dass (f_n) punktweise (überall) gegen f konvergiert. Auf Grund der Monotonie der Folge gilt $f_n \leq f$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Die Folge $(\int f_n d\mu)$ ist dann auf Grund der Monotonie des Integrals ebenfalls monoton und damit gilt stets

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int f_n d\mu \leq \int f d\mu.$$

Wir betrachten nun zunächst einen Spezialfall. Sei $(B_n) \subset \mathcal{A}$ eine monoton wachsende Folge von Mengen die $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \Omega$ erfüllen, dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f \mathbb{1}_{B_n} d\mu = \int f d\mu. \quad (8.2)$$

Zunächst können wir aus der Stetigkeit des Maßes (Satz 8.18) für $A \in \mathcal{A}$ schließen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{B_n} d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A \cap B_n) = \mu(A) = \int \mathbb{1}_A d\mu.$$

Da beide Seiten der Gleichung (8.2) linear in f sind, gilt sie damit auch für alle einfachen Funktionen. Sei nun f eine beliebige Funktion und $\epsilon > 0$. Dann existiert eine einfache Funktion $g \leq f$ so, dass $\int g d\mu \geq \int f d\mu - \frac{\epsilon}{2}$ und nach dem eben gezeigten existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n \geq N$ gilt

$$\int g \mathbb{1}_{B_n} d\mu \geq \int g d\mu - \frac{\epsilon}{2}.$$

Dann ist aber

$$\int f \mathbb{1}_{B_n} d\mu \geq \int g \mathbb{1}_{B_n} d\mu \geq \int f d\mu - \epsilon$$

und die gesuchte Konvergenz damit gezeigt.

Mit dieser Vorbereitung betrachten wir nun den allgemeinen Fall. Sei dazu $c \in (0, 1)$. Wir setzen

$$B_n := [f_n \geq cf] \in \mathcal{A}.$$

Die (B_n) sind eine monoton wachsende Folge, da (f_n) monoton wächst. Da f_n gegen f konvergiert gilt $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \Omega$ (Warum?). Schließlich ist wegen der Monotonie des Integrals für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\int f_n d\mu \geq \int f_n \mathbb{1}_{B_n} d\mu \geq c \int f \mathbb{1}_{B_n} d\mu.$$

Im Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ ergibt sich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu \geq c \int f d\mu.$$

Da $c \in (0, 1)$ beliebig war folgt daraus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

Falls nun f_n lediglich fast überall gegen f konvergiert setzen wir

$$A = \left[f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right].$$

Dann gilt unter Benutzung des soeben gezeigten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \mathbb{1}_A d\mu = \int f \mathbb{1}_A d\mu = \int f d\mu.$$

Dabei wurde wieder ausgenutzt, dass sich Integrale nicht ändern wenn die Funktionen lediglich auf einer Nullmenge abgeändert werden. \square

Korollar 8.33. Für nichtnegative Funktionen f, g gilt

$$\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

Beweis. Sei $(f_n), (g_n) \subset \mathbf{X}^+$ monoton wachsende Folgen, die punktweise fast überall gegen f beziehungsweise g konvergieren. Dann ist $(f_n + g_n)$ eine monoton wachsende Folge die punktweise fast überall gegen $f + g$ konvergiert und es gilt

$$\int (f + g) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int (f_n + g_n) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu + \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu \quad \square$$

Beispiel 8.34. Da das Integral über einen Grenzwertprozess definiert ist, muss man im Allgemeinen beim Vertauschen mit anderen Grenzwertprozessen vorsichtig sein. Insbesondere ist die Monotonie im obigen Satz notwendig. Zum Beispiel konvergiert die Funktionenfolge

$$n \cdot \mathbb{1}_{(0, \frac{1}{n})}$$

punktweise gegen die Nullfunktion, die Folge ist aber nicht monoton. Für die Integrale gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int n \cdot \mathbb{1}_{(0, \frac{1}{n})} d\mu = 1.$$

Beispiel 8.35. Wenden wir uns nun der Definition für Integrale allgemeiner Funktionen zu. Dabei stoßen wir auf ein Problem, das wir bereits von unendlichen Reihen kennen. Das Ergebnis der Summation kann von der Art und Weise der Approximation abhängen.

Betrachten wir zum Beispiel für $(a_n) \subset \mathbb{C}$ die Folge einfacher Funktionen $f_n = a_n \mathbb{1}_{[n, n+1]}$. Unabhängig von (a_n) konvergiert diese Funktionenfolge punktweise gegen 0. Die Folge (a_n) der Integrale kann aber natürlich gegen jeden beliebigen Wert konvergieren oder auch divergent sein. Für nichtnegative Funktionen haben wir dieses Problem gelöst indem wir $f_n \leq f$ gefordert haben. Für komplexwertige Funktionen müssen wir eine andere Lösung finden.

Definition 8.36. Wir nennen eine messbare Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ integrierbar, falls $\int |f| d\mu < \infty$. Eine Folge einfacher Funktionen $(f_n) \subset \mathbf{X}$ heißt approximierende Folge für die Funktion f falls gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f - f_n| d\mu = 0.$$

Bemerkung 8.37. (i) Die Menge der integrierbaren Funktionen ist ein Vektorraum denn für f, g integrierbar gilt für jedes $\alpha \in \mathbb{C}$

$$\int |f + \alpha g| d\mu \leq \int (|f| + |\alpha| |g|) d\mu = \int |f| d\mu + |\alpha| \int |g| d\mu < \infty$$

und $f + \alpha g$ ist ebenfalls integrierbar.

(ii) Sei f nichtnegativ und integrierbar. Dann existiert eine monoton wachsende Folge (f_n) einfacher Funktionen mit $f_n \leq f$ und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu,$$

und es ist, da f integrierbar vorausgesetzt war, für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\int f_n d\mu \leq \int f d\mu < \infty.$$

Dann folgt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\int |f - f_n| d\mu = \int (f - f_n) d\mu \leq \int f d\mu - \int f_n d\mu.$$

Da die rechte Seite eine Nullfolge ist, ist (f_n) eine approximierende Folge für f .

(iii) Jede reelle Funktion kann in ihren positiven und ihren negativen Teil zerlegt werden:

$$\begin{aligned} f_+ &:= f \mathbb{1}_{[f \geq 0]} \\ f_- &:= -f \mathbb{1}_{[f \leq 0]}. \end{aligned}$$

Beide Funktionen sind nichtnegativ und es gilt $f = f_+ - f_-$ und $|f| = f_+ + f_-$. Ist f integrierbar, sind auch $f_+ \leq |f|$ und $f_- \leq |f|$ integrierbar.

- (iv) Da $|\operatorname{Re} f| \leq |f|$ und $|\operatorname{Im} f| \leq |f|$ gilt, sind der Real- und Imaginärteil integrierbarer Funktionen integrierbar.
- (v) Seien f und g beliebige Funktionen mit approximierenden Folgen (f_n) und (g_n) , dann gilt für jedes $\alpha \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \int |f + \alpha g - (f_n + \alpha g_n)| \, d\mu &\leq \int (|f - f_n| + |\alpha| |g - g_n|) \, d\mu \\ &= \int |f - f_n| \, d\mu + |\alpha| \int |g - g_n| \, d\mu. \end{aligned}$$

Da die rechte Seite eine Nullfolge ist, ist $(f_n + \alpha g_n)$ eine approximierende Folge für $f + \alpha g$ und die Menge aller Funktionen die eine approximierende Folge besitzen ist ein Vektorraum.

- (vi) Wir können eine beliebige integrierbare Funktion jetzt wie folgt zerlegen

$$f = ((\operatorname{Re} f)_+ - (\operatorname{Re} f)_-) + i((\operatorname{Im} f)_+ - (\operatorname{Im} f)_-).$$

Die vier Teile sind ebenfalls integrierbar und nichtnegativ und besitzen daher approximierende Folgen. Damit besitzt auch f eine approximierende Folge.

- (vii) Sei nun (f_n) eine approximierende Folge für f und sei $\epsilon > 0$. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n \geq N$ gilt

$$\int |f - f_n| \, d\mu \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Dann gilt für $n, m \geq N$ auch

$$\begin{aligned} \left| \int f_n \, d\mu - \int f_m \, d\mu \right| &= \left| \int (f_n - f_m) \, d\mu \right| \leq \int |f_n - f_m| \, d\mu \\ &\leq \int (|f_n - f| + |f - f_m|) \, d\mu \\ &= \int |f - f_n| \, d\mu + \int |f - f_m| \, d\mu \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Dabei haben wir diverse Eigenschaften des Integrals für einfache Funktionen (Satz 8.25) beziehungsweise für nichtnegative Funktionen genutzt. Wir haben damit gezeigt, dass $(\int f_n \, d\mu)$ eine Cauchy-Folge ist, sie konvergiert also gegen ein $I \in \mathbb{C}$.

- (viii) Sei (g_n) eine weitere approximierende Folge für f , dann gilt

$$\left| \int f_n \, d\mu - \int g_n \, d\mu \right| \leq \int |f_n - g_n| \, d\mu \leq \int |f_n - f| \, d\mu + \int |f - g_n| \, d\mu.$$

Nach Voraussetzung ist die rechte Seite eine Nullfolge, also muss die Folge $\int g_n \, d\mu$ ebenfalls gegen I konvergieren.

Definition 8.38. Sei f eine integrierbare Funktion. Dann setzen wir

$$\int f d\mu = \int f_n d\mu,$$

wobei (f_n) eine approximierende Folge für f sein soll.

Bemerkung 8.39. Ist f eine einfache Funktion, so können wir die konstante Folge (f) als approximierende Folge nehmen und sehen damit, dass der neue Integralbegriff denjenigen für einfache Funktionen erweitert.

Aus Bemerkung 8.37 (ii) ist ersichtlich, dass der neue Integralbegriff auch das Integral für nichtnegative integrierbare Funktionen erweitert.

Satz 8.40. Seien f, g integrierbare Funktionen.

(i) Für $\alpha \in \mathbb{C}$ gilt

$$\int (f + \alpha g) d\mu = \int f d\mu + \alpha \int g d\mu \text{ Linearität.}$$

(ii) Falls $f \leq g$ fast überall ist, dann gilt auch

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu \text{ Monotonie.}$$

Insbesondere stimmen die Integrale überein falls $f = g$ fast überall.

(iii) Es gilt stets

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu \text{ Dreiecksungleichung.}$$

Beweis. Seien f, g integrierbar und (f_n) und (g_n) approximierende Folgen für f beziehungsweise g , dann ist $(f_n + \alpha g_n)$ eine approximierende Folge für $f + \alpha g$ und wir erhalten unter Benutzung der Linearität des Integrals für einfache Funktionen

$$\int (f + \alpha g) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int f_n d\mu + \alpha \int g_n d\mu \right) = \int f d\mu + \alpha \int g d\mu.$$

Sei $f \leq g$ fast überall. Dann ist $(g - f)_- = 0$ fast überall und, da der neue Integralbegriff mit dem für nichtnegative Funktionen übereinstimmt, gilt

$$\int (g - f)_- d\mu = 0.$$

Dann folgt aus der Linearität

$$\int g d\mu - \int f d\mu = \int (g - f) d\mu = \int (g - f)_+ d\mu - \int (g - f)_- d\mu \geq 0.$$

Schließlich folgt aus der umgekehrten Dreiecksungleichung

$$\int ||f| - |f_n|| \, d\mu \leq \int |f - f_n| \, d\mu.$$

Da die rechte Seite gegen 0 konvergiert ist $(|f_n|)$ eine approximierende Folge für $|f|$ und damit, unter Benutzung der Dreiecksungleichung für einfache Funktionen,

$$\int |f| \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n| \, d\mu \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int f_n \, d\mu \right| = \left| \int f \, d\mu \right| \quad \square$$

Bemerkung 8.41. Häufig wird nicht über den gesamten Raum Ω integriert.

Für $A \subset \mathcal{A}$ definieren wir

$$\int_A g \, d\mu := \int g \mathbb{1}_A \, d\mu.$$

Dabei ist zu beachten, dass $g \mathbb{1}_A$ integrierbar sein kann, auch dann wenn g es nicht ist. Für den Wert dieses Integrals ist es offensichtlich unerheblich welche Werte g außerhalb von A annimmt. Entsprechend werden wir solche Integrale auch dann benutzen, wenn g außerhalb von A nicht definiert ist.

Wie wir gesehen haben ändert sich der Wert eines Integrals nicht, wenn wir den Integranden auf einer Nullmenge ändern. Dementsprechend werden wir auch Integrale aufschreiben, deren Integranden in einigen Punkten (höchstens eine Nullmenge) nicht definiert sind. Ausdrücke wie

$$\int_{[0,1]} \frac{1}{x} \, dx = \infty \text{ oder } \int_{[-1,1]} \frac{1}{\sqrt{|x|}} \, dx = 4$$

sind also zulässig.

Wir wollen hier noch das Integral über einem anderen Maßraum als den reellen Zahlen mit Lebesgue-Maß betrachten.

Beispiel 8.42. Sei $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ und μ das Zählmaß (Beispiel 8.6). Für eine nicht-negative Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty)$ ist dann

$$f_N = f \mathbb{1}_{\{1, \dots, N\}} = \sum_{n=1}^N f(n) \mathbb{1}_{\{n\}}$$

eine monoton wachsende Folge einfacher Funktionen und es gilt

$$\int f \, d\mu = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N f(n) \mu(\{n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

Eine beliebige Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ ist dann integrierbar genau dann wenn

$$\int |f| \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} |f(n)| < \infty$$

und für solche Funktionen gilt

$$\int f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

Für diesen speziellen Maßraum sind die Integrale also lediglich Reihen und Integrierbarkeit entspricht der absoluten Konvergenz der Reihe.

8.3 Der Zusammenhang mit dem Riemann-Integral

Wie verhält sich nun das neu definiert Lebesgue-Integral bezüglich des Lebesgue-Maßes auf \mathbb{R} zum bereits bekannten Riemann-Integral?

Theorem 8.43. *Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Dann ist f Lebesgue-messbar, integrierbar und das Riemann- sowie das Lebesgue-Integral über f stimmen überein.*

Beweis. Sei $Z = (t_0, \dots, t_n)$ eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$. Dann definieren wir die Approximation von oben beziehungsweise von unten wie folgt

$$f_{\max, Z} = \sum_{i=0}^{n-1} \sup \{f(x) \mid x \in (t_i, t_{i+1})\} \mathbb{1}_{(t_i, t_{i+1})}$$

$$f_{\min, Z} = \sum_{i=0}^{n-1} \inf \{f(x) \mid x \in (t_i, t_{i+1})\} \mathbb{1}_{(t_i, t_{i+1})}.$$

Wir stellen fest, dass diese Approximationen stets einfache Funktionen sind und dass ihre Lebesgue-Integrale genau die zu Z gehörige Riemannsche Ober- beziehungsweise Untersumme ergeben:

$$O(f, Z) = \int_{[a, b]} f_{\max, Z} d\lambda$$

$$U(f, Z) = \int_{[a, b]} f_{\min, Z} d\lambda.$$

Da f Riemann-integrierbar ist, existiert nun eine Folge von Zerlegungen (Z_n) so, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (O(f, Z_n) - U(f, Z_n)) = 0$$

gilt (Lemma 4.65). Da wir jede Zerlegung durch Hinzufügen der Stützstellen der vorhergehenden verfeinern können, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die Z_n immer feiner werden.

Jede dieser Zerlegungen hat endlich viele Stützstellen, insgesamt gibt es also (abzählbare Vereinigung von abzählbaren Mengen) abzählbar viele Stützstellen. Die Menge S aller Punkte in $[a, b]$ die Stützstelle irgendeines Z_n sind, ist also abzählbar und damit eine Lebesgue-Nullmenge. Steht im nächsten Absatz, das etwas „fast überall“ gilt, dann heißt das konkret „für alle Punkte die nicht in S liegen“.

Wir setzen $h_n = f_{\max, Z_n}$ und $g_n = f_{\min, Z_n}$. Da die Zerlegungen immer feiner werden, ist die Folge (h_n) fast überall monoton fallend (Warum?) und durch f nach unten beschränkt. Damit konvergiert sie fast überall gegen eine Funktion h . Analog ist (g_n) fast überall monoton wachsend und konvergiert gegen eine Funktion g . Da für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichungen $g_n \leq f \leq h_n$ fast überall gelten, muss auch $g \leq f \leq h$ fast überall gelten. Die Funktionen g und h sind (als punktwiser Grenzwert einer Folge einfacher

Funktionen) messbar. Da sie beschränkt sind, sind sie auch Lebesgue-integrierbar. Damit erhalten wir mit Monotonie und Linearität des Lebesgue-Integrals für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\int (h - g) d\lambda = \int h d\lambda - \int g d\lambda \leq \int h_n d\lambda - \int g_n d\lambda = O(f, Z_n) - U(f, Z_n).$$

Da der letzte Ausdruck für $n \rightarrow \infty$ verschwindet, muss die linke Seite ebenfalls verschwinden, es muss also (Bemerkung 8.31 (iv)) fast überall $h = f = g$ gelten. Damit ist insbesondere auch f messbar und integrierbar. Schließlich gilt

$$\int |f - g_n| d\lambda = \int (f - g_n) d\lambda \leq \int (h_n - g_n) d\lambda = O(f, Z_n) - U(f, Z_n).$$

Da die rechte Seite eine Nullfolge ist, muss das auch für die linke Seite gelten und damit ist g_n (analog h_n) eine approximierende Folge für f . Damit gilt nach Definition des Lebesgue-Integrals

$$\int f d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} O(f, Z_n).$$

Die rechte Seite konvergiert aber gegen das Riemann-Integral von f (Warum?). □

Der neue Integralbegriff ist also tatsächlich eine Erweiterung des alten. Insbesondere können und werden wir zur Berechnung von Lebesgue-Integralen stetiger Funktionen auch den Hauptsatz der Analysis benutzen.

Beispiel 8.44. Die Funktion

$$\begin{aligned} f : [1, \infty) &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^\kappa \end{aligned}$$

ist integrierbar (bezüglich des Lebesgue-Maßes) genau dann, wenn $\kappa < -1$.

Beweis. Die Funktion f ist integrierbar genau dann, wenn

$$\int_{[1, \infty)} |f| d\lambda = \int_{[1, \infty)} f d\lambda < \infty.$$

Betrachte die nichtnegativen Funktionen $f_n = f \mathbb{1}_{[1, n]}$. Die Folge f_n ist monoton wachsend und konvergiert punktweise gegen f . Die Funktion f besitzt die Stammfunktion

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\kappa+1} x^{\kappa+1} & \kappa \neq -1 \\ \ln(x) & \kappa = -1. \end{cases}$$

Die Integrale können wir nun mit Hilfe des Hauptsatzes berechnen:

$$\int_{[1, \infty)} f \mathbb{1}_{[1, n]} d\lambda = \int_1^n x^\kappa dx = F(n) - F(1)$$

und mit dem Satz von Beppo Levi folgt

$$\int_{[1,\infty)} f d\lambda = \int f \mathbb{1}_{[1,\infty)} d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f \mathbb{1}_{[1,n]} d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} F(n) - F(1).$$

Die rechte Seite konvergiert für $\kappa < -1$ gegen $-F(1) = -\frac{1}{\kappa+1}$ und divergiert andernfalls bestimmt gegen $+\infty$. \square

Beispiel 8.45. Die Funktion $\frac{1}{\ln(x)}$ ist auf $[2, \infty)$ nicht integrierbar. Da $x \geq \ln x$ ist, gilt

$$\infty = \int_2^\infty \frac{1}{x} dx \leq \int_2^\infty \frac{1}{\ln(x)} dx.$$

Warum also der neue Integralbegriff? Einige Vorteile sind offensichtlich: die neue Konstruktion liefert einen Integralbegriff für beliebige Maßräume, nicht nur über Intervallen und selbst über \mathbb{R} erlaubt sie uns die Integration von deutlich mehr Funktionen. Die Behandlung von Integralen für unbeschränkte Funktionen oder über Mengen mit unbeschränktem Maß ist im Lebesgue-Integral direkt mit angelegt, ohne wie beim Riemann-Integral komplizierte Umwege über „uneigentliche Integrale“ gehen zu müssen. Wie nützlich das ist zeigt sich insbesondere bei Integralen über \mathbb{R}^n für $n > 1$, da es hier sehr viele verschiedene Möglichkeiten gibt wie Funktionen divergieren können. Dementsprechend benötigten wir sehr viele verschieden Versionen von „uneigentlichen Integralen“ für die wir dann jeweils mühselig die gewünschten Eigenschaften nachweisen müssten.

Einige weitere Vorteile werden erst im Laufe der Zeit zu Tage treten. So haben die Mengen der Lebesgue-integrierbaren Funktionen, die L^p -Räume, deutlich bessere Eigenschaften als die Riemann-Äquivalente. Auch das Verhalten des Integrals unter verschiedenen Grenzwertprozessen ist in der Lebesgue-Theorie üblicherweise besser.

Es soll hier noch darauf hingewiesen werden, dass es Funktionen gibt, für die uneigentliche Riemann-Integrale existieren, die jedoch nicht Lebesgue-integrierbar sind.

Beispiel 8.46. Wir geben hier nur ein leicht nachzurechnendes Beispiel an, es ist aber nicht schwer viele weitere solcher Beispiele, auch mit stetigen Integranden, zu finden. Betrachte

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \mathbb{1}_{[n, n+1)}.$$

Die Funktion ist nicht integrabel denn es gilt (Warum?)

$$\int |f| d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Andererseits ist

$$\int_1^b f(x) dx = \sum_{n=1}^{\lfloor b \rfloor} (-1)^n \frac{1}{n} + (-1)^{\lfloor b \rfloor} \frac{1}{\lfloor b \rfloor} (b - \lfloor b \rfloor).$$

Dabei ist $\lfloor b \rfloor$ der ganzzahlige Anteil von b , also die größte ganze Zahl $\leq b$. Der zweite Summand ist durch $\frac{1}{\lfloor b \rfloor}$ beschränkt, konvergiert also für $b \rightarrow \infty$ gegen 0. Damit gilt

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$$

und wir wissen, dass die alternierende harmonische Reihe konvergiert.

8.4 Der Satz von Lebesgue

Wir haben bereits bei der Definition des Integrals Beispiele dafür gesehen, dass das Integral als Grenzwertprozess nicht in jedem Fall mit anderen Grenzwertprozessen vertauscht. In diesem Abschnitt wollen wir nun untersuchen, unter welchen Voraussetzungen das dennoch möglich ist. Es sei für den ganzen Abschnitt $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein fest gewählter Maßraum. Wird nichts anderes gesagt, dann bilden Funktionen von Ω nach \mathbb{C} ab.

Eine wichtige Aussage in diese Richtung – den Satz von Beppo-Levi – haben wir bereits bewiesen. Wir wollen seine Anwendung hier nochmal an einem Beispiel illustrieren.

Theorem 8.47 (Satz von Lebesgue). *Sei (f_n) eine Folge messbarer Funktionen die (fast überall) punktweise gegen f konvergiert und integrierbar beschränkt ist, das heißt es existiert eine integrierbare Funktion $g : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ so, dass $|f_n| \leq g$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (fast überall) erfüllt ist. Dann ist f integrierbar und es gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

Beweis. Zunächst gilt

$$|f| = \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n| \leq g.$$

Damit ist insbesondere f integrierbar.

Wir definieren nun die Hilfsfunktionen

$$g_n = \sup_{k \geq n} |f - f_k|.$$

Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$g_n \leq \sup_{k \geq n} (|f| + |f_k|) \leq 2g,$$

die Funktionen sind also insbesondere integrierbar. Die Funktionenfolge (g_n) ist monoton fallend (Warum?) und konvergiert punktweise fast überall gegen 0. Um das zu sehen sei $x \in \Omega$ und $\epsilon > 0$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass $|f(x) - f_n(x)| < \epsilon$ für alle $n \geq N$. Für solche n gilt dann aber auch

$$g_n(x) = \sup_{k \geq n} |f(x) - f_k(x)| \leq \epsilon.$$

Damit erfüllt die Funktionenfolge $(2g - g_n)$ die Voraussetzungen des Satzes von Beppo-Levi (Satz 8.32) und daher gilt

$$\int 2g d\mu - \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int (2g - g_n) d\mu = \int \lim_{n \rightarrow \infty} (2g - g_n) d\mu = \int 2g d\mu.$$

Schließlich folgt die Aussage des Satzes mit der Dreiecksungleichung für das Integral

$$\left| \int f d\mu - \int f_n d\mu \right| \leq \int |f - f_n| d\mu \leq \int g_n d\mu. \quad \square$$

Bemerkung 8.48. Anstatt der Existenz einer integrierbaren Funktion g mit $|f_n| \leq g$ kann man auch konkreter fordern, dass die Funktion

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n|$$

integrierbar ist.

Da der Anfang der Folge (f_n) für die auftretenden Grenzwerte unerheblich ist, reicht es aus $|f_n| \leq g$ für hinreichend große n zu fordern.

Korollar 8.49. Sei $a \in \mathbb{R}$, $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion und F eine Stammfunktion von f . Falls f nichtnegativ oder integrierbar ist, so gilt

$$\int_{[a, \infty)} f d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} F(n) - F(a).$$

Beweis. Für alle $n > a$ betrachte $f_n = f \mathbb{1}_{[a, n]}$. Falls f nichtnegativ ist, dann ist (f_n) monoton wachsend. In jedem Fall gilt $|f_n| \leq |f|$. Für nichtnegative f können wir also den Satz von Beppo Levi, für integrierbare f den Satz von Lebesgue anwenden und erhalten

$$\int_{[a, \infty)} f d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^n f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} F(n) - F(a). \quad \square$$

Bemerkung 8.50. Die Existenz des Grenzwertes $\lim_{n \rightarrow \infty} F(n) - F(a)$ allein ist nicht ausreichend um die Existenz des Integrals auf der linken Seite zu zeigen.

Korollar 8.51. Sei f_n eine Folge von Funktionen. Falls

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} |f_n| d\mu < \infty \text{ oder } \sum_{n=0}^{\infty} \int |f_n| d\mu < \infty,$$

dann gilt

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int f_n d\mu.$$

Beweis. Es gilt (vergleiche Aufgabe 1 vom Blatt 13)

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} |f_n| d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int |f_n| d\mu < \infty$$

und für die Folge der Partialsummen $s_n = \sum_{k=0}^n f_k$ gilt

$$|s_n| \leq \sum_{k=0}^n |f_k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |f_k|.$$

Die Funktion auf der rechten Seite ist nach Voraussetzung integrierbar und wir können den Satz von Lebesgue anwenden:

$$\int \lim_{n \rightarrow \infty} s_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \int f_k d\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \int f_k d\mu. \quad \square$$

Beispiel 8.52. Betrachte die Funktion

$$F : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$a \mapsto \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x+a} dx.$$

Ist F stetig? Da wir das Integral nicht explizit ausrechnen können, ist diese Frage zunächst schwierig zu beantworten.

Korollar 8.53. Sei X ein metrischer Raum, $f : \Omega \times X \rightarrow \mathbb{C}$ und $\tilde{a} \in X$. Sei $f(\cdot, a)$ integrierbar für jedes $a \in X$ und $f(\omega, \cdot)$ stetig in \tilde{a} für alle $\omega \in \Omega$. Sei U eine Umgebung von \tilde{a} und g eine integrierbare Funktion (unabhängig von $a \in X$) so, dass $|f(\omega, a)| \leq g(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$ und alle $a \in U$, dann ist die Funktion

$$F : X \rightarrow \mathbb{C}$$

$$a \mapsto \int f(\omega, a) d\mu(\omega)$$

stetig in \tilde{a} .

Beweis. Sei (a_n) eine Folge mit $a_n \rightarrow \tilde{a}$. Setze $f_n := f(\cdot, a_n)$. Für hinreichend große n ist dann $a_n \in U$ und es gilt $|f_n| = |f(\cdot, a_n)| \leq g$. Nach Voraussetzung gilt für $\omega \in \Omega$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(\omega, a_n) = f(\omega, \tilde{a}).$$

Nach dem Satz von Lebesgue gilt also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(\omega) d\mu(\omega) = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega) d\mu(\omega) = \int f(\omega, \tilde{a}) d\mu(\omega) = F(\tilde{a}).$$

Da die Folge (a_n) beliebig war folgt

$$\lim_{a \rightarrow \tilde{a}} F(a) = F(\tilde{a}),$$

also die Stetigkeit von F im Punkt \tilde{a} . □

Beispiel 8.54. Im obigen Beispiel sei jetzt also $\tilde{a} \in (0, \infty)$. Es gilt für alle $a \in (\frac{\tilde{a}}{2}, \infty)$ und für alle $x \in [0, \infty]$

$$\frac{e^{-x}}{x+a} \leq \frac{2}{\tilde{a}} e^{-x}.$$

Da die Funktion auf der rechten Seite über $[0, \infty)$ integrierbar ist und $(\frac{\tilde{a}}{2}, \infty)$ eine Umgebung von \tilde{a} ist, sind die Voraussetzungen des Korollars erfüllt und somit die Funktion F stetig in \tilde{a} .

Da \tilde{a} beliebig war, ist die Funktion überall stetig.

Korollar 8.55. Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \times X \rightarrow \mathbb{R}$ und $\tilde{a} \in X$. Sei $f(\cdot, a)$ integrierbar für jedes $a \in X$. Sei U eine Umgebung von \tilde{a} und $f(\omega, \cdot)$ differenzierbar für alle $\omega \in \Omega$ in jedem Punkt $a \in U$. Sei g eine integrierbare Funktion (unabhängig von $a \in X$) so, dass

$$\|D_a f(\omega, a)\| \leq g(\omega)$$

für alle $\omega \in \Omega$ und alle $a \in U$ (mit $D_a f$ ist hier die Ableitung der Abbildung $a \mapsto f(\omega, a)$ für festes ω gemeint), dann ist die Funktion

$$\begin{aligned} F : X &\rightarrow \mathbb{R} \\ a &\mapsto \int f(\omega, a) d\mu(\omega) \end{aligned}$$

differenzierbar in \tilde{a} und es gilt

$$DF(\tilde{a}) = \int D_a F(\omega, \tilde{a}) d\mu(\omega).$$

Ohne Beweis.

Beispiel 8.56. Wir betrachten weiter das vorhergehende Beispiel. Der Integrand ist nach a differenzierbar. Sei $\tilde{a} \in (0, \infty)$, dann gilt für $x \in [0, \infty)$ und $a \in (\frac{\tilde{a}}{2}, \infty)$

$$\left| \frac{d}{da} \frac{e^{-x}}{x+a} \right| = \frac{e^{-x}}{(x+a)^2} \leq \frac{4}{\tilde{a}^2} e^{-x}.$$

Damit sind die Voraussetzungen des Korollars erfüllt. Die Funktion F ist also in \tilde{a} differenzierbar und es gilt

$$F'(\tilde{a}) = - \int_0^\infty \frac{e^x}{(x+\tilde{a})^2} dx.$$

Da \tilde{a} beliebig war, ist F für jedes $a \in (0, \infty)$ differenzierbar.

8.5 Produktmaße und der Satz von Fubini

Beispiel 8.57. Wir betrachten eine stetige Funktion $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$. Ziel ist es, das Volumen (also das dreidimensionale Lebesgue-Maß λ^3) unter dem Graphen der Funktion, also der Menge

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

zu bestimmen. Dazu bieten sich nun die folgenden Integralausdrücke an:

$$\int f d\lambda^2 \text{ oder } \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy \text{ oder } \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dy dx.$$

In diesem Abschnitt wollen wir untersuchen, inwieweit die verschiedenen Methoden zum selben Ergebnis führen.

Für diesen gesamten Abschnitt seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ und (Φ, \mathcal{B}, ν) σ -endliche Maßräume.

Definition 8.58. Die Produkt- σ -algebra $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ ist die kleinste σ -algebra auf $\Omega \times \Phi$, die alle Mengen der Form $A \times B$ für $A \in \mathcal{A}$ und $B \in \mathcal{B}$ enthält.

Ein auf $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ definiertes Maß θ heißt Produktmaß von μ und ν , falls für alle $A \in \mathcal{A}$ und $B \in \mathcal{B}$ gilt

$$\theta(A \times B) = \mu(A)\nu(B).$$

Bemerkung 8.59. Man kann, mit Methoden die denen in unserer Konstruktion des Lebesgue-Maßes ähneln, zeigen, dass stets so ein Produktmaß existiert und – falls die beiden Maßräume σ -endlich sind – eindeutig bestimmt ist. (Der Satz von Carathéodory ist ein allgemeiner Satz der diese Konstruktion erlaubt. Wir bezeichnen diese Produktmaß dann mit $\mu \otimes \nu$. Wir benutzen die Kurzschreibweise $\mu^2 := \mu \otimes \mu$. Der Maßraum $(\Omega \times \Phi, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$ heißt dann das Produkt der beiden Maßräume.

Beispiel 8.60. Wir betrachten nun den Spezialfall \mathbb{R} mit der Lebesgue- σ -algebra und dem Lebesgue-Maß λ . Dann existiert auf $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ das entsprechende Produktmaß λ^2 und es gilt für Rechtecke

$$\lambda^2([a, b] \times [c, d]) = \lambda([a, b])\lambda([c, d]) = (b - a)(d - c).$$

Dieses Produktmaß charakterisiert also den Flächeninhalt.

Beispiel 8.61. Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\mathbb{1}_{[n, n+1)^2} - \mathbb{1}_{[n+1, n+2) \times [n, n+1)} \right).$$

Dann gilt

$$\int \int f(x, y) dx dy = 0 \text{ aber } \int \int f(x, y) dy dx = 1.$$

Bezüglich λ^2 ist die Funktion gar nicht integrierbar da offensichtlich gilt

$$\int |f(x, y)| d\lambda^2(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} 2 = \infty.$$

Satz 8.62 (Satz von Tonelli). *Sei $f : \Omega \times \Phi \rightarrow [0, \infty)$ messbar. Dann sind die Funktionen $\omega \mapsto f(\omega, \varphi)$ für fast alle $\varphi \in \Phi$ und $\varphi \mapsto f(\omega, \varphi)$ für fast alle $\omega \in \Omega$ messbar. Außerdem sind die Funktionen*

$$\varphi \mapsto \int f(\omega, \varphi) d\mu(\omega) \text{ und } \omega \mapsto \int f(\omega, \varphi) d\nu(\varphi)$$

messbar. Es gilt

$$\int f(\omega, \varphi) d(\mu \times \nu)(\omega, \varphi) = \int \int f(\omega, \varphi) d\mu(\omega) d\nu(\varphi) = \int \int f(\omega, \varphi) d\nu(\varphi) d\mu(\omega)$$

Insbesondere ist f integrierbar falls entweder

$$\int \int f(\omega, \varphi) d\mu(\omega) d\nu(\varphi) \text{ oder } \int \int f(\omega, \varphi) d\nu(\varphi) d\mu(\omega)$$

endlich sind.

Ohne Beweis.

Korollar 8.63 (Prinzip des Cavalieri). *Sei $A \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Bezeichne mit A_ω die Schnitte von A , das heißt*

$$A_\omega = \{\varphi \in \Phi \mid (\omega, \varphi) \in A\}.$$

Dann ist $\omega \mapsto \nu(A_\omega)$ messbar und es gilt

$$(\mu \otimes \nu)(A) = \int \nu(A_\omega) d\mu(\omega).$$

Beweis. Nach der Definition von A_ω gilt, dass $(\omega, \varphi) \in A$ ist, genau dann wenn $\varphi \in A_\omega$ ist also gilt $\mathbb{1}_A(\omega, \varphi) = \mathbb{1}_{A_\omega}(\varphi)$. Wir wenden den Satz von Tonelli auf die Funktion $\mathbb{1}_A$ an. Dann folgt

$$\begin{aligned} (\mu \otimes \nu)(A) &= \int \mathbb{1}_A(\omega, \varphi) d(\mu \otimes \nu)(\omega, \varphi) = \int \int \mathbb{1}_A(\omega, \varphi) d\nu(\varphi) d\mu(\omega) \\ &= \int \int \mathbb{1}_{A_\omega}(\varphi) d\nu(\varphi) d\mu(\omega) = \int \nu(A_\omega) d\mu(\omega). \end{aligned} \quad \square$$

Korollar 8.64. Sei $f : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ eine messbare Funktion und

$$A_f := \{(\omega, y) \in \Omega \times \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq f(\omega)\} \subset \Omega \times \mathbb{R}.$$

Dann ist A_f messbar und es gilt

$$(\mu \otimes \lambda)(A_f) = \int f(\omega) d\mu(\omega).$$

Beweis. Es gilt $\mathbb{1}_{A_f}(\omega, y) = \mathbb{1}_{[0, f(\omega)]}(y)$ und damit

$$\begin{aligned} (\mu \otimes \lambda)(A_f) &= \int \mathbb{1}_{A_f}(\omega, y) d(\mu \otimes \lambda)(\omega, y) = \int \int \mathbb{1}_{[0, f(\omega)]}(y) d\lambda(y) d\mu(\omega) \\ &= \int f(\omega) d\mu(\omega). \end{aligned} \quad \square$$

Für $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ entspricht das Integral über f also tatsächlich der Fläche (λ^2 -Maß) unter dem Graphen der Funktion.

Theorem 8.65 (Satz von Fubini). Sei $f : \Omega \times \Phi$ eine messbare Funktion, die bezüglich $\mu \otimes \nu$ integrierbar ist, dann sind die Funktionen $\omega \mapsto \int f(\omega, \varphi) d\nu(\varphi)$ messbar und integrierbar für μ -fast alle $\omega \in \Omega$, die Funktionen $\varphi \mapsto \int f(\omega, \varphi) d\mu(\omega)$ messbar und integrierbar für ν -fast alle $\varphi \in \Phi$. Die Funktionen

$$\omega \mapsto \int f(\omega, \varphi) d\nu(\varphi) \text{ und } \varphi \mapsto \int f(\omega, \varphi) d\mu(\omega)$$

sind messbar und integrierbar und es gilt

$$\int \int f(\omega, \varphi) d(\mu \otimes \nu)(\omega, \varphi) = \int \int f(\omega, \varphi) d\nu(\varphi) d\mu(\omega) = \int \int f(\omega, \varphi) d\mu(\omega) d\nu(\varphi).$$

Ohne Beweis.

Bemerkung 8.66. Um die Integrierbarkeit bezüglich des Produktmaßes zu überprüfen wird häufig der Satz von Tonelli verwendet. Auch die Aussage des Satzes von Fubini lässt sich unmittelbar auf Produkte von mehr als zwei Maßen und entsprechende Integrale verallgemeinern.

Korollar 8.67. Seien $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ und $a_i < b_i$ für $i \in \{1, \dots, n\}$ und setze $D = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$. Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige oder wenigstens messbare und beschränkte Funktion, dann gilt

$$\int_D f d\lambda^n = \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \dots dx_1.$$

Die Integrale können dabei in beliebiger Reihenfolge ausgeführt werden.

Beweis. Da D kompakt ist, ist jedes stetige f beschränkt. Es existiert also eine obere Schranke K für f und es gilt

$$\int_D |f| d\lambda^n \leq \int_D K d\lambda^n = K\lambda^n(D) < \infty.$$

Damit ist f integrierbar und wir können wiederholt den Satz von Fubini anwenden und erhalten

$$\begin{aligned} \int_D f d\lambda^n &= \int f(x_1, \dots, x_n) \mathbb{1}_D(x_1, \dots, x_n) d\lambda^n \\ &= \int \cdots \int f(x_1, \dots, x_n) \mathbb{1}_{[a_1, b_1]}(x_1) \cdots \mathbb{1}_{[a_n, b_n]}(x_n) d\lambda(x_n) \cdots d\lambda(x_1) \\ &= \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \cdots dx_1 \end{aligned} \quad \square$$

Beispiel 8.68. Wir wollen den Schwerpunkt der Fläche

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq y^2 \text{ und } x \leq 1\}$$

bestimmen. Dabei ist der Schwerpunkt einer beliebigen Fläche A definiert als

$$\int_A (x, y) d\lambda^2(x, y).$$

Wir können dieses (vektorierte) Integral komponentenweise ausrechnen, interessieren uns also für den Ausdruck

$$\int_A x d\lambda^2(x, y) = \int x \mathbb{1}_A(x, y) d\lambda^2(x, y) = \int_{[0,1] \times [-1,1]} x \mathbb{1}_A(x, y) d\lambda^2(x, y).$$

Der letzte Ausdruck erfüllt die Voraussetzungen des vorhergehenden Korollars

$$\int_A x d\lambda^2(x, y) = \int_0^1 \int_{-1}^1 x \mathbb{1}_{[-\sqrt{x}, \sqrt{x}]}(y) dy dx = 2 \int_0^1 x \sqrt{x} dx = \frac{4}{5}$$

Die y -Komponente des Schwerpunktes kann im Prinzip genauso bestimmt werden, muss aber aus Symmetriegründen 0 sein.

Bemerkung 8.69. Eine wichtige Anwendung des Satzes von Fubini ergibt sich bei der Definition der Faltung. Seien $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ integrierbare Funktionen, dann möchten wir definieren

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) g(y) d\lambda^n(y). \quad (8.3)$$

Um zu sehen, dass diese Definition Sinn ergibt, das Integral also existiert, betrachten wir

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |f(x-y)| |g(y)| \, d\lambda^{2n}(x,y) &= \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| \, d\lambda^n(x) d\lambda^n(y) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \, d\lambda^n(x) d\lambda^n(y) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| \, d\lambda^n(y) \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \, d\lambda^n(x) \\
 &< \infty.
 \end{aligned}$$

Dabei haben wir den Satz von Tonelli sowie die Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes verwendet.

Damit ist die Funktion $(x, y) \mapsto f(x-y)g(y)$ über $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ integrierbar und erfüllt damit die Voraussetzungen des Satzes von Fubini. Der Satz sagt dann aus, dass Gleichung (8.3) tatsächlich für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ definiert ist und dass $f * g$ selbst eine integrierbare Funktion ist.

Die Bedeutung der Faltung rührt unter Anderem daher, dass die Fouriertransformation Produkte von Funktionen auf die Faltung der Fouriertransformierten der einzelnen Funktionen abbildet. Eine weitere Anwendung ist das „glätten“ von Funktionen (siehe Übung).

9 Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

9.1 Wahrscheinlichkeitsräume

Beispiel 9.1. (i) Beim Würfeln mit einem fairen (sechseitigen) Würfel ist die Wahrscheinlichkeit für jede der sechs Zahlen genau $\frac{1}{6}$. Fragen wir nun nach der Wahrscheinlichkeit für ein „Ereignis“, zum Beispiel „es wird eine gerade Zahl gewürfelt“, dann können wir die Wahrscheinlichkeiten für die Ergebnisse 2, 4 und 6 zu

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \quad (9.1)$$

aufaddieren. Die Wahrscheinlichkeiten verhalten sich also additiv und es gilt natürlich, dass die Wahrscheinlichkeit irgendeine Zahl zwischen 1 und 6 zu würfeln stets 1 ist.

- (ii) Bei anderen zufälligen Situationen ist die Lage komplizierter. Betrachten wir beispielsweise die Energieverteilung der Protonen des Sonnenwindes, dann ist die Wahrscheinlichkeit für ein einzelnes Proton genau einen festen Energiewert E anzunehmen (exakte Übereinstimmung mit der reellen Zahl E) stets 0 (von der Unsicherheit durch Messfehler wollen wir hier absehen). Um zu sinnvollen Wahrscheinlichkeitsaussagen zu kommen müssen wir hier Intervalle von möglichen Energiewerten betrachten. Dennoch verhalten sich die Wahrscheinlichkeiten additiv in dem Sinne, dass die Gesamtwahrscheinlichkeit für zwei disjunkte Energieintervalle der Summe der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Intervalle entspricht.

Mit dem Konzept des Wahrscheinlichkeitsraumes können wir nun die obigen Situationen einheitlich behandeln.

Definition 9.2. Ein Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ heißt Wahrscheinlichkeitsraum (auch kurz W-Raum) und μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß (W-Maß) falls $\mu(\Omega) = 1$ gilt.

Bemerkung 9.3. In der Wahrscheinlichkeitstheorie wird eine von der allgemeinen Maßtheorie abweichende Nomenklatur verwendet, die wir hier kurz vorstellen wollen. Sei dazu $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

Teilmenge $A \in \mathcal{A}$	Ereignis
Punkt $\omega \in \Omega$	Elementarereignis
$\mu(A)$ für $A \in \mathcal{A}$	Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A
fast überall	fast sicher
messbare Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$	Zufallsvariable
$\int f d\mu$	Erwartungswert von f

Bemerkung 9.4. Viele praktisch wichtige Beispiele sind diskrete Wahrscheinlichkeitsräume, das heißt Ω ist eine abzählbare oder sogar endliche Menge und \mathcal{A} ist die Potenzmenge von Ω . In diesem Fall gilt für die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A .

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}\right) = \sum_{\omega \in A} \mu(\{\omega\}).$$

Das W-Maß ist also bekannt, sobald die Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse bekannt sind.

Umgekehrt ist natürlich auch ersichtlich, dass zu vorgegebenen Einzelwahrscheinlichkeiten $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$, die die Bedingung

$$\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$$

erfüllen, genau ein W-Maß μ existiert, so dass $\mu(\{\omega\}) = p_\omega$.

Beispiel 9.5. (i) Wir wählen $\Omega = \{0, 1\}$ und $\mu(\{0\}) = \mu(\{1\}) = \frac{1}{2}$. Dieser W-Raum beschreibt den Wurf einer perfekten Münze.

(ii) Wir betrachten den n -maligen Wurf einer perfekten Münze. Die Elementarereignisse sind dann n -Tupel der Zahlen 0 und 1 die wir hier für „Kopf“ beziehungsweise „Zahl“ verwenden wollen.

$$\Omega = \{0, 1\}^n$$

Die Wahrscheinlichkeit jedes Elementarereignisses ist $\frac{1}{2^n}$, das dadurch eindeutig festgelegte Maß entspricht dem passend reskalierten Zählmaß.

Wir können diesen Maßraum auch erhalten, als n -faches Produkt des vorhergehenden (Warum?).

(iii) Sei $p > 0$ und $\Omega = \mathbb{N}_0$. Das durch

$$\mu(\{k\}) = (1-p)^k p$$

definierte W-Maß wird als geometrische Verteilung bezeichnet.

(iv) Sei $\lambda > 0$ und $\Omega = \mathbb{N}_0$. Das durch

$$\mu(\{k\}) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

definierte W-Maß wird als Poisson-Verteilung bezeichnet.

(v) Eine Ampel hat eine Rotphase von 3 Minuten. Wir wollen einen W-Raum, der die Wartezeit bei zufälliger Ankunft an der roten Ampel beschreibt. Dazu wählen wir $\Omega = [0, 3]$ und $\mu = \frac{1}{3}\lambda$ (als Definitionsbereich des Maßes könnten wir zum Beispiel die Lebesgue- σ -Algebra wählen). Dieser Wahrscheinlichkeitsraum wird als Gleichverteilung auf $[0, 3]$ bezeichnet.

(vi) Wir wählen für Ω die reellen Zahlen, \mathcal{A} sei die Lebesgue- σ -Algebra und μ gegeben durch

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_A \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx.$$

Dann beschreibt der zugehörige Maßraum die Standardnormalverteilung.

Bemerkung 9.6. Viele wichtige Wahrscheinlichkeitsmaße werden, wie in Beispiel 9.5 (vi) mit Hilfe einer Dichtefunktion angegeben. Ist $\delta : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ eine integrierbare Funktion mit

$$\int \delta d\lambda = 1,$$

dann definiert die Abbildung

$$A \mapsto \int_A \delta d\lambda$$

ein W-Maß (dessen Definitionsbereich zum Beispiel die Lebesgue- σ -Algebra sein könnte).

Prinzipiell können wir auch jedes andere Maß als Grundlage verwenden um auf diese Weise neue Maße zu konstruieren (Vergleiche Aufgabe 2 und die Zusatzaufgabe auf dem Übungsblatt 1).

Es gibt aber natürlich Wahrscheinlichkeitsmaße auf den reellen Zahlen, die sich nicht auf diese Weise darstellen lassen. Eine genaue Aussage wann das möglich ist und wann nicht macht der Satz von Radon-Nikodým.

In der Wahrscheinlichkeitstheorie nehmen wir immer einen Maßraum als gegeben an. Die Frage, welcher Maßraum für eine praktische Situation „der richtige“ ist, ist dabei natürlich eine Frage der Modellierung und keine der Mathematik. Der Frage, wie gut bestimmte Modelle tatsächliche Messergebnisse erklären widmet sich die mathematische Statistik.

Bemerkung 9.7. Für Wahrscheinlichkeitsräume ist es auch möglich Produkträume aus unendlich vielen Faktoren zu bilden. Dabei sind jedoch einige Besonderheiten zu beachten. Da die entstehenden Maßräume für viele (auch praktisch relevante) Beispiele von Bedeutung sind, wollen wir uns hier kurz damit beschäftigen. Um die Notation überschaubar zu halten, wollen wir das Produkt von \mathbb{N} Kopien eines W-Raumes $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ konstruieren.

Der Raum $\Omega^{\mathbb{N}}$ ist der Raum der Ω -wertigen Folgen, das heißt

$$\Omega^{\mathbb{N}} = \{(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \omega_n \in \Omega \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}.$$

Wir betrachten nun Mengen der Form

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \times \Omega \times \Omega \times \cdots$$

wobei $n \in \mathbb{N}$ ist und $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ und weisen diesen das Produktmaß

$$\mu(A_1)\mu(A_2) \cdots \mu(A_n)$$

zu.

Bezeichnen wir nun mit \mathcal{B} die kleinste σ -Algebra auf $\Omega^{\mathbb{N}}$, die von den obigen Mengen erzeugt wird. Dann lässt sich zeigen (Satz von Caratheodory), dass das auf den speziellen Mengen definierte Maß sich eindeutig zu einem Produktmaß ν fortsetzen lässt. Der Raum $(\Omega^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}, \nu)$ ist dann der gesuchte Produktraum.

In analoger Weise können auch Produkte unendlich (sogar überabzählbar) vieler verschiedener W-Räume definiert werden.

Beispiel 9.8. Wir betrachten erneut den Maßraum $\Omega = \{0, 1\}$ mit der Gleichverteilung (also den Wurf einer perfekten Münze) und das \mathbb{N} -fache Produkt dieses Maßraumes mit sich selbst, entsprechend also dem \mathbb{N} -fachen Wurf einer Münze. Zunächst stellen wir fest, dass der entstehende W-Raum nicht mehr diskret ist. Tatsächlich verschwindet die Wahrscheinlichkeit jedes Elementarereignisses denn für eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \{0, 1\}$ ist

$$\{x_1\} \times \{x_2\} \times \cdots \times \{x_n\} \times \Omega \times \cdots$$

ein das Elementarereignis enthaltendes Ereignis mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2^n}$.

In diesem Wahrscheinlichkeitsraum können wir nun Fragen wie „Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in der Sequenz der unendlich vielen Münzwürfe n mal hintereinander Kopf geworfen wurde?“ untersuchen.

Um die Frage zu beantworten, teilen wir die Folge der Münzwürfe in Blöcke der Länge n ein. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der erste Block aus n Einsen besteht ist $q = \frac{1}{2^n}$ (Warum?). Die Wahrscheinlichkeit, dass der erste Block anders aussieht ist also $(1 - q) < 1$.

Sei nun $k \in \mathbb{N}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass unter den ersten k Blöcken keiner ist, der lediglich aus Einsen besteht ist dann $(1 - q)^k$ (Warum?).

Schließlich ist die Wahrscheinlichkeit, dass keiner der (unendlich vielen) Blöcke nur aus Einsen besteht kleiner als jede der obigen Wahrscheinlichkeiten, es gilt aber auch $\lim_{k \rightarrow \infty} (1 - q)^k = 0$. Das Gegenereignis „mindestens einer der Blöcke besteht nur aus Einsen“ muss damit Wahrscheinlichkeit 1 haben.

Eine Verallgemeinerung der eben gezeigten Aussage, die im Prinzip ganz ähnlich bewiesen werden kann, ist das „Infinite Monkey Theorem“: Tippt ein Affe unendlich lange zufällig auf einer Schreibmaschine (und trifft dabei jeden Buchstaben mit positiver Wahrscheinlichkeit), dann tippt er mit Wahrscheinlichkeit 1 über kurz oder lang eine fehlerfreie Kopie von Shakespears sämtlichen Werken (oder jedem anderen Dokument, dass prinzipiell auf einer Schreibmaschine getippt werden kann).

Definition 9.9. Sei (A_n) eine Folge von Ereignissen in einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Dann definieren wir den Limes Superior der Ereignisse

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A_n \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N}\}.$$

Bemerkung 9.10. Es ist leicht sich davon zu überzeugen (Wie?), dass ω in unendlich vielen der A_n liegt, genau dann, wenn es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $k \geq n$ gibt, so dass $\omega \in A_k$ liegt. Daraus ergibt sich die folgende hilfreiche Darstellung des Limes Superior:

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n &= \{\omega \in \Omega \mid \forall n \in \mathbb{N} \exists k \geq n : \omega \in A_k\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\omega \in \Omega \mid \exists k \geq n : \omega \in A_k\} \\ &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k. \end{aligned}$$

Aus dieser Darstellung wird insbesondere ersichtlich, dass der Limes Superior stets selbst in \mathcal{A} liegt.

Lemma 9.11 (Borel-Cantelli). Sei (A_n) eine Folge von Ereignissen in einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ für die gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty.$$

Dann gilt

$$\mu\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = 0.$$

Beweis. Wir verwenden die Darstellung des Limes Superior aus der obigen Bemerkung. Es gilt

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \supset \bigcup_{k=2}^{\infty} A_k \supset \cdots \supset \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \supset \cdots \supset \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n.$$

Wir können nun die Stetigkeit des Maßes (Satz 8.18) und die Subadditivität ausnutzen und erhalten

$$\mu\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mu(A_k).$$

Da nach Voraussetzung die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ konvergiert, bilden die Reihenreste eine Nullfolge und der Beweis ist beendet. \square

9.2 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Im Folgenden sei stets $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

Beispiel 9.12. Liegt über ein Ereignis in einem Wahrscheinlichkeitsraum partielle Information vor, dann ändert sich dadurch eventuell die Wahrscheinlichkeit. Gehen wir davon aus, dass Kinder mit gleicher Wahrscheinlichkeit Jungen oder Mädchen sind (was in der Realität nicht ganz aber in guter Näherung der Fall ist), dann liegt die Wahrscheinlichkeit für einen Jungen und ein Mädchen in einer Familie mit zwei Kindern bei $\frac{1}{2}$ (Warum?). Ist bekannt, dass eines der Kinder ein Junge ist, dann liegt die Wahrscheinlichkeit für einen Jungen und ein Mädchen hingegen bei $\frac{2}{3}$. Ist jedoch bekannt, dass das ältere Kind ein Junge ist, dann liegt die Wahrscheinlichkeit für einen Jungen und ein Mädchen wieder bei $\frac{1}{2}$. Leichter einzusehen ist dieser Unterschied bei der Wahrscheinlichkeit für zwei Mädchen: Diese beträgt $\frac{1}{4}$ im ersten Fall und sinkt in den anderen Fällen auf 0.

Definition 9.13. Seien $A, B \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) > 0$. Die bedingte Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis B unter der Bedingung A ist

$$\mu\langle B|A \rangle := \frac{\mu(B \cap A)}{\mu(A)}.$$

Bemerkung 9.14. Durch die bedingte Wahrscheinlichkeit wird ein neuer Wahrscheinlichkeitsraum definiert. Dazu betrachten wir die auf A eingeschränkte σ -Algebra

$$\mathcal{A}_A = \{B \cap A \mid B \in \mathcal{A}\}.$$

Dann ist $(A, \mathcal{A}_A, \mu\langle \cdot | A \rangle)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Wir beziehen nur noch diejenigen Elementarereignisse in die Betrachtung ein, die in A liegen (also die Bedingung erfüllen).

Satz 9.15 (Bayessche Formel). Seien A, B Ereignisse und $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine (endliche oder abzählbare) Partition von Ω . Die Ereignisse haben jeweils positive Wahrscheinlichkeit. Dann gelten

$$\mu(A) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu\langle A|B_k \rangle \mu(B_k) \text{ und}$$

$$\mu\langle B|A \rangle = \frac{\mu\langle A|B \rangle \mu(B)}{\mu(A)}$$

Beweis. Beide Formeln ergeben sich unmittelbar aus der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit und den Eigenschaften eines Maßes. \square

Beispiel 9.16. Trotz ihrer Einfachheit ist die Bayessche Formel häufig erstaunlich nützlich bei der Bewertung von Wahrscheinlichkeitsaussagen. Ein typisches Beispiel ergibt sich bei Screening-Untersuchungen (verdachtslose Untersuchungen) auf bestimmte Krankheiten.

Wir betrachten als Beispiel einen Test auf eine bestimmte Krankheit. Aus den klinischen Studien ist bekannt, dass der Test in 92% der Fälle eine vorliegende Krankheit

richtig diagnostiziert und dass 2,5% der gesunden Personen ein falsch positives Testergebnis bekommen. Weiterhin ist bekannt, dass in der getesteten Personengruppe 0,07% bisher unerkannt an der Krankheit leiden. Bekommt nun jemand ein positives Testergebnis, stellt sich die Frage wie groß die Wahrscheinlichkeit ist die Krankheit tatsächlich zu haben.

Die relevanten Ereignisse sind hier: K, G eine Person ist erkrankt oder nicht, P, N der Test fällt positiv beziehungsweise negativ aus. Bekannt sind $\mu\langle P|K \rangle = 0,92$, $\mu(K) = 0,0007$ und $\mu\langle P|G \rangle = 0,025$. Die Bayessche Formel erlaubt es uns nun, die gesuchte Gesamtwahrscheinlichkeit für einen positiven Test

$$\mu(P) = \mu\langle P|K \rangle\mu(K) + \mu\langle P|G \rangle\mu(G) = 0,0026$$

sowie die gesuchte bedingte Wahrscheinlichkeit

$$\mu\langle K|P \rangle = \frac{\mu\langle P|K \rangle\mu(K)}{\mu(P)} = 0,24$$

zu berechnen.

Wird nun die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses nicht davon beeinflusst wird, ob das Eintreten eines anderen Ereignisses bekannt ist, dann nennen wir die Ereignisse unabhängig.

Definition 9.17. Seien $A, B \in \mathcal{A}$. Die Ereignisse heißen unabhängig, wenn $\mu\langle B|A \rangle = \mu(B)$ beziehungsweise $\mu(A \cap B) = \mu(A)\mu(B)$ gilt.

Eine Folge $(A_n) \subset \mathcal{A}$ von Ereignissen heißt unabhängig, falls für jede endliche Teilmenge $I \subset \mathbb{N}$ gilt

$$\mu\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mu(A_i).$$

Bemerkung 9.18. Es ist möglich, dass Ereignisse paarweise unabhängig sind, ohne dass sie unabhängig sind. Als Beispiel betrachte drei (unabhängige) Würfe einer Münze und die Ereignisse

- A_1 : der erste und der zweite Wurf stimmen überein
- A_2 : der zweite und der dritte Wurf stimmen überein
- A_3 : der erste und der dritte Wurf stimmen überein.

Dann sind A_1, A_2 unabhängig (Warum?). Aus Symmetriegründen sind dann auch A_2, A_3 unabhängig sowie A_1, A_3 unabhängig.

Andererseits gilt

$$\mu(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = \mu(A_1)\mu(A_2)\mu(A_3).$$

Bemerkung 9.19. Typische Beispiele unabhängiger Ereignisse ergeben sich in Produkträumen. Im Produkt $(\Omega \times \Phi, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$ sind Ereignisse der Form $A \times \Phi$ und $\Omega \times B$ für $A \in \mathcal{A}$ und $B \in \mathcal{B}$ immer unabhängig (Warum?).

Analoge Aussagen gelten auch für Produkträume mit mehr als zwei (und gegebenenfalls sogar unendlich vielen) Faktoren.

Lemma 9.20. *Für eine Folge (A_n) unabhängiger Ereignisse gilt*

$$\mu \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N \mu(A_n) =: \prod_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Beweis. Die Aussage folgt direkt aus der Stetigkeit des Maßes von außen sowie aus der Definition der Unabhängigkeit. \square

Wir können nun eine zum Lemma von Borel-Cantelli komplementäre Aussage beweisen.

Lemma 9.21 (Erdős-Rényi). *Sei (A_n) eine Folge unabhängiger Ereignisse so, dass*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) = \infty.$$

Dann gilt

$$\mu \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \right) = 1.$$

Beweis. Aus der Stetigkeit des Maßes von innen folgt

$$\begin{aligned} 1 - \mu \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \right) &= \mu \left(\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \right)^c \right) = \mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu \left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=n}^{\infty} \mu(A_k^c) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=n}^{\infty} (1 - \mu(A_k)). \end{aligned}$$

Dabei haben wir noch benutzt, dass auch die Ereignisse (A_k^c) unabhängig sind. Die Folge im letzten Ausdruck ist identisch 0 denn

$$\begin{aligned} \prod_{k=n}^{\infty} (1 - \mu(A_k)) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=n}^N (1 - \mu(A_k)) \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=n}^N \exp(-\mu(A_k)) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \exp \left(- \sum_{k=n}^N \mu(A_k) \right) = 0. \end{aligned} \quad \square$$

Bemerkung 9.22. Der Satz gilt auch dann noch, wenn die Ereignisse lediglich paarweise unabhängig sind, in diesem Fall ist jedoch ein anderer Beweis erforderlich.

Beispiel 9.23. Wir können nun die Aussage aus Beispiel 9.8 nochmal verstärken. Sei $n \in \mathbb{N}$. Eine zufällige Folge aus $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ enthält die Folge von n aufeinanderfolgenden Einsen fast sicher unendlich oft. Dazu teilen wir die Folge zunächst wieder in Blöcke der Länge n ein. Dann hat das Ereignis A_k „alle Zahlen im Block k sind 1“ Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2^n}$ und die Ereignisse $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sind unabhängig (Warum? Zu beachten ist hier auch, dass die entsprechenden Ereignisse für „sich überlappende“ Blöcke nicht unabhängig sind.). Damit folgt die gesuchte Aussage aus dem obigen Lemma.

Eine entsprechende Aussage gilt natürlich auch allgemeiner im Kontext des „Infinite Monkey Theorem“.

9.3 Bildmaße

In diesem Abschnitt sei stets $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und Φ eine Menge mit einer σ -Algebra \mathcal{B} . Der Inhalt dieses Abschnitts ist allgemein für die Maßtheorie relevant, aber da es in der W-Theorie viele schöne Beispiele gibt, behandeln wir die Thematik erst hier.

Beispiel 9.24. (i) Beim gleichzeitigen Werfen dreier Würfel (die zuvor durch hinreichend viele Würfe auf Fairness getestet wurden) lässt sich feststellen, dass die Wahrscheinlichkeit eine 1, eine 2 und eine 4 zu würfeln deutlich größer ist, als diejenige für drei mal 6.

Das widerspricht vielleicht zunächst der Erwartung. Sollten die Ereignisse nicht gleich wahrscheinlich sein? Die Ursache dafür ist, dass es uns beim Würfeln auf die Reihenfolge nicht ankommt. Im Produkt-W-Raum dreier einfacher Würfelwürfe sind aber $(2, 1, 4)$ und $(1, 2, 4)$ unterschiedliche Ereignisse mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6^3}$ (genau wie das Ereignis $(6, 6, 6)$). Der Produktraum ist also gewissermaßen der „falschen“ W-Raum für unser Experiment.

Wie erhalten wir nun die richtigen Wahrscheinlichkeiten? Dazu müssen wir einfach die Reihenfolge „vergessen“, also die Wahrscheinlichkeiten für $(1, 2, 4)$, $(1, 4, 2)$, $(2, 1, 4)$, $(2, 4, 1)$, $(4, 1, 2)$ und $(4, 2, 1)$ aufsummieren.

- (ii) Eine ähnliche Situation ergibt sich bei folgender Fragestellung: Wenn ich zwei Punkte gleichverteilt (renormiertes Lebesgue-Maß) und unabhängig voneinander auf eine gegebene Fläche A (mit endlichem Flächeninhalt) werfe, wie sieht dann der Wahrscheinlichkeitsraum aus, der die Verteilung des Abstands der Punkte korrekt wiedergibt.

Definition 9.25 (Bildmaß). Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, Φ eine Menge und \mathcal{B} eine σ -Algebra auf Φ . Sei $g : \Omega \rightarrow \Phi$ eine messbare Abbildung. Dann wird durch

$$\begin{aligned} g_*\mu : \mathcal{B} &\rightarrow [0, \infty] \\ B &\mapsto \mu(g^{-1}(B)) \end{aligned}$$

das Bildmaß auf Φ unter der Abbildung g definiert.

Das Maß $g_*\mu$ wird auch als das von g induzierte Maß oder das „push-forward“-Maß bezeichnet.

Bemerkung 9.26. (i) Es muss natürlich gezeigt werden, dass die definierte Abbildung tatsächlich ein Maß ist (Nachrechnen!).

- (ii) Die Voraussetzung, dass g messbar ist, stellt genau sicher, dass die Definition Sinn ergibt.

- (iii) Offenbar ist das Bildmaß eines W-Maßes wiederum ein W-Maß.

- (iv) Falls die beiden Räume Ω und Φ diskret sind, können wir explizitere Formeln für das Bildmaß angeben. Wie immer in diskreten Räumen ist es ausreichend, die Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse $\varphi \in \Phi$ zu berechnen:

$$(g_*\mu)(\{\varphi\}) = \mu(g^{-1}\{\varphi\}) = \sum_{\omega \in g^{-1}\{\varphi\}} \mu(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega, g(\omega)=\varphi} \mu(\omega).$$

- (v) Bildmaße werden benutzt um aus den (Pseudo-)Zufallszahlen eines Zufallsgenerators mit einer bestimmten Verteilung (zum Beispiel Gleichverteilung) (Pseudo-)Zufallszahlen einer anderen Verteilung zu generieren.

Beispiel 9.27. (i) Wir betrachten erneut das gleichzeitige Werfen von n sechseckigen Würfeln. Der W-Raum Ω ist dann $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^n$ und das W-Maß μ das renormierte Zählmaß. Die Grundmenge Φ des neuen W-Raumes ist die Menge aller monoton wachsenden Folgen aus $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^n$ und die Abbildung g ist dann die Sortierabbildung, die die Würfelwürfe einer Folge aufsteigend der Größe nach sortiert. Das Bildmaß $g_*\mu$ gibt dann die Wahrscheinlichkeiten beim Werfen von n Würfeln ohne Beachten der Reihenfolge an.

Die Leserin überprüfe zur Übung, dass diese Abbildung in Beispiel 9.24 genau die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt.

- (ii) Wir betrachten den W-Raum $\{0, 1\}$, der dem Elementarereignis 1 die Wahrscheinlichkeit p zuordnet. Auf dem n -fachen Produkt dieses Wahrscheinlichkeitsraumes $\Omega = \{0, 1\}^n$ (Bernoulli-Verteilung) definieren wir

$$g(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n x_k.$$

Als Bildmaß dieser Verteilung auf $\Phi = \{0, 1, \dots, n\}$ ist dann die Binomialverteilung (Warum?)

$$g_*\mu(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

- (iii) Seien $a, b \in \mathbb{N}$ und $0 \leq p := \frac{a}{b} \leq 1$. Wir definieren

$$g : \{1, \dots, b\} \rightarrow \{0, 1\}$$

$$n \mapsto \begin{cases} 1 & n \leq a \\ 0 & n > a. \end{cases}$$

Dann gilt $(g_*\mu)(\{1\}) = p$. Auf diese Weise lässt sich beispielsweise mit einem (Pseudo-)Zufallszahlenalgorithmus der gleichverteilte Zahlen zwischen 1 und b liefert, ein binäres Experiment mit Erfolgswahrscheinlichkeit p simulieren.

Satz 9.28. Sei $g : \Omega \rightarrow \Phi$ eine messbare Abbildung, $B \subset \mathcal{B}$ und $f : \Phi \rightarrow \mathbb{C}$ messbar. Dann ist f integrierbar über B genau dann, wenn $f \circ g$ integrierbar über $g^{-1}(B)$ ist und es gilt

$$\int_B f d(g_*\mu) = \int_{g^{-1}(B)} f \circ g d\mu. \quad (9.2)$$

Beweis. Es ist ausreichend die Gleichheit für $B = \Phi$ zu zeigen, denn wenn das bekannt ist, dann folgt auch

$$\int_B f d(g_*\mu) = \int f \mathbb{1}_B d(g_*\mu) = \int (f \mathbb{1}_B) \circ g d\mu = \int f \circ g \mathbb{1}_{g^{-1}(B)} d\mu = \int_{g^{-1}(B)} f \circ g d\mu.$$

Falls f eine charakteristische Funktion ist, erhalten wir

$$\int \mathbb{1}_C d(g_*\mu) = (g_*\mu)(C) = \mu(g^{-1}C) = \int \mathbb{1}_{g^{-1}(C)} d\mu = \int \mathbb{1}_C \circ g d\mu.$$

Da beide Seiten von Gleichung (9.2) linear in f sind (Warum?), haben wir damit auch gezeigt, dass die Gleichung für einfache Funktionen gilt. Insbesondere ist für jede einfache Funktion h (auf $(\Phi, \mathcal{B}, g_*\mu)$) auch $h \circ g$ eine einfache Funktion (auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$).

Sei nun $f : \Phi \rightarrow [0, \infty)$ eine messbare Funktion. Dann gibt es eine monoton wachsende Folge (h_n) einfacher Funktionen so, dass $h_n \rightarrow f$ punktweise ($g_*\mu$ -fast-überall, Bemerkung 8.31). Dann ist $(h_n \circ g)$ eine monoton wachsende Folge einfacher Funktionen die punktweise (μ -fast-überall) gegen $f \circ g$ konvergiert (Warum?). Damit folgt aus dem Satz von Beppo-Levi

$$\int f \circ g d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int h_n \circ g d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int h_n d(g_*\mu) = \int f d(g_*\mu).$$

Insbesondere folgt die Aussage über Integrierbarkeit.

Schließlich sei für eine integrierbare Funktion $f : \Phi \rightarrow \mathbb{C}$, (f_n) eine approximierende Folge (bezüglich $(\Phi, \mathcal{B}, g_*\mu)$). Dann gilt nach dem eben gezeigten

$$\int |f \circ g - f_n \circ g| d\mu = \int |f - f_n| \circ g d\mu = \int |f - f_n| d(g_*\mu).$$

Da die rechte Seite eine Nullfolge ist, ist $f_n \circ g$ eine approximierende Folge für $f \circ g$ (bezüglich $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$) und damit gilt

$$\int f \circ g d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \circ g d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d(g_*\mu) = \int f d(g_*\mu). \quad \square$$

Beispiel 9.29. Wir betrachten die folgende Abbildung

$$\begin{aligned} g : [0, 1]^2 &\rightarrow [0, 2] \\ (x, y) &\mapsto x + y. \end{aligned}$$

Wir verwenden auf beiden Räumen jeweils die Lebesgue- σ -Algebra und das Lebesgue-Maß. Dazu betrachten wir eine integrierbare Funktion $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{C}$ und erhalten

$$\begin{aligned}\int f d(g_*\lambda^2) &= \int f \circ g d\lambda^2 = \int \int f(x+y) \mathbb{1}_{[0,1]}(x) \mathbb{1}_{[0,1]}(y) dx dy \\ &= \int f(z) \int \mathbb{1}_{[0,1]}(z-y) \mathbb{1}_{[0,1]}(y) dy dz = \int f(z) \delta(z) dz.\end{aligned}$$

In der obigen Rechnung haben wir den Satz von Fubini (Warum dürfen wir das?) und die Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes genutzt.

Wir sehen damit, dass sich das Bildmaß $g_*\lambda^2$ mit der Dichtefunktion

$$\delta(z) = \int \mathbb{1}_{[0,1]}(z-y) \mathbb{1}_{[0,1]}(y) dy = \mathbb{1}_{[0,1]} * \mathbb{1}_{[0,1]}(z)$$

schreiben lässt (Einsetzen einer charakteristischen Funktion für f). Die Dichtefunktion lässt sich in diesem Fall auch explizit ausrechnen (Übung).

9.4 Zufallsgrößen

Definition 9.30. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein W-Raum und Φ eine Menge mit einer σ -Algebra \mathcal{B} . Dann nennen wir eine messbare Abbildung $X : \Omega \rightarrow \Phi$ (zur Erinnerung, das heißt $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ für jedes $B \in \mathcal{B}$) eine Zufallsgröße oder Zufallsvariable.

Unsere Zufallsgrößen werden im Allgemeinen reellwertig sein. Ist also nichts anderes gesagt, dann ist $\Phi = \mathbb{R}$ und \mathcal{B} die Borel- σ -Algebra (kleinste von den offenen Mengen erzeugte σ -Algebra).

Das Bildmaß $X_*\mu$ einer Zufallsgröße bezeichnen wir auch als deren Verteilung.

Wir interpretieren dabei eine Zufallsgröße als eine Größe, deren Wert vom Zufall abhängig ist, konkreter wird der Wert vom Ausgang eines „Zufallsexperiments“ bestimmt, das durch den W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ beschrieben wird.

Bemerkung 9.31. Zufallsgrößen und deren Verteilungen stellen einen Perspektivwechsel in der Wahrscheinlichkeitstheorie dar. Sie erlauben es uns in vielen Fällen interessante Aussagen zu erhalten selbst dann, wenn der zu Grunde liegende W-Raum nicht bekannt, nicht von Interesse oder zu kompliziert ist. In diesem Fall ist lediglich entscheidend, welchen Verteilungen die relevanten Zufallsvariablen gehorchen und wie sie sich zueinander verhalten. Der W-Raum im Hintergrund ist dann austauschbar.

Ist beispielsweise X eine Zufallsgröße und $B \subset \mathbb{R}$ eine Borelmenge, dann ist

$$\mu([X \in B]) = \mu(X^{-1}(B)) = (X_*\mu)(B).$$

Solche Wahrscheinlichkeiten können also bestimmt werden, wenn lediglich die Verteilung von X bekannt ist. Wir werden weiter unten sehen, wie das konkret aussehen kann.

Definition 9.32. Sei (X_n) eine endliche oder abzählbare Folge von Zufallsgrößen auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Die Zufallsgrößen heißen (vollständig) unabhängig, falls für jedes $n \in \mathbb{N}$ und für alle Borelmengen B_1, \dots, B_n gilt

$$\mu([X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n]) = \mu([X_1 \in B_1]) \cdots \mu([X_n \in B_n]).$$

Für den Rest dieses Abschnitts sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein fester W-Raum. Wird nichts anderes gesagt, dann sind alle Zufallsgrößen auf diesem Raum definiert.

Bemerkung 9.33. (i) Damit dieser Begriff sinnvoll ist, sollte es natürlich unabhängige Zufallsgrößen geben. Auch für diese Konstruktion sind Produkträume hilfreich. Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ und (Φ, \mathcal{B}, ν) W-Räume und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sowie $g : \Phi \rightarrow \mathbb{R}$ messbare Funktionen. Auf dem Produkt der beiden Wahrscheinlichkeitsräume betrachten wir die Zufallsgrößen

$$X_1(\omega, \varphi) = f(\omega) \text{ und } X_2(\omega, \varphi) = g(\varphi).$$

Dann gilt für beliebige Borelmengen B_1, B_2

$$[X_1 \in B_1, X_2 \in B_2] = X_1^{-1}(B_1) \cap X_2^{-1}(B_2) = f^{-1}(B_1) \times \Phi \cap \Omega \times g^{-1}(B_2).$$

Nach Bemerkung 9.19 sind Ereignisse von dieser Form in einem Produktraum aber unabhängig.

Ganz analog lassen sich endliche oder abzählbare Familien unabhängiger Zufallsgrößen konstruieren.

- (ii) Häufig werden wir von Familien unabhängiger und identisch verteilter Zufallsgrößen sprechen. Das heißt, das zusätzlich zur Unabhängigkeit auch noch die Voraussetzung $(X_n)_*\mu = (X_m)_*\mu$ für alle Indizes m, n erfüllt ist. Auch solche Beispiele lassen sich wie oben konstruieren, indem die Faktoren des Produktes gleich sowie $f = g$ gewählt werden.

- (iii) Seien X, Y zwei Zufallsgrößen. Dann können wir eine Abbildung durch

$$\begin{aligned} P : \Omega &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \omega &\mapsto (X(\omega), Y(\omega)) \end{aligned}$$

definieren. Das Bildmaß $P_*\mu$ wird als die gemeinsame Verteilung der Zufallsgrößen X und Y bezeichnet.

Es gilt nun: X und Y sind genau dann unabhängig, wenn die gemeinsame Verteilung das Produkt der Verteilungen $X_*\mu$ und $Y_*\mu$ ist. (Wir werden diese Aussage hier nicht beweisen.) Analoge Aussagen gelten sinngemäß auch für Familien von mehr als zwei Zufallsvariablen.

Definition 9.34. Eine Zufallsgröße X heißt diskret, falls es eine höchstens abzählbare Menge $W \subset \mathbb{R}$ gibt, so dass $\mu([X \in W]) = 1$.

Bemerkung 9.35. Analog wie bei diskreten W-Räumen, ist das Rechnen mit diskreten Zufallsgrößen besonders einfach. Wir erhalten nämlich für eine Borelmenge B

$$\mu([X \in B]) = \mu([X \in B \cap W] \cup [X \in B \cap W^c]) = \mu\left(\bigcup_{x \in B \cap W} \{x\}\right) = \sum_{B \cap W} \mu(\{x\}).$$

Für eine diskrete Zufallsgröße können wir immer eine andere Zufallsgröße \tilde{X} über einem diskreten W-Raum angeben, die die selbe Verteilung hat. Wir können zum Beispiel auf der diskreten Menge W ein W-Maß durch

$$\nu(\{x\}) = \mu([X = x])$$

definieren und dann

$$\begin{aligned} \tilde{X} : W &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

betrachten. Dann gilt $X_*\mu = \tilde{X}_*\nu$.

Auch die Unabhängigkeit ist für diskrete Zufallsgrößen leichter zu untersuchen. Um die Notation einfach zu halten formulieren wir den folgenden Satz nur für zwei Zufallsgrößen, er gilt sinngemäß aber auch für beliebige endliche und abzählbar unendliche Familien von Zufallsgrößen.

Satz 9.36. *Seien X und Y zwei diskrete Zufallsgrößen und $W_X, W_Y \subset \mathbb{R}$ abzählbare Mengen mit $\mu([X \in W_X]) = \mu([X \in W_Y]) = 1$. Dann sind X und Y unabhängig genau dann, wenn für alle $x \in W_X$ und für alle $y \in W_Y$ gilt*

$$\mu([X = x, Y = y]) = \mu([X = x])\mu([Y = y]).$$

Beweis. Die Bedingung ist offensichtlich notwendig für Unabhängigkeit. Um zu sehen, dass sie auch hinreichend ist, seien $A, B \subset \mathbb{R}$ Borelmengen. Dann gilt

$$\begin{aligned} [X \in A, Y \in B] &= [X \in A] \cap [Y \in B] = \\ &= ([X \in A \cap W_X] \cup [X \in A \cap W_X^c]) \cap ([Y \in B \cap W_Y] \cup [Y \in B \cap W_Y^c]). \end{aligned}$$

Nutzen wir nun im letzten Ausdruck das Distributivgesetz, dann hat nur eine der entstehenden Mengen nichtverschwindendes Maß. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \mu([X \in A, Y \in B]) &= \mu([X \in A \cap W_X] \cap [Y \in B \cap W_Y]) \\ &= \mu\left(\left(\bigcup_{x \in A \cap W_X} [X = x]\right) \cap \left(\bigcup_{y \in B \cap W_Y} [Y = y]\right)\right) \\ &= \mu\left(\bigcup_{x \in A \cap W_X, y \in B \cap W_Y} [X = x, Y = y]\right) \\ &= \sum_{x \in A \cap W_X, y \in B \cap W_Y} \mu([X = x, Y = y]) \\ &= \sum_{x \in A \cap W_X, y \in B \cap W_Y} \mu([X = x])\mu([Y = y]) \\ &= \left(\sum_{x \in A \cap W_X} \mu([X = x])\right) \left(\sum_{y \in B \cap W_Y} \mu([Y = y])\right) \\ &= \mu([X \in A])\mu([Y \in B]). \end{aligned} \quad \square$$

Für Zufallsgrößen die nicht diskret sind gibt es eine entsprechende Aussage.

Satz 9.37. *Zwei Zufallsgrößen X, Y sind unabhängig genau dann, wenn für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\mu([X \leq x, Y \leq y]) = \mu([X \leq x])\mu([Y \leq y]).$$

Ohne Beweis.

Definition 9.38. Sei X eine Zufallsgröße. Falls X integrierbar ist, heißt

$$\mathbb{E}(X) := \int X d\mu$$

der Erwartungswert von X .

Für $n \in \mathbb{N}$ heißt $\mathbb{E}(X^n)$ das n -te Moment von X (falls es existiert). Zufallsgrößen deren n -tes Moment existiert bezeichnet man auch als n -fach integrierbar.

Die Varianz einer Zufallsgröße, deren zweites Moment existiert, ist

$$\text{Var}(X) := \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.$$

Bemerkung 9.39. (i) Alle Momente einer Zufallsgröße lassen sich nur aus ihrer Verteilung bestimmen. Sei dazu für ein $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^n \end{aligned}$$

dann gilt nach Satz 9.28

$$\int X^n d\mu = \int f \circ X d\mu = \int f d(X_*\mu).$$

(ii) Für diskrete Zufallsgrößen vereinfachen sich die Rechnungen wiederum. Sei dazu X eine diskrete Zufallsgröße und $W \subset \mathbb{R}$ abzählbar mit $\mu([X \in W]) = 1$. Dann ist X integrierbar genau dann, wenn gilt

$$\sum_{x \in W} |x| \mu([X = x]) < \infty$$

und in diesem Fall gilt

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in W} x \mu([X = x]).$$

Lemma 9.40. Seien X_1, \dots, X_n unabhängige Zufallsgrößen und $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine borelmessbare Funktion, dann gilt

$$\int f(X_1, \dots, X_n) d\mu = \int \cdots \int f(X_1(\omega_1), \dots, X_n(\omega_n)) d\mu(\omega_1) \cdots d\mu(\omega_n).$$

Dabei existiert das eine Integral genau dann, wenn das andere existiert und die Reihenfolge der Mehrfachintegrationen kann frei gewählt werden.

Beweis. Um die Notation einfach zu halten, führen wir den Beweis für den Fall $n = 2$. Seien also X, Y Zufallsgrößen. Wir definieren wieder

$$\begin{aligned} P : \Omega &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \omega &\mapsto (X(\omega), Y(\omega)) \end{aligned}$$

und erhalten

$$\begin{aligned}
\int |f(X, Y)| d\mu &= \int |f| \circ P d\mu = \int |f| d(P_*\mu) = \int |f| d(X_*\mu \otimes Y_*\mu) \\
&= \int \int |f(x, y)| d(X_*\mu)(x) d(Y_*\mu)(y) = \int \int |f(X(\omega_1), y)| d\mu(\omega_1) d(Y_*\mu)(y) \\
&= \int \int |f(X(\omega_1), Y(\omega_2))| d\mu(\omega_1) d\mu(\omega_2).
\end{aligned}$$

Dabei haben wir im zweiten Schritt die Unabhängigkeit der Zufallsgrößen und im dritten Schritt den Satz von Tonelli angewendet. Daraus folgt die Aussage über Integrierbarkeit. Falls nun eines der Integrale (und damit auch das andere) existiert, dann können wir genau die selbe Rechnung nochmals durchführen und dabei lediglich die Beträge weglassen. Anstelle des Satzes von Tonelli verwenden wir dann den Satz von Fubini (dessen Voraussetzungen nach der obigen Rechnung erfüllt sind) und erhalten so die gewünschte Aussage. \square

Korollar 9.41. *Seien X, Y unabhängige integrierbare Zufallsgrößen. Dann gilt $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.*

Beweis. Wir wenden die obige Aussage auf die Funktion

$$\begin{aligned}
f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\
(x, y) &\mapsto xy.
\end{aligned}$$

an und erhalten

$$\mathbb{E}(XY) = \int f(XY) d\mu = \int \int X(\omega_1)Y(\omega_2) d\mu(\omega_1) d\mu(\omega_2) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y). \quad \square$$

Auch diese Aussage lässt sich, mit analogem Beweis, auf mehr als zwei Zufallsgrößen verallgemeinern.

Korollar 9.42. *Seien X_1, X_2, Y unabhängige Zufallsgrößen, und $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine borelmesbare Funktionen. Dann sind auch $f(X_1, X_2)$ und Y unabhängig.*

Beweis. Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ Borelmengen. Wir wenden das Lemma auf die Funktion

$$\begin{aligned}
g : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\
(x_1, x_2, y) &\mapsto \mathbb{1}_{f^{-1}(A)}(x_1, x_2) \mathbb{1}_B(y)
\end{aligned}$$

an und erhalten

$$\begin{aligned}
\mu([f(X_1, X_2) \in A, Y \in B]) &= \int g(X_1, X_2, Y) d\mu \\
&= \int \int \int \mathbb{1}_{f^{-1}(A)}(X_1(\omega_1), X_2(\omega_2)) \mathbb{1}_B(Y(\omega_3)) d\mu(\omega_1) d\mu(\omega_2) d\mu(\omega_3) \\
&= \mu([Y \in B]) \int \int \mathbb{1}_{f^{-1}(A)}(X_1(\omega_1), X_2(\omega_2)) d\mu(\omega_1) d\mu(\omega_2) \\
&= \mu([Y \in B]) \int \mathbb{1}_{f^{-1}(A)}(X_1, X_2) d\mu = \mu([f(X_1, X_2) \in A]) \mu([Y \in B]).
\end{aligned}$$

Dabei haben wir im vorletzten Schritt das Lemma nochmals in die andere Richtung angewandt. Da das für beliebige A und B gilt, folgt die Unabhängigkeit. \square

Auch diese Aussage lässt sich auf eine größere Anzahl von X - und Y -Variablen verallgemeinern.

9.5 Konvergenz von Zufallsgrößen

Es gibt verschiedene Arten, wie sich Zufallsgrößen einer „Grenzzufallsgröße“ annähern können. Wenn wir also von Konvergenz einer Folge von Zufallsgrößen sprechen, dann müssen wir stets erwähnen, von welcher Art von Konvergenz wir sprechen.

Satz 9.43. Seien X, X_1, X_2, \dots Zufallsgrößen. Wir sagen, die Folge (X_n) konvergiert gegen X

(i) fast sicher, falls

$$\mu\left(\left[\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X\right]\right) = 1,$$

(ii) im p -ten Mittel für ein $p \geq 1$ (wir sprechen auch von \mathbf{L}^p -Konvergenz), wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(|X_n - X|^p) = 0,$$

(iii) in Wahrscheinlichkeit, falls für jedes $\epsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(|X_n - X| < \epsilon) = 1,$$

(iv) in Verteilung, wenn für jedes beschränkte stetige $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f d((X_n)_* \mu) = \int f d(X_* \mu)$$

Beispiel 9.44. Für alle der folgenden Beispiele soll $[0, 1]$ mit dem Lebesgue-Maß der zugrundeliegende Maßraum sein. Die Beweise für die jeweiligen Aussagen werden zur Übung überlassen.

(i) Die durch

$$X_n = \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{n}]}$$

gegebene Folge konvergiert fast sicher, im p -ten Mittel für jedes $p \geq 1$, in Wahrscheinlichkeit und in Verteilung gegen $X = 0$.

(ii) Die Folge

$$X_n = n \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{n}]}$$

konvergiert fast sicher, in Wahrscheinlichkeit und in Verteilung gegen 0, aber nicht im p -ten Mittel für irgendein $p \geq 1$.

(iii) Die Folge

$$(\mathbb{1}_{[0,1]}, \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{2}]}, \mathbb{1}_{[\frac{1}{2}, 1]}, \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{3}]}, \mathbb{1}_{[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]}, \dots)$$

konvergiert im p -ten Mittel, in Wahrscheinlichkeit und in Verteilung gegen 0, aber nicht fast sicher.

- (iv) Multiplizieren wir die vorhergehende Folge mit n , dann konvergiert sie immer noch in Wahrscheinlichkeit und in Verteilung, aber weder fast sicher noch im p -ten Mittel für irgendein $p \geq 1$.
- (v) Für

$$X_1(x) = \begin{cases} 0 & x < \frac{1}{2} \\ 1 & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$X_2(x) = \begin{cases} 1 & x < \frac{1}{2} \\ 0 & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

konvergiert die Folge

$$X_n = \begin{cases} X_1 & n \text{ ungerade} \\ X_2 & n \text{ gerade} \end{cases}$$

in Verteilung gegen X_1 (und gegen X_2), konvergiert aber nicht fast sicher, im p -ten Mittel für irgendein $p \geq 1$ oder in Wahrscheinlichkeit.

Bemerkung 9.45. (i) Für die Konvergenzbegriffe (i), (iii) und (ii) ist die Grenzzufallsgröße jeweils „im Wesentlichen“ eindeutig bestimmt. Konkret gilt, falls (X_n) gegen X und Y konvergiert, dann gilt fast sicher $X = Y$ (Übung).

- (ii) Bei (iv) handelt es sich eigentlich um einen Konvergenzbegriff auf dem Raum der Maße, die Schwach-*Konvergenz. Wir können alle X_n und auch X gegen Zufallsgrößen mit der selben Verteilung austauschen, ohne dass sich an der Konvergenz etwas ändert. Insbesondere ist die Grenzzufallsgröße hier nicht eindeutig bestimmt (auch nicht fast sicher).
- (iii) Für die Konvergenzbegriffe (iii), (ii) und (iv) können wir, wenn wir die richtigen Räume zugrundelegen, Metriken angeben, die genau diese Konvergenzbegriffe erzeugen. Für den ersten Konvergenzbegriff ist das im Allgemeinen nicht der Fall.
- (iv) Von den obigen Konvergenzbegriffen ist nur der erste verträglich mit den arithmetischen Operationen.
- (v) Für die Konvergenz in Verteilung gibt es eine lange Liste äquivalenter Formulierungen, die meist im sogenannten Portmanteau-Lemma zusammengefasst werden.

Satz 9.46. Seien X, X_1, X_2, \dots Zufallsgrößen und $p \geq 1$. Dann gelten

- (i) Konvergiert (X_n) fast sicher oder im p -ten Mittel gegen X , dann konvergiert die Folge auch in Wahrscheinlichkeit.
- (ii) Konvergiert (X_n) in Wahrscheinlichkeit gegen X , dann konvergiert sie auch in Verteilung.

Beweis. Wir werden hier nur die erste Aussage beweisen. Dazu setzen wir

$$A_m^n = \left[|X_n - X| > \frac{1}{m} \right].$$

Sei zunächst (X_n) nicht in Wahrscheinlichkeit konvergent gegen X , das heißt es existiert ein $m \in \mathbb{N}$ so, dass $\mu(A_m^n)$ keine Nullfolge ist. Dann gibt es $\delta > 0$ so, dass $\mu(A_m^n) > \delta$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Es gilt aber stets

$$\mathbb{E}(|X_n - X|^p) \geq \int |X_n - X|^p \mathbb{1}_{A_m^n} d\mu \geq \int \frac{1}{m^p} \mathbb{1}_{A_m^n} d\mu = \frac{1}{m^p} \mu(A_m^n),$$

so dass $\mathbb{E}(|X_n - X|^p) \geq \frac{1}{m^p} \delta$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$. Damit ist (X_n) nicht im p -ten Mittel gegen X konvergent.

Wir können schreiben

$$\begin{aligned} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X \right] &= \left\{ \omega \in \Omega \mid \forall q \in \mathbb{N} \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N |X_n - X| \leq \frac{1}{q} \right\} \\ &= \bigcap_{q \in \mathbb{N}} \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} (A_q^n)^c = \left(\bigcup_{q \in \mathbb{N}} \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq N} A_q^n \right)^c. \end{aligned}$$

Sei nun m so wie oben gewählt. Dann gilt für jedes $N \in \mathbb{N}$

$$\mu \left(\bigcup_{n \geq N} A_m^n \right) \geq \delta$$

und damit auch (Stetigkeit des Maßes von außen)

$$\mu \left(\bigcap_{N \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq N} A_m^n \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mu \left(\bigcup_{n \geq N} A_m^n \right) \geq \delta.$$

Damit ist schließlich

$$\mu \left(\bigcup_{q \in \mathbb{N}} \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq N} A_q^n \right) \geq \delta$$

und daher

$$\mu \left(\left[\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X \right] \right) \leq 1 - \delta < 1.$$

Die Folge (X_n) ist also auch nicht fast sicher konvergent. □

Lemma 9.47 (Markovungleichung). Sei X eine nichtnegative, integrierbare Zufallsvariable und $a > 0$. Dann gilt

$$\mu([X \geq a]) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

Beweis. Es gilt

$$\int X d\mu \geq \int a \mathbb{1}_{[X \geq a]} d\mu = a\mu([X \geq a]). \quad \square$$

Theorem 9.48 (Schwaches Gesetz der großen Zahlen). *Sei (X_n) eine Folge unabhängiger, identisch verteilter, quadratintegrierbarer Zufallsgrößen. Dann konvergiert die Folge*

$$Y_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

für $n \rightarrow \infty$ in Wahrscheinlichkeit gegen den (gemeinsamen) Erwartungswert $\mathbb{E}(X_1)$.

Beweis. Es gilt

$$\mathbb{E}(Y_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k) = \mathbb{E}(X_1) =: \mu.$$

Da die Zufallsgrößen identisch verteilt sind, stimmen ihre Erwartungswerte und alle höheren Momente überein. Auf Grund der Unabhängigkeit der Zufallsgrößen gilt auch (Übung)

$$\text{Var}(Y_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \text{Var}(X_k) = \frac{\text{Var}(X_1)}{n}.$$

Mit der Markovungleichung ergibt sich für jedes $\epsilon > 0$

$$\mu(|Y_n - \mu| \geq \epsilon) = \mu(|Y_n - \mu|^2 \geq \epsilon^2) \leq \frac{\mathbb{E}(|Y_n - \mu|^2)}{\epsilon^2} = \frac{\text{Var}(X_1)}{n\epsilon}.$$

Der letzte Ausdruck ist aber für jede $\epsilon > 0$ eine Nullfolge. \square

Bemerkung 9.49. (i) Das Gesetz der großen Zahlen stellt den Zusammenhang her zwischen dem Erwartungswert einer Zufallsgröße und dem Bilden von Mittelwerten. Anschaulich sagt der Satz aus: Wiederholen wir ein Zufallsexperiment hinreichend oft unter den immer gleichen Bedingungen (mathematisch: unabhängig und identisch verteilt) und bilden den Mittelwert über die Messergebnisse, dann

- (ii) Es gibt viele weitere Versionen des „Gesetzes der großen Zahlen“, die mit schwächeren Voraussetzungen auskommen — beispielsweise kann teilweise auf die Voraussetzung „identisch verteilt“ verzichtet werden — oder stärkere Aussagen machen. Insbesondere lässt sich zeigen, dass unter den obigen Voraussetzungen die Folge Y_n sogar fast sicher konvergiert, der Beweis dieser Aussage ist jedoch deutlich aufwändiger.

Theorem 9.50 (Zentraler Grenzwertsatz). *Sei (X_n) eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsgrößen mit dem gemeinsamen Mittelwert μ und der gemeinsamen Varianz σ^2 . Wir „normieren“ die Summen*

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

auf Mittelwert 0 und Varianz 1:

$$Y_n = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}.$$

Dann konvergieren die normierten Zufallsgrößen (Y_n) in Verteilung gegen eine Standardnormalverteilte Zufallsgröße.

Ohne Beweis.

Bemerkung 9.51. (i) Der zentrale Grenzwertsatz liefert eine Begründung für das häufige Vorkommen der Normalverteilung. Sind die X_n zum Beispiel zufällige aber kleine Messfehler die auf unterschiedliche (unabhängige) Ursachen zurückgehen mit beliebigen Verteilungen und Mittelwert 0, dann sagt der Satz aus, dass für hinreichend große n der Gesamtfehler in guter Näherung normalverteilt sein wird. ´

(ii) In gewisser Weise ist der zentrale Grenzwertsatz eine Präzisierung des Gesetzes der großen Zahlen. Wir sagen nicht nur, wogegen die Mittelwerte konvergieren, sondern auch wie sich die Abweichungen verhalten. Da die Konvergenzart jedoch schwächer ist (Konvergenz in Verteilung statt Konvergenz in Wahrscheinlichkeit) handelt es sich nicht um eine echte Verallgemeinerung.

9.6 Einführung in die Begriffe der mathematischen Statistik

In der Wahrscheinlichkeitstheorie war stets ein W-Raum gegeben und wir haben dann Eigenschaften und Merkmale dieses Raumes untersucht. Praktisch stehen wir jedoch oft vor der Aufgabe, dass die einem konkreten Zufallsexperiment zugrundeliegende Wahrscheinlichkeitsverteilung gar nicht oder nur unvollständig bekannt ist. In diesem Fall ergibt sich die naheliegende Fragestellung: Welche Informationen können wir aus Stichproben über diese Wahrscheinlichkeitsverteilung ziehen? Konkreter: welche der betrachteten Wahrscheinlichkeitsverteilungen erklärt die beobachteten Daten am besten. Dabei gibt es natürlich erheblichen Interpretationsspielraum. Was genau bedeutet „erklären“, was bedeutet „am besten“.

Definition 9.52. Ein statistisches Modell ist ein Tripel (Ω, \mathcal{A}, M) wobei Ω eine Menge ist, \mathcal{A} eine σ -Algebra und M eine Familie von Maßen auf (Ω, \mathcal{A}) . In diesem Kontext heißt Ω der Stichprobenraum.

Beispiel 9.53. Untersucht werden die Zerfallszeiten einzelner Atome eines radioaktiven Isotops mit unbekannter Halbwertszeit. In diesem Fall wäre $\Omega = [0, \infty)$ und wir verwenden die Borelsche σ -Algebra. Wir wissen aus theoretischen Erwägungen, dass die Zerfallszeiten (in guter Näherung) exponentialverteilt sind, das heißt die Familie M besteht hier aus den durch die Dichtefunktionen

$$x \mapsto \lambda \exp(-\lambda x)$$

gegebenen Maßen, wobei $\lambda > 0$ ein reeller Parameter ist. Explizit ist $M = \{\mu_\lambda \mid \lambda > 0\}$ und dabei

$$\mu_\lambda(A) = \int_A \lambda \exp(-\lambda x) dx.$$

Bemerkung 9.54. (i) Wie in obigem Beispiel, können wir uns Ω als die Menge von möglichen Messwerten eines Experimentes vorstellen. Die Menge M bezeichnet dann die Maße, die wir zur Erklärung des gemessenen Geschehens in unsere Betrachtung einbeziehen. Diese Menge muss das tatsächliche W-Maß, welches das zufällige Geschehen beschreibt, nicht enthalten (und wird es auch in vielen Fällen nicht tun).

Häufig werden wir die betrachteten Maße so wie im obigen Beispiel von einem oder einigen wenigen reellen Parametern abhängen. Wir nennen ein solches statistisches Modell dann ein parametrisches Modell. In vielen Fällen wird dabei so wie im Beispiel jedem Parameter genau ein Maß zugeordnet (die Abbildung Parameter zu Maß ist also bijektiv). In solchen Fällen können wir auch statt der Menge M der Maße, die Menge der Parameter betrachten.

(ii) Häufig ist der Stichprobenraum diskret oder (eine Teilmenge von) \mathbb{R}^n . Wird nichts anderes gesagt, so ist \mathcal{A} im ersten Fall die Potenzmenge, im zweiten die Borelsche σ -Algebra. Die Stichprobenräume die wir betrachten werden, sind häufig Teilmengen der reellen Zahlen. Wir werden dann von einem reellen statistischen Modell sprechen.

- (iii) Unsere Notation weicht an dieser Stelle etwas von der üblichen ab. Wir betrachten hier nur solche Fälle, bei denen wie im obigen Beispiel ein Zufallsexperiment wiederholt durchgeführt wird und wir die einzelnen Durchführungen als voneinander unabhängig und identisch verteilt annehmen. Wir kommen dann für die Beschreibung mit dem Ereignisraum für eine einzelne Durchführung und den Maßen darauf aus. Der tatsächliche Maßraum für die Beschreibung einer n -fachen Durchführung des Experiments ist dann natürlich das n -fache Produkt des „Einzelmaßraumes“. Im obigen Beispiel hätten wir also $\Omega = [0, \infty)^n$ und μ_λ^n betrachten müssen.

Unsere Beschreibung ist für viele praktisch relevante Fälle ausreichend und in diesen Fällen etwas einfacher zu durchschauen.

Die Aufgabe der mathematischen Statistik ist es nun, anhand von wiederholten Stichproben (also Elementen aus Ω^n), Informationen über das dem Zufallsprozess tatsächlich zugrundeliegende Maß zu gewinnen, oder jedenfalls über dasjenige Maß aus M , welches das zugrundeliegende am besten approximiert. Im allgemeinen wird dabei lediglich eine Teilinformation über das Maß gewonnen.

Hat der untersuchte Prozess eine echte Zufallskomponente, dann wird dieses Gewinnen von Informationen nie sicher sein, sondern immer mit gewisser Wahrscheinlichkeit falsche Ergebnisse liefern. Das Mittel mit dem sich solche Informationen gewinnen lassen, nennen wir eine Statistik.

Definition 9.55. Sei (Ω, \mathcal{A}, M) ein statistisches Modell. Eine Statistik für das Modell ist eine Familie $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von borelmeßbaren Funktionen von $\Omega^n \rightarrow \mathbb{R}$ (das heißt hier, die Urbilder von Borelmengen liegen in \mathcal{A}) für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Beispiel 9.56. Alle folgenden Beispiele beziehen sich auf ein reelles statistisches Modell.

- (i) Der Mittelwert

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$$

ist eine Statistik.

- (ii) Für jeden Wert $x \in \mathbb{R}$ ist die (empirische) Verteilungsfunktion an x gegeben durch

$$\frac{1}{n} \# \{x_k \mid x_k \leq x\}.$$

- (iii) Für eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ ist die (empirische) Wahrscheinlichkeit von A gegeben durch

$$\frac{1}{n} \# \{x_1, \dots, x_n\} \cap A.$$

- (iv) Die Spannweite ist gegeben durch

$$\max \{x_1, \dots, x_n\} - \min \{x_1, \dots, x_n\}.$$

(v) Sei $(x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)})$ die Folge (x_1, \dots, x_n) der Größe nach geordnet. Dann ist

$$\begin{cases} x_{(\frac{n+1}{2})} & n \text{ ungerade} \\ \frac{x_{(\frac{n}{2})} + x_{(\frac{n}{2}+1)}}{2} & n \text{ gerade} \end{cases}$$

der Median. Analog können auch höhere Quantile (Terzile, Quartile, ..., Percentile ...) definiert werden.

Bemerkung 9.57. Prinzipiell können Statistiken auch andere als reelle Werte annehmen. So hätten wir das Beispiel (ii) auch mit einer funktionswertigen Statistik, das Beispiel (iii) auch mit einer maßwertigen Statistik beschreiben können. Wir werden uns hier jedoch auf reellwertige Statistiken beschränken.

Der Begriff der Statistik ist sehr weit gefasst und enthält insbesondere keine Anforderungen an die Nützlichkeit der Statistik. Mit Statistiken können ganz unterschiedliche Zwecke verfolgt werden. So gibt es Statistiken zur Beschreibung einer Wahrscheinlichkeitsverteilung (zum Beispiel die Quantile), zum Schätzen bestimmter Eigenschaften (siehe Unten) oder zum Testen von Hypothesen.

Definition 9.58. Sei (Ω, \mathcal{A}, M) ein statistisches Modell. Ist zusätzlich eine Funktion $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben, dann bezeichnen wir eine Statistik (S_n) über dem Modell auch als einen (Punkt-)Schätzer für F . In diesem Zusammenhang bezeichnen wir F als ein Merkmal oder eine Eigenschaft des Modells und $S_n(x_1, \dots, x_n)$ als eine Schätzung des Merkmals.

Beispiel 9.59. (i) Wir betrachten das wiederholte Werfen einer (eventuell) nicht perfekten Münze. Die Wahrscheinlichkeit für „Kopf“ (1) ist also unbekannt. Der Stichprobenraum ist hier $\{0, 1\}$ und M ist die Menge aller Bernoulli-Verteilungen μ_p mit Erfolgswahrscheinlichkeit $0 \leq p \leq 1$. Die Abbildung $\mu_p \mapsto p$ ist dann ein Merkmal im Sinne der Definition und durch

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$$

wird dann einen Schätzer für dieses Merkmal angegeben.

(ii) Für ein reelles statistisches Modell mit

$$M = \left\{ \mu \left| \int |x| d\mu(x) < \infty \right. \right\}$$

ist der Mittelwert

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$$

ein Schätzer für den Erwartungswert des Maßes μ . Damit ist das Merkmal

$$\mu \mapsto \int x d\mu(x)$$

gemeint.

Bemerkung 9.60. (i) Zwischen Zufallsgrößen, Statistiken und Schätzern gibt es keinen mathematischen Unterschied. Es handelt sich jeweils um messbare Funktionen. Der Unterschied der Begriffe liegt lediglich in der Interpretation.

- (ii) Der Begriff „Schätzer“ sagt wiederum nichts über die Nützlichkeit des Schätzers aus. Die Abbildungen $(x_1, \dots, x_n) \mapsto 0$ stellen ebenfalls einen Schätzer für den Erwartungswert eines W-Maßes dar, lediglich keinen besonders nützlichen.

Die „Nützlichkeit“ eines Schätzers ist dabei keine absolute Eigenschaft sondern kann von vielen verschiedenen Faktoren abhängen: Wie groß ist die Stichprobe? Welche Maße werden betrachtet? Wie einfach oder schwierig ist der Schätzer zu berechnen? Um Anhaltspunkte für die Nützlichkeit (oder deren Fehlen) eines Schätzers zu gewinnen können Eigenschaften des Schätzers betrachtet werden.

- (iii) Ist die Menge M der im statistischen Modell betrachteten Maße durch eine Parametrisierung (durch einen oder mehrere reelle Parameter) gegeben, dann sind die Parameter häufig Merkmale im Sinne der obigen Definition. In diesem Falle können wir von einem Schätzer für den entsprechenden Parameter sprechen (z.B. im Beispiel 9.53 oder Beispiel 9.59 (i)).
- (iv) Das Finden von „guten“ Schätzern ist eine typische Aufgabe der Statistik. Es gibt dafür (wie so oft) kein standardisiertes Verfahren — in diesem Fall gibt es ja nicht einmal eine „korrekte“ Lösung. Dennoch gibt es einige häufig benutzte Ansätze insbesondere für das Schätzen von Parametern: Bei der Kleinste-Quadrate-Methode wird versucht die Summe der Fehlerquadrate zu minimieren, bei der Momentenmethode werden die empirischen Momente der Stichprobe berechnet und der Schätzwert aus ihnen bestimmt und bei der Maximum-Likelihood-Methode wird derjenige Wert als Schätzwert angegeben, der die Wahrscheinlichkeit die gemessenen Werte zu beobachten maximiert.

Beispiel 9.61. Wir betrachten erneut Beispiel 9.53. Das Ziel ist es nun, einen Schätzer für den Parameter λ der Exponentialverteilung zu finden. Dazu seien (x_1, \dots, x_n) eine Reihe von gemessenen Lebensdauern. Für die Maximum-Likelihood-Methode betrachten wir die gemeinsame Dichtefunktion für das n -fache Produkt einer Exponentialverteilung mit Parameter λ mit sich selbst an dem durch die Messung vorgegebenen Punkt:

$$\prod_{k=1}^n \lambda \exp(-\lambda x_k) = \lambda^n \exp\left(-\lambda \sum_{k=1}^n x_k\right).$$

Bestimmen wir nun das Maximum dieser Funktion ergibt sich – nicht gänzlich überraschend –

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{k=1}^n x_k}$$

also der Kehrwert des Mittelwertes der gemessenen Lebensdauern.

Bemerkung 9.62. Sei nun (S_n) ein Schätzer für ein Merkmal F eines statistischen Modells (Ω, \mathcal{A}, M) und sei (X_n) eine Folge unabhängiger identisch verteilter Ω -wertiger Zufallsgrößen über einem W-Raum (Φ, \mathcal{B}, ν) deren Verteilung $\mu \in M$ liegt. Dann erhalten wir mit $(S_n(X_1, \dots, X_n))$ eine Folge reellwertiger Zufallsgrößen über Φ . Damit können wir nun simulieren, wie sich unser Schätzer verhält wenn wir Zufallsvariablen mit bekannter Verteilung einsetzen und verschiedene Eigenschaften von Schätzern untersuchen.

- (i) Ein Schätzer heißt konsistent wenn die Folge $(S_n(X_1, \dots, X_n))$ in Wahrscheinlichkeit gegen $F(\mu)$ konvergiert.
- (ii) Wir bezeichnen einen Schätzer als erwartungstreu, wenn

$$\int S_n(X_1, \dots, X_n) d\nu = F(\mu)$$

beziehungsweise als asymptotisch erwartungstreu falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int S_n(X_1, \dots, X_n) d\nu = F(\mu).$$

- (iii) Als Maß für die Güte eines Schätzers können wir den mittleren quadratischen Fehler

$$\int (S_n(X_1, \dots, X_n) - F(\mu))^2 d\nu$$

berechnen. Dieser ist keine absolute Größe sondern eine Funktion auf M . Im Allgemeinen werden Schätzer bevorzugt, die dieses Abweichungsmaß möglichst minimieren, allerdings kann diese Zielstellung mit anderen erwünschten Eigenschaften kollidieren.

Beispiel 9.63. Wir haben bereits gesehen, dass der Mittelwert

$$\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$$

einer Stichprobe ein Schätzer für den Erwartungswert ist. Schreiben wir nun

$$m(\mu) = \int x d\mu(x)$$

für den tatsächlichen Erwartungswert des Maßes μ und sind X_1, \dots, X_n unabhängig und identisch verteilt mit Verteilung μ , dann gilt wegen der Linearität des Integrals

$$\int \bar{X}_n d\nu = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \int X_k d\nu = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n m(\mu) = m(\mu)$$

Damit ist der Mittelwert erwartungstreu. Dass er ebenfalls konsistent ist, ist die Aussage des schwachen Gesetzes der großen Zahlen (Theorem 9.48).

Betrachten wir nun den naheliegenden Schätzer

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x}_n)^2$$

für die Varianz

$$\sigma^2(\mu) = \int (x - m(\mu))^2 d\mu.$$

Es lässt sich leicht nachrechnen, dass

$$\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x}_n)^2 d\nu = \sum_{k=1}^n x_k^2 - n \bar{x}_n^2$$

gilt und damit erhalten wir

$$\int \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X}_n)^2 = \left(\sum_{k=1}^n \int X_k^2 d\nu - n \int \bar{X}_n^2 d\nu \right).$$

Wir verwenden wir noch die Beziehung $\mathbb{E}(X^2) = \text{Var}(X) + \mathbb{E}(X)^2$ und berechnen

$$\mathbb{E}(\bar{X}_n^2) = \text{Var}(\bar{X}_n) + \mathbb{E}(\bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n^2} \text{Var}\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) + m(\mu)^2 = \frac{1}{n} \sigma^2(\mu) + m(\mu)^2.$$

Dabei haben wir die Additivität der Varianz für unabhängige Zufallsgrößen verwendet. Insgesamt ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \int \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X}_n)^2 &= \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n \text{Var}(X_k) + \mathbb{E}(X_k)^2 - n \left(\frac{\sigma^2(\mu)}{n} + m(\mu)^2 \right) \right) \\ &= \frac{n-1}{n} \sigma^2(\mu). \end{aligned}$$

Damit erkennen wir, dass der oben angegebene Schätzer für die Varianz zwar asymptotisch Erwartungstreu aber nicht Erwartungstreu ist. Bei einer endlichen Stichprobe wird die Varianz systematisch zu klein geschätzt. Natürlich lässt sich hier leicht ein erwartungstreuer Schätzer angeben, die sogenannte empirische Varianz

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x}_n)^2.$$

Eine deutlich bessere Aussage über die Verlässlichkeit von Schätzungen ist mit dem folgenden Begriff möglich.

Definition 9.64. Sei (Ω, \mathcal{A}, M) ein statistisches Modell, $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ ein Merkmal und $0 < \gamma < 1$ eine Zahl. Ein Konfidenzintervall für F zum Konfidenzniveau γ ist ein Paar von Statistiken $(U_n), (O_n)$ so, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $\mu \in M$ gilt

$$\mu([U_n \leq F(\mu) \leq O_n]) \geq \gamma.$$

Bemerkung 9.65. Die Interpretation eines Konfidenzintervalls ist die folgende: für jedes der betrachteten W-Maße μ liegt der Wert $F(\mu)$ mit Wahrscheinlichkeit mindestens γ zwischen U_n und O_n . Werden also gemäß μ verteilte, zufällige Werte (x_1, \dots, x_n) generiert, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Intervall $(U_n(x_1, \dots, x_n), O_n(x_1, \dots, x_n))$ den tatsächlichen Wert $F(\mu)$ enthält immer mindestens γ .

Im Gegensatz zu Schätzern, gibt es bei Konfidenzintervallen eine Bedingung die (häufig schwierig) zu erfüllen ist. Die explizite Angabe von Konfidenzintervallen ist daher meist nur für Modelle mit relativ kleinem M (zum Beispiel Normalverteilungen mit unbekannten Parametern) möglich.

10 Koordinatentransformationen und Integration über Untermannigfaltigkeiten

10.1 Diffeomorphismen

Viele (physikalische) Systeme besitzen Symmetrien. In diesen Fällen ist es oft möglich die Behandlung des Problems substantiell zu vereinfachen indem man ein angepasstes Koordinatensystem verwendet. Man hat dann eine Koordinatentransformation $T : U \rightarrow V$ ($U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen) und betrachtet statt der ursprünglich gegebenen Funktion (physikalischen Größe) $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ die transformierte Funktion $f \circ T : U \rightarrow \mathbb{R}$, deren Gestalt (hoffentlich) einfacher ist. Mathematisch werden solche Koordinatentransformationen durch Diffeomorphismen beschrieben.

Definition 10.1. Seien U, V offene Teilmengen des \mathbb{R}^n und $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Eine bijektive Abbildung $\varphi : U \rightarrow V$ heißt

- (i) Homöomorphismus, falls φ und φ^{-1} stetig sind,
- (ii) Diffeomorphismus, falls φ und φ^{-1} stetig differenzierbar sind,
- (iii) \mathbf{C}^k -Diffeomorphismus falls φ und φ^{-1} \mathbf{C}^k -Abbildungen sind.

Bemerkung 10.2. (i) Anschaulich und stark vereinfacht sind Homöomorphismen Verformungen ohne Zerreißen und Diffeomorphismen Verformungen ohne Knicken. Die unterschiedlichen Typen von Diffeomorphismen deuten schon darauf hin, dass es dabei unterschiedliche Arten von „Knicken“ gibt.

- (ii) Der Begriff des Homöomorphismus ergibt auch für allgemeinere metrische (oder noch allgemeiner topologische) Räume als Teilmengen des \mathbb{R}^n Sinn. Für Diffeomorphismen müssen wir jedoch wissen was „differenzierbar“ heißen soll.
- (iii) Für $k > l$ ist jeder \mathbf{C}^k -Diffeomorphismus auch ein \mathbf{C}^l -Diffeomorphismus. Jeder Diffeomorphismus ist insbesondere ein Homöomorphismus. Diese Inklusionen sind echt. Die Leserin suche als Übungsaufgabe nach Beispielen für Abbildungen von $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die Homöomorphismen aber keine Diffeomorphismen, Diffeomorphismen aber keine \mathbf{C}^2 -Diffeomorphismen, etc. sind.
- (iv) Die Verkettung von Homöomorphismen ist ein Homöomorphismus, die Verkettung von (\mathbf{C}^k-) Diffeomorphismen ein (\mathbf{C}^k) -Diffeomorphismus.
- (v) Es gibt zwei verschiedene Interpretationen von Diffeomorphismen. Aktiv – wir bilden einen Teil des \mathbb{R}^n eins-zu-eins und in beide Richtungen differenzierbar auf einen anderen ab. Sowie passiv – wir stellen den selben Sachverhalt lediglich in einem neuen Koordinatensystem dar.

Als Beispiel, dass wir auch schon früher untersucht haben, betrachten wir hier die Transformation auf Polarkoordinaten:

Beispiel 10.3.

$$\begin{aligned} \varphi : (0, \infty) \times (0, 2\pi) &\rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus [0, \infty) \times \{0\} \\ (r, \theta) &\mapsto (r \sin(\theta), r \cos(\theta)). \end{aligned}$$

Es ist leicht zu sehen, dass die Abbildung glatt (also C^∞) ist. Die Bijektivität ist ebenfalls nicht übermäßig schwer nachzuprüfen (Nachrechnen). Die Darstellung für die Umkehrfunktion die wir daraus erhalten ist allerdings nicht besonders schön (Fallunterscheidungen für verschiedene Bereiche von θ). Dadurch ist es etwas umständlich, die Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion direkt nachzuprüfen, was aber glücklicherweise nicht notwendig ist (siehe unten).

Zu überprüfen ob eine Abbildung ein Diffeomorphismus ist, ist häufig aufwändig da die Umkehrabbildung bestimmt werden muss. Einfacher zu handhaben ist der folgende Begriff.

Definition 10.4. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Abbildung $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt lokaler C^k -Diffeomorphismus (analog lokaler Homöomorphismus) in x , wenn es eine offene Umgebung \tilde{U} und eine offene Umgebung \tilde{V} von $\varphi(x)$ gibt, so dass $\varphi : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ ein C^k -Diffeomorphismus ist. Sie heißt lokaler Diffeomorphismus, wenn sie in jedem Punkt ein lokaler Diffeomorphismus ist.

Bemerkung 10.5. Für einen Diffeomorphismus $\varphi : U \rightarrow V$ folgt aus der Kettenregel und $\varphi^{-1} \circ \varphi = \text{id}$

$$D\varphi^{-1}(\varphi(x))D\varphi(x) = \text{id}.$$

Damit ist die Ableitung $D\varphi(x)$ eines lokalen Diffeomorphismus in jedem Punkt x invertierbar. Andererseits ist die Aussage des Satzes über die Umkehrfunktion (Korollar 6.74) genau, dass eine stetig differenzierbare Abbildung $\varphi : U \rightarrow V$ mit invertierbarem $D\varphi(x)$ ein lokaler Diffeomorphismus in x ist. Nehmen wir noch Korollar 6.67 dazu, folgt, dass die lokale Umkehrfunktion genauso oft stetig differenzierbar ist wie die ursprüngliche Funktion φ .

Eine Abbildung φ ist also genau dann ein lokaler C^k -Diffeomorphismus, wenn φ mindestens k mal stetig differenzierbar und die Ableitung (Jakobi-Matrix) $D\varphi$ überall invertierbar ist. Ist die Abbildung zusätzlich bijektiv, dann muss die eindeutige Umkehrfunktion stets mit den k mal stetig differenzierbaren lokalen Inversen übereinstimmen und φ ist sogar ein C^k -Diffeomorphismus.

Wir haben bereits in Beispiel 6.75 gesehen, dass es in ≥ 2 Dimensionen lokale Diffeomorphismen gibt, die keine Diffeomorphismen sind.

Satz 10.6. *Jeder lokale Homöomorphismus (und damit jeder lokale Diffeomorphismus) ist eine offene Abbildung, das heißt die Bilder offener Mengen sind offen.*

Beweis. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein lokaler Homöomorphismus. Dann existieren zu jedem $x \in U$ offene Umgebungen \tilde{U}_x von x und \tilde{V}_x von $\varphi(x)$ so, dass $\varphi : \tilde{U}_x \rightarrow \tilde{V}_x$ ein Homöomorphismus ist. Sei nun $O \subset U$ offen und $\psi : \tilde{V}_x \rightarrow \tilde{U}_x$ die lokale Inverse zu φ . Da $O \cap \tilde{U}_x$ offen ist und ψ stetig, ist auch $\psi^{-1}(O \cap \tilde{U}_x) = \varphi(O \cap \tilde{U}_x)$ offen. Damit ist auch

$$\varphi(O) = \varphi\left(\bigcup_{x \in U} O \cap \tilde{U}_x\right) = \bigcup_{x \in U} \varphi(O \cap \tilde{U}_x)$$

eine offene Menge. □

Bemerkung 10.7. Damit ergibt sich auch das folgende Kriterium: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine injektive \mathbf{C}^k -Abbildung und $D\varphi$ in jedem Punkt von U invertierbar, dann ist $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ ein \mathbf{C}^k -Diffeomorphismus.

Den folgenden Begriff hätten wir bereits vor langer Zeit einführen können, haben es bisher jedoch umgangen. Wir werden ihn jedoch im nächsten Abschnitt benötigen.

Definition 10.8. Seien X, Y metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt gleichmäßig stetig, wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x \in X$ gilt $f(B_\delta(x)) \subset B_\epsilon(f(x))$.

Bemerkung 10.9. Die Definition ist der der Stetigkeit sehr ähnlich. Der Unterschied liegt darin, dass bei einer stetigen Abbildung δ von der Stelle abhängen darf, an der wir die Stetigkeit untersuchen. Bei gleichmäßiger Stetigkeit muss ein δ für alle $x \in X$ gefunden werden. Falls f Lipschitzstetig ist, also für ein $L > 0$ und für alle $x, y \in X$ gilt $d_Y(f(x), f(y)) \leq L d_X(x, y)$, dann gilt insbesondere für jedes $x \in X$

$$f(B_{\frac{\epsilon}{L}}(x)) \subset B_\epsilon(f(x))$$

und damit ist die Abbildung gleichmäßig stetig. Auch ist offensichtlich jede gleichmäßig stetige Abbildung stetig.

Es gibt aber Abbildungen die gleichmäßig stetig sind ohne Lipschitzstetig zu sein und stetige Abbildungen, die nicht gleichmäßig stetig sind.

Linearkombinationen und Verkettungen gleichmäßig stetiger Funktionen sind wieder gleichmäßig stetig. Die Beweise dieser Aussagen verlaufen analog zu denen der entsprechenden Aussagen für stetige Funktionen. Zu beachten ist, dass Produkte gleichmäßig stetiger Funktionen nicht gleichmäßig stetig sein müssen.

Satz 10.10. Sei $f : X \rightarrow Y$ stetig. Falls X kompakt ist, dann ist f gleichmäßig stetig.

Beweis. Wir zeigen, falls f nicht gleichmäßig stetig ist, dann ist es auch nicht stetig. Sei also f nicht gleichmäßig stetig. Dann existiert ein $\epsilon > 0$ so, dass wir für jedes $\delta > 0$ ein $x \in X$ finden mit $f(B_\delta(x)) \not\subset B_\epsilon(f(x))$. Insbesondere heißt das, es gibt zu jedem $n \in \mathbb{N}$ einen Punkt x_n und einen Punkt y_n so, dass $d_X(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ aber $d_Y(f(x_n), f(y_n)) \geq \epsilon$ gilt. Da X kompakt ist, können wir nun eine Teilfolge (x_{n_k}) wählen, die gegen x konvergiert. Dann konvergiert auch (y_{n_k}) gegen x . Es können nun nicht sowohl $(f(x_{n_k}))$ als auch $(f(y_{n_k}))$ gegen $f(x)$ konvergieren, da ja $d_Y(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \geq \epsilon$ gilt, die Funktion f kann also an der Stelle x nicht stetig sein. □

10.2 Der Transformationssatz

Beispiel 10.11. Angenommen, unsere Aufgabe ist, das Integral

$$\int f(x^2 + y^2 + z^2) d\lambda^3(x, y, z)$$

zu bestimmen, für eine hinreichend gutartige Funktion f . Wir wollen dazu die offensichtliche Rotationssymmetrie des Problems ausnutzen und definieren daher

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\mapsto x^2 + y^2 + z^2. \end{aligned}$$

Das zu bestimmende Integral ist dann

$$\int f \circ g(x, y, z) d\lambda^3(x, y, z) = \int f d(g_*\lambda^3),$$

die Frage ist nur, wie können wir ein solches Integral bezüglich des Bildmaßes $g_*\lambda^3$ ausrechnen? Konkreter suchen wir nach einer Dichtefunktion $\rho : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ so, dass wir schreiben können

$$\int f d(g_*\lambda^3) = \int f \rho d\lambda.$$

In diesem Abschnitt wollen wir lernen, wie wir eine solche Dichtefunktion in diesem und vielen weiteren Fällen bestimmen können.

Bemerkung 10.12. Wir wollen untersuchen, wie sich das Lebesgue-Maß unter bestimmten Abbildungen verhält. Um Fragen nach der Messbarkeit zunächst zu umgehen, betrachten wir kompakte Mengen, da diese durch stetige Abbildungen immer wieder auf kompakte, und damit sicher messbare, Mengen abgebildet werden. Ein weiterer Vorteil ist, dass diese Mengen stets endliches Maß haben.

Definition 10.13. Seien $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$ und $y \in \mathbb{R}^n$. Dann nennen wir die folgende Menge einen Spat

$$\{y + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n \mid \alpha_i \in [0, 1] \text{ für } i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Für unsere Zwecke nennen wir y den Ausgangspunkt des Spates. Ein Quader ist ein spezieller Spat, bei dem die Vektoren x_1, \dots, x_n ein Orthogonalsystem bilden.

Bemerkung 10.14. Eine affine Abbildung ist eine Verkettung einer Verschiebung und einer linearen Abbildung. Die Verkettung von affinen Abbildungen ist wieder eine affine Abbildung (Nachrechnen!). Durch affine Abbildungen wird ein Spat stets auf einen anderen abgebildet (Warum?). Insbesondere ist das Bild eines Quaders unter einer solchen Abbildung ein Spat. Tatsächlich lässt sich jeder Spat als Bild des Einheitswürfels unter einer passend gewählten affinen Abbildung erhalten (Wie?).

Wir wollen nun untersuchen wie sich das Volumen von Spaten bestimmen lässt und untersuchen dazu zunächst spezielle Fälle. Auf Grund der Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes können wir den Ausgangspunkt unserer Spate in den Koordinatenursprung legen.

Bemerkung 10.15. Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader und $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine der linearen Abbildungen

- (i) Vertauschen zweier Koordinaten, also für $1 \leq k < l \leq n$

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{k-1}, x_l, x_{k+1}, \dots, x_{l-1}, x_k, x_{l+1}, \dots, x_n),$$

- (ii) Skalieren der ersten Koordinate, also für $\lambda \in \mathbb{R}$

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (\lambda x_1, x_2, \dots, x_n),$$

- (iii) Addition der zweiten zur ersten Koordinate

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1 + x_2, x_2, \dots, x_n).$$

Dann gilt $\lambda^n(A(Q)) = |\det A| \lambda^n(Q)$ (wir unterscheiden hier wieder nicht zwischen der linearen Abbildung und der diese Abbildung induzierenden Matrix). Diese Aussage ist für die ersten beiden Fälle trivial und folgt für den dritten Fall zum Beispiel aus dem Prinzip des Cavalieri (Korollar 8.63) (Übung).

Satz 10.16. Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge und $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung. Dann gilt

$$\lambda^n(A(K)) = |\det A| \lambda^n(K).$$

Beweis. Falls A nicht invertierbar ist verschwindet die rechte Seite der Gleichung. Andererseits liegt $A(K)$ dann in einer höchstens $n - 1$ -dimensionalen Hyperebene und die linke Seite der Gleichung verschwindet ebenfalls (auch diese Aussage lässt sich leicht mit dem Prinzip des Cavalieri beweisen).

Wir nehmen nun zunächst an, dass A eine der Abbildungen aus der vorhergehenden Bemerkung ist. Sei nun $\epsilon > 0$. Dann existiert (siehe Konstruktion des Lebesgue-Maßes) eine Folge von Quadern (Q_k) so, dass

$$K \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Q_k \text{ und } \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda^n(Q_k) < \lambda^n(K) + \epsilon.$$

Dann gilt aber auch

$$A(K) \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A(Q_k)$$

und

$$\lambda^n(A(K)) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda^n(A(Q_k)) = |\det(A)| \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda^n(Q_k) \leq |\det(A)| (\lambda^n(K) + \epsilon).$$

Da die erhaltene Ungleichung für jedes positive ϵ gilt, muss $\lambda^n(A(K)) \leq |\det A| \lambda^n(K)$ sein.

Sei nun A beliebig invertierbar. Dann ist A die Verkettung von Abbildungen A_1, \dots, A_l , wobei A_i jeweils eine der Abbildungen aus der Bemerkung ist (jede invertierbare Matrix lässt sich durch Zeilenoperationen in die Einheitsmatrix überführen, siehe Satz 3.36 und Korollar 3.39). Dann folgt durch wiederholte Anwendung des eben gezeigten $\lambda^n(A(K)) \leq |\det A| \lambda^n(K)$. Da diese Ungleichung nun aber für alle invertierbaren A gilt, können wir sie auch auf die Umkehrabbildung A^{-1} anwenden und erhalten

$$\lambda^n(A^{-1}A(K)) \leq |\det(A^{-1})| \lambda^n(A(K)) \leq |\det(A^{-1})| |\det(A)| \lambda^n(K) = \lambda^n(K).$$

Das ist aber nur möglich, wenn die verwendeten Ungleichungen tatsächlich Gleichungen sind. \square

Wir erhalten als Spezialfall insbesondere (Wie genau?):

Korollar 10.17. *Das Volumen des von $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$ aufgespannten Spates ist*

$$\det(x_1, \dots, x_n).$$

Es seien nun $U, V \subset \mathbb{R}^n$ fest und $\varphi : U \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus. Wir setzen $\rho = |\det D\varphi|$.

Für den Rest dieses Abschnitts seien nun $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi : U \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus. Wir setzen $\rho = |\det D\varphi|$.

Lemma 10.18. *Sei $Q \subset U$ ein Quader. Dann gilt*

$$\lambda^n(\varphi(Q)) \leq \int_Q \rho d\lambda^n.$$

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Wir teilen nun alle Seiten des Quaders in l gleichlange Stücke. Damit teilen wir den Quader in l^n fast disjunkte kleine Quader Q_1, \dots, Q_{l^n} , deren Mittelpunkte wir mit x_1, \dots, x_{l^n} bezeichnen. Da der Quader kompakt ist, sind die stetigen Funktionen $D\varphi$ und ρ auf Q gleichmäßig stetig (Satz 10.10). Es existiert also ein $\delta > 0$ so, dass für alle $x \in Q$ gilt

$$D\varphi(B_\delta(x)) \subset B_\epsilon(D\varphi(x)) \text{ und } \rho(B_\delta(x)) \subset B_\epsilon(\rho(x)).$$

Bezeichnen wir nun mit d Länge der Diagonale des Quaders und wählen l so, dass $\frac{d}{l} < \delta$ ist, dann ist jeder Würfel Q_i in $B_\delta(x_i)$ enthalten.

Für ein $i \in \{1, \dots, l^n\}$ wollen wir das Maß des tatsächlichen Bildes $\varphi(Q_i)$ mit dem des Bildes der linearisierten Abbildung $\varphi_i(Q_i)$ vergleichen, wobei

$$\varphi_i(x) = \varphi(x_i) + D\varphi(x_i)(x - x_i)$$

gilt. Sei nun \tilde{Q}_i derjenige Würfel, der den selben Mittelpunkt wie Q_i hat und dessen Seiten mit $\kappa > 1$ skaliert wurden. Wir fragen uns nun, wie groß wir κ wählen müssen, damit $\varphi(Q_i) \subset \varphi_i(\tilde{Q}_i)$ gilt. Wenden wir den Allgemeinen Mittelwertsatz auf die Funktion $\varphi - \varphi_i$ und die Punkte $x \in Q_i$ und x_i an, dann erhalten wir

$$\|\varphi(x) - \varphi_i(x)\| \leq \max_{y \in Q_i} \|\mathrm{D}\varphi(y) - \mathrm{D}\varphi(x_i)\| \|x - x_i\| \leq \epsilon \frac{d}{2l}.$$

Außerdem ist die stetige Funktion $\|(\mathrm{D}\varphi)^{-1}\|$ auf der kompakten Menge Q durch ein $L > 0$ beschränkt und daher gilt

$$\|\mathrm{D}\varphi(x_i)^{-1}x\| \leq \|\mathrm{D}\varphi(x_i)^{-1}\| \|x\| \leq L \|x\|$$

Da alle Überlegungen hier translationsinvariant sind, können wir für den Moment annehmen, dass $x_i = 0$ ist. Dann ist φ_i eine lineare Abbildung. Es gilt dann

$$\begin{aligned} \varphi(Q_i) &\subset \varphi_i(Q_i) + B_{\frac{\epsilon d}{2l}}(0) = \mathrm{D}\varphi(x_i)(Q_i) + \mathrm{D}\varphi(x_i)\mathrm{D}\varphi(x_i)^{-1}(B_{\frac{\epsilon d}{2l}}(0)) \\ &= \mathrm{D}\varphi(x_i) \left(Q_i + \mathrm{D}\varphi(x_i)^{-1}(B_{\frac{\epsilon d}{2l}}(0)) \right) \leq \varphi_i \left(Q_i + B_{\frac{L\epsilon d}{2l}}(0) \right). \end{aligned}$$

Wir sehen also, dass wir die gewünschte Inklusion erhalten, wenn wir alle Seiten des Würfels Q_i um $\frac{L\epsilon d}{l}$ verlängern. Ist s die kürzeste Seite von Q , dann wählen wir

$$\kappa = \frac{\frac{s}{l} + \frac{L\epsilon d}{l}}{\frac{s}{l}} = \frac{s + L\epsilon d}{s}.$$

Insbesondere können wir den Faktor unabhängig von i wählen.

Nun können wir das Volumen von $\varphi(Q)$ abschätzen

$$\begin{aligned} \lambda^n(\varphi(Q)) &\leq \sum_{i=1}^{l^n} \lambda^n(\varphi(Q_i)) \leq \sum_{i=1}^{l^n} \lambda^n(\varphi_i(\tilde{Q}_i)) = \sum_{i=1}^{l^n} \rho(x_i) \lambda^n(\tilde{Q}_i) \\ &= \kappa^n \sum_{i=1}^{l^n} \rho(x_i) \lambda^n(Q_i) = \kappa^n \int \sum_{i=1}^{l^n} \rho(x_i) \mathbb{1}_{Q_i} d\lambda^n. \end{aligned}$$

Auf Grund unserer Wahl von l gilt für jedes $x \in Q_i$ auch $|\rho(x_i) - \rho(x)| \leq \epsilon$ und wir erhalten

$$\begin{aligned} \left| \int \sum_{i=1}^{l^n} \rho(x_i) \mathbb{1}_{Q_i} d\lambda^n - \int_Q \rho d\lambda^n \right| &= \left| \sum_{i=1}^{l^n} \int (\rho(x_i) - \rho(x)) \mathbb{1}_{Q_i} d\lambda^n \right| \leq \sum_{i=1}^{l^n} \int |\rho(x_i) - \rho| \mathbb{1}_{Q_i} d\lambda^n \\ &\leq \sum_{i=1}^{l^n} \epsilon \lambda^n(Q_i) = \epsilon \lambda^n(Q). \end{aligned}$$

Dabei haben wir noch benutzt, dass die Q_i fast disjunkt sind. Zusammen erhalten wir

$$\lambda^n(\varphi(Q)) \leq \left(\frac{s + L\epsilon d}{s} \right)^n \left(\int_Q \rho d\lambda^n + \epsilon \lambda^n(Q) \right).$$

Im Grenzwert für $\epsilon \rightarrow 0$ erhalten wir die gesuchte Ungleichung. \square

Lemma 10.19. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ -endlicher Maßraum, $K, a \in (0, \infty)$ Konstanten und $f : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ eine Funktion mit $|f| \leq K$. Sei $(A_k) \subset \mathcal{A}$ eine abzählbare Familie. Setze

$$A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k.$$

Falls A endliches Maß hat und

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_k) \leq \mu(A) + a$$

erfüllt ist, dann gilt auch

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{A_k} f d\mu \leq \int_A f d\mu + Ka.$$

Beweis. Definiere für $n \in \tilde{N} := \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ die Mengen

$$B_n = \{\omega \in \Omega \mid \omega \text{ liegt in genau } n \text{ der } (A_k)\}.$$

Der Leser überprüfe zur Übung, dass diese Mengen in \mathcal{A} liegen. Zunächst zeigen wir, dass B_∞ eine Nullmenge ist. Falls $\mu(A) = 0$ gilt, ist wegen $B_\infty \subset A$ nichts zu zeigen. Es gelte also $\mu(A) > 0$. Dann ist $(A, \mathcal{A}|_A, \mu_A := \frac{\mu(\cdot)}{\mu(A)})$ ein W-Raum. Es gilt

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \mu_A(A_k) = \frac{1}{\mu(A)} \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_k) < \infty.$$

Damit können wir das Lemma von Borel-Cantelli anwenden und erhalten

$$\mu_A(B_\infty) = \mu_A(\limsup_{k \rightarrow \infty} A_k) = 0$$

und damit natürlich auch $\mu(B_\infty) = 0$.

Die Mengen $(B_n)_{n \in \tilde{N}}$ bilden eine Zerlegung von A und es gilt nun fast überall (außerhalb von B_∞)

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{A_k} = \sum_{l \in \mathbb{N}} l \mathbb{1}_{B_l}.$$

Für eine beliebige nichtnegative Funktion g gilt jetzt nach dem Satz über monotone Konvergenz

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{A_k} g d\mu = \int \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{A_k} g d\mu = \int \sum_{l \in \mathbb{N}} l \mathbb{1}_{B_l} g d\mu = \sum_{l \in \mathbb{N}} l \int \mathbb{1}_{B_l} g d\mu.$$

Wir können die soeben erhaltene Beziehung zunächst auf $g = \mathbb{1}$ anwenden und erhalten

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_k) = \sum_{l \in \mathbb{N}} l \mu(B_l) \leq \mu(A) + a = \sum_{l \in \mathbb{N}} \mu(B_l) + a.$$

Andererseits können wir nun $g = f$ einsetzen und erhalten

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{A_k} f d\mu &= \sum_{l \in \mathbb{N}} l \int \mathbb{1}_{B_l} f d\mu = \sum_{l \in \mathbb{N}} \int \mathbb{1}_{B_l} f d\mu + \sum_{l \in \mathbb{N}} (l-1) \int \mathbb{1}_{B_l} f d\mu \\ &\leq \int_A f d\mu + \sum_{l \in \mathbb{N}} (l-1) K\mu(B_l) = \int_A f d\mu + Ka. \end{aligned} \quad \square$$

Lemma 10.20. *Die Abbildung φ bildet Lebesgue-messbare Mengen auf ebensolche ab. Für jede solche Menge A gilt*

$$\lambda^n(\varphi(A)) \leq \int_A \rho d\lambda^n.$$

Beweisskizze. Wir zeigen die Messbarkeit hier nicht sondern beschränken uns auf die Ungleichung.

Wir wollen zunächst dafür sorgen, dass die Dichtefunktion ρ beschränkt ist um das obige Lemma anwenden zu können. Dazu definieren wir für $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} U_k &= \left\{ x \in U \mid \text{dist}(x, \partial U) > \frac{1}{k} \right\} \cap B_k(0) \\ K_k &= \left\{ x \in U \mid \text{dist}(x, \partial U) \geq \frac{1}{k} \right\} \cap \overline{B_k(0)}. \end{aligned}$$

Die Mengen U_k ist offen und K_k abgeschlossen (als Teilmengen von \mathbb{R}^n) (Übung). Für jedes $x \in U$ existiert ein $\epsilon > 0$ so, dass $B_\epsilon(x) \subset U$. Wählen wir nun k so, dass $\|x\| < k$ und $\frac{1}{k} < \epsilon$, dann liegt x in U_k . Damit haben wir gezeigt, dass

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} U_k = U$$

gilt. Die Mengen K_k sind kompakt und enthalten U_k .

Wir betrachten nun zunächst für ein festes k die Menge $A \cap U_k$, welche wegen der Beschränktheit von U_k sicher endliches Maß hat. Sei $\epsilon > 0$ und sei (Q_l) eine abzählbare Familie von Quadern so, dass

$$A \cap U_k \subset \bigcup_{l \in \mathbb{N}} Q_l \text{ und } \sum_{l \in \mathbb{N}} \lambda^n(Q_l) < \lambda^n(A \cap U_k) + \epsilon.$$

Durch wiederholtes Halbieren aller Seitenlängen, können wir jedes Q_l in kleinere Quader aufteilen, ohne die Summe der Maße zu verändern. Wir können also ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die Quader Q_l alle Diagonalen $< \frac{1}{2k}$ haben. Damit gilt dann aber, dass jeder Quader der einen Punkt außerhalb von U_{2k} enthält, keinen Punkt innerhalb von U_k enthalten kann. Solche Quader sind also zum Überdecken der Menge $A \cap U_k$ unnötig und wir können sie weglassen, wobei die Summe der Maße natürlich lediglich

kleiner werden kann. Wir können also ebenfalls ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass für jede $l \in \mathbb{N}$ gilt $Q_l \subset U_{2k}$.

Da ρ stetig ist und K_{2k} kompakt, ist ρ auf dieser Menge (und damit erst recht auf U_{2k}), durch $\gamma > 0$ beschränkt. Damit können wir nun die bereits bekannte Ungleichung Lemma 10.18 für Quader sowie das vorhergehende Lemma auf die Familie (Q_l) anwenden und erhalten

$$\lambda^n(\varphi(A \cap U_k)) \leq \sum_{l \in \mathbb{N}} \lambda^n(\varphi(Q_l)) \leq \sum_{l \in \mathbb{N}} \int_{Q_l} \rho d\lambda^n \leq \int_{A \cap U_k} \rho d\lambda^n + \gamma \epsilon.$$

Da die Ungleichung für beliebiges ϵ gilt, folgt $\lambda^n(\varphi(A \cap U_k)) \leq \int_{A \cap U_k} \rho d\lambda^n$.

Da die Mengen $(A \cap U_k)$ eine monoton wachsende Folge bilden, die die Menge A ausschöpft, bildet $(\varphi(A \cap U_k))$ eine monoton wachsende Folge die $\varphi(A)$ ausschöpft. Damit folgt mit der Stetigkeit des Maßes und dem Satz von Beppo-Levi

$$\mu(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda^n(\varphi(A \cap U_k)) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int \rho \mathbb{1}_{A \cap U_k} d\lambda^n = \int \rho \mathbb{1}_A d\lambda^n. \quad \square$$

Lemma 10.21. Für eine messbare Funktion $f : U \rightarrow [0, \infty)$ gilt

$$\int_V f \circ \varphi^{-1} d\lambda^n = \int_U f d(\varphi_*^{-1} \lambda^n) \leq \int_U f \rho d\lambda^n$$

Beweis. Wir haben nun auf U mit der Lebesgue- σ -Algebra zwei Maße:

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \lambda^n(\varphi(A)) = (\varphi_*^{-1} \lambda^n)(A) \text{ und} \\ \nu(A) &= \int_A \rho d\lambda^n. \end{aligned}$$

Außerdem haben wir bereits gezeigt, dass immer $\mu(A) \leq \nu(A)$ gilt. Für eine nichtnegative einfache Funktion, also $f = \sum_{k=1}^l \alpha_k \mathbb{1}_{A_k}$ mit $\{\alpha_1, \dots, \alpha_l\} \subset [0, \infty)$, gilt dann

$$\int f d\mu = \sum_{k=1}^l \alpha_k \mu(A_k) \leq \sum_{k=1}^l \alpha_k \nu(A_k) = \int f d\nu = \int f \rho d\lambda^n,$$

was der gesuchten Ungleichung für einfache Funktionen entspricht.

Sei nun f eine beliebige nichtnegative und messbare Funktion. Wir wählen eine monoton wachsende Folge nichtnegativer einfacher Funktionen (f_n) die punktweise fast überall bezüglich ν gegen f konvergiert. Dabei sei die Ausnahmemenge auf der keine Konvergenz vorliegt A . Dann ist

$$\mu(A) \leq \nu(A) = 0,$$

die Ausnahmemenge ist also auch eine μ -Nullmenge. Damit konvergiert die Folge (f_n) aber auch fast überall bezüglich μ gegen 0 und wir erhalten mit dem Satz von der monotonen Konvergenz

$$\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\nu = \int f d\nu = \int f \rho d\lambda^n. \quad \square$$

Theorem 10.22 (Transformationssatz). *Sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine messbare Funktion. Dann ist $f \circ \varphi^{-1}$ integrierbar (über V) genau dann, wenn $f\rho$ integrierbar ist (über U). In diesem Fall gilt*

$$\int_V f \circ \varphi^{-1} d\lambda^n = \int_U f d(\varphi_*^{-1} \lambda^n) = \int_U f \rho d\lambda^n. \quad (10.1)$$

Beweis. Sei zunächst f nichtnegativ. Da auch die Umkehrabbildung φ^{-1} ein Diffeomorphismus ist, gilt die Aussage des vorhergehenden Lemmas auch für diese. Wir setzen dazu $\kappa = |\det D\varphi^{-1}|$ und erhalten

$$\begin{aligned} \int_V f \circ \varphi^{-1} d\lambda^n &\leq \int_U f \rho d\lambda^n = \int_U ((f \circ \varphi^{-1})(\rho \circ \varphi^{-1})) \circ \varphi d\lambda^n \\ &\leq \int_V (f \circ \varphi^{-1})(\rho \circ \varphi^{-1}) \kappa d\lambda^n \end{aligned}$$

Für jedes $y \in V$ gilt außerdem mit der Kettenregel

$$(\rho \circ \varphi^{-1})(y) \kappa(y) = |\det(D\varphi(\varphi^{-1}(y)))| |\det(D\varphi^{-1})| = |\det(D(\varphi \circ \varphi^{-1}))| = 1.$$

Damit müssen alle Ungleichungen in der oben verwendeten Ungleichungskette tatsächlich Gleichungen gewesen sein. Insbesondere gilt also Gleichung (10.1) für nichtnegative Funktionen und es folgt die Integrierbarkeitsaussage.

Auch gilt Gleichung (10.1) für charakteristische Funktionen und, da beide Seiten der Gleichung linear in f sind, ebenfalls für einfache Funktionen. Sei nun f integrierbar und (f_n) eine approximierende Folge für f bezüglich des Maßes $\varphi_*^{-1} \lambda^n$. Dann konvergiert

$$\begin{aligned} \left| \int_U f \rho d\lambda^n - \int_U f_n \rho d\lambda^n \right| &\leq \int_U |f - f_n| \rho d\lambda^n = \int_V |f - f_n| \circ \varphi^{-1} d\lambda^n \\ &= \int_V |f - f_n| d(\varphi_*^{-1} \lambda^n) \end{aligned}$$

gegen 0. Damit gilt mit der Definition des Integrals auch

$$\begin{aligned} \int_U f \rho d\lambda^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_U f_n \rho d\lambda^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_U f_n d(\varphi_*^{-1} \lambda^n) = \int_U f d(\varphi_*^{-1} \lambda^n) \\ &= \int_V f \circ \varphi^{-1} d\lambda^n. \end{aligned} \quad \square$$

Bemerkung 10.23. Sei nun $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ eine messbare Funktion. Wenden wir das eben bewiesene Resultat auf $f \circ \varphi$ an, dann erhalten wir die Transformationsformel in der äquivalenten Form

$$\int_V f(x) d\lambda^n(x) = \int_U f(\varphi(y)) |\det(D\varphi(y))| d\lambda^n(y),$$

wobei eines der Integrale genau dann existiert, wenn das andere existiert.

Beispiel 10.24. Wir wollen die Fläche des Einheitskreises berechnen also

$$\lambda^2(K_1(0)) = \int \mathbb{1}_{K_1(0)} d\lambda^2.$$

Auf Grund der offensichtlichen Radialsymmetrie des Problems bieten sich Polarkoordinaten an. Wir wählen also

$$\begin{aligned} V &= \mathbb{R}^2 \setminus [0, \infty) \times \{0\} \\ U &= (0, \infty) \times (0, 2\pi) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \varphi : U &\rightarrow V \\ (r, \alpha) &\mapsto (r \cos(\alpha), r \sin(\alpha)). \end{aligned}$$

Zunächst ist es unerheblich ob wir über ganz \mathbb{R}^2 oder über V integrieren, da die entfernte Menge eine λ^2 -Nullmenge ist (Warum?).

Die Jakobi-Determinante $\det D\varphi(r, \alpha) = r > 0$ lässt sich leicht berechnen. Die charakteristische Funktion $\mathbb{1}_{K_1(0)}$ testet, ob ein Punkt im Einheitskreis liegt. Man überzeugt sich also leicht, dass gilt $\mathbb{1}_{K_1(0)} \circ \varphi(r, \alpha) = \mathbb{1}_{[0,1]}(r)$ und wir erhalten mit der Transformationsformel

$$\begin{aligned} \lambda^2(K_1(0)) &= \int_V \mathbb{1}_{K_1(0)}(x, y) d\lambda^2(x, y) = \int_U r \mathbb{1}_{[0,1]}(r) d\lambda^2(r, \alpha) \\ &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} r \mathbb{1}_{[0,1]}(r) d\alpha dr = 2\pi \int_0^1 r dr = \pi. \end{aligned}$$

Dabei haben wir noch den Satz von Tonelli verwendet.

Beispiel 10.25. Wir können nun auch das Beispiel vom Anfang des Abschnitts wieder aufgreifen. Sei $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ eine messbare Funktion. Der Diffeomorphismus ist hier die Transformation auf Kugelkoordinaten. Dafür setzen wir

$$U = (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi) \text{ und } V = \mathbb{R}^3 \setminus [0, \infty) \times \{0\} \times \mathbb{R}$$

und

$$\begin{aligned} \varphi : U &\rightarrow V \\ (r, \alpha, \beta) &\mapsto (r \sin(\beta) \cos(\alpha), r \sin(\beta) \sin(\alpha), r \cos(\beta)), \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^3 &\rightarrow [0, \infty) \\ (x, y, z) &\mapsto x^2 + y^2 + z^2. \end{aligned}$$

Wir stellen fest, dass $\mathbb{R}^3 \setminus V$ eine λ^3 -Nullmenge ist und daher für die Integration unerheblich. Elementare Rechnungen zeigen

$$g(\varphi(r, \alpha, \beta)) = r^2 \text{ und} \\ \det(D\varphi(r, \alpha, \beta)) = r^2 \sin(\beta) > 0.$$

Wenden wir nun die Transformationsformel an, dann erhalten wir für nichtnegatives oder integrierbares f

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} f(x^2 + y^2 + z^2) d\lambda^3(x, y, z) &= \int_V f(g(x, y, z)) d\lambda^3(x, y, z) \\ &= \int_U f(r^2) r^2 \sin(\beta) d\lambda^3(r, \alpha, \beta). \end{aligned}$$

Ist nun f nichtnegativ, dann erlaubt uns der Satz von Tonelli zu schreiben

$$\int_U f(r^2) r^2 \sin(\beta) d\lambda^3(r, \alpha, \beta) = \int_0^\infty f(r^2) r^2 dr \int_0^\pi \sin(\beta) d\beta \int_0^{2\pi} d\alpha = 4\pi \int_0^\infty f(r^2) r^2 dr.$$

Daraus folgt insbesondere, dass $f \circ g$ über \mathbb{R}^3 integrierbar ist genau dann, wenn $r \mapsto f(r^2) r^2$ über $[0, \infty)$ integrierbar ist. In diesem Fall folgt dann ebenfalls die obige Formel mit dem Satz von Fubini.

Beispiel 10.26. Wir wollen die Normierung der Gauß-Verteilung berechnen, also $K := \int e^{-x^2} dx$. Wir schreiben dazu

$$\begin{aligned} K^2 &= \int e^{-x^2} dx \int e^{-y^2} dy = \iint e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \int e^{-(x^2+y^2)} d\lambda^2(x, y) = \int f(x, y) d\lambda^2(x, y) \end{aligned}$$

für $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$. Da die Integranden nichtnegativ sind, konnten wir oben den Satz von Tonelli verwenden.

Wir transformieren das letzte Integral nun auf Polarkoordinaten. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_V f(x, y) d\lambda^2(x, y) &= \int_U f \circ \varphi(r, \alpha) |\det D\varphi(r, \alpha)| d\lambda^2(r, \alpha) = \int e^{-r^2} r d\lambda^2(r, \alpha) \\ &= \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\infty r e^{-r^2} dr = 2\pi \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-n^2} + \frac{1}{2} \right) = \pi. \end{aligned}$$

Dabei haben wir nochmals den Satz von Tonelli verwendet. Da $([0, \infty) \times \{0\})$ eine Nullmenge bezüglich λ^2 ist, gilt $K^2 = \pi$.

10.3 Eingebettete Mannigfaltigkeiten

Wir wollen uns im Folgenden mit Mannigfaltigkeiten beschäftigen. Die grundlegende Idee einer Mannigfaltigkeit ist, dass es sich um einen Raum handelt, der lokal – das heißt in der Umgebung jedes Punktes – wie ein Teil des \mathbb{R}^n aussieht. Je nach dem, was mit „wie ein Teil aussehen“ gemeint ist, lassen sich so unterschiedliche Typen von Mannigfaltigkeiten definieren. Das klassische Beispiel ist natürlich die Erdoberfläche, die, da wir lediglich einen kleinen Ausschnitt sehen, wie eine Ebene erscheint. Leider geht die Behandlung von Mannigfaltigkeiten unvermeidlich mit erheblichem technischem Aufwand einher. Wir werden zunächst lediglich eingebettete Mannigfaltigkeiten untersuchen, also solche, die Teilmengen eines umgebenden \mathbb{R}^n sind. Dadurch werden die Technikalitäten etwas reduziert, andererseits müssen wir uns dadurch mit gewissen „Artefakten“ herumschlagen, die mit der eigentlichen Mannigfaltigkeit gar nichts zu tun haben, sondern lediglich durch den umgebenden Raum entstehen.

Definition 10.27. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge und $x \in M$. Falls es für x eine offene Umgebung U und einen \mathbf{C}^∞ -Diffeomorphismus $\varphi : U \rightarrow V$ gibt, so dass $\varphi(M \cap U) \subset \mathbb{R}^k \times \{0\} \cap V$ gilt, dann nennen wir M eine lokale eingebettete Mannigfaltigkeit der Dimension k in x .

Die Menge M heißt eine eingebettete Mannigfaltigkeit der Dimension k oder k -Mannigfaltigkeit, wenn M in jedem Punkt eine lokale eingebettete Mannigfaltigkeit der Dimension k ist. Wir werden meist auf „eingebettete“ verzichten, da wir ohnehin nur solche Mannigfaltigkeiten betrachten.

Beispiel 10.28. (i) Das einfachste Beispiel einer Mannigfaltigkeit ist natürlich ein Untervektorraum $V \subset \mathbb{R}^n$. In diesem Fall können wir eine Basis v_1, \dots, v_k von V wählen, diese zu einer Basis $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n$ von \mathbb{R}^n vervollständigen. Ist e_1, \dots, e_n die Standardbasis von \mathbb{R}^n , dann ist durch $Av_i = e_i$ eine lineare invertierbare Abbildung gegeben, welche natürlich insbesondere ein \mathbf{C}^∞ -Diffeomorphismus ist. Außerdem gilt (Warum?)

$$AV = \mathbb{R}^k \times \{0\}$$

(ii) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Dann ist der Graph von f , also

$$M = \{(x, f(x)) \mid x \in U\}$$

eine eingebettete Mannigfaltigkeit. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : U \times \mathbb{R} &\rightarrow U \times \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto (x, y - f(x)) \end{aligned}$$

ist offensichtlich eine glatte Abbildung, ebenso wie die Umkehrabbildung $(x, y) \mapsto (x, y + f(x))$. Damit ist φ ein Diffeomorphismus welcher offenbar M auf $U \times \{0\}$ abbildet.

- (iii) Dass die Sphäre

$$S^2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$$

eine Mannigfaltigkeit ist, zeigen wir auf unterschiedliche Weise in diversen Übungsaufgaben.

- (iv) Die Menge $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$ ist keine Mannigfaltigkeit, da sie im Punkt $(0, 0)$ keine lokale Mannigfaltigkeit ist (in allen anderen Punkten ist sie eine eindimensionale lokale Mannigfaltigkeit). Diese Aussage ist aus der Anschauung leicht einzusehen. Ein formaler Beweis würde uns an dieser Stelle allerdings Probleme bereiten, da wir uns noch nicht mit Eigenschaften beschäftigt haben, die unter Diffeomorphismen unverändert bleiben. Die Idee des Beweises ist wie folgt: Falls es eine Umgebung U und eine offene Menge V und einen Diffeomorphismus $\varphi : U \rightarrow V$ wie gefordert geben würde, dann müsste dieser $X \cap U$ auf $\mathbb{R} \times \{0\} \cap V$ abbilden. Entfernen wir nun den Punkt $(0, 0)$ aus $X \cap U$, dann zerfällt der Rest in 4 Teile, entfernen wir jedoch $\varphi(0, 0)$ aus $\varphi(X \cap U) = \mathbb{R} \times \{0\} \cap V$, dann zerfällt der Rest lediglich in zwei Teile. Homöomorphismen (und damit erst recht Diffeomorphismen) erhalten aber die Anzahl der „Teile“ einer Menge.

Bemerkung 10.29. (i) Da jeder lokale Diffeomorphismus zu einem Diffeomorphismus wird, wenn er auf eine hinreichend kleine Umgebung eingeschränkt wird, gilt auch die folgende Charakterisierung: Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist eine k -dimensionale eingebettete Mannigfaltigkeit genau dann, wenn sie lokal diffeomorph zu einem k -dimensionalen Unterraum von \mathbb{R}^n ist.

- (ii) Es ist häufig möglich, mit einigen wenigen \mathbf{C}^∞ -Diffeomorphismen auszukommen. Das tatsächlich nur ein einziger nötig ist, wie in den obigen Beispielen, ist jedoch die Ausnahme.
- (iii) In unserer Definition von Mannigfaltigkeiten haben wir φ als glatten Diffeomorphismus vorausgesetzt. Der so definierte Begriff ist der einer glatten (eingebetteten) Mannigfaltigkeit. Es ist jedoch ohne Weiteres möglich die lokalen \mathbf{C}^∞ -Diffeomorphismen durch \mathbf{C}^k -Diffeomorphismen oder Homöomorphismen zu ersetzen und so (eingebettete) \mathbf{C}^k -Mannigfaltigkeiten beziehungsweise topologische Mannigfaltigkeiten zu definieren. Die meisten der Aussagen die wir unten beweisen werden, gelten mit offensichtlichen Anpassungen auch für diese anderen Typen von Mannigfaltigkeit, wir werden jedoch, wenn nichts anderes gesagt wird, immer von glatten Mannigfaltigkeiten ausgehen.
- (iv) Wie der Name bereits nahelegt, ist „lokale k -dimensionale Mannigfaltigkeit“ eine lokale Eigenschaft. Wir können diese Eigenschaft also nachprüfen, wenn wir lediglich eine beliebig kleine Umgebung eines Punkte x kennen. Nehmen wir noch die Tatsache hinzu, dass Verkettungen von Diffeomorphismen wieder Diffeomorphismen sind, dann folgt insbesondere, dass jede nichtleere, relativ offene Teilmenge

$\tilde{M} \subset M$ einer k -dimensionalen Mannigfaltigkeit wieder eine k -dimensionale Mannigfaltigkeit ist. Da solche relativ offenen Mengen jetzt öfter vorkommen werden, sehen wir uns den Begriff weiter unten nochmals an.

Insbesondere ist jede offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit.

- (v) Da Verkettungen von Diffeomorphismen wieder Diffeomorphismen sind folgt auch: Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi : U \rightarrow V$ ein glatter Diffeomorphismus. Ist nun $M \subset U$ eine Mannigfaltigkeit, dann auch $\varphi(M)$.

Auf diese Weise lässt sich beispielsweise leicht zeigen, dass jedes Ellipsoid, als Bild von S^2 unter einer invertierbaren linearen Abbildung, eine Mannigfaltigkeit ist.

„Lokaler Diffeomorphismus“ ist in der obigen Aussage nicht ausreichend, da sich $\varphi(M)$ dann „selbst schneiden“ kann. Als Beispiel betrachten wir die Abbildung

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R} \times \{-2\} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto \left(x + \frac{y}{2} \sin(x), y + \frac{y}{2} \cos(x)\right),\end{aligned}$$

welche ein lokaler Diffeomorphismus ist (Nachrechnen!). Die Mannigfaltigkeit

$$\mathbb{R} \times \{\lambda\} \subset \mathbb{R}^2$$

wird nun auf eine Zykloide abgebildet, welche jedoch nur für $|\lambda| < 2$ eine Mannigfaltigkeit ist.

Bemerkung 10.30. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge und $U \subset M$. Wir wissen nun, was es bedeutet, dass die Menge U offen ist. Wir müssen in der vorliegenden Situation jedoch unterscheiden, ob wir offen im metrischen Raum \mathbb{R}^n oder im metrischen Raum M meinen (die Metrik ist in beiden Fällen die euklidische Metrik). Ein Punkt x ist ein innerer Punkt von U in \mathbb{R}^n ist, falls für ein $\epsilon > 0$ die Menge

$$\{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\| < \epsilon\}$$

in U enthalten ist. Der Punkt x ist ein innerer Punkt von U in M , falls für ein $\epsilon > 0$ die Menge

$$\{y \in M \mid \|y - x\| < \epsilon\}$$

in U enthalten ist, was natürlich potentiell einfacher zu erfüllen ist.

Als Beispiel betrachten wir $M = S^2$, also die Einheitssphäre. Dann ist die offene Halbkugel

$$\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ und } x > 0\}$$

offen als Teilmenge von S^2 . Wir sagen auch sie ist relativ offen. Sie ist aber andererseits nicht offen als Teilmenge von \mathbb{R}^n , da sie dann gar keine inneren Punkte besitzt.

Analoge Bemerkungen gelten auch, für abgeschlossene Mengen.

Bemerkung 10.31. Häufig sind Teilmengen von \mathbb{R}^n als Lösungsmengen von Gleichungen oder Gleichungssystemen gegeben. Das heißt, gegeben ist eine Abbildung $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ (m Gleichungen mit n Unbekannten) und wir interessieren uns für die Nullstellenmenge

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) = 0\}.$$

In der klassischen Mechanik wird gesagt, solche Systeme unterlägen holonomen Zwangsbedingungen. In diesem Fall ist es oft umständlich, mit Hilfe der Definition zu überprüfen, ob die Menge eine Mannigfaltigkeit ist. Eine naheliegende Idee ist es nun zu versuchen, das Gleichungssystem nach einer passenden Anzahl von Variablen aufzulösen, was jedoch praktisch auch schwierig sein kann.

Lemma 10.32. *Sei $U \subset \mathbb{R}^k$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine glatte Funktion. Dann ist der Graph*

$$\{(x, f(x)) \mid x \in U\}$$

eine k -dimensionale Mannigfaltigkeit.

Beweis. Analog zu Beispiel 10.28 (ii). □

Satz 10.33 (Satz vom regulären Wert). *Seien $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^k$ ($k < n$) offen und $F : U \rightarrow V$ eine glatte Abbildung. Dann ist die Menge*

$$M = \{x \in U \mid F(x) = 0 \text{ und } DF(x) \text{ hat vollen Rang}\}$$

leer oder eine $n - k$ -dimensionale, glatte Mannigfaltigkeit.

Beweis. Sei $x_0 \in M$. Es ist ausreichend, M in einer Umgebung von x als den Graphen einer Abbildung darzustellen, dann liefert das vorhergehende Lemma die gewünschte Aussage. Da $DF(x_0)$ Rang k hat, sind die Zeilen der Matrix linear unabhängig, eine Zeilenstufenform der Matrix besitzt also keine Nullzeile. Wir wollen nun die Koordinaten umnummerieren. Mathematisch entspricht das einer Vertauschung der Koordinaten, also einer invertierbaren linearen Abbildung auf \mathbb{R}^n , welche natürlich insbesondere ein Diffeomorphismus ist und damit (lokale) Mannigfaltigkeiten erhält. Durch Umnummerieren der Koordinaten, was einer Vertauschung der Spalten von $DF(x_0)$ entspricht, können wir erreichen, dass die Zeilenstufenform von $DF(x)$ von Null verschiedene Diagonaleinträge hat (also $(DF(x))_{ii} \neq 0$ für $i \in \{1, \dots, k\}$).

Wir bezeichnen nun die ersten k Koordinaten mit $y = (y_1, \dots, y_k) = (x_1, \dots, x_k)$ und die anderen Koordinaten mit $z = (z_1, \dots, z_{n-k}) = (x_{k+1}, \dots, x_n)$ und betrachten die Gleichungen $F(y, z) = 0$ als nach den y -Variablen aufzulösendes Gleichungssystem. Es gilt $F(y_0, z_0) = 0$ und $D_y F(y_0, z_0)$ ist invertierbar (dafür haben wir oben durch geschicktes Umnummerieren gesorgt). Wir haben damit die Voraussetzungen des Satzes über implizite Funktionen erfüllt. Es gibt also eine Umgebung \tilde{U} von z_0 und \tilde{V} von y_0 und eine glatte Abbildung $f : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ so, dass

$$\{(y, z) \in U \mid F(y, z) = 0\} \cap \tilde{V} \times \tilde{U} = \{(z, f(z)) \mid z \in \tilde{U}\}$$

gilt. Da die Menge aller invertierbaren Matrizen offen ist, können wir \tilde{U} und \tilde{V} weiter so verkleinern, dass auf $\tilde{V} \times \tilde{U}$ auch $D_y F(y, z)$ invertierbar ist. Damit hat aber auch DF auf dieser Teilmenge vollen Rang und es gilt

$$M \cap \tilde{V} \times \tilde{U} = \left\{ (z, f(z)) \mid z \in \tilde{V} \right\}. \quad \square$$

Bemerkung 10.34. Falls die Ableitung $DF(x)$ nicht in Form der Jakobi-Matrix gegeben ist, dann entspricht die Forderung nach vollem Rang genau der Bedingung, dass $DF(x)$ surjektiv ist.

In praktischen Anwendungen sind wir häufig an der Nullstellenmenge von $F(x)$ interessiert. Um zu zeigen, dass diese eine Mannigfaltigkeit ist, müssen wir dann nachweisen, dass die Jakobi-Matrix $DF(x)$ für jedes x mit $F(x) = 0$ vollen Rang hat.

Tatsächlich ist für diese Version nicht erforderlich, dass $DF(x)$ auf M vollen Rang hat, sondern es ist ausreichend, dass der Rang auf M konstant ist (Satz vom konstanten Rang).

Beispiel 10.35. (i) Wir betrachten ein ebenes Doppelpendel. Gegeben sind also zwei Massenpunkte $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, deren Bewegung dadurch eingeschränkt wird, dass x festen Abstand $l_1 > 0$ von einem festen Punkt (hier $(0, 0)$) hat und y festen Abstand $l_2 > 0$ von x hat. Definieren wir die Abbildung

$$F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, y_1, y_2) \mapsto (x_1^2 + x_2^2 - l_1^2, (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 - l_2^2),$$

dann können wir diese beiden Bedingungen als $F(x, y) = 0$ ausdrücken. Wir interessieren uns also für die Teilmenge

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^4 \mid F(x, y) = 0\}.$$

Wir berechnen nun die Jakobi-Matrix von F

$$\begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 0 & 0 \\ 2(x_1 - y_1) & 2(x_2 - y_2) & -2(x_1 - y_1) & -2(x_2 - y_2) \end{pmatrix}$$

Der Rang dieser Matrix kann nur dann kleiner 2 sein, wenn eine Zeile ein Vielfaches der anderen ist, was jedoch nur für $x_1 = y_1$ und $x_2 = y_2$ oder für $x_1 = x_2 = 0$ der Fall ist. Da solche Punkte nicht auf M liegen können, hat die Jakobi-Matrix dort also stets vollen Rang und damit ist M nach dem obigen Satz eine Mannigfaltigkeit.

(ii) Die allgemeine lineare Gruppe, also die Menge $\text{Gl}(n)$ aller invertierbaren $n \times n$ -Matrizen, ist eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{n \times n}$ und damit eine Mannigfaltigkeit. Unser Ziel ist es zu zeigen, dass die spezielle lineare Gruppe

$$\{T \in \text{Gl}(n) \mid \det(T) = 1\}$$

ebenfalls eine Mannigfaltigkeit ist. Dabei handelt es sich um die volumenerhaltenden (siehe Transformationssatz) und orientierungserhaltenden (wir werden später lernen was das heißt) linearen Abbildungen.

Wir betrachten dazu die Abbildung

$$\begin{aligned} F : \text{Gl}(n) &\rightarrow \mathbb{R} \\ T &\mapsto \det(T) - 1. \end{aligned}$$

Da die Determinante ein Polynom in den Einträgen von T ist, ist diese Abbildung sicher glatt, auf Grund der vielen Variablen ist das Bestimmen der Ableitung jedoch nicht ganz einfach.

Wir betrachten dazu zunächst die partiellen Ableitungen im Punkt $T = I$. Da in unserem Fall die Variablen (Matrixeinträge) mit zwei Indizes indiziert sind, gilt das natürlich auch für die partiellen Ableitungen. Sei $(E_{ij})_{i,j \in \{1, \dots, n\}}$ die Standardbasis für $\mathbb{R}^{n \times n}$. Für $i \neq j$ ist $I + hE_{ij}$ eine obere oder untere Dreiecksmatrix, deren Diagonaleinträge mit der Einheitsmatrix übereinstimmen und deren Determinante damit 1 ist. Damit gilt

$$\partial_{ij} \det(I) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\det(I + hE_{ij}) - \det(I)}{h} = 0.$$

Andererseits gilt

$$\partial_{ii} \det(I) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\det(I + hE_{ii}) - \det(I)}{h} = 1.$$

Damit erhalten wir für die Ableitung (als lineare Abbildung angewandt auf eine Matrix H)

$$D \det(I)(H) = \sum_{i,j=1}^n \partial_{ij} \det(I) H_{ij} = \sum_{i=1}^n H_{ii} = \text{Tr}(H)$$

Wobei wir mit Tr die Spur, also die Summe der Diagonaleinträge, einer Matrix bezeichnen. Da wir bereits wissen, dass \det differenzierbar ist, muss also gelten

$$\lim_{H \rightarrow 0} \frac{\det(I + H) - 1 - \text{Tr}(H)}{\|H\|} = 0.$$

(Die Norm hier ist Operatornorm.)

Sei nun $T \in \text{Gl}(n)$ beliebig, dann ist

$$\frac{\|T^{-1}H\|}{\|H\|} \leq \frac{\|T^{-1}\| \|H\|}{\|H\|} = \|T^{-1}\|$$

beschränkt und damit gilt

$$\begin{aligned} & \lim_{H \rightarrow 0} \frac{\det(T+H) - \det(T) - \det(T) \operatorname{Tr}(T^{-1}H)}{\|H\|} \\ &= \lim_{H \rightarrow 0} \det(T) \frac{\det(I + T^{-1}H) - 1 - \operatorname{Tr}(T^{-1}H)}{\|T^{-1}H\|} \frac{\|T^{-1}H\|}{\|H\|} = 0. \end{aligned}$$

Die Konvergenz folgt dabei aus dem oben gezeigten, da für $H \rightarrow 0$ auch $T^{-1}H \rightarrow 0$ geht. Damit haben wir gezeigt, dass die lineare Abbildung $H \mapsto \operatorname{Tr}(T^{-1}H)$ die Ableitung $D \det = DF$ im Punkt T ist. Diese Abbildung ist insbesondere surjektiv (Warum?).

Damit können wir den Satz vom regulären Wert verwenden, um festzustellen dass $\operatorname{Sl}(n)$ eine Mannigfaltigkeit ist.

- (iii) Im vorhergehenden Beispiel haben wir gesehen, dass $\operatorname{Gl}(n)$ und $\operatorname{Sl}(n)$ sowohl Gruppen als auch Mannigfaltigkeiten sind. Da die Gruppenoperationen Produkt und Inverse auch noch differenzierbar sind (wir werden weiter unten sehen, was das genau bedeutet) handelt es sich um sogenannte Lie-Gruppen. Solche Lie-Gruppen spielen in der Physik für die Beschreibung von Symmetrien eine wichtige Rolle. Es gibt viele weitere Beispiele wie die Gruppe $\operatorname{SO}(n)$ der Drehungen.

Definition 10.36. Sei $M \cap \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Mannigfaltigkeit, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und nicht disjunkt zu M und $\varphi : U \rightarrow V$ ein \mathbf{C}^∞ -Diffeomorphismus so, dass $\varphi(M \cap U) = \mathbb{R}^k \times \{0\} \cap V$. Bezeichne mit π_k die Projektion auf die ersten k Koordinaten, das heißt $\pi_k(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_k)$. Dann heißt

$$\begin{aligned} \gamma : M \cap U &\rightarrow \pi_k \circ \varphi(M \cap U) \\ x &\mapsto \pi_k \circ \varphi(x) \end{aligned}$$

eine Kartenabbildung oder Karte von M . Die einzelnen Komponentenabbildungen von γ heißen Koordinatenabbildungen.

Sei I eine Indexmenge und für jedes $i \in I$ sei $\gamma_i : M \cap U_i \rightarrow V_i$ eine Karte. Falls

$$\bigcup_{i \in I} M \cap U_i = M$$

ist, heißt die Familie $(\gamma_i)_{i \in I}$ ein Atlas für M .

Bemerkung 10.37. (i) Die Definition einer Mannigfaltigkeit stellt nun gerade sicher, dass es zu jeder Mannigfaltigkeit einen Atlas gibt. Häufig werden wir uns mehr für die Karten, als für die Diffeomorphismen φ interessieren. Die Philosophie dahinter ist, dass häufig der die Mannigfaltigkeit umgebende Raum weniger wichtig ist.

- (ii) Seien $U, V, \tilde{U}, \tilde{V}$ offen, $\varphi : U \rightarrow V$ und $\tilde{\varphi} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ zwei \mathbf{C}^∞ -Diffeomorphismen wie oben und $\gamma, \tilde{\gamma}$ die zugehörigen Kartenabbildungen.

Es sei $U \cap \tilde{U} \cap M \neq \emptyset$.

Dann ist $U \cap \tilde{U}$ offen und damit sind auch $\varphi : U \cap \tilde{U} \rightarrow \varphi(U \cap \tilde{U})$ und $\tilde{\varphi} : U \cap \tilde{U} \rightarrow \tilde{\varphi}(U \cap \tilde{U})$ \mathbf{C}^∞ -Diffeomorphismen.

Die Verkettung $\varphi \circ \varphi^{-1} : \tilde{\varphi}(U \cap \tilde{U}) \rightarrow \varphi(U \cap \tilde{U})$ ist dann ebenfalls ein \mathbf{C}^∞ -Diffeomorphismus, der einen Teil von $\mathbb{R}^k \times 0$ auf einen Teil von $\mathbb{R}^k \times 0$ abbildet.

Die Einschränkung dieser Abbildung auf $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ ist dann ebenfalls ein \mathbf{C}^∞ -Diffeomorphismus und das gleiche gilt für die Hintereinanderausführung der Kartenabbildungen $\gamma \circ \tilde{\gamma}^{-1} : \tilde{\gamma}(U \cap \tilde{U} \cap M) \rightarrow \gamma(U \cap \tilde{U} \cap M)$. Die Abbildungen $\gamma \circ \tilde{\gamma}^{-1}$ und $\tilde{\gamma} \circ \gamma^{-1}$ heißen Kartenwechsel oder Koordinatenwechsel. Da die Kartenwechsel glatt sind, sagen wir auch die Karten γ und $\tilde{\gamma}$ sind kompatibel.

Durch die Einbettung im \mathbb{R}^n und die lokalen Diffeomorphismen erhält die Mannigfaltigkeit also einen aus kompatiblen Karten bestehenden Atlas.

- (iii) Auf ähnliche Weise kann nun auch auf nicht im \mathbb{R}^n eingebetteten Mengen eine Mannigfaltigkeitsstruktur definiert werden. Dazu werden Abbildungen $\gamma : U \rightarrow V$ angegeben (wobei $U \subset M$ und $V \subset \mathbb{R}^k$ offene Teilmenge sind), die im obigen Sinne kompaktibel sind und deren Definitionsbereiche ganz M überdecken, eben ein Atlas. Üblicherweise werden dann noch zusätzliche technische Bedingungen gestellt (Hausdorff-Eigenschaft, Zweitabzählbarkeit), die in unserem Zugang über eingebettete Mannigfaltigkeiten automatisch erfüllt sind.

10.4 Differenzierbare Abbildungen und der Tangentenraum

Wir haben Differenzierbarkeit bisher nur für Abbildungen definiert, deren Definitionsbereich eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^n ist. Mannigfaltigkeiten sind nun der geeignete Kontext um diese Definition zu verallgemeinern.

Definition 10.38. Sei M eine k -Mannigfaltigkeit und $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. Sei $x \in M$ ein Punkt, $U \subset M$ eine offene Umgebung von x und $\gamma : U \rightarrow V$ eine Kartenabbildung. Wir definieren f als differenzierbar in x , falls $f \circ \gamma^{-1}$ in $\gamma(x)$ differenzierbar ist.

Bemerkung 10.39. (i) Da unterschiedliche Karten kompatibel sind, hängt der obige Differenzierbarkeitsbegriff nicht von der Wahl der Karten ab. Ist nämlich $\tilde{\gamma} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ eine weitere Kartenabbildung wie oben, dann gilt

$$f \circ \tilde{\gamma}^{-1} = (f \circ \gamma^{-1}) \circ (\gamma \circ \tilde{\gamma}^{-1}).$$

(Wir überlassen es der Leserin zur Übung, genau herauszufinden auf welcher Teilmenge die obige Gleichung sinnvoll ist.) Da der Kartenwechsel $\gamma \circ \tilde{\gamma}^{-1}$ ein glatter Diffeomorphismus ist, ist also $f \circ \tilde{\gamma}^{-1}$ in $\tilde{\gamma}(x)$ differenzierbar, genau dann wenn $f \circ \gamma^{-1}$ in $\gamma(x)$ differenzierbar ist.

- (ii) Da Mannigfaltigkeiten (bei uns) Teilmengen von \mathbb{R}^m sind, ist mit der obigen Definition auch klar, wann eine Abbildung von $M \rightarrow N$ für Mannigfaltigkeiten M, N differenzierbar ist.
- (iii) Die Möglichkeit, die Differenzierbarkeit von Abbildungen zu definieren, ist der eigentliche Grund weshalb wir Mannigfaltigkeiten einführen. Ein Atlas wird daher auch als eine „differenzierbare Struktur“ bezeichnet. In unserem Aufbau „erbt“ die Mannigfaltigkeit ihre differenzierbare Struktur vom sie umgebenden \mathbb{R}^n . Ein Problem des Zugangs über eingebettete Mannigfaltigkeiten ist, dass der umgebende Raum noch weitere Strukturen auf unseren Mannigfaltigkeiten induziert (allen voran eine „Metrik“, wir werden später kurz darauf zurück kommen) und dass diese zusätzlichen Strukturen teilweise nicht erwünscht oder „nicht die richtigen“ sind.

Da die meisten Gesetzmäßigkeiten der Physik in der Form von Differenzialgleichungen formuliert sind, spielen Mannigfaltigkeiten auch für die Physik eine große Rolle. Dort mogelt man sich jedoch häufig um den Begriff herum, indem lediglich über verschiedene Koordinaten und Koordinatenwechsel gesprochen wird.

- (iv) Analog wie hier für die Differenzierbarkeit können nun auch weitere Begriffe auf Mannigfaltigkeiten verallgemeinert werden. Die Philosophie ist dabei, Strukturen und Begriffe mit Hilfe der Kartenabbildungen von Vektorräumen auf Mannigfaltigkeiten „hochzuziehen“ und wir werden davon ausgiebig gebrauch machen. Bedingung dafür ist, dass der Begriff lokal definiert und invariant unter glatten Diffeomorphismen (den Koordinatenwechseln) ist. Beispiele sind: k fache Differenzierbarkeit einer Abbildung ($k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$), (lokaler) Diffeomorphismus.

- (v) Besonders wichtige Abbildungen, die wir anhand unserer Definition sofort als beliebig differenzierbar identifizieren, sind die Kartenabbildungen selbst. Die Umkehrabbildungen der Karten sind ebenfalls beliebig differenzierbar (im herkömmlichen Sinne). Insbesondere sind die Komponenten der Kartenabbildungen, die Koordinaten glatte Funktionen auf M . Diese Erkenntnis wird sich für das spätere Verständnis als wichtig erweisen.

Satz 10.40. *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Mannigfaltigkeit. Eine Abbildung $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist differenzierbar in $x \in M$ genau dann, wenn es eine Fortsetzung von f auf eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von x gibt, die in x differenzierbar ist.*

Beweis. Sei V eine offene Umgebung von x und $\varphi : V \rightarrow W$ ein Diffeomorphismus so, dass $\varphi(M \cap V) = \mathbb{R}^k \times \{0\} \cap W$. Die Abbildung γ sei die zu φ gehörige Karte.

Es sei zunächst $U \subset \mathbb{R}^n$ eine Umgebung von x und \tilde{f} eine Fortsetzung von f auf diese Umgebung, die in x differenzierbar ist. Indem wir U gegebenenfalls verkleinern, können wir annehmen, dass $U \subset V$ gilt. Es ist offensichtlich $\tilde{f} \circ \varphi^{-1}$ differenzierbar in $\varphi(x)$ und damit auch die Einschränkung $f \circ \gamma^{-1}$ dieser Abbildung.

Sei nun $f \in x$ differenzierbar. Dann ist die Abbildung

$$g : W \rightarrow \mathbb{R}^m \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto f \circ \gamma^{-1}(x_1, \dots, x_k)$$

differenzierbar in $\varphi(x)$ (Warum?) und damit auch die Abbildung $g \circ \varphi$ im Punkt x . Da γ die Einschränkung von φ auf M ist, ist $g \circ \varphi$ eine Fortsetzung der Funktion f . \square

Definition 10.41. Sei $x \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt. Eine in 0 differenzierbare Abbildung $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf einem Intervall, das die 0 enthält, heißt eine Kurve durch x , falls $c(0) = x$ ist. Die Ableitung $c'(0)$ heißt dann der Tangentenvektor an die Kurve im Punkt x .

Sei nun $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Mannigfaltigkeit und $x \in M$. Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt Tangentenvektor an die Mannigfaltigkeit M im Punkt x , falls es eine Kurve $c : I \rightarrow M$ durch x existiert, so dass $c'(0) = v$ ist. Die Menge

$$T_x M = \{v \in \mathbb{R}^n \mid v \text{ ist Tangentenvektor an } M \text{ im Punkt } x\}$$

heißt der Tangentenraum der Mannigfaltigkeit im Punkt x .

Satz 10.42. *Der Tangentenraum einer k -dimensionalen Mannigfaltigkeit M in einem Punkt $x \in M$ ist ein k -dimensionaler Untervektorraum.*

Beweis. Sei $\varphi : U \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus, der $M \cap U$ auf eine Teilmenge von $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ abbildet. Wir nehmen hier der Einfachheit halber an, dass $\varphi(x) = 0$ ist, was sich durch Verkettung mit einer passenden Verschiebung stets erreichen lässt. Die Aussage ist bewiesen, wenn wir zeigen, dass die lineare Abbildung $D\varphi^{-1}(\varphi(x))$ den Vektorraum $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ bijektiv auf $T_x M$ abbildet. Die Injektivität ist dabei klar, da φ^{-1} ein Diffeomorphismus ist.

Sei nun $v \in T_x M$. Dann existiert eine Kurve $c : I \rightarrow M$ durch x so, dass $c'(0) = v$ gilt. Dann ist $\varphi \circ c$ eine Kurve in $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ durch den Punkt $\varphi(x)$. Der Tangentenvektor w an diese Kurve in diesem Punkt liegt dann ebenfalls in $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ (Warum?). Aus der Kettenregel folgt dann

$$D\varphi^{-1}(\varphi(x))w = D\varphi^{-1}(\varphi(x))D\varphi(x)c'(0) = D(\varphi^{-1} \circ \varphi)c'(0) = v,$$

die Abbildung $D\varphi^{-1}(\varphi(x))$ ist also auch surjektiv und der Beweis damit beendet. \square

Bemerkung 10.43. (i) Ist die Mannigfaltigkeit M selbst ein Untervektorraum von \mathbb{R}^n (oder eine relativ offene Teilmenge eines solchen Untervektorraumes), dann stimmt der Tangentenraum auf natürliche Weise mit diesem Untervektorraum überein (Warum?). Das ist auch der Grund, warum wir uns bisher keine Gedanken über Tangentenräume machen mussten.

Wir können jetzt aber den Unterschied zwischen „Orts-“ und „Richtungsvektoren“ verstehen. Ortsvektoren sind lediglich Teil eines Koordinatensystems, auf einer Mannigfaltigkeit, die zufällig ein Vektorraum ist. Ob es sinnvoll ist von der linearen Struktur dieses Raumes Gebrauch zu machen, Ortsvektoren also zu addieren hängt sehr von der Situation ab. Richtungsvektoren „leben“ zeigen eine Richtung an. Sie „leben“ jedoch nicht im selben Raum wie die Ortsvektoren sondern im zugehörigen Tangentenraum und dessen lineare Struktur ist stets sinnvoll.

Für Vektorräume werden wir auch weiterhin stillschweigend den Tangentenraum mit dem Vektorraum identifizieren.

- (ii) Der Tangentenraum an eine Mannigfaltigkeit in einem Punkt $x \in M$ ist eine lineare Approximation der Mannigfaltigkeit in der Nähe des Punktes, ähnlich wie die Tangente an den Graphen einer Funktion den Verlauf der Funktion linear annähert. Wichtig ist jedoch, dass der Tangentenraum den Punkt x im Allgemeinen nicht enthält, auch wenn das in bildlichen Darstellungen oft suggeriert wird.
- (iii) Der Tangentenraum an eine Mannigfaltigkeit in einem Punkt $x \in M$ hängt (meist) natürlich von x ab. Eine wichtige Konsequenz ist, dass wir „Vektorfelder“ nicht mehr ohne weiteres als Abbildungen darstellen können, da das Bild für jeden Punkt x in einem anderen Vektorraum liegt. Wir werden weiter unten sehen, wie wir damit umgehen können.

Darüber hinaus wird auch der Begriff der Ableitung von Vektorfeldern schwieriger, da Vektoren zu unterschiedlichen Punkten nicht mehr im selben Vektorraum „leben“ und wir sie daher nicht subtrahieren können um Differenzenquotienten zu berechnen.

Lemma 10.44. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Mannigfaltigkeit, $x \in M$ und $c : I \rightarrow M$, $\tilde{c} : I \rightarrow M$ zwei Kurven durch x mit übereinstimmenden Tangentenvektoren $c'(0) = \tilde{c}'(0)$ im Punkt x . Sei nun $N \subset \mathbb{R}^m$ eine weitere Mannigfaltigkeit und $f : M \rightarrow N$ eine in x differenzierbare Abbildung. Dann gilt

$$(f \circ c)'(0) = (f \circ \tilde{c})'(0).$$

Beweis. Sei $\varphi : U \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus auf einer Umgebung U von x so, dass $\varphi(M \cap U) = \mathbb{R}^k \times \{0\} \cap V$ und γ die zugehörige Karte. Dann gilt

$$f \circ c = f \circ \gamma^{-1} \circ \gamma \circ c = (f \circ \gamma^{-1} \circ \pi_k) \circ (\varphi \circ c)$$

und die entsprechende Formel für \tilde{c} . Dabei sind die geklammerten Ausdrücke jeweils im klassischen Sinne differenzierbare Abbildungen und wir können die Kettenregel anwenden

$$\begin{aligned} (f \circ c)'(0) &= D(f \circ \gamma^{-1} \circ \pi_k)(\varphi \circ c(0))D\varphi(c(0))c'(0) \\ &= D(f \circ \gamma^{-1} \circ \pi_k)(\varphi \circ \tilde{c}(0))D\varphi(\tilde{c}(0))\tilde{c}'(0) = (f \circ \tilde{c})'(0). \end{aligned}$$

Dabei haben wir noch ausgenutzt, dass $c(0) = \tilde{c}(0) = x$ gilt. \square

Mit Hilfe des Tangentenraumes, können wir nun auch die Ableitung einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit definieren.

Definition 10.45. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$, $N \subset \mathbb{R}^m$ Mannigfaltigkeiten, $x \in M$ und $f : M \rightarrow N$ eine in x differenzierbare Abbildung. Ist $v \in T_x M$ ein Tangentenvektor, und c eine Kurve durch x mit $c'(0) = v$, dann heißt

$$\partial_v f(x) = (f \circ c)'(0)$$

die Richtungsableitung von f im Punkt x in Richtung v .

Die Abbildung

$$\begin{aligned} Df(x) : T_x M &\rightarrow T_{f(x)} N \\ v &\mapsto \partial_v f(x) \end{aligned}$$

heißt dann die Ableitung von f im Punkt x .

Bemerkung 10.46. (i) Das Lemma 10.44 stellt sicher, dass diese Definition nicht von der gewählten Kurve, sondern lediglich von deren Tangentenvektor v im Punkt x abhängt.

Insbesondere zeigt das Lemma auch, dass wir selbst im klassischen Fall von Abbildungen von $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ Richtungsableitungen ausrechnen können, indem wir das Verhalten der Funktion entlang einer Kurve mit dem richtigen Tangentenvektor betrachten. Die Geraden, welche wir dazu bisher verwendet haben, sind also nur eine Möglichkeit.

Tatsächlich ist es sinnvoll, die Tangentenvektoren mit den Richtungsableitungen zu identifizieren. Wir werden das jedoch hier zunächst nicht weiter verfolgen.

- (ii) Die Ableitung einer Abbildung f bildet also nicht zwischen den selben Räumen wie f ab, sondern zwischen den entsprechenden Tangentenräumen. Sie ist eine lineare Abbildung (Übung). Im Prinzip gilt das natürlich auch für den klassischen Fall $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. In diesem Fall stimmen die Tangentenräume aber auf kanonische Weise mit \mathbb{R}^n beziehungsweise \mathbb{R}^m überein, weshalb wir uns darüber bisher keine Gedanken machen mussten.

- (iii) Insbesondere sind im Allgemeinen Definitions- und Wertebereich der Ableitung von Punkt zu Punkt verschieden. Das bedeutet insbesondere, dass die Ableitung einer überall differenzierbaren Abbildung selbst keine Abbildung im klassischen Sinne mehr ist.
- (iv) Die Ableitung wird auch als Push-Forward, Differenzial oder Tangentialabbildung bezeichnet.

Satz 10.47 (Kettenregel für Mannigfaltigkeiten). *Seien $M \subset \mathbb{R}^m, N \subset \mathbb{R}^n, Q \subset \mathbb{R}^q$ Mannigfaltigkeiten und $f : M \rightarrow N$ eine in $x \in M$ differenzierbare sowie $g : N \rightarrow Q$ eine in $f(x)$ differenzierbare Abbildung. Dann ist $g \circ f$ in x differenzierbar und es gilt*

$$D(g \circ f)(x) = Dg(f(x))Df(x).$$

Beweis. Um die Differenzierbarkeitsaussage zu erhalten, sei \tilde{f} eine in x differenzierbare Fortsetzung von f auf eine Umgebungen von x in \mathbb{R}^m und \tilde{g} eine in $f(x)$ differenzierbare Fortsetzungen von g auf eine Umgebung von $f(x)$ in \mathbb{R}^n (siehe Satz 10.40). Dann ist die Abbildung $\tilde{g} \circ \tilde{f}$ nach der bereits bekannten Kettenregel differenzierbar in x und damit auch ihre Einschränkung $f \circ g$ auf M (nochmal Satz 10.40).

Sei nun $v \in T_x M$ und $w = Df(x)v$. Nach Definition existieren dann eine Kurve $c : I \rightarrow M$ durch x und eine Kurve $\tilde{c} : J \rightarrow N$ durch $f(x)$ so, dass $c'(0) = v$ und $\tilde{c}'(0) = w$ ist. Dann gilt nach der Definition der Ableitung

$$(f \circ c)'(0) = Df(x)v = w = \tilde{c}'(0),$$

die Kurven $f \circ c$ und \tilde{c} haben also in $f(x)$ den selben Tangentenvektor. Weiter gilt

$$(g \circ \tilde{c})'(0) = Dg(f(x))w = Dg(f(x))Df(x)v.$$

Andererseits ist wegen Lemma 10.44 auch

$$(g \circ \tilde{c})'(0) = (g \circ f \circ c)'(0) = D(g \circ f)(x)v.$$

Da $v \in T_x M$ beliebig war, folgt damit die gesuchte Identität. □

Bemerkung 10.48. Mit Hilfe der Kartenabbildungen können wir nun die Standardbasis des \mathbb{R}^k auf die Tangentialräume unserer Mannigfaltigkeit transportieren. Sei dazu $\gamma : U \rightarrow V$ eine Kartenabbildung für $U \subset M$ offen und e_1, \dots, e_k die Standardbasis von \mathbb{R}^k . Nach der Kettenregel gilt dann

$$\text{id} = D\gamma(x)D\gamma^{-1}(\gamma(x)),$$

das heißt, die linearen Abbildungen

$$\begin{aligned} D\gamma(x) : T_x M &\rightarrow T_{\gamma(x)} \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^k \text{ und} \\ D\gamma^{-1}(\gamma(x)) : T_{\gamma(x)} \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^k &\rightarrow T_x M \end{aligned}$$

sind zueinander invers. Damit sind die Vektoren

$$v_i = D\gamma^{-1}(\gamma(x))e_i$$

eine Basis für den Tangentenraum $T_x M$, die wir als die zu γ gehörige Koordinatenbasis bezeichnen. Diese Basis hängt natürlich im Allgemeinen von x ab, da ja der ganze Raum $T_x M$ von x abhängt. Rekapitulieren wir nochmal die obigen Definitionen, dann erhalten wir die folgende Formel für diese Basisvektoren:

$$v_i = \frac{d}{dt} \gamma^{-1}(\gamma(x)_1, \dots, \gamma(x)_{i-1}, \gamma(x)_i + t, \gamma(x)_{i+1}, \dots, \gamma(x)_k).$$

Mit anderen Worten: wir nutzen die Abbildung γ^{-1} um das Koordinatennetz von \mathbb{R}^k auf die Mannigfaltigkeit zu übertragen und bestimmen dann die Tangentenvektoren der Koordinatenlinien.

Die Richtungsableitungen in Richtung dieser Tangentenvektoren werden dann auch als partielle Ableitungen bezeichnet. Dabei ist natürlich zu beachten, dass diese partiellen Ableitungen von der gewählten Karte, also vom gewählten Koordinatensystem abhängt.

Beispiel 10.49. Wählen wir sphärische Koordinaten für die Einheitssphäre, dann ist die Abbildung γ^{-1} durch

$$\begin{aligned} \gamma^{-1} : (0, 2\pi) \times (0, \pi) &\rightarrow S^2 \\ (\alpha, \beta) &\mapsto (\sin(\beta) \cos(\alpha), \sin(\beta) \sin(\alpha), \cos(\beta)) \end{aligned}$$

gegeben (vergleiche Beispiel 10.25). Als Basisvektoren für die zu dieser Karte gehörige Koordinatenbasis im Punkt $\gamma^{-1}(\alpha, \beta)$ erhalten wir dann

$$\begin{aligned} v_\alpha &= (-\sin(\beta) \sin(\alpha), \sin(\beta) \cos(\alpha), 0) \\ v_\beta &= (\cos(\beta) \cos(\alpha), \cos(\beta) \sin(\alpha), -\sin(\beta)). \end{aligned}$$

Definition 10.50. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Mannigfaltigkeit. Die Menge

$$TM := \{(x, v) \in \mathbb{R}^{2n} \mid x \in M \text{ und } v \in T_x M\}$$

heißt das Tangentenbündel oder Tangentialbündel von M .

Bemerkung 10.51. (i) Das Tangentenbündel entsteht also, indem wir an jeden Punkt der Mannigfaltigkeit, den entsprechenden Tangentenraum „ankleben“.

Sei nun $\varphi : U \rightarrow V$ mit $U \subset \mathbb{R}^n$ ein C^∞ -Diffeomorphismus so, dass $\varphi(U \cap M) = \mathbb{R}^k \times \{0\} \cap V$ ist. Wir betrachten nun die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi : U \times \mathbb{R}^n &\rightarrow V \times \mathbb{R}^n \\ (x, y) &\mapsto (\varphi(x), D\varphi(x)y). \end{aligned}$$

Diese Abbildung ist glatt und wir können mit $(x, y) \mapsto (\varphi^{-1}(x), D\varphi^{-1}(x)y)$ eine ebenfalls glatte Inverse angeben (Nachrechnen!), Φ ist also ein glatter Diffeomorphismus. Wir wissen auch bereits aus dem Beweis von Satz 10.42, dass die Abbildung $D\varphi(x)$ den Tangentenraum $T_x M$ bijektiv auf $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ abbildet. Damit gilt

$$\Phi(U \times \mathbb{R}^n \cap TM) = (V \times \mathbb{R}^n) \cap \mathbb{R}^k \times \{0\} \times \mathbb{R}^k \times \{0\}.$$

Da wir für jeden Punkt x einen solchen Diffeomorphismus φ finden können, dessen Definitionsbereich x enthält, haben wir damit gezeigt, dass das Tangentenbündel TM selbst eine Mannigfaltigkeit der Dimension $2k$ ist.

- (ii) Bildlich können wir uns solche Tangentenbündel nur schwer vorstellen, da bereits für den einfachsten nichttrivialen Fall einer eindimensionalen, im \mathbb{R}^2 eingebetteten Mannigfaltigkeit, das Tangentenbündel eine zweidimensionale, im \mathbb{R}^4 eingebettete Mannigfaltigkeit ist.

Hier stößt unser Zugang zu Mannigfaltigkeiten langsam an seine Grenzen. Wie bereits erwähnt, sind viele wichtige Beispiele von Mannigfaltigkeiten eingebettet in einen höherdimensionalen \mathbb{R}^n . Obwohl es, wie wir oben gesehen haben, möglich ist, das Tangentenbündel als in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ eingebettete Mannigfaltigkeit aufzufassen, ist es nicht unbedingt sinnvoll.

- (iii) Das Tangentenbündel ist der „natürliche Lebensraum“ des Lagrangeformalismus der klassischen Mechanik. Dabei ist der Konfigurationsraum der die Kinematik eines Systems beschreibt (für hinreichend schöne Systeme) eine Mannigfaltigkeit M . Beschrieben werden die Punkte dieser Mannigfaltigkeit mit Hilfe von generalisierten Koordinaten, welche genau den Komponentenabbildungen einer Karte γ entsprechen. Über den Umstand, dass typische Konfigurationsräume nicht mit nur einer Karte beschrieben werden können, wird dabei großzügig hinweggegangen. Die Lagrangefunktion, die die Dynamik des Systems beschreibt, hängt aber nicht nur von den generalisierten Koordinaten ab, sondern auch von den generalisierten Geschwindigkeiten, welche den Komponenten einer Basisentwicklung eines Elements von $T_x M$ bezüglich der Koordinatenbasis entsprechen. Die Lagrangefunktion ist also eine Funktion auf dem Tangentenbündel TM des Konfigurationsraums M . Ist nun eine Bahnkurve $c : I \rightarrow M$ gegeben, die die Bewegung eines Punktes durch den Konfigurationsraum M in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt, dann können wir dieser Kurve eine weitere Kurve $C : I \rightarrow TM$ zuordnen, indem wir $C(t) = (c(t), c'(t))$ setzen, diese Kurve in die Lagrangefunktion einsetzen und das Wirkungsfunktional entlang der Kurve berechnen. Die physikalisch realisierten Bahnkurven sind dann die, die dieses Wirkungsfunktional minimieren.
- (iv) Wir möchten nun Vektorfelder auf Mannigfaltigkeiten definieren. Auf einer offenen Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^k$ ist ein Vektorfeld schlicht eine Abbildung von $V \rightarrow \mathbb{R}^k$. Auf einer Mannigfaltigkeit M soll ein Vektorfeld nun eine Zuordnung der Punkte $x \in M$ zu Tangentenvektoren $X(x) \in T_x M$ handeln. Da der Bildraum hier mit dem

Punkt x variiert, handelt es sich dabei nicht um eine klassische Abbildung. (Da alle Tangentenräume $T_x M$ im selben Raum \mathbb{R}^n eingebettet sind, könnten wir hier natürlich schummeln und X als Abbildung von $M \rightarrow \mathbb{R}^n$ definieren, die „zufällig“ die Bedingung $X(x) \in T_x M$ erfüllt. In Vorbereitung auf den folgenden Abschnitt wollen wir diese Abkürzung hier jedoch nicht nutzen.)

Wir wollen nun definieren, wann wir ein solches Vektorfeld als differenzierbar bezeichnen und nutzen dazu, wie schon bei der Differenzierbarkeit von Abbildungen auf M die Kartenabbildungen. Sei $\gamma : U \rightarrow V$ eine Kartenabbildung. Dann können wir das Vektorfeld über $U \subset M$ mittels γ in ein Vektorfeld über $V \subset \mathbb{R}^k$ überführen indem wir setzen

$$Y(y) = D\gamma(\gamma^{-1}(y))X(\gamma^{-1}(y)).$$

Für dieses neue Vektorfeld liegt nun $Y(y)$ im Tangentenraum $T_y \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^k$, und damit ist $Y(y) : V \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine gewöhnliche Abbildung. Wir sagen nun, dass X differenzierbar in x ist, genau dann wenn Y differenzierbar in $\gamma(x)$ ist. Diese Definition hängt wiederum nicht von der gewählten Karte ab (Übung).

Erinnern wir uns nun, wie die Koordinatenbasis entstanden ist – wir hatten die Standardbasis von \mathbb{R}^k mit einer Kartenabbildung in die Tangentenräume einer Mannigfaltigkeit transportiert – dann folgt sofort, dass die einzelnen Basisvektoren (richtiger wäre Basisvektorfelder) der Koordinatenbasis differenzierbare Vektorfelder sind.

Wir können noch mehr sagen: Jedes (klassische) Vektorfeld $Y : V \rightarrow \mathbb{R}^k$ kann natürlich bezüglich der Standardbasis dargestellt werden:

$$Y(y) = \sum_{i=1}^k \alpha_i(y) e_i,$$

wobei die Koeffizienten natürlich von y abhängen. Differenzierbar ist diese Abbildung genau dann, wenn die Funktionen $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ differenzierbar sind. Ist nun $Y(y)$ das oben definierte Vektorfeld, dann können wir schreiben

$$X(x) = D\gamma^{-1}(\gamma(x))Y(\gamma(x)) = \sum_{i=1}^k \alpha_i(\gamma(x)) D\gamma^{-1}(\gamma(x)) e_i = \sum_{i=1}^k \beta_i(x) v_i.$$

Dabei haben wir die Linearität der Ableitung sowie die Definition der Koordinatenbasis benutzt. Die Funktionen $\beta_i = \alpha_i \circ \gamma$ sind differenzierbar genau dann, wenn α differenzierbar ist. Damit haben wir das folgende Kriterium gezeigt: Das Vektorfeld X auf M ist differenzierbar genau dann, wenn die Koeffizienten bezüglich der Basisdarstellung in der Koordinatenbasis differenzierbare Funktionen sind.

10.5 Alternierende Formen

In diesem Abschnitt führen wir nun die Objekte ein, die auf natürliche Weise über eine Mannigfaltigkeit integriert werden können. Zur Vorbereitung beschäftigen wir uns zunächst etwas mit Permutationen.

Definition 10.52. Die Menge aller Permutationen, also aller bijektiven Abbildungen von $\{1, \dots, n\}$ auf sich selbst heißt symmetrische Gruppe S_n .

Bemerkung 10.53. (i) Bei den Elementen der symmetrischen Gruppe handelt es sich also um Vertauschungen der Elemente $1, \dots, n$. Das Produkt in dieser Gruppe ist die Hintereinanderausführung der Abbildungen. Für $n > 2$ ist die symmetrische Gruppe nicht kommutativ. Zu beachten ist, dass beim Anwenden von Permutationen ebenso wie bei der Verkettung allgemeiner Abbildungen stets die am weitesten rechts stehende Permutation zuerst angewandt wird.

- (ii) Es gibt verschiedene Notationen um Permutationen aufzuschreiben. Wie alle Abbildungen auf endlichen Mengen können Permutationen als Tabelle aufgeschrieben werden, also etwa

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Wir werden hier die sogenannte Zykelschreibweise verwenden. Dabei bezeichnet beispielsweise

$$(3 \ 5 \ 1)$$

die Permutation, die 3 auf 5, 5 auf 1 und 1 auf 3 abbildet und alle nicht aufgeführten Zahlen an ihren ursprünglichen Plätzen belässt. Eine Permutation von dieser Form wird zyklisch oder ein Zykel genannt. Nicht jede Permutation ist zyklisch, es kann aber jede als Produkt von Zykeln geschrieben werden, in denen jede Zahl in höchstens einem Zykel vorkommt. Die in der obigen Tabelle angegebene Permutation ließe sich beispielsweise als

$$(1 \ 4 \ 2)(3 \ 5)$$

schreiben.

- (iii) Eine Permutation der Form (ab) , die also die Position von genau zwei Elementen verändert, heißt Vertauschung. Es ist leicht einzusehen, dass jede Permutation als Produkt von Vertauschungen geschrieben werden kann. Die Permutation in der obigen Tabelle zum Beispiel als

$$(35)(12)(14) = (35)(15)(23)(24)(52)(15)(34).$$

Diese Darstellung ist offensichtlich nicht eindeutig.

- (iv) Beim Rechnen mit Permutationen sind häufig die folgenden Relationen zwischen Vertauschungen nützlich. Es seien $a, b, c, d \in \{1, \dots, n\}$ paarweise verschieden. Dann zeigen einfache Überlegungen

$$(ab) = (ba) \quad (10.2)$$

$$(ab)(ab) = \text{id} \quad (10.3)$$

$$(ac)(ab) = (ab)(bc) \quad (10.4)$$

$$(ac)(bc) = (bc)(ab) \quad (10.5)$$

$$(ab)(cd) = (cd)(ab). \quad (10.6)$$

- (v) Die symmetrische Gruppe S_n hat genau $n!$ Elemente (Warum?).

Satz 10.54. Seien $\sigma_1, \dots, \sigma_N \in S_n$ Vertauschungen und

$$\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_N = \text{id}.$$

Dann ist N gerade.

Die Abbildung, die Vorzeichen- oder Paritätsfunktion,

$$\text{sgn} : S_n \rightarrow \{-1, 1\}$$

$$\sigma \mapsto \begin{cases} 1 & \sigma \text{ ist Produkt einer geraden Anzahl von Vertauschungen} \\ -1 & \sigma \text{ ist Produkt einer ungeraden Anzahl von Vertauschungen} \end{cases}$$

ist ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus, das heißt für alle $\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$ gilt

$$\text{sgn}(\sigma_1 \sigma_2) = \text{sgn}(\sigma_1) \text{sgn}(\sigma_2).$$

Beweis. Angenommen die erste Aussage gälte nicht. Dann gibt es zumindest in einigen symmetrischen Gruppen Produkte einer ungeraden Anzahl von Vertauschungen, die die Identität ergeben. Wir wählen unter diesen Produkten zunächst diejenigen in der kleinstmöglichen symmetrischen Gruppe S_n , anschließend diejenigen mit der minimal möglichen Anzahl an Faktoren und schließlich eines mit der minimalen Anzahl an Faktoren der Form (an) . Solche Faktoren wollen wir hier als n -Faktoren bezeichnen. Sei nun

$$(a_1 b_1)(a_2 b_2) \cdots (a_N b_N)$$

dieses Produkt. Wegen (10.2) können wir annehmen, dass stets $a_i < b_i$ gilt.

Wir können nun (10.4) und (10.6) benutzen um den am weitestens links stehenden n -Faktor schrittweise nach rechts zu verschieben, ohne dabei die Anzahl der Faktoren oder die Anzahl der n -Faktoren zu erhöhen. Würden wir dabei auf einen weiteren n -Faktor treffen, könnten wir entweder wegen (10.3) die Anzahl der Faktoren oder wegen (10.5) die Anzahl der n -Faktoren reduzieren, was jedoch aufgrund der oben getätigten Wahl unmöglich ist. Das Produkt kann also höchstens einen n -Faktor enthalten. Ein

einzelner n -Faktor ist jedoch auch unmöglich, da so ein Produkt nie die Identität ergeben kann. Unser Produkt enthält also keinen n -Faktor und ist damit ein Produkt einer ungeraden Anzahl von Vertauschungen in S_{n-1} , das die Identität ergibt. Das ist jedoch aufgrund unserer Wahl von n ebenfalls unmöglich. Damit haben wir einen Widerspruch konstruiert und die erste Aussage ist gezeigt.

Seien nun

$$\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_l = \tilde{\sigma}_1 \tilde{\sigma}_2 \cdots \tilde{\sigma}_k$$

zwei unterschiedliche Darstellungen von σ als Produkt von Vertauschungen. Dann ist

$$\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_l \tilde{\sigma}_k \tilde{\sigma}_{k-1} \cdots \tilde{\sigma}_1$$

eine Produktdarstellung der Identität durch Vertauschungen (Warum?) und daher ist $k + l$ gerade. Das ist jedoch nur möglich, wenn entweder k und l gerade oder beide Zahlen ungerade sind. Damit ist die Abbildung sgn wohldefiniert. \square

Permutationen σ mit $\text{sgn}(\sigma) = 1$ bezeichnen wir auch als „gerade“, andere als „ungerade“.

Es sei nun für den Rest dieses Abschnitts V ein fester Vektorraum über dem Körper \mathbb{K} . Wir interessieren uns hier hauptsächlich für den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Definition 10.55. Sei $k \in \mathbb{N}$. Eine multilineare Abbildung $\omega : V^k \rightarrow \mathbb{K}$ wird multilineares Funktional genannt. Für $k = 1$ sprechen wir von einem linearen Funktional.

Eine k -Form auf V (auch Form oder alternierende Form falls k fest ist) ist ein antisymmetrisches multilineares Funktional, das heißt eine multilineare Abbildung $\omega : V^k \rightarrow \mathbb{K}$, die bei Vertauschung zweier beliebiger Argumente das Vorzeichen wechselt.

Die k -Formen über V bilden selbst einen Vektorraum, der mit

$$\Lambda^k(V)$$

bezeichnet wird. Der Raum aller linearen Funktionalen beziehungsweise 1-Formen heißt auch der Dualraum von V und wird mit V^* bezeichnet.

Bemerkung 10.56.

Wir haben n -Formen bereits im Zusammenhang mit Determinanten kennengelernt. Jetzt betrachten wir jedoch k -Formen für beliebige Werte von k . Eine 0-Form soll dabei ein Element aus \mathbb{K} sein. Für $k = 1$ ist die Antisymmetriebedingung natürlich gegenstandslos, das heißt jede lineare Abbildung von $V \rightarrow \mathbb{K}$ ist eine 1-Form.

In der Physik werden Elemente des Vektorraumes V häufig als kontravariante, und Elemente von V^* als kovariante Vektoren bezeichnet. Unsere k -Formen werden in der Physik auch als total antisymmetrische Tensoren bezeichnet.

Im Folgenden werden wir die Einsteinsche Summenkonvention verwenden, da sie eine kompaktere Schreibweise ermöglicht und in der Physik ohnehin verbreitet ist. Im Folgenden können Indizes sowohl wie üblich unten, also auch oben an Symbolen notiert werden. Im Ausdruck a^i ist i also kein Exponent sondern lediglich ein Index.

Die Konvention sieht nun vor, dass in einem Ausdruck über jeden Index, der genau einmal als oberer und genau einmal als unterer Index vorkommt, implizit von 1 bis n summiert wird, wobei n die Dimension des Vektorraumes ist (diese Dimension ändert sich üblicherweise im Verlauf eines Argumentes nicht). Der Ausdruck

$$a_i A^{ij} b_k c_{jlm}$$

steht also für

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i A^{ij} b_k c_{jlm}.$$

Da es sich um Summen über endlich viele Summanden handelt, spielt die Reihenfolge der Summation dabei keine Rolle.

Welche Objekte oben und welche unten indiziert werden wird sich stückweise erschließen. Es hängt damit zusammen, in welchem Raum (V oder V^*) die entsprechenden Objekte „leben“.

Darüber hinaus werden wir das Kroneckersymbol

$$\delta_i^j := \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

verwenden.

Wir werden uns nun zunächst etwas mit dem Zusammenhang zwischen V und V^* befassen.

Bemerkung 10.57. (i) Sei v_1, \dots, v_n eine Basis für V (Elemente von V bekommen üblicherweise untere Indizes). Wir definieren für $i \in \{1, \dots, n\}$ lineare Funktionale $\theta^i : V \rightarrow \mathbb{K}$ durch die Vorschrift $\theta^i(v_j) = \delta_j^i$ (Bemerkung 6.4: lineare Abbildungen sind eindeutig definiert, durch Angabe der Werte auf einer Basis).

Wir wollen nun sehen, dass $\theta^1, \dots, \theta^n$ eine Basis für V^* ist. Seien dazu zunächst $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ und es sei $\alpha_i \theta^i = 0$ (Summenkonvention). Angewandt auf v_j erhalten wir dann

$$0 = \alpha_i \theta^i(v_j) = \alpha_i \delta_j^i = \alpha_j$$

für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$ und damit sind die θ^i linear unabhängig.

Sei nun $\theta \in V^*$ ein beliebiges lineares Funktional. Wir wenden die Linearkombination $\theta(v_i) \theta^i$ auf v_j an und erhalten

$$\theta(v_i) \theta^i(v_j) = \theta(v_i) \delta_j^i = \theta(v_j)$$

für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$. Die Funktionale θ und $\theta(v_i) \theta^i$ stimmen also auf einer Basis von V überein und müssen damit gleich sein. Damit stellen die θ^i aber auch ein Erzeugendensystem dar.

Die Basis $\theta_1, \dots, \theta_n$ heißt die zu v_1, \dots, v_n duale Basis. Insbesondere sehen wir, dass V und V^* die selbe Dimension haben, was wir aber bereits aus Satz 6.13 wissen.

- (ii) Wir haben oben die Formel

$$\theta = \theta(v_i)\theta^i$$

hergeleitet Analog erhalten wir (Wie?)

$$v = \theta^i(v)v_i.$$

Ist also ein Paar dualer Basen bekannt, dann ist es leicht die Koeffizienten der Basisdarstellungen beliebiger Elemente von V beziehungsweise V^* zu bestimmen.

- (iii) Da die Räume V und V^* die selbe Dimension haben, sind sie natürlich isomorph zueinander. Es gibt jedoch unendlich viele solcher Isomorphismen unter denen keiner ausgezeichnet ist. Für beliebige Vektorräume gibt es also keinen kanonischen Weg, V und V^* zu identifizieren. Entscheidend ist für uns gerade, dass wir die Elemente von V^* auf die von V anwenden können (und in gewissem Sinne umgekehrt, siehe Übung).

Falls zusätzlich ein Skalarprodukt (oder allgemeiner ein Pseudoskalarprodukt wie die Minkowskimetrik) auf V gegeben ist, dann gibt es einen kanonischen Isomorphismus. Wir werden darauf später zurückkommen. In der physikalischen Literatur wird die daraus resultierende Identifikation von Elementen von V mit Elementen von V^* als „hochziehen“ oder „herunterziehen“ von Indizes bezeichnet.

- (iv) Seien nun $v = \alpha^i v_i \in V$ und $\theta = \beta_j \theta^j \in V^*$ Elemente mit ihren jeweiligen Basisdarstellungen. Dann erhalten wir

$$\theta(v) = \alpha^i \beta_j \theta^j(v_i) = \alpha^i \beta_j \delta_i^j = \alpha^i \beta_i.$$

Diese Formel erinnert sehr an die des Standardskalarproduktes, was generell für viel Verwirrung sorgt, da sie damit überhaupt nichts zu tun hat. Die Elemente θ und v sind Elemente unterschiedlicher Vektorräume und auf keinem der Räume ist ein Skalarprodukt gegeben.

- (v) Sei $T : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Dann können wir eine zugehörige lineare Abbildung $T^* : W^* \rightarrow V^*$ in die andere Richtung definieren, indem wir für $\rho \in W^*$ setzen

$$(T^* \rho)(v) = \rho(Tv).$$

Die Abbildung T^* ist ebenfalls linear (Nachrechnen) und heißt die zu T duale Abbildung.

- (vi) Wir können nun natürlich auch zum Dualraum V^* den Dualraum $(V^*)^*$ bilden. Glücklicherweise kann dieser Doppeldualraum im endlichdimensionalen Fall auf kanonische Weise mit dem ursprünglichen Vektorraum V identifiziert werden und die duale Basis der dualen Basis stimmt mit der ursprünglichen Basis überein (siehe Übung).

Für $k > 1$ ist die Forderung nach Antisymmetrie wichtig.

Bemerkung 10.58. (i) Für eine multilineare Abbildung $\omega \in \mathcal{L}^k(V|\mathbb{K})$ erhalten wir durch Permutationen der Argumente weitere multilineare Abbildungen. Sei $\sigma \in S_k$ eine Permutation, dann definieren wir

$$(\sigma\omega)(v_1, \dots, v_k) := \omega(v_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, v_{\sigma^{-1}(k)}).$$

Die Abbildung $\omega \mapsto \sigma\omega$ ist dann offenbar linear. Hier steht auf der rechten Seite die inverse Permutation σ^{-1} , damit wir eine sogenannte Linkswirkung von S_k auf den multilinearen Abbildungen erhalten, das heißt es gilt für $\eta \in S_k$ (Nachrechnen!)

$$\eta(\sigma\omega) = (\eta\sigma)(\omega).$$

- (ii) Eine multilineare Abbildung $\omega \in \mathcal{L}^k(V|\mathbb{K})$ ist also eine k -Form genau dann, wenn für jede Vertauschung $\sigma \in S_k$ gilt $\sigma\omega = -\omega$. Da wir jede Permutation als Produkt von Vertauschungen schreiben können, ist das auf Grund der Formel im vorhergehenden Punkt genau dann der Fall, wenn für beliebiges $\sigma \in S_k$ gilt $\sigma\omega = \text{sgn}(\sigma)\omega$.
- (iii) Insbesondere ist $\omega(v_1, \dots, v_k) = 0$, sobald zwei der Argumente übereinstimmen. Nehmen wir noch die Linearität hinzu, erhalten wir: Falls die Vektoren v_1, \dots, v_k linear abhängig sind, dann gilt $\omega(v_1, \dots, v_k) = 0$.

Daraus folgt speziell: für $k > n$ gibt es keine nichttrivialen k -Formen mehr.

- (iv) In der Physik-Literatur werden k -Formen auch als total antisymmetrische Tensoren bezeichnet. Wir werden feststellen, dass sie genau diejenigen Objekte sind, die auf beliebigen Mannigfaltigkeiten auf natürliche Weise sowohl differenziert als auch integriert werden können.

In der Quantenfeldtheorie tauchen k -Formen auch als sogenannte „Grassmann-Zahlen“ auf.

Definition 10.59. Wir definieren den Antisymmetrisierungsoperator, eigentlich einen für jedes $k \in \mathbb{N}$:

$$A : \mathcal{L}^k(V|\mathbb{K}) \rightarrow \Lambda^k(V)$$

durch

$$(A\omega) = \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn}(\sigma)\sigma\omega.$$

Es ist leicht sich davon zu überzeugen, dass der Antisymmetrisierungsoperator ebenfalls linear ist.

Beispiel 10.60. Die obige Formel sieht schlimmer aus, als sie ist. Für $k = 2$ gilt

$$(A\omega)(v_1, v_2) = \omega(v_1, v_2) - \omega(v_2, v_1),$$

für $k = 3$

$$(A\omega)(v_1, v_2, v_3) = \omega(v_1, v_2, v_3) + \omega(v_2, v_3, v_1) + \omega(v_3, v_1, v_2) \\ - \omega(v_2, v_1, v_3) - \omega(v_3, v_2, v_1) - \omega(v_1, v_3, v_2).$$

Satz 10.61. Für eine Permutation $\eta \in S_k$ und eine multilineare Abbildung $\omega \in \mathcal{L}^k(V|\mathbb{K})$ gilt

$$\eta(A\omega) = \text{sgn}(\eta)(A\omega) = A\eta\omega,$$

das heißt $A\omega$ ist stets eine k -Form. Eine multilineare Abbildung ω ist genau dann eine k -Form, wenn gilt $k!\omega = A\omega$.

Beweis. Sei $\eta \in S_n$ eine feste Permutation, dann ist die Abbildung von $S_n \rightarrow S_n$, die durch $\sigma \mapsto \eta\sigma$ gegeben ist, bijektiv. Das ist leicht einzusehen, denn durch Multiplikation von links mit η^{-1} ist die Umkehrabbildung gegeben. Diese Aussage gilt natürlich in jeder Gruppe.

In der Summation über alle $\sigma \in S_k$ können wir also σ durch $\eta\tilde{\sigma}$ ersetzen. Damit gilt für eine beliebige multilineare Abbildung $\omega \in \mathcal{L}^k(V|\mathbb{K})$

$$\eta(A\omega) = \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn}(\sigma)\eta\sigma\omega = \text{sgn}(\eta)^{-1} \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn}(\eta\sigma)(\eta\sigma)\omega = \text{sgn}(\eta)^{-1} \sum_{\tilde{\sigma} \in S_k} \text{sgn}(\tilde{\sigma})\tilde{\sigma}\omega$$

und damit wegen $\text{sgn}(\eta)^{-1} = \text{sgn}(\eta)$ die erste der gesuchten Formeln. Die zweite Formel folgt aus einer ganz analogen Rechnung (Nachrechnen!). Im vorletzten Schritt haben wir hier die Multiplikativität der Paritätsfunktion sowie die Linearität der Abbildung $\omega \mapsto \eta\omega$ ausgenutzt.

Falls $A\omega = k!\omega$ ist, dann folgt aus der obigen Formel, dass ω selbst bereits antisymmetrisch ist. Ist andererseits ω antisymmetrisch, dann gilt

$$(A\omega) = \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn}(\sigma)\sigma\omega = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma)^2\omega = k!\omega \quad \square$$

Mit dem Antisymmetrisierungsoperator können wir also aus jeder multilinearen Abbildung eine k -Form machen.

Bemerkung 10.62. Für zwei multilineare Abbildungen $\omega \in \mathcal{L}^k(V|\mathbb{K})$ und $\rho \in \mathcal{L}^l(V|\mathbb{K})$ können ein Produkt in $\mathcal{L}^{k+l}(V|\mathbb{K})$ definieren indem wir setzen

$$(\omega\rho)(v_1, \dots, v_{k+l}) = \omega(v_1, \dots, v_k)\rho(v_{k+1}, \dots, v_{k+l}).$$

Wir erhalten somit eine multilineare Abbildung $\omega\rho \in \mathcal{L}^k(V|\mathbb{K})$. Diese Produkt ist das Tensorprodukt und wird auch als $\omega \otimes \rho$ geschrieben. Wir werden hier aber zunächst nicht weiter auf diese Terminologie eingehen.

Sind ω und ρ nun k - beziehungsweise l -Formen, dann ist ihr Produkt natürlich im Allgemeinen keine $k+l$ -Form, da sie bei Vertauschung eines der ersten k Argumente mit einem der letzten l nicht notwendig das Vorzeichen wechselt.

Wie sich herausstellt, können wir dieses Problem jedoch beheben.

Definition 10.63. Seien $\omega \in \Lambda^k(V)$ und $\rho \in \Lambda^l(V)$ Formen, dann definieren wir als ihr äußeres Produkt die $k + l$ -Form

$$\omega \wedge \rho = \frac{1}{k!l!} A(\omega\rho).$$

Der Normierungsfaktor in dieser Definition ist notwendig, da wir beim Antisymmetrisieren für die Terme, welche nur die Argumente von ω beziehungsweise von ρ unter sich vertauschen, jeweils den selben Ausdruck bekommen.

Satz 10.64. *Das äußere Produkt hat die folgenden Eigenschaften. Seien $\omega, \tilde{\omega} \in \Lambda^k(V)$, $\rho \in \Lambda^l(V)$ und $\theta \in \Lambda^m(V)$ Formen sowie $a \in \mathbb{K}$, dann gelten*

- (i) $(\omega + a\tilde{\omega}) \wedge \rho = \omega \wedge \rho + a\tilde{\omega} \wedge \rho$,
- (ii) $\omega \wedge \rho = (-1)^{kl} \rho \wedge \omega$, insbesondere antikommutieren 1-Formen,
- (iii) $(\omega \wedge \rho) \wedge \theta = \omega \wedge (\rho \wedge \theta)$.

Beweis. (i) Übung.

(ii) Sei η die Permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & k+l \\ k+1 & \cdots & k+l & 1 & \cdots & k \end{pmatrix}$$

Dann ist offenbar

$$\omega\rho = \eta(\rho\omega)$$

und wir müssen wegen Satz 10.61 lediglich das Vorzeichen von η bestimmen, was wir auf dem Übungsblatt tun.

- (iii) Sei $\sigma \in S_{k+l}$ eine Permutation und $\tilde{\sigma} \in S_{k+l+m}$ diejenige Permutation, die auf den ersten $k + l$ Zahlen wie σ wirkt und die restlichen unverändert lässt. Die Leserin überzeuge sich davon, dass σ und $\tilde{\sigma}$ das selbe Vorzeichen haben. Dann gilt mit Satz 10.61

$$A(\sigma(\omega\rho)\theta) = A(\tilde{\sigma}(\omega\rho\theta)) = \text{sgn}(\tilde{\sigma})A(\omega\rho\theta).$$

und damit auf Grund der Linearität des Antisymmetrisierungsoperators

$$A(A(\omega\rho)\theta) = \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \text{sgn}(\sigma)A(\sigma(\omega\rho)\theta) = \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \text{sgn}(\tilde{\sigma})^2 A(\omega\rho\theta) = (k+l)!A(\omega\rho\theta).$$

Eine ganz ähnliche Rechnung zeigt, dass auch

$$A(\omega A(\rho\theta)) = (l+m)!A(\omega\rho\theta)$$

gilt. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}(\omega \wedge \rho) \wedge \theta &= \frac{1}{(k+l)!m!k!l!} A(A(\omega\rho)\theta) = \frac{1}{k!l!m!} A(\omega\rho\theta) \\ &= \frac{1}{k!(l+m)!l!m!} A(\omega A(\rho\theta)) = \omega \wedge (\rho \wedge \theta)\end{aligned}$$

womit die Assoziativität gezeigt ist. \square

Bemerkung 10.65. Im Beweis der Assoziativität haben wir für das äußere Produkt von drei Formen eine Formel mit nur einer Antisymmetrisierung erhalten. Analoge Formeln lassen sich per Induktion auch einfach für äußere Produkte von mehr als drei Formen herleiten.

Besonders wichtig ist, dass sich das Produkt von 1-Formen $\theta^1, \dots, \theta^k$ ohne zusätzliche Normierungsfaktoren zu

$$\theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \dots \wedge \theta^k = A(\theta^1 \theta^2 \dots \theta^k)$$

ergibt. Das äußere Produkt dreier 1-Formen $\theta^1, \theta^2, \theta^3$ ist also beispielsweise

$$\theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \theta^3 = \theta^1 \theta^2 \theta^3 + \theta^2 \theta^3 \theta^1 + \theta^3 \theta^1 \theta^2 - \theta^2 \theta^1 \theta^3 - \theta^1 \theta^3 \theta^2 - \theta^3 \theta^2 \theta^1.$$

Insbesondere gilt: stimmen zwei der Formen $\theta^1, \dots, \theta^k$ überein, dann verschwindet ihr äußeres Produkt, da sich in der Antisymmetrisierung je zwei Terme gegenseitig aufheben. Aus der Linearität folgt dann auch: Falls $\theta^1, \dots, \theta^k$ linear abhängig sind, dann verschwindet ihr äußeres Produkt.

Wir sind nun in der Lage, die Dimensionen der Räume der k -Formen zu bestimmen.

Satz 10.66. *Sei*

$$I = \left\{ (i_1, \dots, i_k) \in \{1, \dots, n\}^k \mid i_1 < i_2 < \dots < i_k \right\}$$

und $v_1, \dots, v_n \in V$ und $\theta^1, \dots, \theta^n \in V^$ ein Paar dualer Basen. Wir setzen für $i = (i_1, \dots, i_k) \in I$*

$$\omega^i = \theta^{i_1} \wedge \theta^{i_2} \wedge \dots \wedge \theta^{i_k}.$$

Dann bilden die ω^i für $i \in I$ eine Basis für den Raum $\Lambda^k(V)$.

Insbesondere gilt

$$\dim \Lambda^k(V) = \binom{n}{k}.$$

Beweis. Auf Grund der Antisymmetrisierung gilt für beliebige w_1, \dots, w_k

$$\omega^i(w_1, \dots, w_k) = \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn}(\sigma) \theta^{i_1}(w_{\sigma^{-1}(1)}) \theta^{i_2}(w_{\sigma^{-1}(2)}) \cdots \theta^{i_k}(w_{\sigma^{-1}(k)}).$$

Setzen wir nun Basisvektoren v_{j_1}, \dots, v_{j_k} ein, dann vereinfacht sich dieser Ausdruck stark. Ist j_1, \dots, j_k keine Permutation von i_1, \dots, i_k , dann verschwindet in jedem Summanden mindestens ein Faktor und der gesamte Ausdruck ist 0. Ist j_1, \dots, j_k eine Permutation von i_1, \dots, i_k , dann ist in der obigen Summe genau einer der Summanden gleich ± 1 und alle anderen verschwinden. Das Vorzeichen richtet sich dabei danach, ob die j_1, \dots, j_k durch eine gerade oder eine ungerade Permutation in i_1, \dots, i_k überführt werden.

Wir zeigen nun zunächst die lineare Unabhängigkeit: Seien dazu $\alpha_i \in \mathbb{K}$ für $i \in I$ Koeffizienten so, dass

$$\sum_{i \in I} \alpha_i \omega^i = 0$$

gilt. Ist $j = (j_1, \dots, j_k) \in I$ und wir wenden die obige Gleichung auf v_{j_1}, \dots, v_{j_k} an, dann verschwinden nach unseren Vorüberlegungen alle Terme der Summe auf der linken Seite außer α_j . Damit haben wir aber gezeigt, dass alle Koeffizienten bereits 0 sein müssen.

Sei andererseits $\omega \in \Lambda^k(V)$ eine k -Form. Dann gilt

$$\omega = \sum_{i \in I} \omega(v_{i_1}, \dots, v_{i_k}) \omega^i.$$

Die Gleichung lässt sich zunächst mittels der Vorüberlegung für Argumente v_{j_1}, \dots, v_{j_k} für ein $j = (j_1, \dots, j_k) \in I$ überprüfen. Da beide Seiten der Gleichung k -Formen sind, gilt sie dann auch, wenn wir beliebige Basisvektoren einsetzen. Schließlich sind multilineare Abbildungen durch ihre Werte auf den Basisvektoren eindeutig bestimmt.

Um schließlich die Dimension des Raumes $\Lambda^k(V)$ zu bestimmen, müssen wir also nur noch die Elemente von I abzählen. \square

Bemerkung 10.67. Zu einer gegebenen Basis $v_1, \dots, v_n \in V$ des ursprünglichen Vektorraumes gibt es also jeweils ausgezeichnete Basen für V^* – die duale Basis – sowie für jeden der Räume $\Lambda^k(V)$. Es verbietet uns natürlich niemand, auf diesen Räumen andere Basen zu verwenden, die genannten sorgen jedoch im Allgemeinen dafür, dass die resultierenden Formeln vergleichsweise überschaubar bleiben.

Wir wollen uns jetzt noch damit befassen, wie sich die entsprechenden Basen unter Basiswechseln verhalten. Sei dazu w_1, \dots, w_n eine weitere Basis für den ursprünglichen Vektorraum V . Wir werden diese hier die „neue“ Basis nennen und v_1, \dots, v_n als die „alte“ Basis. Wir können nun natürlich die Elemente der neuen Basis durch die der alten ausdrücken, das heißt es existieren Koeffizienten T^j_i so, dass für $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt

$$w_i = T^j_i v_j.$$

Die Matrix (T^j_i) heißt die Basistransformationsmatrix (oder kürzer Transformationsmatrix). Wie üblich ist der erste Index der Zeilenindex und der zweite der Spaltenindex.

Da diese Matrizen im Allgemeinen nicht symmetrisch sind, dürfen wir die Indizes nicht übereinander schreiben. Andererseits muss es natürlich auch eine Transformationsmatrix (S^k_j) geben, so dass

$$v_j = S^k_j w_k$$

gilt. Setzen wir nun eine der Gleichungen in die andere ein, dann erhalten wir

$$w_i = T^j_i S^k_j w_k.$$

Da die Basisdarstellung von Vektoren eindeutig ist, muss gelten $S^k_j T^j_i = \delta^k_i$. Hier steht links das Produkt der Matrizen S und T , wir haben also gezeigt, dass die Transformationsmatrizen zueinander invers sind.

Ist nun ein Vektor $v = \alpha^j v_j \in V$ bezüglich der alten Basis gegeben, dann erhalten wir

$$v = \alpha^j S^k_j w_k.$$

Wir erhalten also die Koeffizienten bezüglich der neuen Basis durch die Matrixmultiplikation der Transformationsmatrix S mit den Koeffizienten bezüglich der alten Basis: $S^k_j \alpha^j$. Analog erhalten wir die Koeffizienten bezüglich der alten Basis durch die Matrixmultiplikation der inversen T mit den Koeffizienten bezüglich der neuen Basis.

Wenden wir uns nun dem Dualraum zu. Zur alten Basis existiert die eindeutig bestimmte duale Basis $\theta^1, \dots, \theta^n$. Zur neuen Basis gehört natürlich auch eine eindeutig bestimmte duale Basis, die wir hier mit ρ^1, \dots, ρ^n bezeichnen wollen. Natürlich müssen sich auch die Elemente dieser Basis durch die alten ausdrücken lassen, das heißt es gibt eine Transformationsmatrix R so, dass für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt

$$\rho^i = R^i_j \theta^j.$$

Um nun die Matrix R zu bestimmen, wenden wir diese Gleichung auf $w_l = T^k_l v_k$ an und erhalten

$$\delta^i_l = \rho^i(w_l) = R^i_j T^k_l \theta^j(v_k) = R^i_j T^k_l \delta^j_k = R^i_j T^j_l.$$

Rechts steht das Produkt der beiden Transformationsmatrizen R und T und links die Einheitsmatrix. Es muss also $R = T^{-1}$ gelten.

Wir sehen, transformieren sich die alten Basisvektoren von V mit der Matrix T auf die neuen, dann transformieren sich die Koeffizienten eines bezüglich der alten Basis dargestellten Vektors mittels der inversen Matrix T^{-1} . Für duale Vektoren ist es genau umgekehrt: die alten Basisvektoren von V^* transformieren sich mit der Matrix T^{-1} auf die neuen, die Koeffizienten mit der Matrix T .

Betrachten wir nun zunächst die Basiselemente für 2-Formen, also

$$\rho^{i_1} \wedge \rho^{i_2}$$

für $i_1 < i_2$. Mit dem oben hergeleiteten Transformationsverhalten für die duale Basis und der Distributivität des äußeren Produktes können wir dann schreiben

$$\rho^{i_1} \wedge \rho^{i_2} = R^{i_1}_{j_1} R^{i_2}_{j_2} \theta^{j_1} \wedge \theta^{j_2}.$$

Diese Formel ist zwar korrekt, die rechte Seite ist aber keine Basisdarstellung, da über alle möglichen Werte von j_1 und j_2 summiert wird, nicht nur über die geordneten Paare von Indizes. Wir können das natürlich beheben, indem wir in den „falsch“ geordneten Produkten die Reihenfolge ändern (und dabei ein negatives Vorzeichen erhalten). Die Summanden mit übereinstimmenden indizes $j_1 = j_2$ verschwinden ohnehin. Wir erhalten dann

$$\begin{aligned}\rho^{i_1} \wedge \rho^{i_2} &= \sum_{j \in I} (R^{i_1}_{j_1} R^{i_2}_{j_2} \theta^{j_1} \wedge \theta^{j_2} + R^{i_1}_{j_2} R^{i_2}_{j_1} \theta^{j_2} \wedge \theta^{j_1}) \\ &= \sum_{j \in I} (R^{i_1}_{j_1} R^{i_2}_{j_2} - R^{i_1}_{j_2} R^{i_2}_{j_1}) \theta^{j_1} \wedge \theta^{j_2}.\end{aligned}$$

Dabei haben wir im letzten Schritt für die zweite Summe die Indizes umbenannt. Die in der Formel auftretenden Koeffizienten

$$R^{i_1}_{j_1} R^{i_2}_{j_2} - R^{i_1}_{j_2} R^{i_2}_{j_1}$$

entstehen, indem wir von der Transformationsmatrix R lediglich die i_1 -te und i_2 -te Zeile sowie die j_1 -te und j_2 -te Spalte behalten und von der resultierenden Matrix die Determinante bilden.

Für höhere k gibt es zur eben erhaltenen Formel analoge, die wir hier jedoch nicht formal aufschreiben wollen.

Bemerkung 10.68. Sei nun $A : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Dann können wir, analog zur dualen Abbildung A^* , eine Abbildung $A^* : \Lambda^k(W) \rightarrow \Lambda^k(V)$ in die andere Richtung definieren, durch die Formel

$$(A^* \omega)(v_1, \dots, v_k) = \omega(Av_1, \dots, Av_k).$$

10.6 Differentialformen

Wir können nun die im vorhergehenden Abschnitt für einen festen Vektorraum V ausgeführten Konstruktionen auf den Tangentenraum $T_x M$ im Punkt x einer Mannigfaltigkeit M anwenden. Den Dualraum $T_x^* M := (T_x M)^*$ bezeichnen wir auch als den Kotangentenraum. Im Folgenden wollen wir uns für Zuordnungen interessieren die jedem Punkt x einer Mannigfaltigkeit (oder einer offenen Teilmenge $U \subset M$) eine k -Form über $T_x M$ zuordnen. Wir werden auch solche Zuordnungen als k -Formen bezeichnen. Es ist üblich, wenn auch etwas verwirrend, das x -Argument solcher k -Formen in der Notation nicht explizit zu machen. Falls doch, dann wird es häufig in den Index geschrieben: also ω oder ω_x statt $\omega(x)$.

Bemerkung 10.69. Wir sehen uns zunächst den Spezialfall $M = \mathbb{R}^n$ an. In diesem Fall haben wir für jedes $x \in M$ die Identifikation $T_x M = \mathbb{R}^n$. Eine Differentialform ist dann eine glatte Abbildung ω von $\mathbb{R}^n \rightarrow \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ – jedem Punkt der Mannigfaltigkeit M wird also eine k -Form über dem Tangentenraum zugeordnet. Für eine glatte Funktion f ist nun die Ableitung $Df(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ genau so eine Differentialform. Aus Gründen die später klar werden, schreiben wir die Ableitung in diesem speziellen Fall als df und bezeichnen sie als das Differential von f . Wir erinnern uns: Jedem Tangentenvektor v wird durch df die entsprechende Richtungsableitung $\partial_v(f)(x)$ von f im Punkt x zugeordnet.

Speziell können wir uns nun für ein $i \in \{1, \dots, n\}$ die Abbildung $x = (x^1, \dots, x^n) \mapsto x^i$ ansehen. Dabei handelt es sich offensichtlich um eine glatte Funktion deren Differential wir mit dx^i bezeichnen. Für ein $v \in \mathbb{R}^n$ ist nun

$$dx^i(v) = \partial_v x^i.$$

Wählen wir für v einen Vektor e_j der Standardbasis, dann erhalten wir

$$dx^i(e_j) = \partial_{e_j} x^i = \delta_j^i,$$

und erkennen, dass die Differentiale dx^1, \dots, dx^n (in jedem Punkt) lediglich die zur Standardbasis duale Basis sind. Allgemeiner projiziert das lineare Funktional dx^i einen Vektor v also auf seine i -te Koordinate. Aus der Formel für die Basisentwicklung bezüglich der dualen Basis (Bemerkung 10.57) erhalten wir dann

$$df = df(e_i)dx^i = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i.$$

Um den letzten Ausdruck richtig zu interpretieren, müssen wir unsere Summenkonvention wie folgt erweitern: ein oberer Index an einer Größe die im Nenner steht zählt als unterer Index (und umgekehrt). Die obige Formel für das Differential einer Funktion ist nicht neu. Es handelt sich vielmehr um eine Umformulierung der bereits bekannten Kettenregel.

Für eine allgemeinere Mannigfaltigkeit M haben wir wieder ein ähnliches Problem wie bei Vektorfeldern: die Räume $\Lambda^k(T_x M)$ in denen die k -Formen „leben“ hängen vom Punkt x ab, so dass k -Form-wertige Felder keine klassischen Abbildungen sind und wir

daher Begriffe wie Differenzierbarkeit nicht ohne weiteres definieren können. Es ist möglich, auf den Mengen

$$\left\{ (x, \omega) \mid x \in M, \omega \in \Lambda^k(T_x M) \right\},$$

den sogenannten Fomenbündeln, eine Mannigfaltigkeitsstruktur zu definieren, allerdings eignet sich unser Zugang zu Mannigfaltigkeiten dafür eher schlecht.

Eine Ausnahme sind Formen vom Grad 0, also Funktionen auf M . Für diese wissen wir bereits was Differenzierbarkeit bedeutet. Ist nun f eine glatte Funktion, dann ist erneut die Ableitung Df in jedem Punkt eine 1-Form, die einem Vektor $v \in T_x M$ die Richtungsableitung in Richtung v zuordnet. Auch diese 1-Form bezeichnen wir als das Differential von f und schreiben df . Wir erinnern uns: Ist nun v_1, \dots, v_n die Koordinatenbasis, dann gilt (vergleiche Bemerkung 10.48)

$$(df(v_j))_x = \partial_{v_j} f(x) = (\partial_j f \circ \gamma^{-1})_{\gamma(x)}.$$

Den letzten Ausdruck nennen wir auch die j -te partielle Ableitung von f und schreiben dafür

$$\frac{\partial f}{\partial x^j}.$$

Wichtig ist, dass Differenzierbarkeit eine lokale Eigenschaft ist und das Differential ein lokaler Operator. Letzteres heißt, dass wir df in einem Punkt x bestimmen können, wenn wir f nur in einer beliebig kleinen Umgebung von x kennen. Das bedeutet insbesondere, dass das Differential auch für Funktionen Sinn ergibt, die nur auf einer offenen Teilmenge der Mannigfaltigkeit definiert sind.

Ist nun $\gamma : U \rightarrow V$ eine Kartenabbildung für M , dann sind die Komponentenfunktionen $\gamma^1, \dots, \gamma^n : U \rightarrow \mathbb{R}$ von γ reellwertige Funktionen auf der Mannigfaltigkeit und besitzen damit je ein zugehöriges Differential. Wir bezeichnen diese mit dx^1, \dots, dx^n und nennen sie die Koordinatendifferentiale. Aus der obigen Formel folgt dann, analog wie im \mathbb{R}^n -Fall,

$$dx^i(v_j) = \partial_j \gamma^i \circ \gamma^{-1} = \delta_j^i.$$

Die Koordinatendifferentiale entsprechen also auch im allgemeinen Fall in jedem Punkt $x \in U$ der zur Koordinatenbasis dualen Basis. Insbesondere können wir nun das Differential einer beliebigen Funktion bezüglich dieser Basis ausdrücken

$$df = df(v_i)dx^i = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i. \quad (10.7)$$

Natürlich hängen auch hier alle Ausdrücke vom Punkt x ab. Darüber hinaus hängen aber alle Ausdrücke auch von der gewählten Kartenabbildung ab.

Ist nun ω eine Zuordnung, die jedem Punkt x einer Mannigfaltigkeit eine k -Form in $\Lambda^k(T_x M)$ zuordnet, dann können wir sie natürlich in jedem Punkt bezüglich der Basis $dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ für $i \in I$ entwickeln

$$\omega = \sum_{i \in I} \alpha_i dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Die Koeffizienten α_i sind nun Funktionen auf der Mannigfaltigkeit. Wir definieren nun: ω heißt differenzierbar (glatt), genau dann wenn alle Koeffizienten α_i differenzierbare (glatte) Funktionen sind.

Da die Koeffizientenfunktionen von der gewählten Kartenabbildung abhängen, könnte unsere Definition potentiell ebenfalls von der Wahl der Karte abhängig sein. Glücklicherweise ist das nicht der Fall – nur daher ist die Definition sinnvoll – was wir in der Übung zeigen werden. Wir stellen noch fest, dass diese Definition der Differenzierbarkeit wieder lokal ist. Kenntnis von ω in einer kleinen Umgebung des Punktes x reicht aus um die Differenzierbarkeit zu bestimmen. Insbesondere können wir auch über Differenzierbarkeit und Glattheit von Formen sprechen, die lediglich auf offenen Teilmengen der Mannigfaltigkeit definiert sind. Unsere Definition impliziert insbesondere, dass die Formen

$$dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$$

glatt sind.

Definition 10.70. Eine Differentialform ω vom Grad k ist eine glatte Zuordnung, die jedem Punkt $x \in M$ eine k -Form $\omega_x \in \Lambda^k(T_x M)$ zuordnet. Den Vektorraum aller Differentialformen vom Grad k bezeichnen wir mit $\Omega^k(M)$. Dabei sollen Differentialformen vom Grad 0 glatte Funktionen auf M sein.

Beispiel 10.71. Für $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist M eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^2 und kann daher mit einer Kartenabbildung überdeckt werden (dem gewöhnlichen kartesischen Koordinatensystem. Dann definiert

$$(x, y) \mapsto -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

auf ganz M eine Differentialform vom Grad 1. Diese Form heißt Windungsform und ist unter anderem deshalb interessant, weil sie nicht das Differential einer glatten Funktion ist.

Aus der obigen Definition und Gleichung (10.7) ist ersichtlich, dass das Differential df einer glatten Funktion f differenzierbar ist. Das Differential ist also ein linearer Operator von $C^\infty(M) = \Omega^0(M) \rightarrow \Omega^1(M)$. Wir werden nun zeigen, dass sich dieser Operator auf kanonische Weise auf beliebige k -Formen erweitern lässt.

Satz 10.72. *Durch die folgenden Forderungen wird ein eindeutiger Differentialoperator*

$$d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$$

definiert, den wir als die äußere Ableitung bezeichnen.

(i) Für $f \in \Omega^0(M)$ gilt $df = Df$,

(ii) d ist linear,

(iii) für $\omega \in \Omega^k(M)$ und $\rho \in \Omega^l(M)$ gilt die Leibnitzregel

$$d(\omega \wedge \rho) = (d\omega) \wedge \rho + (-1)^k \omega \wedge (d\rho),$$

(iv) $d^2 = 0$.

Bemerkung 10.73. Wir werden den Satz unten in einer Reihe von Lemmata beweisen, wollen uns die Eigenschaften der äußeren Ableitung jedoch zunächst ansehen. Zunächst überprüfen wir, dass das Differential die geforderte Leibnitzregel erfüllt: Für $v \in T_x U$ gilt

$$d(\alpha\beta)(v) = \partial_v(\alpha\beta) = (\partial_v\alpha)\beta + \alpha(\partial_v\beta) = ((d\alpha)\beta + (-1)^0\alpha(d\beta))(v).$$

Wir betrachten nun zunächst eine Mannigfaltigkeit U , die sich mit nur einer Karte überdecken lässt (zum Beispiel den Definitionsbereich einer Kartenabbildung für eine beliebige Mannigfaltigkeit). Dann lässt sich jede Differentialform ω bezüglich der Koordinatendifferentiale ausdrücken

$$\omega = \sum_{i \in I} \alpha_i dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$$

Falls es eine äußere Ableitung auf M gibt, dann muss auf Grund der obigen Eigenschaften gelten

$$d\omega = \sum_{i \in I} d\alpha_i \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}.$$

Für die praktische Anwendung ist diese Formel meist ausreichend, da sie uns zusammen mit Gleichung (10.7) erlaubt, die äußere Ableitung explizit auszurechnen.

Andererseits können wir die Formel auch nutzen, um auf U eine (eigentlich natürlich die) äußere Ableitung zu definieren. Dazu setzen wir für eine glatte Funktion α und für $i \in I$

$$d(\alpha dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) := d\alpha \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}. \quad (10.8)$$

Aus der Definition folgt insbesondere, dass die äußere Ableitung der Koordinatendifferentiale verschwindet. Wir wollen Differentialformen wie sie oben im Argument stehen, als elementar bezeichnen. Es handelt sich dabei jedoch nicht um eine Eigenschaft der Formen an sich, da sie von der Wahl eines Koordinatensystems abhängt. Da jede Differentialform sich eindeutig als Linearkombination von elementaren Differentialformen schreiben lässt (und da das Differential auf Funktionen linear ist), wird durch die obige Formel eindeutig eine lineare Abbildung von $\Omega^k(U) \rightarrow \Omega^{k+1}(U)$ definiert. Aus der Linearität folgt dann, dass die obige Formel auch für nicht angeordnete indizes i_1, \dots, i_k gilt, da bei einer Permutation σ der Indizes beide Seiten der Gleichung mit $\text{sgn } \sigma$ multipliziert werden.

Ist nun $\beta dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l}$ eine Differentialform vom Grad l , dann gilt

$$\begin{aligned} d((\alpha dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) \wedge (\beta dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l})) &= d(\alpha\beta) \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l} \\ &= \beta d\alpha \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l} + \alpha d\beta \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l} \\ &= (d(\alpha dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k})) \wedge (\beta dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l}) + (-1)^k (\alpha dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) \wedge d(\beta dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l}), \end{aligned}$$

also genau die geforderte Leibnitzregel für elementare Differentialformen. Wegen der Linearität von d und der Distributivität des äußeren Produktes gilt die Regel dann auch für beliebige Formen.

Aus der eben bewiesenen Leibnitzregel folgt schließlich

$$d^2(\alpha dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) = (d^2\alpha) \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}.$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} d(d\alpha) &= d\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x^j} dx^j\right) = d\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x^j}\right) dx^j = \frac{\partial^2\alpha}{\partial x^l \partial x^j} dx^l \wedge dx^j \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^l \partial x^j} dx^l \wedge dx^j + \frac{\partial^2\alpha}{\partial x^j \partial x^l} dx^j \wedge dx^l \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^l \partial x^j} - \frac{\partial^2\alpha}{\partial x^j \partial x^l} \right) dx^j \wedge dx^l = 0. \end{aligned}$$

Dabei haben wir im letzten Schritt den Satz von Schwarz verwendet (eigentlich eine allgemeinere Version dieses Satzes für Mannigfaltigkeiten). Da die elementaren Differentialformen den Raum $\Omega^k(M)$ aufspannen, erfüllt unsere äußere Ableitung auf U wie gefordert $d^2 = 0$. Bei dieser Bedingung handelt es sich also um eine Koordinatenfreie Formulierung des Satzes von Schwarz.

Der Vorteil der hier gewählten Herangehensweise ist nun, dass wir auf Grund der Eindeutigkeit wissen, dass die Formel (10.8) auch in jedem anderen Koordinatensystem gilt, ohne das explizit nachrechnen zu müssen. Wir haben für die Definition der äußeren Ableitung zwar eine spezielle Kartenabbildung verwendet, jede andere Karte würde aber ebenfalls eine äußere Ableitung definieren. Wegen der Eindeutigkeit müssen alle diese äußeren Ableitungen übereinstimmen.

Aus dem eben gezeigten folgt insbesondere, dass wir auf beliebigen Mannigfaltigkeiten „stückweise“ äußere Ableitungen definieren können (nämlich auf den Definitionsbereichen der Kartenabbildungen). Was wir noch nicht wissen ist, dass diese stückweisen Definitionen auch „zusammengesetzt“ werden können.

Lemma 10.74. *Sei $x \in M$ und $U \subset M$ eine offen Umgebung von x . Dann existiert eine kleinere Umgebung $W \subset U$ von x und eine glatte Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ so, dass $f|_W = 1$ und $f|_{M \setminus U} = 0$.*

Beweisidee. Es soll hier nur die Konstruktion beschrieben werden. Der Leser überprüfe zur Übung, dass die im Folgenden definierten Funktionen die genannten Eigenschaften haben.

Wir beginnen mit der Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} e \exp\left(-\frac{1}{x}\right) & x > 0 \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$

Sie ist monoton wachsend, beliebig differenzierbar, hat auf $(0, \infty)$ keine Nullstellen und erfüllt $f(1) = 1$. Die Funktion $g(x) = f(-f(1-x) + 1)$ ist dann ebenfalls beliebig differenzierbar, monoton wachsend und g ist konstant 0 auf $(-\infty, 0]$ und konstant 1 auf $[1, \infty)$.

Setzen wir nun für ein $x \in \mathbb{R}^n$ und für ein $r > 0$

$$\varphi_{x,r} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$y \mapsto g\left(2 - \frac{\|y - x\|^2}{r^2}\right)$$

dann erhalten wir eine glatte Funktion, die auf $B_r(x)$ konstant 1 ist und außerhalb von $B_{\sqrt{2}r}(x)$ konstant 0. Ist nun $M = \mathbb{R}^n$, dann erfüllen $W = B_r(x)$ und die Funktion $\varphi_{x,r}$ die Forderungen des Lemmas, falls $B_{\sqrt{2}r}(x)$ in U enthalten ist.

Ist schließlich M eine beliebige Mannigfaltigkeit und $x \in M$, dann können wir die eben erhaltene Lösung mittels einer Kartenabbildung auf die Mannigfaltigkeit transportieren. Sei dazu $\gamma : \tilde{U} \rightarrow V$ eine x überdeckende Karte und ein $r > 0$ so, dass $B_{2r}(\gamma(x)) \subset V \cap \gamma(U \cap \tilde{U})$. Setzen wir dann

$$f(y) = \begin{cases} \varphi_{\gamma(x),r} \circ \gamma & \gamma(y) \in B_{\sqrt{2}r}(\gamma(x)) \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

Dann erfüllen $\gamma^{-1}(B_1(\gamma(x)))$ und f die Forderungen des Lemmas. \square

Korollar 10.75. *Jede äußere Ableitung ist ein lokaler Operator. Das bedeutet, falls $x \in M$ ein Punkt, $U \subset M$ eine offene Umgebung von x und $\omega, \tilde{\omega} \in \Omega^k(M)$ zwei Formen sind, die auf U übereinstimmen, dann gilt $d\omega_x = d\tilde{\omega}_x$.*

Beweis. Wir wissen bereits, dass das Differential von $d : \Omega^0 \rightarrow \Omega^1$ die gewünschte Eigenschaft hat (Bemerkung 6.28).

Es sei nun ω eine k -Form, so dass $\omega_y = 0$ für alle $y \in U$ gilt. Sei nun f eine glatte Funktion so, dass $f|_V = 1$ für eine kleinere Umgebung $V \subset U$ und $f|_{M \setminus U} = 0$ gilt. Dann gilt $f\omega = 0$ und daher

$$0 = d(f\omega) = df \wedge \omega + f d\omega.$$

Da das Differential lokal ist und f auf einer Umgebung V von x konstant, gilt $(df)_x = 0$. Werten wir die obige Gleichung nun im Punkt x aus folgt also

$$0 = f(x)(d\omega)_x = (d\omega)_x.$$

Sind nun ω und $\tilde{\omega}$ auf U übereinstimmende Formen, dann verschwindet $\omega - \tilde{\omega}$ auf U und wegen des eben gezeigten sowie der Linearität von d gilt $d\omega - d\tilde{\omega} = 0$. \square

Korollar 10.76. Sei M eine Mannigfaltigkeit mit einer äußeren Ableitung d und $U \subset M$ eine offene Menge, die im Definitionsbereich einer Kartenabbildung enthalten ist. Dann gilt für die eindeutige äußere Ableitung d_U auf U und für $\omega \in \Omega^k(M)$

$$d\omega|_U = d_U \omega|_U .$$

Insbesondere existiert auf jeder Mannigfaltigkeit höchstens eine äußere Ableitung.

Beweis. Wir möchten mit Hilfe von d eine weitere äußere Ableitung auf U definieren. Dazu ist es notwendig, auf U definierte Differentialformen zu auf ganz M definierten Differentialformen fortzusetzen. Das ist aber selbst für Funktionen nicht immer möglich, da sie ja am Rand von U divergieren können.

Wir definieren daher etwas umständlich: Für $\omega \in \Omega^k(U)$ und $x \in U$ sei $\tilde{\omega} \in \Omega^k(M)$ eine Differentialform, die auf einer Umgebung von x mit ω übereinstimmt. Um zu zeigen, dass so eine Differentialform existiert, wählen wir eine offene Umgebung \tilde{U} so, dass $\tilde{U} \subset U$ (Warum existiert das?), eine kleinere Umgebung $V \subset \tilde{U}$ und eine glatte Funktion f auf M so, dass $f|_V = 1$ und $f|_{M \setminus \tilde{U}} = 0$ gelten und setzen

$$\tilde{\omega}_x = \begin{cases} f\omega_x & x \in U \\ 0 & x \notin U \end{cases} .$$

Wir setzen nun

$$(\tilde{d}_U \omega)_x := (d\tilde{\omega})_x .$$

Auf Grund der Lokalität von d ist diese Definition nicht davon abhängig, wie wir $\tilde{\omega}$ wählen.

Die Abbildung \tilde{d}_U erbt nun die Eigenschaften einer äußeren Ableitung von d . Da U sich mit nur einer Kartenabbildung überdecken lässt, wissen wir aber bereits, dass es auf U genau eine äußere Ableitung gibt, es gilt also $d_U = \tilde{d}_U$. Ist nun $\omega \in \Omega^k(M)$, dann ist ω natürlich eine Fortsetzung von $\omega|_U$ und daher gilt

$$d_U \omega|_U = \tilde{d}_U \omega|_U = d\omega|_U .$$

Da nun die Einschränkungen zweier äußerer Ableitungen auf M in einer hinreichend kleinen Umgebung (zum Beispiel dem Definitionsbereich einer Kartenabbildung) jedes Punktes x übereinstimmen müssen, kann es höchstens eine äußere Ableitung auf M geben. \square

Beweis von Satz 10.72. Wir müssen nur noch zeigen, dass es auf einer Mannigfaltigkeit M eine äußere Ableitung gibt. Wir überdecken dafür die Mannigfaltigkeit M durch Definitionsbereiche U_α von Kartenabbildungen γ_α , wobei der Index α irgendeine Indexmenge A durchläuft. Auf Grund der Definition der Mannigfaltigkeit ist das immer möglich. Auf jeder der offenen Mengen U_α gibt es nun eine eindeutige äußere Ableitung d_α .

Sei nun $\omega \in \Omega^k(M)$ eine Differentialform. Für ein $x \in M$ wählen wir ein U_α mit $x \in U_\alpha$ und definieren

$$(d\omega)_x = (d_\alpha \omega|_{U_\alpha})_x.$$

Diese Definition hängt nicht von der Wahl von U_α ab, denn falls x auch in U_β liegt, dann ist $U_\alpha \cap U_\beta$ eine offene Umgebung von x und die Einschränkungen von d_α und d_β auf diese Mannigfaltigkeit müssen nach dem vorhergehenden Korollar übereinstimmen.

Wir müssen nun nachprüfen, dass durch die Definition eine Differentialform definiert wird und d die definierenden Eigenschaften einer äußeren Abbildung erfüllt. Sei dazu $x \in M$ ein beliebiger Punkt und $\alpha \in A$ so, dass $x \in U_\alpha$ ist. Dann ist $d\omega$ auf U_α durch $d_\alpha \omega|_{U_\alpha}$ gegeben. Der letztere Ausdruck ist aber eine Differentialform und da d_α eine äußere Ableitung ist, gilt das auch für die Einschränkung von d auf U_α . Da die definierenden Eigenschaften einer äußeren Ableitung alle lokal sind, das heißt sich in einer kleinen Umgebung eines Punktes überprüfen lassen, ist damit gezeigt, dass der oben definierte Differentialoperator d eine äußere Ableitung ist. \square

Definition 10.77. Eine Differentialform $\omega \in \Omega^k(M)$ heißt geschlossen, falls $d\omega = 0$ ist und exakt, falls eine Differentialform θ existiert, so dass $d\theta = \omega$. In diesem Fall nennen wir θ eine Potentialform für ω .

Bemerkung 10.78. (i) Exakte Formen liegen im Bild von d , geschlossene Formen im Kern von d . Da $d^2 = 0$ ist, ist jede exakte Form geschlossen. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht, wie wir noch sehen werden. Aus dem Unterschied zwischen exakten und geschlossenen Formen, lassen sich interessante Information über die Topologie der zugrundeliegenden Mannigfaltigkeit gewinnen (de-Rahm-Kohomologie).

- (ii) Jede n -Form auf einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit ist geschlossen, da ihre äußere Ableitung eine $n+1$ -Form ist und damit verschwindet.
- (iii) Einige physikalische Gesetze lassen sich sehr elegant in der Sprache der Differentialformen formulieren, allen voran die Maxwell-Gleichungen. Die entsprechenden Formulierungen haben den Vorteil, dass sie manifest unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems sind, was selbst im \mathbb{R}^3 (oder \mathbb{R}^4 in der relativistischen Behandlung) nützlich ist, da auch dort andere als kartesische Koordinaten Verwendung finden. In der theoretischen Physik wird der Zugang über Formen jedoch selten verwendet, da Vektorfelder einerseits der Anschauung leichter zugänglich sind und andererseits die „technische Eintrittsbarriere“ niedriger ist.
- (iv) Das Kotangentialbündel

$$\{(x, \theta) \mid x \in M, \theta \in T_x^*M\}$$

einer Mannigfaltigkeit – in der Physik als Phasenraum bezeichnet – besitzt eine kanonische nicht ausgeartete (wir werden hier nicht definieren was das heißt),

geschlossene 2-Form. Solche Formen heißen symplektische Formen und die zugehörigen Mannigfaltigkeiten symplektische Mannigfaltigkeiten. Sie sind der natürliche „Lebensraum“ des Hamilton-Formalismus der klassischen Mechanik.

Eine wichtige Eigenschaft von Differentialformen ist es, dass wir sie mittels Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten transportieren können.

Definition 10.79. Seien M, N Mannigfaltigkeiten, $\varphi : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung und $\omega \in \Omega^k(N)$. Dann definieren wir den Pull-Back (Rücktransport) von ω entlang der Abbildung φ als die k -Form auf M , die für $x \in M$ und $v_1, \dots, v_k \in T_x M$ durch

$$(\varphi^* \omega)_x(v_1, \dots, v_k) = \omega_{\varphi(x)}(D\varphi(x)v_1, \dots, D\varphi(x)v_k)$$

gegeben ist.

Bemerkung 10.80. (i) Für eine 0-Form f , ist diese Definition lediglich $(\varphi^* f)(x) = f(\varphi(x)) = f \circ \varphi(x)$. In diesem Fall entspricht der Pull-Back also der Verkettung mit φ .

(ii) Da der Pull-Back punktweise definiert ist, lässt sich leicht nachprüfen, dass für $\omega, \tilde{\omega} \in \Omega^k(M)$, $\rho \in \Omega^l(M)$ und $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\varphi^*(\omega + \alpha\tilde{\omega}) &= \varphi^*\omega + \alpha\varphi^*\tilde{\omega} \text{ und} \\ \varphi^*(\omega \wedge \rho) &= (\varphi^*\omega) \wedge (\varphi^*\rho)\end{aligned}$$

gilt.

(iii) Für eine weitere glatte Abbildung $\tilde{\varphi} : N \rightarrow Q$ zwischen zwei Mannigfaltigkeiten gilt $(\tilde{\varphi} \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \tilde{\varphi}^*$.

(iv) Für eine glatte Funktion f ist natürlich auch die Verkettung $f \circ \varphi$ glatt. Der Pull-Back bildet also Differentialformen vom Grad 0 wieder auf ebensolche ab. Für $v \in T_x M$ folgt dann aus der Kettenregel

$$\begin{aligned}d(\varphi^* f)_x(v) &= (D(f \circ \varphi))_x(v) = (Df)_{\varphi(x)} D\varphi(x)v \\ &= (df)_{\varphi(x)}(D\varphi(x)v) = (\varphi^* df)_x(v).\end{aligned}$$

Der Pull-Back vertauscht also mit dem Differential.

(v) Sei nun $\gamma = (\gamma^1, \dots, \gamma^n) : U \rightarrow V$ eine Karte auf M und dx^1, \dots, dx^n die zugehörigen Koordinatendifferentiale. Ist $\alpha \in \mathbf{C}^\infty(M)$, dann gilt auf Grund der bereits gezeigten Eigenschaften

$$\varphi^*(\alpha dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) = \varphi^*(\alpha d\gamma^{i_1} \wedge \dots \wedge d\gamma^{i_k}) = (\varphi^* \alpha) d(\varphi^* \gamma^{i_1}) \wedge \dots \wedge d(\varphi^* \gamma^{i_k}).$$

Der letzte Ausdruck ist aber ein Produkt von glatten Formen und daher selbst ebenfalls glatt. Da Formen der obigen Gestalt den Raum $\Omega^k(M)$ aufspannen und φ^* linear ist haben wir gezeigt: der Pull-Back einer Differentialform ist wieder eine Differentialform.

- (vi) Ein gegebenes φ definiert auf diese Weise eine Reihe von linearen Abbildungen $\varphi^* : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(M)$, die mit dem äußeren Produkt vertauschen. Für uns besonders interessant werden Pull-Backs entlang der Kartenabbildungen (oder deren Umkehrungen) sein, da sie es uns erlauben das Geschehen von einer Mannigfaltigkeit in den \mathbb{R}^n zu verlagern.

Satz 10.81. *Mit den Voraussetzungen von Definition 10.79 gilt*

$$d\varphi^* = \varphi^*d.$$

Beweis. Wir haben oben bereits gezeigt, dass diese Aussage für 0-Formen gilt. Wählen wir nun wieder eine Karte, dann gilt

$$\begin{aligned} d\varphi^*(\alpha dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) &= d((\varphi^*\alpha)d(\varphi^*\gamma^{i_1}) \wedge \cdots \wedge d(\varphi^*\gamma^{i_k})) \\ &= d(\varphi^*\alpha) \wedge d(\varphi^*\gamma^{i_1}) \wedge \cdots \wedge d(\varphi^*\gamma^{i_k}) \\ &= \varphi^*(d\alpha \wedge d\gamma^{i_1} \wedge \cdots \wedge d\gamma^{i_k}) = \varphi^*d(\alpha dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}). \end{aligned}$$

Da $d\varphi^*$ und φ^*d linear sind, ist damit die gewünschte Aussage gezeigt. \square

Bemerkung 10.82. Ein wichtiger Spezialfall des Pull-Backs ergibt sich wie folgt: Unsere Mannigfaltigkeiten M sind immer Teilmengen eines umgebenden Raumes \mathbb{R}^n . Daher gibt es trivialerweise eine Einbettungsabbildung $\iota : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ welche glatt ist (Warum?). Wir können nun eine auf \mathbb{R}^n definierte k -Form entlang dieser Einbettungsabbildung zurückziehen. Das klingt geheimnisvoller als es ist. Die Ableitung $D\iota(x)T_xM \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist ebenfalls nur gewöhnliche Einbettung, die zurückgezogene Form $\iota^*\omega$ ist also lediglich die Einschränkung von ω auf M , das heißt wir werten ω nur an Punkten aus M aus und auf Tangentenvektoren von M aus.

Der obige Satz sagt dann, dass die äußere Ableitung der Einschränkung von ω auf M mit der Einschränkung der äußeren Ableitung auf M übereinstimmt. Formen verhalten sich bei der Einschränkung auf Untermannigfaltigkeiten also so, wie wir es vermutlich erwarten würden.

Es ist aber vorsicht geboten: Die Einschränkung $\iota^*\omega_x$ kann verschwinden (beim Einsetzen von Elementen aus T_xM erhalten wir immer 0), selbst wenn es ω_x nicht tut (beim Einsetzen von Beliebigen Vektoren können von 0 verschiedene Werte auftreten. Insbesondere kann eine Form auf der Untermannigfaltigkeit M geschlossen sein, selbst wenn sie es auf dem umgebenden Raum nicht ist.

Als Beispiel betrachten wir auf \mathbb{R}^3 die Form

$$\omega_{(x,y,z)} = xdy + ydx + xydz,$$

sowie die Untermannigfaltigkeit $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$. Die Einschränkung ist dann

$$(\iota^*\omega)_{(x,y,0)} = xdy + ydx,$$

und damit eine geschlossene Form, während $d\omega$ von 0 verschieden ist (selbst auf der Untermannigfaltigkeit $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$).

10.7 Integration über Mannigfaltigkeiten

Wir werden in diesem Abschnitt sehen, dass Formen die Objekte sind, die wir auf natürliche Weise über Mannigfaltigkeiten integrieren können.

Definition 10.83. Sei M eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit und $U \subset M$ eine offene Teilmenge. Eine Parametrisierung von U besteht aus einer offenen Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^n$ und einem glatten Diffeomorphismus $\varphi : V \rightarrow U$.

Bemerkung 10.84. (i) Diffeomorphismus heißt oben, dass φ bijektiv ist und φ sowie φ^{-1} glatte Abbildungen sind. Um zu überprüfen, ob eine gegebene Abbildung φ ein Diffeomorphismus ist, müssen Glattheit und Bijektivität überprüft werden sowie die Invertierbarkeit der Ableitung $D\varphi(t) : \mathbb{R}^n \rightarrow T_{\varphi(t)}M$ für jedes $t \in V$. Die Glattheit der Umkehrabbildung folgt dann aus einer Version des Satzes über die Umkehrfunktion für Mannigfaltigkeiten (welche sich durch geeignete Verkettung mit Kartenabbildungen beweisen lässt).

- (ii) Da M im Allgemeinen in einem höherdimensionalen Raum \mathbb{R}^m eingebettet ist, ist U eine Teilmenge von \mathbb{R}^m . Die geforderte Invertierbarkeit entspricht also nicht der Invertierbarkeit der Jakobi-Matrix (diese ist in diesen Fällen nicht mal eine quadratische Matrix). Falls die Dimension n „richtig“ gewählt wurde, also mit der der Mannigfaltigkeit übereinstimmt, dann ist es ausreichend die Injektivität der Abbildung $D\varphi(t)$ zu zeigen. Injektiv ist die Abbildung genau dann, wenn die Standardbasis von \mathbb{R}^n wieder auf ein linear unabhängiges System abgebildet wird, wenn also die Spalten der Jakobi-Matrix, das heißt die partiellen Ableitungen von φ im Punkt t linear unabhängig sind.
- (iii) Ist $\gamma : U \rightarrow V$ eine Kartenabbildung, dann ist γ^{-1} eine Parametrisierung für U . Es lässt sich umgekehrt auch zeigen, dass φ^{-1} für jede Parametrisierung φ eine Kartenabbildung ist. Karten und Parametrisierungen sind daher im Prinzip austauschbar und welches wir verwenden ist nur eine Frage der Perspektive.

Insbesondere können wir also für einen Punkt x einer Mannigfaltigkeit immer eine Parametrisierung für eine Umgebung des Punktes x finden.

- (iv) Da φ in die Mannigfaltigkeit abbildet, liegen die Richtungsableitungen

$$\partial_v \varphi(t) = D\varphi(t)v$$

für jedes $v \in \mathbb{R}^n$ in $T_{\varphi(t)}M$. Insbesondere sind die oben aufgeführten partiellen Ableitungen $\partial_i \varphi$ Tangentenvektoren im Punkt $T_{\varphi(t)}M$. Interpretieren wir φ^{-1} als eine Kartenabbildung, dann handelt es sich genau um die zugehörige Koordinatenbasis.

Beispiel 10.85. (i) Wir betrachten den Einheitskreis $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Dann ist durch

$$\begin{aligned} \varphi : (0, 2\pi) &\rightarrow S^1 \\ t &\mapsto (\cos(t), \sin(t)) \end{aligned}$$

eine Parametrisierung für die (relativ) offene Teilmenge $S^1 \setminus \{(1, 0)\}$ gegeben. Die Forderung, dass $D\varphi(t)$ invertierbar ist, entspricht hier nur der Bedingung $\varphi'(t) \neq 0$, welche sich einfach nachprüfen lässt.

- (ii) Sei $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion und $M = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{k+1} \mid x \in \mathbb{R}^k\}$ der Graph von f . Betrachte

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}^k &\rightarrow M \\ t &\mapsto (t, f(t)).\end{aligned}$$

Die Abbildung ist offensichtlich bijektiv, glatt und für einen Standardbasisvektor e_i gilt

$$\partial_i \varphi(t) = (e_i, \partial_i f(t)).$$

Da diese Vektoren wieder linear unabhängig sind, ist φ eine Parametrisierung.

Definition 10.86. Sei $U \subset \mathbb{R}^k$ offen und ω eine Differentialform auf U . Dann bezeichnen wir mit \int_U die eindeutige lineare Abbildung von $\Omega^k(U) \rightarrow \mathbb{R}$ die durch

$$\int_U \alpha(x) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k = \int_U \alpha(t) d\lambda^k(t)$$

gegeben ist.

Erstaunlicherweise ist diese Definition des Integrals von Formen unter Diffeomorphismen, also beliebigen Koordinatentransformationen, (fast) invariant. Um das exakt formulieren zu können, benötigen wir noch den folgenden Begriff.

Definition 10.87. Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt wegzusammenhängend, wenn es für je zwei Punkte x und y eine stetige Kurve, also eine Abbildung $c : [0, 1] \rightarrow U$ gibt, so dass $c(0) = x$ und $c(1) = y$ gilt.

Bemerkung 10.88. (i) Heuristisch bestehen zusammenhängende Mengen „aus einem Stück“.

- (ii) Für einen Punkt $x \in U$ heißt die größte wegzusammenhängende Teilmenge von U die Wegzusammenhangskomponente von x . Jede Menge lässt sich dann eindeutig in solche Wegzusammenhangskomponenten zerlegen, es kann von diesen aber sehr viele geben (Betrachte als Beispiel $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$).
- (iii) Es gibt noch einen etwas allgemeineren Begriff: Ein metrischer (oder topologischer) Raum heißt zusammenhängend, wenn er sich nicht in nichtleere, zugleich offene und abgeschlossene Teilmengen zerlegen lässt. Wir werden den Begriff hier hauptsächlich für offene Teilmengen einer Mannigfaltigkeit anwenden und in diesem Fall stimmen „zusammenhängend“ und „wegzusammenhängend“ überein.

- (iv) Die (weg-)zusammenhängenden Teilmengen von \mathbb{R} sind genau die Intervalle, was intuitiv leicht einzusehen, aber nicht ganz trivial zu beweisen ist.
- (v) Der Zwischenwertsatz für stetige Funktionen lässt sich nun wie folgt verallgemeinern: Stetige Funktionen bilden (weg-)zusammenhängende Mengen wieder auf (weg-)zusammenhängende Mengen ab.
- (vi) Wir werden in Zukunft stets annehmen, dass die Definitionsbereiche (und damit automatisch auch die Wertebereiche) von Karten und Parametrisierungen wegzusammenhängend sind. Dabei handelt es sich nicht um eine Einschränkung, da wir eine Karte $\gamma : U \rightarrow V$ einer Umgebung eines Punktes $x \in M$ stets auf das Innere der Zusammenhangskomponente von x in U einschränken können. Letztere Menge ist wegen der Offenheit von U eine Umgebung von x .

Satz 10.89. *Seien $U, V \subset \mathbb{R}^k$ offen und wegzusammenhängend und $\omega \in \Omega^k(U)$. Sei $\varphi : V \rightarrow U$ ein Diffeomorphismus. Dann gilt*

$$\int_U \omega = \pm \int_V \varphi^* \omega.$$

Beweis. Da beide Seiten der zu zeigenden Gleichung linear in ω sind, ist es ausreichend den Fall $\omega = \alpha(x) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k$ zu betrachten. Da der Raum der k -Formen über einem k -dimensionalen Vektorraum 1-dimensional ist, muss es eine Funktion $\beta : V \rightarrow \mathbb{R}$ geben, so dass

$$\varphi^* dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k = \beta dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k$$

gilt. Wenden wir beide Seiten der Gleichung im Punkt $t \in V$ auf die Standardbasis e_1, \dots, e_k an, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \beta(t) &= (dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k)(D\varphi(t)e_1, \dots, D\varphi(t)e_k) \\ &= (dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k)(\partial_1 \varphi(t), \dots, \partial_k \varphi(t)) \\ &= \det(dx^i(\partial_j \varphi(t))) = \det(\partial_j \varphi^i(t)) = \det(D\varphi(t)). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir auch

$$\int_V \varphi^* \omega = \int_V \alpha \circ \varphi \det(D\varphi) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k = \int_V \alpha(\varphi(t)) \det(D\varphi(t)) d\lambda^k(t).$$

Wir können nun ausnutzen, dass V wegzusammenhängend ist. Da $\det(D\varphi)$ stetig ist, muss auch das Bild in \mathbb{R} wieder wegzusammenhängend, also ein Intervall sein. Da φ ein Diffeomorphismus ist, darf dieses Intervall nicht die 0 enthalten, die Funktion $\det(D\varphi)$ muss auf V also konstantes Vorzeichen haben. Ist die Funktion auf ganz V positiv, dann erhalten wir mit dem Transformationssatz

$$\int_V \varphi^* \omega = \int_V \alpha(\varphi(t)) |\det(D\varphi(t))| d\lambda^k(t) = \int_U \alpha(x) d\lambda^k(x) = \int_U \omega.$$

Im anderen Fall erhalten wir den selben Ausdruck mit umgekehrtem Vorzeichen. □

Korollar 10.90. Sei M eine Mannigfaltigkeit, $U \subset M$ offen und wegzusammenhängend, $\omega \in \Omega^k(U)$ und $\varphi : V \rightarrow U$ und $\tilde{\varphi} : \tilde{V} \rightarrow U$ zwei Parametrisierungen, dann ist

$$\int_V \varphi^* \omega = \pm \int_{\tilde{V}} \tilde{\varphi}^* \omega.$$

Beweis. Da die Umkehrabbildungen $\tilde{\varphi}^{-1}$ und φ^{-1} stetig sind, sind auch V und \tilde{V} wegzusammenhängend. Die Verkettung $\eta = \varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi}$ ist ein Diffeomorphismus zwischen ihnen und es gilt $\tilde{\varphi}^* = \eta^* \varphi^*$. Damit folgt die Aussage direkt aus dem vorhergehenden Korollar. \square

Bemerkung 10.91. Zu beachten ist, dass die Integrale in den beiden vorhergehenden Sätzen nicht existieren müssen. In diesen Fällen ist die Aussage so zu verstehen, dass das Integral auf der einen Seite der Gleichung genau dann existiert, wenn das Integral auf der anderen Seite existiert.

Bemerkung 10.92. Wir würden nun gern das Integral über die Form ω als $\int_V \varphi^* \omega$ definieren, also indem wir die Form mittels einer beliebigen Parametrisierung auf \mathbb{R}^n zurückziehen und dann dort integrieren. Nach dem obigen Korollar ist dieser Ausdruck bis auf das Vorzeichen eindeutig bestimmt, Formen haben also tatsächlich genau das richtige Transformationsverhalten um eine von der Wahl der Parametrisierung beziehungsweise des Koordinatensystems unabhängige Integraldefinition zu erlauben. Natürlich müssen wir einen Weg finden mit der Uneindeutigkeit des Vorzeichens umzugehen. Zu diesem Zweck müssen wir Mannigfaltigkeiten mit einer zusätzlichen Struktur, einer sogenannten Orientierung ausstatten. Nicht jede Mannigfaltigkeit erlaubt Orientierungen. Falls es welche gibt, können sie auf unterschiedliche Art festgelegt werden.

Definition 10.93. Sei V ein Vektorraum. Zwei Basen v_1, \dots, v_n und $\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n$ heißen gleich orientiert, falls die Determinante der zugehörige Transformationsmatrix T positiv ist. Andernfalls heißen sie entgegengesetzt orientiert. Im Gegensatz zu unserer bisherigen Verwendung von Basen kommt es hier entscheidend auf die Anordnung der Basisvektoren an.

Sei nun M eine Mannigfaltigkeit. Zwei Karten $\gamma : U \rightarrow V$, $\tilde{\gamma} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ mit überlappenden Definitionsbereichen oder zwei Parametrisierungen $\varphi : V \rightarrow U$, $\tilde{\varphi} : \tilde{V} \rightarrow \tilde{U}$ mit überlappenden Wertebereichen heißen gleich orientiert, falls

$$\det(D(\gamma \circ \tilde{\gamma}^{-1})) > 0 \text{ beziehungsweise } \det(D(\varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi})) > 0$$

gilt (überall da wo die linke Seite definiert ist). Andernfalls heißen sie entgegengesetzt orientiert.

Ein Atlas für M heißt orientiert, falls alle seine Karten gleich orientiert sind. Eine Mannigfaltigkeit heißt orientierbar, falls sie einen orientierten Atlas besitzt.

Bemerkung 10.94. (i) Da für eine invertierbare Matrix T gilt $\det(T^{-1}) = \det(T)^{-1}$, sind A und B gleich orientiert, genau dann, wenn B und A gleich orientiert sind, für jeden der oben definierten Begriffe.

- (ii) Wir können aus einer Basis (einer Karte, einer Parametrisierung) eine entgegengesetzt orientierte Basis (Karte, Parametrisierung) erhalten, indem wir zwei Basisvektoren (Koordinaten, Koordinaten) vertauschen.

Auch können wir aus einem orientierten Atlas einen entgegengesetzt orientierten erhalten, indem wir die Orientierung jeder seiner Karten wechseln.

- (iii) Da $D(\gamma \circ \tilde{\gamma}^{-1})$ genau die Transformationsmatrix für die zu γ und $\tilde{\gamma}$ gehörigen Koordinatenbasen ist, sind die Karten $\gamma, \tilde{\gamma}$ gleich orientiert, genau dann, wenn die zugehörigen Koordinatenbasen in einem (oder äquivalent in jedem) Punkt des gemeinsamen Definitionsbereiches gleich orientiert sind. Eine analoge Aussage gilt natürlich für Parametrisierungen.

- (iv) Mit dem Argument im Beweis von Satz 10.89 sind zwei Karten mit wegzusammenhängenden, sich überlappenden Definitionsbereichen entweder gleich oder entgegengesetzt orientiert.

- (v) Für drei Karten $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ mit überlappenden Definitionsbereichen gilt: sind γ_1 und γ_2 gleich orientiert und γ_2 und γ_3 gleich orientiert, dann auch γ_1 und γ_3 (Warum?).

Insbesondere ist eine beliebige Karte entweder zu allen Karten eines orientierten Atlas gleich orientiert oder zu allen entgegengesetzt orientiert. Für zwei orientierte Atlanten gibt es jedoch im Allgemeinen mehr Möglichkeiten.

Beispiel 10.95. Das wohl bekannteste Beispiel einer nicht orientierbaren Mannigfaltigkeit ist das Möbiusband. Es entsteht, indem das eine Ende eines rechteckigen Papierstreifens um 180° gedreht an das andere Ende geklebt wird. Eine exakte mathematische Beschreibung ist zum Beispiel durch die Einbettung

$$\left\{ \left(\left(1 + \frac{v}{2} \cos\left(\frac{u}{2}\right) \right) \cos(u), \left(1 + \frac{v}{2} \cos\left(\frac{u}{2}\right) \right) \sin(u), \frac{v}{2} \sin\left(\frac{u}{2}\right) \right) \mid u \in \mathbb{R}, v \in (-1, 1) \right\}$$

gegeben. Es ist wichtig zu beachten, dass das mathematische Möbiusband, anders als das aus Papier gefertigte Modell, keine Dicke und keine zwei Seiten hat.

Formal zu beweisen, dass es keinen orientierten Atlas gibt, ist etwas aufwändig, wir können uns jedoch intuitiv relativ leicht davon überzeugen, indem wir ein auf ein kleines Blatt Papier aufgemaltes Koordinatensystem einmal um das Loch des Möbiusbandes herumführen. Dabei darf das Koordinatensystem beliebig gedreht werden, darf das Möbiusband aber nicht verlassen. Wieder am Ausgangspunkt angekommen, stellen wir fest, dass das neue Koordinatensystem die umgekehrte Orientierung wie das alte aufweist (das Koordinatensystem befindet sich jetzt „auf der anderen Seite“ des Bandes, was jedoch nur in unserem Modell, nicht im mathematischen Objekt relevant ist).

Satz 10.96. *Sei M eine wegzusammenhängende Mannigfaltigkeit dann sind zwei orientierte Atlanten entweder gleich oder entgegengesetzt orientiert.*

Beweis. Seien A und B die orientierten Atlanten. Sei nun M_+ die Vereinigung der Definitionsbereiche aller Karten von B , die mit A gleich orientiert sind und M_- die Vereinigung

der Definitionsbereiche aller Karten von B , die zu A entgegengesetzt orientiert sind. Die Mengen M_+ und M_- sind disjunkt (andernfalls müsste es Punkte geben, die im Definitionsbereich einer zu A gleich orientierten und einer zu A entgegengesetzt orientierten Karte von B liegen, dann wäre aber B nicht orientiert), offen (als Vereinigung von offenen Teilmengen) und ihre Vereinigung ist ganz M (jeder Punkt ist in irgendeiner Karte von B enthalten). Da $M \setminus M_+ = M_-$ gilt, sind M_+ und M_- auch beide abgeschlossen.

Angenommen M_+ und M_- wären beide nicht leer. Dann existiert eine stetige Kurve $c : [0, 1] \rightarrow M$ so, dass $c(0) \in M_+$ und $c(1) \in M_-$ ist. Setze

$$t_0 = \sup c^{-1}(M_+)$$

sowie $x_0 = c(t_0)$. Wir können nun eine Folge $(t_n) \subset c^{-1}(M_+)$ wählen, die gegen t_0 konvergiert. Andererseits können wir auch eine Folge $(s_n) \subset c^{-1}(M_-)$ wählen, die gegen t_0 konvergiert ($t_0 + \frac{1}{n}$ falls $t_0 < 1$ und konstant t_0 falls $t_0 = 1$). Wegen der Stetigkeit von c konvergieren dann sowohl $(c(t_n)) \subset M_+$ als auch $(c(s_n)) \subset M_-$ gegen x_0 und da beide Mengen abgeschlossen sind muss $x_0 \in M_+ \cap M_-$ gelten. Das ist jedoch ein Widerspruch, da die Mengen disjunkt sind, eine der Mengen M_+ und M_- muss also leer sein, womit der Satz gezeigt ist. \square

Ein orientierter Atlas heißt maximal, wenn er jede zu ihm gleich orientierte Karte enthält. Aus dem obigen Satz folgt nun: Auf einer orientierbaren Mannigfaltigkeit gibt es genau zwei maximale orientierte Atlanten.

Definition 10.97. Sei M eine orientierbare Mannigfaltigkeit. Einen maximalen orientierten Atlas für M nennen wir eine Orientierung für M . Die Mannigfaltigkeit M zusammen mit einem maximalen orientierten Atlas nennen wir dann eine orientierte Mannigfaltigkeit.

Für eine orientierte Mannigfaltigkeit M nennen wir eine Karte/Parametrisierung orientiert, falls sie/ihre Umkehrabbildung in der Orientierung von M enthalten ist. Eine Basis v_1, \dots, v_n für den Tangentenraum $T_x M$ in einem Punkt $x \in M$ heißt orientiert, falls sie zur Koordinatenbasis einer (und damit jeder) Karte der Orientierung gleich orientiert ist.

Bemerkung 10.98. (i) Wir haben oben gezeigt, dass es für zusammenhängende Mannigfaltigkeiten genau zwei mögliche Orientierungen gibt. Für nicht zusammenhängende Mannigfaltigkeiten existieren mehr Möglichkeiten. Wir können die Orientierung für jede Wegzusammenhangskomponente unabhängig wählen.

(ii) Die Forderung nach einem maximalen Atlas oben hat für die Praxis keine Bedeutung, wir können nach wie vor mit Atlanten mit nur einigen wenigen Karten arbeiten. Würden wir aber auf diese Bedingung verzichten, dann wären (M, A) und (M, B) für zwei unterschiedliche aber gleich orientierte Atlanten A und B zwei unterschiedliche orientierte Mannigfaltigkeiten, was nicht sinnvoll wäre.

(iii) Für eine wegzusammenhängende Mannigfaltigkeit gibt es nun viele Möglichkeiten eine der beiden möglichen Orientierungen auszuwählen: einen orientierten Atlas,

eine Karte, eine Parametrisierung, eine Basis für irgendeinen Tangentenraum. Wir sagen dann üblicherweise „mit der durch ... gegebenen Orientierung“ und gemeint ist natürlich die Orientierung, so dass ... orientiert ist.

- (iv) Für eine offene Teilmenge $U \subset M$ einer Mannigfaltigkeit wird durch eine Orientierung für M eine Orientierung für U ausgezeichnet und umgekehrt. Wird nichts anderes gesagt, dann gehen wir in diesen Situationen stets davon aus, dass die Orientierungen von U und M in diesem Sinne übereinstimmen.
- (v) Insbesondere in kleinen Dimensionen gibt es noch einige andere Begriffe für Orientierung: Durchlaufsinne (1-dim.), Drehsinn (2-dim.), Händigkeit (3-dim.).
- (vi) In der Physik werden Orientierungen häufig (stillschweigend) durch die „Rechte-Hand-Regel“ festgelegt. Es handelt sich dabei lediglich um eine Konvention. Aus mathematischer Sicht sind die möglichen Orientierungen völlig gleichwertig.

Mit dem Begriff der orientierten Mannigfaltigkeit können wir nun Korollar 10.90 präzisieren und Integrale für parametrisierte Mannigfaltigkeiten definieren.

Satz 10.99. *Sei M eine orientierte Mannigfaltigkeit, $U \subset M$ offen und $\varphi : V \rightarrow U$ sowie $\tilde{\varphi} : \tilde{V} \rightarrow U$ orientierte Parametrisierungen. Dann gilt für jedes $\omega \in \Omega^k M$*

$$\int_V \varphi^* \omega = \int_{\tilde{V}} \tilde{\varphi}^* \omega.$$

Wollen wir das obige Resultat nun zur Definition eines Integrals über Mannigfaltigkeiten benutzen, müssen wir uns Gedanken darüber machen ob die Integrale existieren. Wir werden das Problem zunächst auf später verschieben, indem wir nur Formen mit kompaktem Träger betrachten.

Definition 10.100. Der Träger einer Form $\omega \in \Omega^k M$ ist die Menge

$$\text{supp } \omega = \overline{\{x \in M \mid \omega_x \neq 0\}}.$$

Den Vektorraum der k -Formen mit kompaktem Träger bezeichnen wir mit $\Omega_c^k(M)$.

Da kompakte Mengen durch stetige Funktionen (zum Beispiel Kartenabbildungen und deren Umkehrfunktionen) auf kompakte Mengen abgebildet werden

Definition 10.101. Sei U eine orientierte n -dimensionale Mannigfaltigkeit, die sich mit einer Karte überdecken lässt und $\omega \in \Omega^n(U)$ eine Form mit kompaktem Träger. Wir definieren das Integral von ω über U als

$$\int_U \omega = \int_V \varphi^* \omega$$

wobei $\varphi : V \rightarrow U$ eine beliebige orientierte Parametrisierung von U ist.

Da ω kompakten Träger hat gilt das auch für $\varphi^* \omega$ (Warum?) und das Integral auf der rechten Seite existiert sicher.

Bemerkung 10.102. Wir wollen die obige Definition nochmal in eine konkrete Formel übersetzen, die es uns erlaubt solche Integrale auszurechnen. Dazu stellen wir fest, dass $\varphi^*\omega$ eine n -Form auf V ist und es daher eine Koeffizientenfunktion $\alpha : V \rightarrow \mathbb{R}$ geben muss, so dass

$$\varphi^*\omega = \alpha dt^1 \wedge \cdots \wedge dt^n$$

(die Koordinaten auf V sollen hier mit t^1, \dots, t^n bezeichnet werden). Wir können nun α bestimmen, indem wir die Vektoren der Standardbasis einsetzen:

$$\alpha(t) = (\varphi^*\omega)_t(e_1, \dots, e_n) = \omega_{\varphi(t)}(D\varphi(t)e_1, \dots, D\varphi(t)e_n) = \omega_{\varphi(t)}(\partial_1\varphi(t), \dots, \partial_n\varphi(t)).$$

Damit gilt

$$\int_U \omega = \int_V \omega_{\varphi(t)}(\partial_1\varphi(t), \dots, \partial_n\varphi(t)) d\lambda^n(t). \quad (10.9)$$

Diese Formel gilt auch dann noch, wenn der Träger von ω nicht kompakt ist, in diesem Fall ist es jedoch möglich, dass das Integral nicht existiert.

Das bisher definierte Integral hat offensichtlich die folgende Einschränkungseigenschaft: Falls $\tilde{U} \subset U$ ist und $\omega \in \Omega^k U$ außerhalb von \tilde{U} verschwindet, dann gilt

$$\int_U \omega = \int_{\tilde{U}} \omega|_{\tilde{U}}.$$

Daraus folgt auch

$$\int_{U_1} \omega|_{U_1} = \int_{U_2} \omega|_{U_2}$$

falls $\text{supp } \omega \subset U_1 \cap U_2$. Es kommt also bei der Integration über Formen nicht darauf an über welchen Teilausschnitt wir integrieren, solange nur der Träger der Form darin enthalten ist. Insbesondere können wir die Einschränkungen in der Notation weglassen.

Um nun unsere Definition des Integrals abzuschließen, müssen wir noch überprüfen, dass wir die Integrale für unterschiedliche parametrisierbare Stücke zusammenfügen können. Dazu benutzen wir den Begriff der Teilung der Eins. Damit wird es in manchen Situationen möglich, Probleme die global die gesamte Mannigfaltigkeit betreffen in lokale „Stücke“ aufzuteilen.

Definition 10.103. Sei M eine Mannigfaltigkeit und $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine Familie von offenen Teilmengen die M überdecken. Eine Teilung der Eins für die offene Überdeckung $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ ist eine Familie $(f_\beta)_{\beta \in B}$ von glatten Funktionen auf M mit den folgenden Eigenschaften

- (i) für jedes $\beta \in B$ gilt $0 \leq f_\beta \leq 1$,
- (ii) für jedes $\beta \in B$ existiert ein $\alpha \in A$ so, dass $\text{supp } f_\beta \subset U_\alpha$,

(iii) für jedes $x \in M$ existiert eine Umgebung U so, dass $f_\beta|_U = 0$ für alle bis auf endlich viele β ,

(iv)

$$\sum_{\beta \in \mathbb{N}} f_\beta = 1.$$

Manchmal fordern wir noch zusätzlich, dass die Träger $\text{supp } f_\beta$ alle kompakt sind.

Zu beachten ist hier, dass die Summe im letzten Punkt „im Prinzip“ eine endliche Summe ist, da in einer passenden Umgebung von jedem $x \in M$ lediglich endlich viele Summanden von 0 verschieden sind. Wir werden nun zunächst davon ausgehen, dass solche Teilungen der Eins existieren und erst später eine Beweisskizze dafür angeben.

Lemma 10.104. *Sei $(f_\beta)_{\beta \in B}$ eine Teilung der Eins und $K \subset M$ kompakt. Dann gilt $f_\beta|_K = 0$ für alle bis auf endlich viele $\beta \in B$.*

Beweis. Angenommen es gibt unendlich viele $f_{\beta_1}, f_{\beta_2}, \dots$, die auf K von 0 verschiedene Werte annehmen. Dann existiert eine Folge $(x_k) \subset K$ so, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt $f_{\alpha_k}(x_k) > 0$. Da K kompakt ist, besitzt diese eine gegen $x \in K$ konvergente Teilfolge. Nach Voraussetzung, existiert eine Umgebung U für x auf der nur endlich viele der f_β von 0 verschieden sind. Andererseits muss U alle bis auf endlich viele der x_k enthalten, da diese ja gegen x konvergieren. Das ist jedoch ein Widerspruch, da $f_{\alpha_k}(x_k) \neq 0$ für jedes k gilt. \square

Satz 10.105. *Sei M eine orientierte Mannigfaltigkeit. Dann existiert genau ein linearer Operator $\int_M : \Omega_c^n(M) \rightarrow \mathbb{R}$ so, dass für jedes offene $U \subset M$, dass sich mit einer Karte überdecken lässt und jedes $\omega \in \Omega_c^n(M)$ mit $\text{supp}(\omega) \subset U$ gilt*

$$\int_M \omega = \int_U \omega.$$

Beweis. Wir überdecken M durch die Definitionsbereiche von $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ von Kartenabbildungen und wählen eine Teilung der Eins $(f_\beta)_{\beta \in B}$ für diese Überdeckung. Für jedes $\beta \in B$ wählen wir ein U_{α_β} so, dass $\text{supp } f_\beta \subset U_{\alpha_\beta}$. Wir setzen nun für $\omega \in \Omega_c^n(M)$

$$\int_U \omega := \sum_{\beta \in B} \int_{U_{\alpha_\beta}} f_\beta \omega. \quad (10.10)$$

Auf Grund des obigen Lemmas sind für jedes ω nur endlich viele der Summanden von 0 verschieden, wir brauchen uns also über die Konvergenz keine Gedanken zu machen. Es ist leicht einzusehen, dass durch die Vorschrift tatsächlich eine lineare Abbildung von $\Omega_c^n(M) \rightarrow \mathbb{R}$ definiert wird.

Ist nun $U \subset M$ so, dass sich U mit einer Karte überdecken lässt und ω so, dass $\text{supp } \omega \subset U$, dann liegt auch der Träger von $f_\beta \omega$ für jedes $\beta \in B$ in U und daher gilt

$$\int_U \omega := \sum_{\beta \in B} \int_{U_{\alpha_\beta}} f_\beta \omega = \sum_{\beta \in B} \int_U f_\beta \omega = \int_U \sum_{\beta \in B} f_\beta \omega = \int_U \omega.$$

Nochmals: da die Summe für ein konkretes ω endlich ist, ist die Vertauschung mit dem Integral durch dessen Linearität gerechtfertigt.

Sei nun \int irgendein anderer Operator, der die obigen Voraussetzungen erfüllt. Dann gilt

$$\int \omega = \int \sum_{\beta \in B} f_\beta \omega = \sum_{\beta \in B} \int f_\beta \omega = \sum_{\beta \in B} \int_{U_{\alpha_\beta}} f_\beta \omega = \int_M \omega$$

womit die Eindeutigkeit gezeigt ist. Insbesondere hängt damit die Definition in (10.10) nicht von irgendeiner der willkürlich gewählten Strukturen ab. \square

Definition 10.106. Wir nennen den eindeutig definierten Operator aus dem vorhergehenden Satz das Integral von ω über M .

Damit ist das Integral zwar eindeutig definiert, die Formel (10.10) ist jedoch schlecht geeignet um dieses Integral praktisch auszurechnen, da die Teilung der Eins explizit schwierig zu bestimmen ist und aus schwierig zu integrierenden Funktionen besteht.

Der obige Satz zeigt, dass es für jede n -dimensionale Mannigfaltigkeit ein eindeutig definiertes Integral über n -Formen gibt. Um das Argument abzuschließen, müssen wir nun noch zeigen, dass es die Teilungen der Eins überhaupt gibt.

Satz 10.107. Sei M eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit und $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine offene Überdeckung von M , dann existiert für diese Überdeckung eine Teilung der Eins mit kompakten Trägern.

Beweisskizze. Da die Konstruktion einer Teilung der Eins technisch recht aufwändig ist, wollen wir hier eine Möglichkeit nur skizzieren. Wir wollen nicht gänzlich auf den Beweis verzichten, da das Resultat intuitiv nicht leicht einzusehen ist.

Wir betrachten zunächst den Fall, dass $M = U$ eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^m ist. Wir betrachten nun spezielle Würfel, deren Achsen stets parallel zu den Koordinatenachsen sein sollen: Für ein gegebenes $k \in \mathbb{N}$ seien k -Würfel spezielle Würfel deren Zentrum stets einer der Gitterpunkte

$$\frac{\mathbb{Z}^n}{2^k}$$

ist. Innere k -Würfel haben Kantenlänge $\frac{1}{2^k}$ und sind abgeschlossen, mittlere k -Würfel haben Kantenlänge $\frac{5}{4 \cdot 2^k}$ und sind offen, äußere k -Würfel haben Kantenlänge $\frac{2}{2^k}$ und sind abgeschlossen. Diese Familien von k -Würfeln haben die Eigenschaft, dass jeder k -Würfel lediglich endlich viele $k + l$ -Würfel schneidet.

Wir definieren nun induktiv Generationen von Mittelpunkten und zugehörigen Würfeln. Die Gitterpunkte der Generation 1 sind die Punkte des Gitters

$$\frac{\mathbb{Z}^n}{2},$$

deren zugehörige äußere 1-Würfel komplett in einer der Mengen U_α enthalten sind. Sind nun die Gitterpunkte der Generation 1 bis $l - 1$ bekannt, dann sind die Gitterpunkte der Generation l die Punkte des Gitters

$$\frac{\mathbb{Z}^n}{2^l}$$

deren zugehörige äußere l -Würfel komplett in einer der Mengen U_α enthalten sind aber nicht vollständig von den inneren Würfeln der vorhergehenden Generationen überdeckt werden. Sei nun B die (abzählbare) Menge aller Punkte irgendeiner Generation und für ein $\beta \in B$ werde mit K_β der zugehörige innere Würfel und mit V_β der zugehörige mittlere Würfel bezeichnet.

Jeder Punkt $x \in U$ ist nun in irgendeinem inneren k -Würfel enthalten, dessen zugehöriger äußerer k -Würfel in einem U_α enthalten ist (Wie groß genau muss k hier gewählt werden?). Falls x nicht in einem inneren Würfel einer Generation $l < k$ enthalten ist, dann ist er also in einem inneren Würfel der Generation k enthalten womit wir gezeigt haben, dass $(K_\beta)_{\beta \in B}$ die Menge U überdecken. Andererseits sind unsere Kantenlängen so gewählt, dass ein mittlerer Würfel der Generation l und ein mittlerer Würfel einer Generation $\geq l + 3$ stets disjunkt sind (Nachrechnen!). Ist also $x \in U$ ein Punkt und V_β ein Würfel der Generation l , der x enthält, dann ist V_β eine Umgebung von x , die nur von endlich vielen anderen der V_β geschnitten wird.

Zu jedem $\beta \in B$ wählen wir nun eine glatte, nichtnegative Funktion g_β auf \mathbb{R}^m , die auf K_β konstant 1 und außerhalb V_β konstant 0 ist (Siehe Aufgabe 4 vom Blatt 12). Sei $g = \sum_{\beta \in B} g_\beta$. Da es für jeden Punkt $x \in M$ eine Umgebung gibt, auf der nur endlich viele der g_β von 0 verschieden sind, hat die obige Summe in einer solchen Umgebung immer nur endlich viele Summanden. Insbesondere ist g wohldefiniert und wieder eine glatte Funktion. Da jeder Punkt in einem K_β enthalten ist, gilt überall $g > 1$ und wir erhalten eine Teilung der Eins indem wir setzen

$$f_\beta = \frac{g_\beta}{g}.$$

Schließlich sei M eine beliebige Mannigfaltigkeit, welche bei uns immer eine Teilmenge eines umgebenden \mathbb{R}^m ist. Wir wählen nun für jeden Punkt $x \in M$ eine offene Kugel U_x so, dass $\overline{U_x} \cap M$ kompakt und in einem U_α enthalten ist (Warum existieren solche Kugeln immer?) und setzen

$$U = \bigcup_{x \in M} U_x.$$

Nach dem obigen Verfahren können wir eine Teilung der Eins $(f_\beta)_{\beta \in B}$ für U und die Familie $(U_x)_{x \in X}$ finden. Wir erhalten nun eine Teilung der Eins für M und die ursprüngliche Überdeckung, indem wir die f_β auf M einschränken. \square

Bemerkung 10.108. Wir haben für unsere Integrale viel mehr Regularität vorausgesetzt, als eigentlich notwendig ist. Sehen wir uns nochmals die Formel (10.9) an, dann wird ersichtlich, dass wir lediglich Messbarkeit und Integrierbarkeit benötigen. Der Leser formuliere zur Übung eine Definition für „messbare k -Form“ und zeige, dass diese Definition von der Wahl von Karten oder Parametrisierungen unabhängig ist.

Auch die Integrierbarkeit ist für ein einzelnes parametrisiertes Stück klar. Über die gesamte Mannigfaltigkeit ist sie jedoch schwerer zu fassen, da es natürlich nicht ausreicht einzelne Kartenbereiche zu betrachten. Das Integral könnte ja dann „auf einem anderen Stück“ divergieren. Wir wollen hier nur andeuten, wie integrierbare Formen definiert werden können. Dazu überzeugen wir uns zunächst, dass $\int_M |\omega|$ für beliebige messbare Formen sinnvoll definiert werden kann (wobei gegebenenfalls der Wert ∞ angenommen wird). Das ist nicht klar, da $|\omega|$ ja keine Form mehr ist, lässt sich aber analog zu Korollar 10.90 und Satz 10.105 zeigen. Wir nennen eine messbare Form ω dann integrierbar, falls $\int_M |\omega| < \infty$ gilt. Analog zu Satz 10.105 lässt sich dann zeigen, dass der Operator \int_M eindeutig auf integrierbare Formen ausgedehnt werden kann. Wir werden unsere Resultate weiterhin für glatte Formen mit kompaktem Träger formulieren, sie können jedoch ohne allzu großen Aufwand auf integrierbare Formen verallgemeinert werden.

Wir können bisher nicht über das Volumen (Länge, Oberfläche) von Mannigfaltigkeiten sprechen (diese Begriffe sind nicht Koordinatenunabhängig). Was wir aber koordinatenunabhängig definieren können, sind Mengen deren Volumen verschwindet: Wir nennen eine Menge $N \subset M$ eine M -Nullmenge, falls $\gamma(N \cap U)$ eine Lebesgue-Nullmenge ist für jede Karte $\gamma : U \rightarrow V$. Praktisch reicht es aus, die Bedingung für die Karten eines beliebigen Atlas zu überprüfen (Warum?). Auf Grund der Definition des Integrals spielt das Verhalten von Funktionen auf solchen Nullmengen keine Rolle. Wichtig ist: Für eine Mannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^m$ und eine Teilmenge $N \subset M$ ist Lebesgue-Nullmenge und M -Nullmenge im Allgemeinen nicht das selbe. Falls die Dimension von $M < m$ ist, dann ist ja ganz M eine Lebesgue-Nullmenge, aber natürlich keine M -Nullmenge.

Im Allgemeinen lassen sich Mannigfaltigkeiten nicht disjunkt in Definitionsbereiche von Kartenabbildungen zerlegen. So eine Zerlegung ist jedoch häufig bis auf Nullmengen möglich.

Satz 10.109. *Sei M eine Mannigfaltigkeit, $\gamma_i : U_i \rightarrow V_i$ für $i \in \{1, \dots, l\}$ Karten und N eine M -Nullmenge so, dass*

$$M = \bigcup_{i=1}^l U_i \cup N$$

eine disjunkte Zerlegung ist. Dann gilt

$$\int_M \omega = \sum_{i=1}^l \int_{U_i} \omega.$$

Beweis. Sei $\varphi : V \rightarrow U$ eine Parametrisierung und $\omega \in \Omega_c^k(M)$ eine k -Form mit $\text{supp } \omega \in U$. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^l \int_{U_i} \omega = \sum_{i=1}^l \int_{U_i \cap U} \omega = \sum_{i=1}^l \int_{\varphi^{-1}(U_i \cap U)} \omega_{\varphi(t)}(\partial_1 \varphi(t), \dots, \partial_k \varphi(t)) d\lambda^k(t),$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass wir die Parametrisierung φ für jede der Mengen $U_i \cap U$ nutzen können. Da φ bijektiv ist, sind die Mengen $\varphi^{-1}(U_i \cap U)$ paarweise disjunkt und es gilt

$$\bigcup_{i=1}^l \varphi^{-1}(U_i \cap U) = V \setminus \varphi^{-1}(U \cap N).$$

Da N eine M -Nullmenge ist, gilt das auch für $U \cap N$ und damit ist $\varphi^{-1}(U \cap N)$ eine Lebesgue-Nullmenge. Damit folgt

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^l \int_{U_i} \omega &= \int_{V \setminus \varphi^{-1}(U \cap N)} \omega_{\varphi(t)}(\partial_1 \varphi(t), \dots, \partial_k \varphi(t)) d\lambda^k(t) \\ &= \int_V \omega_{\varphi(t)}(\partial_1 \varphi(t), \dots, \partial_k \varphi(t)) d\lambda^k(t) = \int_U \omega. \end{aligned}$$

Es lässt sich leicht nachprüfen, dass

$$\omega \mapsto \sum_{i=1}^l \int_{U_i} \omega$$

eine lineare Abbildung ist. Damit folgt aus Satz 10.105, dass diese Abbildung mit \int_M übereinstimmen muss. \square

Beispiel 10.110. Wir betrachten die übliche Parametrisierung der 2-dimensionalen Einheitssphäresphäre S^2 , definiert auf $V = (0, 2\pi) \times (0, \pi)$

$$\varphi(\alpha, \beta) = (\sin(\beta) \cos(\alpha), \sin(\beta) \sin(\alpha), \cos(\beta)).$$

Die Parametrisierung deckt nicht die gesamte Sphäre ab (das ist mit einer Parametrisierung unmöglich). Der fehlende Teil ist jedoch lediglich ein halber Meridian (Nachrechnen!), also eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit. Dieser wird durch jede Kartenabbildung wieder auf eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit abgebildet (Warum?) und damit auf eine λ^2 -Nullmenge. Der von der Parametrisierung überdeckte Bereich ist also „groß genug“ für die Integration und es gilt daher nach dem obigen Satz

$$\int_{S^2} \omega = \int_V \varphi^* \omega.$$

Die folgende Aussage ist eine Verallgemeinerung der Transformationsformel.

Satz 10.111. Seien M und N orientierte Mannigfaltigkeiten und $\Phi : M \rightarrow N$ ein Orientierungserhaltender Diffeomorphismus. Dann gilt für $\omega \in \Omega_c^k(N)$

$$\int_N \omega = \int_M \Phi^* \omega.$$

Beweis. Die Abbildung

$$\omega \mapsto \int_M \Phi^* \omega$$

ist linear. Sei nun $\varphi : V \rightarrow U$ eine Parametrisierung für $U \subset N$ und ω eine Form mit $\text{supp } \omega \subset U$. Dann ist $\Phi^{-1} \circ \varphi$ eine Parametrisierung für $\Phi^{-1}(U) \subset M$ und $\text{supp } \Phi^* \omega \subset \Phi^{-1}(U)$ (Warum?). Damit folgt

$$\begin{aligned} \int_M \Phi^* \omega &= \int_{\Phi^{-1}(U)} \Phi^* \omega = \int_V (\Phi^{-1} \circ \varphi)^* \Phi^* \omega = \int_V \varphi^* (\Phi^{-1})^* \Phi^* \omega \\ &= \int_V \varphi^* (\Phi \circ \Phi^{-1})^* \omega = \int_V \varphi^* \omega = \int_U \omega \end{aligned}$$

und wegen Satz 10.105 gilt dann die gesuchte Gleichung. \square

Wir können nun Integrale über Formen noch etwas allgemeiner definieren.

Definition 10.112. Seien M, N Mannigfaltigkeiten, $\Phi : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung und $\omega \in \Omega^{\dim M}(N)$. Dann definieren wir

$$\int_\Phi \omega = \int_M \Phi^* \omega.$$

Beispiel 10.113. Sei $N = \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \Phi : (0, 6\pi) &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (\cos(t), \sin(t)) \end{aligned}$$

und $\theta = -ydx + xdy$.

Dann gilt

$$\int_\Phi \theta = \int_0^{6\pi} \Phi^* \theta = \int_0^{6\pi} \theta_{\Phi(t)}(\Phi'(t)) = \int_0^{6\pi} (\sin^2(t) + \cos^2(t)) dt = 6\pi.$$

Bemerkung 10.114. (i) Der für uns wichtigste Fall der obigen Definition ist der, dass $M = V \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge ist. Dann ist Φ „fast eine Parametrisierung“. Für das Integral ergibt sich dann auch die bereits bekannte Formel

$$\int_\Phi \omega = \int_V \omega_{\Phi(t)}(\partial_1 \Phi(t), \dots, \partial_n \Phi(t)) d\lambda^n(t).$$

- (ii) Im Allgemeinen wird $\Phi(M)$ selbst keine Mannigfaltigkeit sein, da sich das Bild „selbst schneiden“ oder „überlappen“ kann. Selbst wenn $\Phi(M)$ eine Mannigfaltigkeit ist, müssen $\int_{\Phi} \omega$ und $\int_{\Phi(M)} \omega$ nicht übereinstimmen, wie das obige Beispiel zeigt. Der Grund dafür ist, dass (ein Teil von) $\Phi(M)$ mehrfach durchlaufen werden kann. Es gilt aber immerhin die folgende Invarianz unter Reparametrisierungen (Nachrechnen!): Falls $\Theta : \tilde{M} \rightarrow M$ ein Diffeomorphismus ist und $\Phi : M \rightarrow N$ glatt, dann ist

$$\int_{\Phi} \omega = \int_{\Phi \circ \Theta} \omega.$$

Anschaulich bedeutet das, der Wert des Integrals hängt nicht davon ab, wie schnell Φ die Menge $\Phi(M)$ durchläuft sondern lediglich wie oft.

- (iii) Falls wir zwei Kurven $c_1, c_2 : [0, 1] \rightarrow M$ haben, so dass $c_1(1) = c_2(0)$, dann können wir die Kurven hintereinander durchlaufen

$$c(t) = \begin{cases} c_1(t) & t \in [0, 1) \\ c_2(t - 1) & t \in [1, 2] \end{cases}.$$

Wir erhalten dann für eine 1-Form θ (Nachrechnen!)

$$\int_c \theta = \int_{c_1} \theta + \int_{c_2} \theta.$$

Bemerkung 10.115. Sei nun M eine Mannigfaltigkeit und $f \in \mathbf{C}^\infty(M)$ eine glatte Funktion. Für eine glatte Kurve $c : [a, b] \rightarrow M$ (das heißt glatt auf (a, b) und stetig auf $[a, b]$) können wir leicht nachrechnen (Aufgabe 4, Aufgabenblatt 14)

$$\int_c df = f(c(b)) - f(c(a)).$$

Völlig analog zum Hauptsatz der Analysis, lassen sich Integrale über exakte 1-Formen also mit Hilfe einer Potentialfunktion leicht berechnen. Es lässt sich auch leicht überprüfen, dass die Formel nach wie vor gilt, falls c nur stückweise glatt ist, es also endlich viele „Knicke“ $a_1, \dots, a_n \in [a, b]$ gibt, an denen c nicht glatt aber immer noch stetig ist.

Insbesondere folgt daraus, dass für exakte 1-Formen, das Integral nicht vom Integrationsweg sondern lediglich von dessen Endpunkten (und dem Durchlaufsinne) abhängig ist. Integrale über geschlossene Kurven – solche mit $c(b) = c(a)$ – verschwinden also.

Wir könnten den selben Sachverhalt auch so ausdrücken: Falls ω eine exakte 1-Form ist und $c : S^1 \rightarrow M$ eine glatte Abbildung, dann gilt

$$\int_c \omega = 0.$$

Beispiel 10.116. Damit können wir nun insbesondere zeigen, dass es geschlossene Formen gibt, die nicht exakt sind. Wir betrachten dazu nochmals die Windungsform auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

$$\theta : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \frac{y}{x^2 + y^2} dx - \frac{x}{x^2 + y^2} dy.$$

Ihr Integral über die geschlossene Kurve

$$\begin{aligned} c : [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \\ t &\mapsto (\cos(t), \sin(t)) \end{aligned}$$

ergibt 2π . Damit kann θ nicht exakt sein, wir hatten aber bereits überprüft, dass sie geschlossen ist.

Tatsächlich misst θ genau, wie oft eine Kurve den Koordinatenursprung umläuft, was wir hier jedoch nicht beweisen werden.

Wir können nun auch bereits ein Kriterium für die Exaktheit einer 1-Form angeben.

Satz 10.117. *Sei M eine Mannigfaltigkeit und θ eine 1-Form. Falls für jede stückweise glatte, geschlossene Kurve $c : [0, 1] \rightarrow M$ gilt*

$$\int_c \theta = 0,$$

dann ist θ exakt.

Beweis. Wir können zunächst ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass M wegzusammenhängend ist. Andernfalls wenden wir die folgende Überlegung separat für jede Wegzusammenhangskomponente an.

Für zwei stückweise glatte Kurven $c_1 : [0, 1] \rightarrow M$, $c_2 : [0, 1] \rightarrow M$ mit $c_1(0) = c_2(0)$ und $c_1(1) = c_2(1)$ können wir eine neue, geschlossene Kurve wie folgt angeben

$$c(t) := \begin{cases} c_1(t) & t \in [0, 1) \\ c_2(-(t-1)) & t \in [1, 2]. \end{cases}$$

Da diese neue Kurve geschlossen ist, verschwindet das Integral über θ und wir erhalten

$$0 = \int_c \theta = \int_{c_1} \theta - \int_{c_2} \theta.$$

Wir haben also gezeigt: der Wert eines Integrals entlang einer Kurve hängt nicht von der Kurve, sondern lediglich von deren Endpunkten ab. Wir können das Integral von x bis y entlang irgendeiner stückweise glatten Kurve also als

$$\int_x^y \theta$$

schreiben.

Wir wählen nun einen beliebigen, festen Punkt $x_0 \in M$ und definieren für $x \in M$

$$f(x) = \int_{x_0}^x \theta$$

Wir wollen nun zeigen, dass f ein Potential für θ ist.

Dazu betrachten wir zunächst den Fall $M = V \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei nun $x \in V$, $r > 0$ so, dass $B_r(x) \subset V$ und $h \in B_r(0)$. Wir können nun entlang der Gerade

$$t \mapsto x + th$$

von x bis $x + th$ laufen und erhalten daher

$$f(x + th) = \int_{x_0}^x \theta + \int_x^{x+th} \theta = f(x) + \int_0^t \theta_{x+sh}(h) ds.$$

Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung existiert dann $\xi_s \in (0, t)$ so, dass

$$f(x + th) - f(x) = \theta_{x+\xi_s h}(h)t.$$

Für $t \rightarrow 0$ geht auch ξ_t gegen 0 und wir erhalten wegen der Stetigkeit von θ

$$\partial_h f(x) = \theta_x(h).$$

Da x beliebig war, haben wir gezeigt, dass alle Richtungsableitungen von f (und insbesondere die partiellen Ableitungen) stetig sind, f damit differenzierbar und es gilt

$$df(h) = \partial_h f = \theta(h).$$

Sei nun M eine beliebige Mannigfaltigkeit, $\varphi : V \rightarrow U$ eine Parametrisierung und $x \in U$. Wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $\varphi(0) = x$ ist. Für eine Kurve $c : [0, 1] \rightarrow V$ gilt

$$\begin{aligned} \int_c \varphi^* \theta &= \int_0^1 (\varphi^* \theta)_{c(t)}(c'(t)) dt = \int_0^1 \theta_{\varphi \circ c(t)}(D\varphi(c(t))c'(t)) dt \\ &= \int_0^1 \theta_{\varphi \circ c(t)}((\varphi \circ c)'(t)) dt = \int_{\varphi \circ c} \theta. \end{aligned}$$

Ist c geschlossen, dann auch $\varphi \circ c$ und das Integral verschwindet. Damit ist nach dem oben gezeigten $\varphi^* \theta$ auf V exakt und wir können ein Potential durch

$$g(h) = \int_0^h \varphi^* \theta = \int_{\varphi(0)}^{\varphi(h)} \theta$$

angeben. Nun gilt für $h \in V$

$$f \circ \varphi(h) = \int_{x_0}^{\varphi(h)} \theta = \int_{x_0}^x \theta + \int_{\varphi(0)}^{\varphi(h)} \theta = \int_{x_0}^x \theta + g(h).$$

Damit ist $f \circ \varphi$ insbesondere eine glatte Funktion auf V und per definitionem auch f auf U . Außerdem gilt

$$\varphi^*\theta = dg = d(f \circ \varphi) = d(\varphi^*f) = \varphi^*df$$

Da φ ein Diffeomorphismus ist, folgt daraus auch auf U die gesuchte Gleichung $df = \theta$. Da jeder Punkt der Mannigfaltigkeit mit einer passenden Parametrisierung überdeckt werden kann, ist f also tatsächlich eine Stammfunktion. \square

Bemerkung 10.118. Das Kriterium ist praktisch natürlich schwer zu überprüfen. Es gibt uns aber eine Möglichkeit für Formen von denen wir wissen oder zumindest vermuten, dass sie exakt sind ein Potential zu bestimmen.

Wir erhalten auch einen Zusammenhang mit Differentialgleichungen. Die Differentialgleichung

$$p(x, y) + q(x, y)y' = 0$$

ist exakt, genau dann, wenn die Form

$$p(x, y)dx + q(x, y)dy$$

exakt ist. eine Funktion H ist ein Potential für die Form genau dann, wenn sie ein Potential für die Differentialgleichung ist (Nachrechnen!). Die Formel in obigem Satz gibt uns nun die Möglichkeit ein solches Potential zu bestimmen.

10.8 Der Satz von Stokes

Definition 10.119. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Mannigfaltigkeit und $N \subset M$ eine $k - 1$ dimensionale Untermannigfaltigkeit. Dann nennen wir N eine Hyperfläche in M .

Beispiel 10.120.

Bemerkung 10.121. Im Folgenden werden wir stets annehmen, dass die folgende Situation vorliegt:

- (i) M ist eine k -dimensionale Mannigfaltigkeit,
- (ii) $N \subset M$ ist eine Hyperfläche,
- (iii) N ist in M abgeschlossen,
- (iv) M und N sind wegzusammenhängend und orientierbar,
- (v) $M \setminus N$ besteht aus genau zwei Wegzusammenhangskomponenten, die wir willkürlich als Inneres M_i und Äußeres M_a von M bezeichnen.

Bemerkung 10.122. (i) Der letzte Punkt bedeutet, dass die Untermannigfaltigkeit N die Mannigfaltigkeit M in genau zwei Teile teilt so, dass jede Kurve von M_i nach M_a die Untermannigfaltigkeit N schneidet. Aus den vorhergehenden Punkten folgt bereits, dass es höchstens zwei Teile sein können (was wir hier nicht zeigen werden), es ist aber möglich, dass nur ein Teil entsteht.

- (ii) Beispiele in denen nur ein Teil entsteht sind zum Beispiel die Mittellinie in einem Möbiusband oder ein Möbiusband im Inneren eines Torus. In diesen Fällen ist eine der Mannigfaltigkeiten nicht orientierbar. Betrachten wir lediglich die Oberfläche des Torus und die Randkurve des Möbiusbandes, erhalten wir sogar ein Beispiel für das beide Mannigfaltigkeiten orientierbar sind.
- (iii) Die obigen Voraussetzung stellen sicher, dass N genau der topologische Rand von M_i und M_a in M ist.
- (iv) Sei nun $x \in N$ und $v \in T_x M \setminus T_x N$, also ein Tangentenvektor an die Mannigfaltigkeit M der nicht tangential zu N ist. Dann ergibt es Sinn, zu sagen dass v nach außen zeigt. Das heißt, jede Kurve durch $c : (-1, 1) \rightarrow M$ mit $c(0) = x$ und $c'(0) = v$ verläuft für hinreichend kleine $t > 0$ in M_a .

Wir können damit jeder Orientierung für M eindeutig eine Orientierung für N zuordnen und umgekehrt. Wir erinnern uns: für zusammenhängende Mannigfaltigkeiten ist die Orientierung durch die Angabe irgendeiner Basis für den Tangentenraum irgendeines Punktes eindeutig festgelegt. Sei dazu die Orientierung von N festgelegt und v_1, \dots, v_{k-1} eine orientierte Basis von $T_x N$ für irgendein x . Dann wählen wir irgendeinen nach außen zeigenden Vektor $v \in T_x M$ und legen die Orientierung auf M durch die Basis v, v_1, \dots, v_{k-1} fest.

Sei andererseits die Orientierung von M festgelegt und v_1, \dots, v_{k-1} eine Basis von $T_x N$ und $v \in T_x M$ ein nach außen zeigenden Vektor. Ist v, v_1, \dots, v_{k-1} orientiert, dann legen wir die Orientierung auf N durch v_1, \dots, v_{k-1} fest, andernfalls durch die entgegengesetzt orientierte Basis $-v_1, v_2, \dots, v_{k-1}$. Die auf diese Weise einander zugeordneten Orientierungen bezeichnen wir als induzierte Orientierung.

Um den wichtigen Satz von Stokes vorzubereiten, behandeln wir zunächst einen Spezialfall separat in einem Lemma.

Lemma 10.123. *Sei $M \subset \mathbb{R}^k$ offen,*

$$N = \{x \in M \mid x_1 = 0\}$$

und ω eine $k-1$ -Form mit kompaktem Träger auf M . Wir setzen

$$M_i = \{x \in M \mid x_1 < 0\} \text{ und } M_a = \{x \in M \mid x_1 > 0\}.$$

Dann gilt

$$\int_N \omega = \int_{M_i} d\omega.$$

Beweis. Setzen wir noch zusätzlich voraus, dass M und N wegzusammenhängend sind, dann sind die Voraussetzungen von Bemerkung 10.121 erfüllt und wir haben M_i und M_a so gewählt, dass die durch die kanonischen (durch die Koordinaten gegebenen) Parametrisierungen von M und N jeweils voneinander induziert werden. Die Aussage des Lemmas gilt aber auch, wenn M oder N nicht wegzusammenhängend sind. Da der Träger von ω ohnehin in M liegt, können wir ω durch 0 auf ganz \mathbb{R}^n fortsetzen, ohne die Integrale zu ändern. Damit haben wir das Problem auf den in der Übung behandelten Fall zurückgeführt. \square

Im folgenden Lemma zeigen wir nun, dass der allgemeine Fall wenigstens lokal immer wie die Situation im vorhergehenden Lemma aussieht.

Lemma 10.124. *Für jeden Punkt $x \in M$ existiert eine Karte $\gamma : U \rightarrow V$ so, dass $x \in U$ und $\gamma(U \cap N) = (\{0\} \times \mathbb{R}^{k-1}) \cap V$. Wir können γ außerdem so wählen, dass $M_i \cap U$ auf den durch $x_1 < 0$ gegebenen Halbraum abgebildet wird.*

Diese Aussage mag offensichtlich erscheinen, ist es aber nicht. Wir wissen zwar, dass es Diffeomorphismen gibt die M und N lokal auf eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^k beziehungsweise \mathbb{R}^{k-1} abbilden, aber nicht, dass auch beides zugleich möglich ist.

Beweisskizze. Sei x ein beliebiger Punkt in M . Für $x \in M \setminus N$ können wir eine beliebige Karte wählen und durch Einschränken von U und gegebenenfalls Verschieben von V erreichen, dass sowohl $\gamma(U \cap N)$ als auch $(\mathbb{R}^{k-1} \times \{0\}) \cap V$ die leere Menge sind (Wie genau?).

Sei nun also $x \in N$. Wir wählen einen beliebigen Diffeomorphismus $\varphi : U \rightarrow V$ so, dass

$$\varphi(U \cap N) = \{0\} \times \mathbb{R}^{k-1} \cap V$$

gilt. Das ist möglich, da N eine Mannigfaltigkeit ist. Da $M \cap U$ eine Mannigfaltigkeit ist (Warum?) und φ ein Diffeomorphismus, ist auch $\varphi(M \cap U)$ eine Mannigfaltigkeit. Wir können außerdem durch eine zusätzliche Verschiebung erreichen, dass $\varphi(x) = 0$ ist und durch eine zusätzliche Drehung, dass $T_0\varphi(M \cap U) = \{0\} \times \mathbb{R}^k$.

Wir betrachten nun die Projektion

$$\begin{aligned} \tilde{p} : V &\rightarrow \mathbb{R}^k \\ (y_1, \dots, y_n) &\mapsto (y_{n-k}, \dots, y_n). \end{aligned}$$

Diese Abbildung ist offensichtlich glatt. Das selbe gilt damit auch für ihre Einschränkung auf $\varphi(M) \cap V$, die wir auch mit p bezeichnen werden. Diese Einschränkung ist nun eine Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten gleicher Dimension. Die Ableitung von p im Punkt $0 = \varphi(x)$ ist die identische Abbildung (Warum?) also insbesondere invertierbar. Damit lassen sich nach dem Satz über die inverse Funktion Definitionsbereich und Wertebereich von p so einschränken, dass p ein Diffeomorphismus wird.

Damit ist die Einschränkung von $p \circ \varphi$ auf $M \cap U$ eine Kartenabbildung. Außerdem hatten wir φ so gewählt, dass

$$\varphi(N \cap U) \subset \{0\} \times \mathbb{R}^{k-1},$$

Die Menge $N \cap U$ wird also durch $p \circ \varphi$ auf $\{0\} \times \mathbb{R}^{k-1}$ abgebildet.

Wir müssen nun nur noch sicherstellen, dass M_i auf den richtigen Halbraum abgebildet wird, was sich jedoch durch eine zusätzliche Spiegelung immer erreichen lässt. \square

Theorem 10.125 (Allgemeiner Satz von Stokes). *Sei ω eine $k-1$ -Form auf M mit kompaktem Träger. Dann gilt*

$$\int_{M_i} d\omega = \int_N \omega.$$

Beweis. Nach Lemma 10.124 können wir für die Mannigfaltigkeit M einen orientierten Atlas wählen, so dass jede Kartenabbildung $\gamma : U \rightarrow V$ erfüllt $\gamma(N \cap U) = \{0\} \times \mathbb{R}^{k-1} \cap V$ und so, dass M_i stets auf den unteren Halbraum abgebildet wird. Wir werden die entsprechenden Teile von V jeweils mit V_i und V_a bezeichnen. Wir wählen nun eine Teilung der Eins mit kompakten Trägern $(f_\beta)_{\beta \in B}$ für die durch die Kartendefinitionsbereiche gegebene Überdeckung von M . Wir zeigen nun zunächst, dass die Gleichheit für jede der Formen $f_\beta \omega$ gilt. Sei dazu $\gamma : U \rightarrow V$ eine der Karten unseres Atlas so, dass $\text{supp } f_\beta \subset U$. Damit verschwindet natürlich auch die Form $f_\beta \omega$ sowie ihre äußere Ableitung außerhalb von U . Nun können wir ausnutzen, dass sowohl das Integral als auch die äußere Ableitung

invariant unter Pull-Backs von Diffeomorphismen sind.

$$\begin{aligned}\int_{M_i} df_\beta \omega &= \int_{M_i \cap U} df_\beta \omega = \int_{V_i} (\gamma^{-1})^* df_\beta \omega = \int_{V_i} d(\gamma^{-1})^*(f_\beta \omega) \\ &= \int_{\{0\} \times \mathbb{R}^{k-1} \cap V} (\gamma^{-1})^* f_\beta \omega = \int_{N \cap U} f_\beta \omega = \int_N f_\beta \omega.\end{aligned}$$

Dabei haben wir für die vorletzte Umformung den Spezialfall Lemma 10.123 benutzt.

Nun müssen wir die Resultate lediglich noch zusammensetzen. Da ω kompakten Träger hat, wissen wir bereits, dass auf $\text{supp } \omega$, also auf dem für die Integrale interessanten Bereich, lediglich endlich viele der f_β von 0 verschieden sind (Lemma 10.104) und wir erhalten

$$\int_{M_i} d\omega = \int_{M_i} d \sum_{\beta \in B} f_\beta \omega = \sum_{\beta \in B} \int_N f_\beta \omega = \int_N \omega. \quad \square$$

Bemerkung 10.126. Der obige Satz gilt tatsächlich etwas allgemeiner als wir ihn formuliert haben. So können wir beispielsweise auf den Wegzusammenhang der Mannigfaltigkeiten teilweise verzichten ohne dass der obige Beweis seine Gültigkeit verliert. Beispiele hierfür wären der von zwei parallelen Ebenen eingeschlossene Raum, der Bereich zwischen zwei konzentrischen Sphären etc. Wir müssen in diesen Fällen nur darauf achten, dass die Orientierungen für die einzelnen Komponenten des Randes N richtig gewählt werden. Alle diese Fälle mathematisch exakt zusammenzufassen ist etwas umständlich, daher wollen wir hier darauf verzichten.

Eine weitere mögliche Verallgemeinerung ist der Fall, dass der Rand von M_i eine Mannigfaltigkeit mit „Ecken und Kanten“ ist. Das soll heißen, es gibt $k-1$ dimensionale Mannigfaltigkeiten N_1, \dots, N_m so, dass

$$\partial M_i = \partial M_i \cap N_1 \cup \dots \cup \partial M_i \cap N_m$$

gilt. Beispiele hierfür wären ein Würfel oder die von zwei Sphären ausgeschnittene „Linse“. Für diesen Fall müssten wir den Beweis etwas abwandeln, da die „Ecken und Kanten“ nicht lokal wie die Situation in Lemma 10.123 aussehen. Eine Möglichkeit wäre, einen kleinen Bereich um die problematische Menge δ auszusparen und – mit dem obigen Beweis – zu zeigen, dass dann die gesuchte Gleichung bis auf einen kleinen Fehler stimmt. Anschließend wäre dann zu zeigen, dass dieser Fehler gegen 0 konvergiert, wenn der ausgesparte Bereich immer kleiner wird. Wir werden auf den sehr technischen Beweis hier verzichten.

Wir wollen noch einige praktisch wichtige Spezialfälle gesondert betrachten.

Korollar 10.127. *Sei $M_i \cup N$ kompakt, und ω eine $k-1$ -Form, dann gilt*

$$\int_{M_i} d\omega = \int_N \omega.$$

Beweis. Wir können diesen Fall auf das vorhergehende Theorem zurückführen. Dazu wählen wir eine glatte Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger, so, dass $f|_{M_i \cup N} = 1$ ist. Die Existenz solcher Funktionen, hatten wir im vergangenen Semester auf Blatt 12 untersucht. Wir können nun den Satz von Stokes auf die Form $f\omega$ anwenden, welche kompakten Träger hat. \square

Beispiel 10.128. Fall $M_i \cup N$ kompakt ist, dann ist es natürlich auch die abgeschlossene Teilmenge N . Andererseits ist es nicht ausreichend, nur die Kompaktheit von N vorauszusetzen. Ein Beispiel dafür wird wieder durch die Windungsform

$$\omega = -\frac{y}{x^2 + y^2}dx + \frac{x}{x^2 + y^2}dy$$

gegeben. Betrachten wir die Mannigfaltigkeiten

$$M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \text{ und } N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

und wählen

$$M_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\} \setminus \{0\}.$$

Wir wissen bereits, dass die Windungsform geschlossen ist ($d\omega = 0$), die linke Seite der Gleichung verschwindet also. Wir wissen ebenfalls bereits, dass das Integral über die Windungsform entlang eines Kreises 2π ist (oder -2π abhängig von der gewählten Orientierung). In diesem Fall gilt der Stokessche Satz also nicht. Das ist kein Widerspruch, da die Form keinen kompakten Träger hat.

Wir können den Satz jedoch verwenden, um Kurvenintegrale über die Windungsform für allgemeinere Kurven zu untersuchen. Sei dazu $\Phi : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ eine beliebige Einbettung so, dass die 0 umlaufen wird. Einbettung heißt im konkreten Fall nur dass die Abbildung glatt und injektiv ist und stellt hier unter anderem sicher, dass die Kurve tatsächlich nur einmal um den Ursprung läuft. Wir setzen $N_1 = \Phi(S_1)$ und wählen für N_2 einen Kreis, dessen Radius so gewählt ist, dass sich N_1 und N_2 nicht schneiden (Warum geht das?). Nennen wir nun die offene Menge zwischen den Kurven M_i und $N = N_1 \cup N_2$, dann erhalten wir eine Situation auf die wir den Satz von Stokes anwenden können. Zu beachten ist, dass nach unseren Regeln für die Orientierung der beteiligten Mannigfaltigkeiten, die Orientierungen für N_1 und N_2 „gegenläufig“ gewählt werden müssen. Dann gilt

$$0 = \int_{M_i} d\omega = \int_{N_1} \omega + \int_{N_2} \omega.$$

Die Integrale über beide Kuven stimmen also bis auf den Betrag überein. Das unterschiedliche Vorzeichen kommt dabei durch den unterschiedlichen Umlaufsinn der Kurven zustande.

Korollar 10.129. *Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit, dann gilt für jede $k-1$ -Form ω*

$$\int_M d\omega = 0.$$

Beweis. Auch dieser Fall ist im Beweis von Theorem 10.125 bereits enthalten. Wir müssen lediglich $N = \emptyset$ und $M_i = M$ setzen. (Natürlich sind dann einige der Annahmen aus Bemerkung 10.121 nicht erfüllt.) \square

Bemerkung 10.130. Sei nun M eine Mannigfaltigkeit und θ eine geschlossene 1-Form auf M . Sei $\epsilon > 0$, $B_{1+\epsilon}(0) \subset \mathbb{R}^2$ die offene Kreisscheibe mit Radius $1 + \epsilon$ und

$$\Phi : B_{1+\epsilon}(0) \rightarrow M$$

eine glatte Abbildung. Eigentlich wollen wir hier eine glatte Abbildung der abgeschlossenen Kreisscheibe mit Radius 1. Wir wählen den Definitionsbereich von Φ etwas größer um keine Probleme mit der Differenzierbarkeit am Rand zu bekommen.

Wir interessieren uns für das Integral über θ entlang der Randkurve $\Phi|_{S^1}$. Dazu ziehen wir θ mit Φ zurück. Da die äußere Ableitung mit Pull-backs vertauscht, ist auch die zurückgezogene Form geschlossen. Wir können nun den Satz von Stokes auf die Kreisscheibe mit Radius 1 anwenden und erhalten

$$\int_{\Phi|_{S^1}} \theta = \int_{S^1} \Phi^* \theta = \int_{B_1(0)} d\Phi^* \theta = 0.$$

Wir haben damit gezeigt: Das Integral über θ entlang einer geschlossenen Kurve verschwindet, wenn wir die Kurve als Rand einer glatt nach M abgebildeten Kreisscheibe darstellen können.

Wir können nun definieren: Eine Mannigfaltigkeit heißt einfach zusammenhängend, wenn jede geschlossene Kurve so dargestellt werden kann. Anschaulich bedeutet das in etwa, dass jede geschlossene Kurve glatt zu einem Punkt zusammengezogen werden kann (ohne die Mannigfaltigkeit dabei zu verlassen). Unsere Definition weicht von der üblichen Formulierung des Begriffs ab, ist aber auf Mannigfaltigkeiten zu dieser äquivalent. Beispiele für einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeiten sind \mathbb{R}^n , $B_r(0)$ oder die Sphären S^n für $n \geq 2$. Beispiele für nicht einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeiten sind $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, S^1 oder der Torus auch wenn uns ein exakter Beweis dafür Probleme bereiten würde. Anschaulich ist der Grund jeweils, dass eine Kurve die um das „Loch“ der Mannigfaltigkeit verläuft sich nicht stetig auf einen Punkt zusammenziehen lässt.

Zusammen mit Satz 10.117 haben wir nun gezeigt: Auf einer einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeit ist jede geschlossene 1-Form exakt.

10.9 Riemannsche Mannigfaltigkeiten

Definition 10.131. Sei M eine Mannigfaltigkeit. Eine Familie von Skalarprodukten $g_x(\cdot, \cdot)$ auf den Tangentenvektorräumen $T_x M$ wobei x ganz M durchläuft heißt riemannsche Metrik. Die Mannigfaltigkeit zusammen mit einer riemannschen Metrik heißt riemannsche Mannigfaltigkeit.

Bemerkung 10.132. (i) Bei unserem Zugang zu Mannigfaltigkeiten, ist jede Mannigfaltigkeit M eine Teilmenge eines umgebenden Raumes \mathbb{R}^n und damit jeder Tangentialraum ein Untervektorraum von \mathbb{R}^n . Da wir \mathbb{R}^n üblicherweise mit dem Standardskalarprodukt ausstatten, erhalten so auch alle Tangentialräume automatisch ein Skalarprodukt. Bei uns besitzt also jede Mannigfaltigkeit eine kanonische riemannsche Metrik.

Diese ist jedoch nicht die einzige und auch nicht notwendig „die richtige“ Metrik. Sie ist vielmehr eine zusätzliche Struktur auf der Mannigfaltigkeit.

So sind beispielsweise der Kreis und die Ellipse,

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \quad \text{und} \quad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 + 3y^2 = 1\},$$

als Mannigfaltigkeiten gleich. Genauer heißt das, es gibt einen Diffeomorphismus, der die eine auf die andere abbildet. Als riemannsche Mannigfaltigkeiten versehen jeweils mit der vom umgebenden \mathbb{R}^2 geerbten Metrik sind sie jedoch verschieden.

- (ii) Üblicherweise wird zusätzlich vorausgesetzt, dass die Metrik glatt vom Punkt x abhängt. Wir könnten das ähnlich wie bei Formen exakt formulieren, werden das jedoch nicht tun, da wir uns hier hauptsächlich für die vom umgebenden Raum geerbte Metrik interessieren, welche offensichtlich glatt ist.
- (iii) Zu jedem Skalarprodukt gehört natürlich die entsprechende Norm $v \mapsto g_x(\cdot, \cdot)$. Die Metrik legt also Längen und auch Winkel fest, allerdings nur in den Tangentenräumen der Mannigfaltigkeit, nicht in der Mannigfaltigkeit selbst (zumindest nicht direkt).
- (iv) Durch die Festlegung einer Metrik können wir über Orthonormalbasen der Tangentenräume sprechen.
- (v) Eine riemannsche Metrik ist ein einer 2-Form ähnliches Objekt. Beide sind in jedem Punkt der Mannigfaltigkeit bilineare Abbildungen auf $T_x M \times T_x M$. Eine 2-Form ist dabei jedoch antisymmetrisch, eine riemannsche Metrik symmetrisch in den beiden Argumenten. Tatsächlich können wir beide Objekte als zweifach kovariante Tensoren auffassen.
- (vi) Die riemannsche Metrik legt auf der Mannigfaltigkeit eine Vielzahl weiterer Strukturen mehr oder weniger eindeutig fest: Kurvenlängen, Flächen, Volumina, Winkel, „Parallelverschiebung“, Krümmung ... Wir werden von diesen hier jedoch nur einige betrachten.

- (vii) Für die allgemeine Relativitätstheorie spielt eine Verallgemeinerung des Begriffes eine wichtige Rolle. Eine pseudo-riemannsche Metrik ordnet jedem Punkt x der Mannigfaltigkeit eine bilineare Abbildung $g_x(\cdot, \cdot)$ zu, die nicht ausgeartet ist. Das heißt falls für ein spezielles $v \in T_x M$ und für alle $w \in T_x M$ gilt $g_x(v, w) = 0$, dann muss $v = 0$ sein. Jede riemannsche Metrik erfüllt diese Bedingung (Warum?). Ein Beispiel für eine pseudo-riemannsche Mannigfaltigkeit, die keine riemannsche Mannigfaltigkeit ist, ist \mathbb{R}^4 mit der Minkowski-Metrik

$$g_x((v_1, v_2, v_3, v_4), (w_1, w_2, w_3, w_4)) = v_1 w_1 - v_2 w_2 - v_3 w_3 - v_4 w_4$$

Viele der Strukturen und Aussagen über riemannsche Mannigfaltigkeiten lassen sich auf pseudo-riemannsche Mannigfaltigkeiten übertragen.

- (viii) Eine (pseudo-)riemannsche Metrik ist keine Metrik im Sinne von Definition 5.1.

Eine riemannsche Metrik legt nun auf jedem Tangentenraum ein Skalarprodukt fest. Dadurch wird auch eine Volumenform festgelegt, welche jedem Spat sein Volumen zuordnet.

Satz 10.133. *Sei V ein orientierter, n -dimensionaler Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot | \cdot \rangle$. Dann existiert genau eine n -Form ω so, dass*

$$\omega(v_1, \dots, v_n) = 1$$

für jede orientierte Orthonormalbasis v_1, \dots, v_n gilt.

Beweis. Es ist klar, dass es höchstens eine solche Form geben kann, da eine n -Form durch die Angabe ihres Wertes auf irgendeiner Basis eindeutig bestimmt ist (Warum?).

Die Aussage des Satzes ist uns für einen Spezialfall, \mathbb{R}^n mit dem Standardskalarprodukt, bereits bekannt. In diesem Fall ist die gesuchte n -Form die Determinante. Wir könnten nun den entsprechenden recht umfangreichen Beweis aus Abschnitt 3.3 wiederholen. Wir können aber auch das bereits bekannte Ergebnis benutzen. Sei dazu v_1, \dots, v_n irgendeine orientierte Orthonormalbasis für V , dann können wir definieren

$$\begin{aligned} \varphi : V &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n &\mapsto (\alpha_1, \dots, \alpha_n). \end{aligned}$$

Diese Abbildung ist ein Vektorraumisomorphismus (Warum?) und sie erhält das Skalarprodukt, es gilt also für beliebige $v, w \in V$ (Nachrechnen!)

$$\langle v | w \rangle_V = \langle \varphi(v) | \varphi(w) \rangle_{\mathbb{R}^n}.$$

Daraus folgt insbesondere, dass Orthonormalbasen wieder auf ebensoche abgebildet werden. Es ist nun leicht zu überprüfen, dass

$$\omega(u_1, \dots, u_n) := \det(\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_n))$$

eine n -Form mit den gesuchten Eigenschaften ist. □

Bemerkung 10.134. Oben haben wir eine (im Prinzip) explizite Formel für ω aufgeschrieben. Wir wollen diese Formel noch so umformen, dass wir die Abbildung φ nicht mehr benötigen. Sei dazu A die Matrix, deren Spalten die Vektoren $\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_n)$ sind. Wir nehmen an, dass die Vektoren positiv orientiert sind (damit der Wert der Volumenform positiv ist). Dann gilt

$$\det(A) = \sqrt{\det(A^T A)}.$$

Der i, j -Eintrag der Matrix $A^T A$ ergibt sich als Standardskalarprodukt von $\varphi(u_i)$ und $\varphi(u_j)$. Da die Abbildung φ aber Skalarprodukte erhält, gilt

$$\omega(u_1, \dots, u_n) = \sqrt{\det(\langle u_i | u_j \rangle)}. \quad (10.11)$$

Auf einer riemannschen Mannigfaltigkeit können wir dieses Ergebnis nun auf jeden Tangentialraum anwenden und erhalten.

Definition 10.135. Sei M eine orientierte, riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann nennen wir die k -Form ω , die jedem Punkt $x \in M$ die Form aus dem vorhergehenden Satz für den Raum $(T_x M, g_x(\cdot, \cdot))$ zuordnet, die zugehörige Volumenform. Wir nennen dann

$$\int_M \omega$$

das Volumen der Mannigfaltigkeit. Für kleinere Dimensionen verwenden wir statt „Volumen“ häufig „Länge“ ($k = 1$) oder „Fläche“ ($k = 2$).

Bemerkung 10.136. Sei nun $\varphi : V \rightarrow U$ eine orientierte Parametrisierung für eine offene Teilmenge U einer orientierten Mannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$. Wir wollen den Pull-back der Volumenform bestimmen, um damit beispielsweise das Volumen von U zu berechnen. Es muss gelten

$$\varphi^* \omega = \alpha dt^1 \wedge \dots \wedge dt^k$$

für

$$\alpha(t) = (\varphi^* \omega)_t(e_1, \dots, e_n) = \omega_{\varphi(t)}(\partial_1 \varphi(t), \dots, \partial_k \varphi(t)) = \sqrt{\det(\langle \partial_i(t) | \partial_j(t) \rangle)},$$

wobei wir im letzten Schritt Gleichung (10.11) verwendet haben. Dabei ist die Basis $\partial_1 \varphi(t), \dots, \partial_k \varphi(t)$ orientiert, da die Parametrisierung orientiert ist. Das Volumen von U ergibt sich damit zu

$$\int_V \sqrt{\det(\langle \partial_i(t) | \partial_j(t) \rangle)} d\lambda^k(t).$$

Die konkrete Gestalt des Integranden hängt natürlich von der Wahl der Parametrisierung ab, das Ergebnis aber nicht.

Besonders einfach ist natürlich der eindimensionale Fall. Ist I ein Intervall und $\varphi : I \rightarrow M$ eine Parametrisierung, dann ist die Länge der Kurve

$$\int_I \|\varphi'(t)\| dt$$

Bemerkung 10.137. (i) Offensichtlich verschwindet die Volumenform einer Mannigfaltigkeit in keinem Punkt. Da der Raum der k -Formen über einem k -dimensionalen Vektorraum eindimensional ist, gibt es für eine beliebige k -Form σ immer eine Funktion f so, dass $\sigma = f\omega$ gilt. Ist eine riemannsche Metrik, und damit eine Volumenform, gegeben, dann definiert diese also eine bijektive Abbildung zwischen den Funktionen (0-Formen) und den k -Formen.

(ii) Mit der Volumenform können wir durch

$$A \mapsto \int_A \omega$$

ein Maß auf M definieren.

(iii) Dadurch, dass wir eine k -Form eindeutig festgelegt haben, können wir jetzt auch Integrale von Funktionen über Mannigfaltigkeit definieren:

$$\int_M f\omega.$$

Das entspricht genau dem Integral bezüglich des obigen Maßes.

Für solche Integrale gibt es in der Physik, je nach Dimension, unterschiedliche Notationen und Namen. Für 3-dimensionale Untermannigfaltigkeiten, also offene Teilmengen, von \mathbb{R}^3 handelt es sich schlicht um das gewöhnliche Lebesgue-Integral welches dann manchmal als $\int_M f dV$ geschrieben wird. Für 1-dimensionale beziehungsweise 2-dimensionale Untermannigfaltigkeiten werden die Integrale als Kurvenintegrale beziehungsweise Flächenintegrale erster Art bezeichnet und zum Beispiel als $\int_M f ds$ oder $\int_M f dA$ notiert.

(iv) Die Konstruktion ist tatsächlich noch etwas allgemeiner. Sei $V \subset \mathbb{R}^k$ offen und $\Phi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine glatte Abbildung, so dass $D\Phi$ vollen Rang hat. Im Fall $k = 1$ beziehungsweise $k = 2$ nennen wir so ein Φ eine regulär parametrisierte Kurve beziehungsweise Fläche. Dann gibt es für jeden Punkt $t \in V$ eine offene Umgebung \tilde{V} so, dass $\Phi(\tilde{V})$ eine Mannigfaltigkeit ist. Die Menge $\Phi(V)$ selbst muss keine Mannigfaltigkeit sein, da sie sich selbst „schneiden“ kann. Dennoch können wir die Volumenform von $\Phi(\tilde{V})$ mittels Φ zurückziehen und auf diese Weise das Volumen, und auch die Integrale über solche Abbildungen definieren. Auch die Formeln aus Bemerkung 10.136 gelten entsprechend.

(v) Die Volumenform, so wie wir sie definiert haben, ergibt nur für orientierbare Mannigfaltigkeiten Sinn. Das Volumen und Integral über skalare Funktionen lassen sich jedoch auf andere Weise für beliebige riemannsche Mannigfaltigkeiten definieren.

Satz 10.138. *Sei V ein orientierter, n -dimensionaler Vektorraum mit Skalarprodukt und ω die zugehörige Volumenform. Die folgenden Abbildungen sind Isomorphismen von*

$$\begin{aligned}\iota : V &\rightarrow V^* \\ v &\mapsto \langle v | \cdot \rangle \\ j : V &\rightarrow \Lambda^{n-1}(V) \\ v &\mapsto \omega(v, \cdot, \dots, \cdot).\end{aligned}$$

Beweis. Die Linearität der Abbildungen ist offensichtlich. Die obigen Vektorräume haben alle Dimension n , es ist also ausreichend die Injektivität der Abbildungen zu zeigen.

Sei dazu $\iota(v) = 0$, das heißt $\langle v | w \rangle = 0$ für alle $w \in V$. Dann ist insbesondere auch $\langle v | v \rangle = 0$, was wegen der Definitheit des Skalarproduktes $v = 0$ impliziert.

Ist $v \neq 0$, dann können wir eine Orthonormalbasis $\frac{v}{\|v\|}, v_2, \dots, v_k$ wählen (Warum?) und es gilt

$$j(v)(v_2, \dots, v_k) = \|v\| \omega\left(\frac{v}{\|v\|}, v_2, \dots, v_k\right) = \pm \|v\| \neq 0.$$

Damit ist aber auch $j(v) \neq 0$. □

Entscheidend an diesem Satz ist nicht, dass es Isomorphismen zwischen den entsprechenden Räumen gibt — das wissen wir auf Grund der übereinstimmenden Dimensionen ohnehin — sondern dass die Isomorphismen durch die Metrik eindeutig vorgegeben sind, wir also keine Basen wählen müssen.

Bemerkung 10.139. Die obigen Isomorphismen sind der Grund, dass es oft möglich ist ganz ohne Formen auszukommen, insbesondere wenn wir uns im \mathbb{R}^3 (oder auf anderen dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten) befinden. Dort können wir dann 1-Formen mittels ι^{-1} und 2-Formen mittels j^{-1} in Vektorfelder überführen und 3-Formen sind immer skalare Vielfache der Volumenform, entsprechen also Funktionen.

Wir wollen für den dreidimensionalen Fall noch explizite Formeln aufschreiben. Sei dafür e_1, e_2, e_3 eine orientierte Orthonormalbasis und $\theta^1, \theta^2, \theta^3$ die zugehörige duale Basis. Dann gilt (Warum?)

$$\begin{aligned}\omega &= \theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \theta^3 \\ \iota(\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3) &= \alpha \theta^1 + \beta \theta^2 + \gamma \theta^3 \\ j(\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3) &= \alpha \theta^2 \wedge \theta^3 + \beta \theta^3 \wedge \theta^1 + \gamma \theta^1 \wedge \theta^2.\end{aligned}$$

Aus diesen Formeln lassen sich natürlich auch die Umkehrabbildungen leicht ablesen. Diese Formeln gelten nur für Orthonormalbasen. Das ist deshalb wichtig, da wir im Kontext von Mannigfaltigkeiten oft mit Basen arbeiten, die keine Orthonormalbasen sind, den Koordinatenbasen.

Im dreidimensionalen Fall, und nur in diesem, können wir mit Hilfe des äußeren Produkts auch ein vektorwertiges Produkt von Vektoren einführen: das Kreuzprodukt

$$v \times w := j^{-1}(\iota(v) \wedge \iota(w)).$$

Die Leserin berechne zur Übung aus den obigen Formeln die explizite Darstellung für die Komponenten des Kreuzproduktes.

Eine weitere elementare Rechnung zeigt, dass

$$\langle u | v \times w \rangle = \det(u, v, w) = \omega(u, v, w) \quad (10.12)$$

gilt, womit wir eine weitere Darstellung der Volumenform gefunden haben.

Die Abbildungen ι und j erlauben uns zwar Formen mit Vektoren zu identifizieren, jedoch verhalten sich diese Objekte unterschiedlich unter Symmetrieoperationen (hier Drehungen und Spiegelungen). Darin liegt der Grund für die Unterscheidung von polaren und axialen Vektoren in der Physik. Wir werden das hier jedoch nicht detailliert untersuchen.

Mit den Abbildungen ι und j und der äußeren Ableitung können wir nun auch verschiedene Differentialoperatoren einführen.

Definition 10.140. Seien f eine glatte Funktion und v ein glattes Vektorfeld auf einer orientierten riemannschen Mannigfaltigkeit M mit Volumenform ω . Dann definieren wir ein Vektorfeld $\text{grad}(f)$ sowie eine Funktion $\text{div}(v)$ durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \text{grad}(f) &= \iota^{-1}(\text{d}f) \text{ und} \\ \text{d}j(v) &= \text{div}(v)\omega. \end{aligned}$$

Ist M dreidimensional definieren wir darüber hinaus ein Vektorfeld $\text{rot}(v)$ durch

$$\text{rot}(v) = j^{-1}\text{d}\iota(v).$$

Bemerkung 10.141. Mit den oben hergeleiteten Formeln erhalten wir für $M = \mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt und für die Standardbasis e_1, e_2, e_3 (Nachrechnen!)

$$\begin{aligned} \text{grad}(f) &= \partial_1 f e_1 + \partial_2 f e_2 + \partial_3 f e_3 \\ \text{div}(\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3) &= \partial_1 \alpha + \partial_2 \beta + \partial_3 \gamma \\ \text{rot}(\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3) &= (\partial_2 \gamma - \partial_3 \beta) e_1 + (\partial_3 \alpha - \partial_1 \gamma) e_2 + (\partial_1 \beta - \partial_2 \alpha) e_3. \end{aligned}$$

Beispiel 10.142. Gegenüber diesen expliziten Formeln haben die Definitionen für die Differentialoperatoren die wir gewählt haben den Vorteil, dass sie unabhängig vom Koordinatensystem sind. Sie erlauben es uns (zumindest prinzipiell) für jede orientierte riemannsche Mannigfaltigkeit und jedes Koordinatensystem die entsprechenden Operatoren auszurechnen. Wir werden das hier exemplarisch für den Graphen einer Funktion vorführen.

Sei also I ein Intervall und $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ glatt. Wir betrachten die Mannigfaltigkeit

$$M = \{(x, F(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I\}$$

mit der vom umgebenden \mathbb{R}^2 geerbten riemannschen Metrik. Diese besitzt die kanonische Parametrisierung $\varphi(s) = (s, F(s))$. Das Vektorfeld $v = (1, F')$ ist dann die zugehörige

Koordinatenbasis und jedes Vektorfeld w auf M lässt sich bezüglich dieser Basis darstellen

$$w = \alpha v = (\alpha, \alpha F')$$

wobei $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Koeffizientenfunktion ist. Wir wollen nun eine Formel für die Divergenz von v in Abhängigkeit von dieser Funktionen und ihrer Ableitungen bestimmen.

Die Volumenform auf M ist jetzt durch

$$\omega = \sqrt{1 + (F')^2} dx$$

gegeben (Warum?) und wir erhalten $j(w) = \omega(w) = \sqrt{1 + (F')^2} \alpha$. Dann gilt, da diese Funktion nicht von y abhängt

$$dj(w) = \left(\frac{F' F''}{\sqrt{1 + (F')^2}} \alpha + \sqrt{1 + (F')^2} \alpha' \right) dx$$

und damit

$$\operatorname{div}(w) = \frac{F' F''}{1 + (F')^2} \alpha + \alpha'$$

Bemerkung 10.143. Die Abbildungen ι und j erlauben uns auch, Vektorfelder über 1-dimensionale beziehungsweise $k-1$ -dimensionale Untermannigfaltigkeiten zu integrieren, indem wir sie in 1- beziehungsweise $(k-1)$ -Formen überführen. Für ein 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit $c \subset M$ und ein Vektorfeld v können wir das sogenannte Kurvenintegral zweiter Art definieren:

$$\int_c v ds := \int_c \iota(v).$$

Der Ausdruck ds auf der linken Seite, häufig auch mit einem Pfeil über dem s notiert, ist dabei keine Form. Ist $\varphi : I \rightarrow c$ eine orientierte Parametrisierung, dann erhalten wir unmittelbar die Formel

$$\int_c v ds = \int_I \langle v(\varphi(t)) | \varphi'(t) \rangle dt.$$

Ist analog $N \subset M$ eine Hyperfläche, und v ein Vektorfeld, dann können wir definieren

$$\int_N v d\sigma = \int_N j(v).$$

Auch hier ist $d\sigma$ lediglich Notation und steht nicht für eine Form. Im Fall $\dim M = 3$ und $\dim N = 2$ heißt dieses Integral Oberflächenintegral zweiter Art. Ist $\varphi : V \rightarrow U$ eine orientierte Parametrisierung für eine offene Teilmenge von N , dann gilt explizit

$$\int_U v d\sigma = \int_V \omega(v(\varphi(t)), \partial_1 \varphi(t), \dots, \partial_{k-1} \varphi(t)) d\lambda^{k-1}(t),$$

wobei wir die Formel aus Bemerkung 10.134 nutzen können, um den Integranden auszurechnen.

Im Fall $\dim M = 3$, $\dim N = 2$ können wir auch (10.12) benutzen und erhalten

$$\int_U v d\sigma = \int_V \langle v(\varphi(t)) | \partial_1 \varphi(t) \times \partial_2 \varphi(t) \rangle d\lambda^2(t).$$

Dabei wird der Ausdruck $\partial_1 \varphi \times \partial_2 \varphi$ als das vektorielle Flächenelement des parametrisierten Flächenstücks bezeichnet.

Mit obigen Vorbereitungen erhalten wir nun die klassischen Integralsätze als Spezialfälle des Satzes von Stokes. Wir schreiben hier die Entsprechungen zu Korollar 10.127 auf, wir können aber auch die Sätze Theorem 10.125 und Korollar 10.129 entsprechend übersetzen.

Satz 10.144 (Integralsatz von Gauß). *Es gelten wieder die Voraussetzungen von Bemerkung 10.121. Sei $M_i \cup N$ kompakt und v ein glattes Vektorfeld auf M . Dann gilt*

$$\int_{M_i} \operatorname{div}(v) dV = \int_N v d\sigma.$$

Beweis. Wir müssen die obigen Ausdrücke nur übersetzen:

$$\int_{M_i} \operatorname{div}(v) dV = \int_{M_i} \operatorname{div}(v) \omega = \int_{M_i} dJ(v) = \int_N J(v) = \int_N v d\sigma. \quad \square$$

Satz 10.145 (Klassischer Integralsatz von Stokes). *Es gelten die Voraussetzungen von Bemerkung 10.121 wobei M eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit in \mathbb{R}^3 sei. Es sei $M_i \cup N$ kompakt und v ein glattes Vektorfeld auf \mathbb{R}^3 . Dann gilt*

$$\int \operatorname{rot} v d\sigma = \int v ds$$

Beweis. Auch hier müssen wir nur übersetzen.

$$\int_{M_i} \operatorname{rot}(v) d\sigma = \int_{M_i} J(\operatorname{rot}(v)) = \int_{M_i} J(J^{-1}(d\iota(v))) = \int_{M_i} d\iota(v) = \int_N \iota(v) = \int_N v ds. \quad \square$$

Bemerkung 10.146. Die „anschauliche“ Interpretation von Divergenz und Rotation als Quelledichte beziehungsweise Wirbeldichte eines Vektorfeldes ergibt sich erst aus diesen Integralsätzen wie wir hier für die Divergenz kurz illustrieren wollen. Da es sich ohnehin um heuristische Überlegungen handelt, gehen wir mit den Details recht großzügig um.

Wir interpretieren das (zeitunabhängige) Vektorfeld v als Flussdichte (Menge je Flächeneinheit und Zeiteinheit) einer nicht komprimierbaren Substanz (zum Beispiel Flüssigkeit). Betrachten wir nun eine kleine Testmenge M_i mit Rand N um den Punkt x

für die wir annehmen wollen, dass sie die Voraussetzungen des gaußschen Integralsatzes erfüllt, dann ist

$$\int_N v d\sigma = \int_{M_i} \operatorname{div}(v) dV$$

die Menge der Substanz, die je Zeiteinheit aus U herausfließt. Da die Substanz nicht komprimiert werden kann, muss das der je Zeiteinheit in U entstandenen Substanzmenge entsprechen, wir erhalten durch

$$\frac{\int_N v d\sigma}{\int_{M_i} dV} = \frac{\int_{M_i} \operatorname{div}(v) dV}{\int_{M_i} dV}$$

also eine Art mittlere Quelldichte des Feldes in der Testmenge M_i (erzeugte Substanz je Volumeneinheit und Zeiteinheit). Lassen wir nun den Durchmesser von M_i und damit auch von N gegen 0 gehen, erhalten wir links die Quelldichte im Punkt x . Ist $\operatorname{div}(v)$ stetig, dann konvergiert dabei die rechte Seite der Gleichung gegen $\operatorname{div}(v)_x$ (Warum?).

11 Funktionalanalysis

11.1 Hilberträume

Stark zusammengefasst und grob vereinfacht wollen wir in der Funktionalanalysis die Aussagen der linearen Algebra (und später auch der Analysis) auf unendlichdimensionale Vektorräume verallgemeinern. Viele interessante Beispiele für solche unendlichdimensionalen Räume sind Funktionenräume. Wir haben schon einzelne Beispiele solcher Funktionenräume und ihrer Anwendungen gesehen (z.B. Satz 5.82 und Theorem 6.64). Aus Sicht der Physik werden uns insbesondere sogenannte Hilberträume interessieren, da sie eine zentrale Rolle in der mathematischen Beschreibung der Quantenmechanik spielen.

In der mathematischen Beschreibung der klassischen Mechanik ist der Zustand eines Systems durch einen Punkt im Phasenraum (Kotangentialbündel einer Mannigfaltigkeit), also durch verallgemeinerte Ort- und Impulskoordinaten gegeben. Eine Observable (also eine messbare Größe des Systems) entspricht dann einer Funktion f auf dem Phasenraum und $f(x)$ ist der Wert den wir erhalten wenn wir f im Punkt x messen. Für den eindimensionalen harmonischen Oszillator beispielsweise entspricht der Phasenraum im wesentlichen \mathbb{R}^2 und die Energie wird durch die Funktion $E(x, p) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}p^2$ dargestellt.

In der Quantenmechanik ist der Zustandsraum ein (im Allgemeinen unendlichdimensionaler) Hilbertraum, dessen Elemente üblicherweise Wellenfunktionen genannt werden. Die physikalische Interpretation solcher Wellenfunktionen hängt vom gewählten Modell ab und ist nicht immer offensichtlich. Observablen entsprechen dann Operatoren über dem Hilbertraum und mögliche Messwerte deren Spektralwerten. Unsere Aufgaben wird es in den folgenden Kapiteln sein, die obigen Begriffe und ihre Wechselwirkungen kennenzulernen und zu verstehen.

Erinnerung 11.1. (i) Ein Banachraum ist ein Vektorraum V mit einer Norm $\|\cdot\|$, der bezüglich dieser Norm vollständig ist.

(ii) Ist V ein Vektorraum und $\langle \cdot | \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt, dann wird durch $\|v\| := \sqrt{\langle v | v \rangle}$ eine Norm definiert, die wir die induzierte Norm nennen (siehe Satz 3.63).

(iii) Alle Vektorräume sind bei uns stets Vektorräume über dem Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

(iv) Für jedes Skalarprodukt gilt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\langle v | w \rangle \leq \|v\| \|w\|$$

und für die zugehörige Norm die Dreiecksungleichung

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|.$$

Definition 11.2. Ein Vektorraum V mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot | \cdot \rangle$ heißt Prähilbertraum. Ist V vollständig bezüglich der von dem Skalarprodukt induzierten Norm, dann sprechen wir von einem Hilbertraum.

Hilberträume sind also spezielle Banachräume, deren Norm von einem Skalarprodukt induziert wird.

Beispiel 11.3. (i) Wir wissen bereits, dass auf \mathbb{K}^n durch

$$\langle x|y \rangle = \sum_{i=1}^n \overline{x_i} y_i$$

ein Skalarprodukt definiert wird. Wir wissen auch, dass der Raum bezüglich der induzierten Norm vollständig ist (siehe Satz 5.20).

(ii) Wir betrachten für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ den Raum der quadratsummierbaren Folgen, das heißt

$$\mathbf{l}^2 = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{K} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}$$

und definieren

$$\langle (x_n) | (y_n) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{x_n} y_n.$$

Die Eigenschaften eines Skalarproduktes sind leicht nachzurechnen, wir müssen jedoch zunächst überprüfen, dass die Abbildung überhaupt definiert ist, die Summe also konvergiert. Da jedoch für beliebige reelle Zahlen immer $ab \leq a^2 + b^2$ gilt (Warum?), ist auch

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\overline{x_n} y_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| |y_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} (|x_n|^2 + |y_n|^2) < \infty$$

und die Summe damit absolut konvergent.

Wir wollen noch zeigen, dass \mathbf{l}^2 ein Vektorraum ist. Seien dazu (x_n) und (y_n) quadratsummierbare Folgen und $\alpha \in \mathbb{K}$, dann gilt

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |x_n + \alpha y_n|^2 &\leq \sum_{n=1}^{\infty} (|x_n| + |\alpha| |y_n|)^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 + 2|\alpha| \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| |y_n| + |\alpha|^2 \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2. \end{aligned}$$

Dabei sind die erste und die letzte Summe nach Voraussetzung konvergent und die Konvergenz der mittleren Summe haben wir eben gezeigt. Jede Linearkombination von Elementen aus \mathbf{l}^2 liegt also wieder im selben Raum.

Damit ist der Raum \mathbf{l}^2 mit dem obigen Skalarprodukt ein unendlichdimensionaler (Warum?) Prähilbertraum. Tatsächlich ist der Raum auch vollständig, was wir weiter unten allgemeiner zeigen werden.

- (iii) Sei nun (Ω, Σ, μ) ein Maßraum. Wir betrachten den Raum der quadratintegrierbaren Funktionen, das heißt

$$\mathcal{L}^2(\Omega, \Sigma, \mu) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ ist messbar und } \int |f|^2 d\mu < \infty \right\}$$

(wir werden Σ und μ in der Notation häufig weglassen, auch wenn der Raum natürlich davon abhängt) und definieren

$$\langle f | g \rangle = \int \bar{f} g d\mu.$$

Analog zum obigen Argument sehen wir

$$\int |\bar{f} g| d\mu = \int |f| |g| d\mu \leq \int (|f|^2 + |g|^2) d\mu < \infty,$$

das Skalarprodukt ist also wohldefiniert. Ähnlich wie oben lässt sich auch zeigen, dass $\mathcal{L}^2(\Omega)$ ein Vektorraum ist (Übung).

Der so konstruierte Raum ist im Allgemeinen leider kein Prähilbertraum, da die obige Abbildung $\langle \cdot | \cdot \rangle$ nicht definit ist. Beispielsweise gibt es von 0 verschiedene Funktionen auf \mathbb{R} , so dass

$$\int |f|^2 d\lambda = 0$$

ist (Welche?). Da viele in der Quantenmechanik vorkommende Hilberträume genau solche Räume quadratintegrierbarer Funktionen sind (häufig mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und μ dem Lebesgue-Maß), müssen wir nun untersuchen, wie wir mit diesem Problem umgehen können.

Definition 11.4. Sei V ein Vektorraum. Eine Abbildung $\langle \cdot | \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ heißt hermitesche Form, falls für alle $v, w, u \in V$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt

$$\begin{aligned} \langle v | w + \alpha u \rangle &= \langle v | w \rangle + \alpha \langle v | u \rangle \\ \langle v | w \rangle &= \overline{\langle w | v \rangle} \\ \langle v | v \rangle &\geq 0. \end{aligned}$$

Eine Abbildung $\|\cdot\| : V \rightarrow [0, \infty)$ heißt Halbnorm oder Seminorm falls für alle $v, w \in V$ und für alle $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt

$$\begin{aligned} \|\alpha v\| &= |\alpha| \|v\| \\ \|v + w\| &\leq \|v\| + \|w\|. \end{aligned}$$

Eine hermitesche Form ist fast ein Skalarprodukt und eine Halbnorm fast eine Norm, es fehlt nur jeweils die Definitheit.

Bemerkung 11.5. Analog wie für Skalarprodukte definieren wir für eine hermitesche Form $\langle \cdot | \cdot \rangle$ eine Abbildung $\|v\| := \sqrt{\langle v | v \rangle}$. Für hermitesche Formen gilt dann ebenfalls die Cauchy-Schwarz-Ungleichung (Übung)

$$|\langle v | w \rangle| \leq \|v\| \|w\| ,$$

und $\|\cdot\|$ ist eine Halbnorm.

Bemerkung 11.6. Sei V ein Vektorraum, $\langle \cdot | \cdot \rangle$ eine hermitesche Form und $\|\cdot\|$ die davon induzierte Halbnorm. Wir betrachten nun den Kern der Halbnorm, also die Menge

$$V_0 = \{v \in V \mid \|v\| = 0\} .$$

Für zwei Elemente v, w im Kern gilt

$$\|v + \alpha w\| \leq \|v\| + \alpha \|w\| = 0 .$$

Damit ist gezeigt, dass V_0 ein Untervektorraum ist. Wir möchten diesen Untervektorraum „loswerden“.

Wir betrachten dazu den Quotientenraum

$$W = V/V_0 = \{v + V_0 \mid v \in V\} .$$

Wir nennen dabei die Menge $v + V_0$ eine Äquivalenzklasse und v einen Repräsentanten. Natürlich enthält jede Äquivalenzklasse viele verschiedene Repräsentanten. Dabei ist zu beachten, dass $v_1 + V_0 = v_2 + V_0$ genau dann gilt, wenn $v_1 - v_2 \in V_0$ (Warum?). Indem wir W einführen, betrachten wir also zwei Elemente von V als gleich, wenn sie sich lediglich durch ein Element im Kern unterscheiden.

Der Quotientenraum erbt eine natürliche Vektorraumstruktur indem wir für $v, w \in V$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ definieren

$$\begin{aligned} (v + V_0) + (w + V_0) &:= v + w + V_0 \\ \alpha(v + V_0) &:= \alpha v + V_0 . \end{aligned}$$

Dafür muss natürlich überprüft werden, dass diese Abbildungen wohldefiniert sind (also unabhängig von der Wahl der Repräsentanten v und w) und die Vektorraumaxiome erfüllen. Das neutrale Element in diesem Raum ist dann $0 + V_0 = V_0$.

Auf Grund der Cauchy-Schwarz-Ungleichung gilt für $v \in V_0$ und beliebiges $w \in V$ immer

$$\langle v | w \rangle \leq \|v\| \|w\| = 0 .$$

Wir definieren nun eine Abbildung auf $W \times W$ durch

$$\langle v + V_0 | w + V_0 \rangle_W := \langle v | w \rangle .$$

Auch hier müssen wir überprüfen, dass die Abbildung wohldefiniert ist. Wenn wir andere Repräsentanten \tilde{v} und \tilde{w} für die selben Äquivalenzklassen wählen, also so, dass $v - \tilde{v}, w - \tilde{w} \in V_0$ gilt, dann gilt

$$\begin{aligned}\langle v|w\rangle &= \langle \tilde{v} + (v - \tilde{v})|\tilde{w} + (w - \tilde{w})\rangle \\ &= \langle \tilde{v}|\tilde{w}\rangle + \langle \tilde{v}|w - \tilde{w}\rangle + \langle v - \tilde{v}|w\rangle + \langle v - \tilde{v}|w - \tilde{w}\rangle = \langle \tilde{v}|\tilde{w}\rangle.\end{aligned}$$

Es ist nun einfach zu überprüfen, dass $\langle \cdot | \cdot \rangle_W$ eine hermitesche Form auf W ist. Tatsächlich handelt es sich hier um ein Skalarprodukt und bei $\|\cdot\|_W$ um eine Norm, denn $\|v + V_0\|_W = 0$ genau dann wenn $\|v\| = 0$ genau dann wenn $v \in V_0$ genau dann wenn $v + V_0 = V_0$ das neutrale Element von W ist.

Beispiel 11.7. Wir können die oben beschriebene Prozedur nun auf den Raum $\mathcal{L}^2(\Omega)$ anwenden. In diesem Fall ist der Kern genau die Menge

$$\left\{ f \in \mathcal{L}(\Omega) \left| \int |f|^2 d\mu = 0 \right. \right\}.$$

Wegen Bemerkung 8.31 (iv) ist das genau die Menge der fast überall verschwindenden Funktionen. Indem wir wie oben beschrieben den Quotientenraum bilden, erhalten wir den Raum der quadratintegrierbaren Funktionen $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Der Vorteil: dieser Raum ist ein Hilbertraum (wird noch gezeigt), der Nachteil: die Elemente des Raumes sind keine Funktionen mehr, sondern Mengen beziehungsweise Äquivalenzklassen von Funktionen.

Häufig brauchen wir uns darum nicht zu kümmern, manchmal müssen wir jedoch Vorsicht walten lassen. Die wichtigste Konsequenz ist, dass die Elemente nicht mehr an einem einzelnen Punkt $\omega \in \Omega$ ausgewertet werden können, falls $\mu(\{\omega\}) = 0$ ist (wie zum Beispiel für das Lebesgue-Maß). Das liegt daran, dass der Teilraum für den ein $f \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ steht Repräsentanten mit beliebigen Werten im Punkt ω enthält.

Wir wollen nun noch die Vollständigkeit des eben konstruierten Raumes zeigen und benötigen dafür noch etwas Vorarbeit.

Lemma 11.8. *Ein normierter Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$ ist vollständig genau dann, wenn jede absolut konvergente Reihe konvergiert.*

Beweis. Wir haben eine Richtung dieser Aussage bereits in Satz 5.23 gezeigt und zeigen nun noch die andere. Es sei also jede absolut konvergente Reihe in V konvergent und $(x_n) \subset V$ eine Cauchy-Folge.

Wir definieren nun rekursiv eine streng monoton wachsende Indexfolge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ so, dass $|x_m - x_{n_k}| < \frac{1}{2^k}$ für alle $m \geq n_k$ gilt. So ein n_k existiert für jedes k auf Grund der Cauchy-Bedingung.

Betrachten wir nun die Folge $y_0 = x_{n_1}$ und $y_k = x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$ für $k \geq 1$. Es gilt offenbar

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|y_k\| = \|x_{n_1}\| + \sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \|x_{n_1}\| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \infty,$$

die Reihe ist also absolut konvergent und damit nach Voraussetzung auch konvergent. Es gilt aber auch

$$\sum_{k=1}^l y_k = x_{n_l},$$

womit wir gezeigt haben, dass die Teilfolge $(x_{n_l})_{l \in \mathbb{N}}$ konvergent ist. Jede Cauchy-Folge mit einer konvergenten Teilfolge konvergiert jedoch (Warum?). \square

Lemma 11.9. *Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum, $M \in (0, \infty)$ und f_n eine monoton wachsende Folge von nichtnegativen, integrierbaren Funktionen so, dass*

$$\int f_n d\mu \leq M$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert die Folge (f_n) fast überall.

Beweis. Wir müssen hier nur zeigen, dass f_n fast überall beschränkt ist. Dazu betrachten wir für $n, k \in \mathbb{R}$ die Mengen

$$A_n^k = [f_n > k].$$

Für deren Maß gilt

$$\mu(A_n^k) = \int \mathbb{1}_{A_n^k} d\mu \leq \int \mathbb{1}_{A_n^k} \frac{f_n}{k} d\mu \leq \frac{1}{k} \int f_n d\mu \leq \frac{M}{k}.$$

Für festes k sind diese Mengen monoton wachsend in n . Betrachten wir nun

$$B^k = [f_n > k \text{ für irgendein } n \in \mathbb{N}] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n^k,$$

dann gilt wegen der Stetigkeit des Maßes $\mu(B^k) \leq \frac{M}{k}$. Die Mengen B^k sind monoton fallend in k . Die Folge $f_n(\omega)$ ist nun unbeschränkt genau dann, wenn ω in jedem der B_k liegt also auf der Menge

$$B = \bigcap_{k=1}^{\infty} B^k.$$

Wir können nochmal die Stetigkeit des Maßes anwenden und erhalten

$$\mu(B) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(B^k) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{M}{k} = 0. \quad \square$$

Satz 11.10. *Der Raum $\mathbf{L}^2(\Omega)$ ist ein Hilbertraum.*

Beweis. Sei $(f_n) \subset \mathbf{L}^2(\Omega)$ so, dass $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\| =: M < \infty$. Wir wählen nun für jede Äquivalenzklasse f_n einen Repräsentanten, den wir ebenfalls mit f_n bezeichnen wollen. Anders als die Äquivalenzklassen haben diese Repräsentanten für jedes $\omega \in \Omega$ einen konkreten Wert.

Als erstes wollen wir zeigen, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ punktweise fast überall konvergiert. Wir setzen dazu

$$g_n = \sum_{k=1}^n |f_k|.$$

Dann folgt aus der Dreiecksungleichung

$$\|g_n\| \leq \sum_{k=1}^n \|f_k\| \leq M.$$

Insbesondere gilt für alle n

$$\int g_n^2 d\mu \leq M^2,$$

so dass wir das obige Lemma anwenden können. Damit ist die Folge (g_n^2) und daher auch (g_n) fast überall konvergent gegen eine Grenzfunktion g . Letztere ist mit dem Satz von Beppo-Levi und der obigen Ungleichung auch quadratintegrierbar.

Außerdem bedeutet es, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k$$

fast überall absolut konvergent ist. Setzen wir

$$h_n = \sum_{k=1}^n f_k,$$

dann konvergieren diese Funktionen also punktweise fast überall gegen eine Grenzfunktion h (hier benutzen wir die Vollständigkeit von \mathbb{K}). Für diese Grenzfunktion gilt nun auch $|h| \leq g$, so dass die Funktion h ebenfalls quadratintegrierbar ist.

Schließlich bleibt noch zu zeigen, dass die Folge h_n auch bezüglich der \mathbf{L}^2 -Norm gegen h konvergiert. Da $|h - h_n| \leq |h| + |h_n| \leq |h| + |g|$ ist, wobei die Funktion auf der rechten Seite quadratintegrierbar ist, besitzt $|f - h_n|^2$ die integrierbare Majorante $(|f| + |g|)^2$ und wir können den Satz von Lebesgue anwenden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - h_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int |h - h_n|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Damit ist h , oder genauer die zugehörige Äquivalenzklasse, der gesuchte Grenzwert der Reihe. \square

Bemerkung 11.11. (i) Aus dem obigen Satz folgt nun auch, dass \mathbf{l}^2 ein Hilbertraum ist. Dazu betrachten wir $\Omega = \mathbb{N}$ mit dem Zählmaß (vergleiche Beispiel 8.42). Natürlich hätten wir die Aussage in diesem Spezialfall auch einfacher beweisen können (Wie?).

(ii) Mit einer sehr ähnlichen Konstruktion wie oben, lassen sich auch allgemeiner die Räume der p -integrierbaren Funktionen für $p \geq 1$ behandeln:

$$\mathbf{L}^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ messbar und } \int |f|^p d\mu < \infty \right\}$$

mit

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Für $p \neq 2$ sind diese Räume keine Hilberträume aber immer noch Banachräume (also vollständig).

Analog wie für \mathbf{L}^2 sind die Elemente dieser Räume jedoch im Allgemeinen keine Funktionen mehr sondern Äquivalenzklassen von Funktionen. Neben dem \mathbf{L}^2 werden wir uns hauptsächlich für den Raum \mathbf{L}^1 der integrierbaren Funktionen interessieren.

Nachdem wir nun die wichtigsten Beispiele für Hilberträume eingeführt haben, wollen wir ihre Eigenschaften untersuchen. Im Folgenden sei stets \mathcal{H} ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

Beispiel 11.12. Ein wichtiger Unterschied zum endlichdimensionalen Fall ist, dass Untervektorräume eines unendlichdimensionalen normierten Raumes nicht mehr notwendig abgeschlossen sein müssen. Als Beispiel betrachten wir \mathbf{l}^2 sowie die Teilmenge der endlichen Folgen

$$\mathbf{c}_c = \{x \in \mathbf{l}^2 \mid x_n = 0 \text{ für alle bis auf endlich viele } n \in \mathbb{N}\}.$$

Wir werden ab jetzt häufig so wie oben lediglich x für die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ schreiben. Es ist leicht zu zeigen, dass das ein Untervektorraum ist (Warum?). Ist nun $x \in \mathbf{l}^2$ eine beliebige quadratsummierbare Folge, dann setzen wir für $k \in \mathbb{N}$

$$y_n^k = \begin{cases} x_n & n \leq k \\ 0 & n > k \end{cases}$$

(k ist hier ein weiterer Index, keine Potenz). Offensichtlich liegen die Folgen y^k für jedes $k \in \mathbb{N}$ in \mathbf{c}_c . Außerdem gilt

$$\|x - y^k\|^2 = \sum_{n=k+1}^{\infty} |x_n|^2$$

und da $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$ endlich ist, konvergiert die rechte Seite für $k \rightarrow \infty$ gegen 0. Wir haben damit gezeigt, dass die Folge $(y^k) \subset \mathbf{c}_c$ (das ist jetzt eine Folge von Folgen) gegen x konvergiert.

Zu jedem $x \in \mathbf{l}^2$ lässt sich also eine Folge in \mathbf{c}_c finden, die gegen x konvergiert, damit ist jeder Punkt $x \in \mathbf{l}^2$ ein Randpunkt von \mathbf{c}_c . Andererseits gibt es natürlich viele quadratsummierbare Folgen, die nicht endlich sind, \mathbf{c}_c ist also nicht abgeschlossen.

Definition 11.13. Zwei Vektoren $x, y \in \mathcal{H}$ heißen orthogonal, falls $\langle x|y \rangle = 0$ gilt. Für eine Teilmenge $A \subset \mathcal{H}$ definieren wir

$$A^\perp = \{x \in \mathcal{H} \mid \langle x|a \rangle = 0 \text{ für alle } a \in A\}.$$

Bemerkung 11.14. Ein weiterer wichtiger Unterschied zum endlichdimensionalen Fall ist, dass lineare Abbildungen nicht mehr notwendig stetig sein müssen (dazu später mehr). Eine wichtige lineare Abbildung die stetig ist, ist jedoch das Skalarprodukt: Für festes x und beliebiges y, \tilde{y} gilt

$$|\langle x|y \rangle - \langle x|\tilde{y} \rangle| \leq \|x\| \|y - \tilde{y}\|,$$

womit gezeigt ist, dass die Abbildung $y \mapsto \langle x|y \rangle$ Lipschitz-stetig ist.

Satz 11.15. Sei $A \subset \mathcal{H}$ eine Teilmenge. Dann ist das orthogonale Komplement A^\perp ein abgeschlossener Untervektorraum.

Beweis. Betrachte zunächst ein festes $a \in A$. Dann ist

$$\{a\}^\perp = \{x \in \mathcal{H} \mid \langle x|a \rangle = 0\}$$

ein Untervektorraum, denn für $x, y \in \{a\}^\perp$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ ist

$$\langle x + \alpha y|a \rangle = \langle x|a \rangle + \alpha \langle y|a \rangle = 0.$$

Außerdem ist A^\perp als Urbild der 0 unter der stetigen Abbildung $x \mapsto \langle x|a \rangle$ abgeschlossen. Schließlich ist

$$A^\perp = \bigcap_{a \in A} \{a\}^\perp$$

als Durchschnitt von Untervektorräumen ein Untervektorraum und als Durchschnitt von abgeschlossenen Mengen abgeschlossen. \square

Satz 11.16. Seien $A \subset B \subset \mathcal{H}$ Teilmengen. Dann gelten $B^\perp \subset A^\perp$ und $\overline{\text{lin } A}^\perp = A^\perp$.

Beweis. Die erste Aussage ist eine einfache Übungsaufgabe. Damit folgt offenbar $\overline{\text{lin } A}^\perp \subset A^\perp$.

Sei andererseits $x \in A^\perp$ und $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k \in \text{lin } A$ wobei $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ und $a_1, \dots, a_k \in A$ sind. Dann gilt

$$\langle x|\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k \rangle = \alpha_1 \langle x|a_1 \rangle + \dots + \alpha_k \langle x|a_k \rangle = 0.$$

Da das für beliebige Linearkombinationen von Elementen aus A gilt, ist $x \in (\operatorname{lin} A)^\perp$. Sei nun $y \in \overline{\operatorname{lin} A}$, dann existiert eine gegen y konvergente Folge $(y_n) \subset \operatorname{lin} A$ und es gilt

$$\langle x|y \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x|y_n \rangle = 0.$$

Da das für beliebige y gilt, ist also $x \in \overline{\operatorname{lin} A}^\perp$ und damit ist die Aussage gezeigt. \square

Definition 11.17. Sei I eine Indexmenge. Eine Familie $(e_i)_{i \in I} \subset \mathcal{H}$ heißt Orthonormalsystem, falls

$$\langle e_i|e_j \rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}.$$

Gilt zusätzlich $\overline{\operatorname{lin} \{e_i | i \in I\}} = \mathcal{H}$, dann heißt die Familie eine Orthonormalbasis.

Wichtig ist hier, der Raum $\operatorname{lin} \{e_i | i \in I\}$ enthält nur endliche Linearkombinationen der Basisvektoren, keine Reihen. Daher ist dieser Raum für unendliches I nie abgeschlossen.

Beispiel 11.18. (i) Im Raum \mathbb{I}^2 seien für $k \in \mathbb{N}$ Elemente e^k durch

$$e_n^k = \begin{cases} 1 & k = n \\ 0 & k \neq n \end{cases}$$

gegeben. Wir rechnen leicht nach, dass diese ein Orthonormalsystem bilden. Ebenfalls leicht einzusehen ist, dass der von ihnen aufgespannte Untervektorraum genau der Raum der endlichen Folgen \mathbf{c}_c ist.

Wir haben in Beispiel 11.12 gezeigt, dass jedes Element von \mathbb{I}^2 Randpunkt von \mathbf{c}_c ist. Die Elemente e^k bilden also eine Orthonormalbasis.

(ii) Wir betrachten in $\mathbf{L}^2([0, 1])$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$ die Elemente

$$\begin{aligned} e_k &: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto \exp(2\pi kit). \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\langle e_k|e_l \rangle = \int_0^1 \exp(-2\pi kit) \exp(2\pi lit) dt = \int_0^1 \exp(2\pi(l-k)it) dt = \begin{cases} 1 & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases},$$

die Funktionen (eigentlich die zugehörigen Äquivalenzklassen) bilden also ein Orthonormalsystem. Tatsächlich handelt es sich um eine Orthonormalbasis und die zugehörige Basisentwicklung (siehe unten) ist die Fourierreihe. Wir werden den erstaunlich aufwändigen Beweis hier jedoch nicht angeben.

- Bemerkung 11.19.* (i) In den für uns relevanten Fällen wird die Indexmenge I abzählbar (oder endlich) sein, so dass wir die Elemente des Orthonormalsystems mit \mathbb{N} durchnummerieren können. Die im Folgenden auftauchenden Summen sind dann gewöhnliche Reihen (oder endliche Summen). Die unten stehenden Sätze gelten jedoch auch für Orthonormalsysteme mit überabzählbar vielen Elementen. In diesem Fall müssten wir uns natürlich Gedanken über die Definitionen der auftauchenden Summen machen. Wir werden die Sätze jeweils allgemein formulieren, sie aber nur für den Fall $I = \mathbb{N}$ beweisen (der endliche Fall ist meist ein einfaches Korollar).
- (ii) Jedes Orthonormalsystem ist insbesondere linear unabhängig, denn falls für irgendeine endliche Teilmenge $J \subset I$ und Koeffizienten $(\alpha_i)_{i \in J}$

$$0 = \sum_{i \in J} \alpha_i e_i$$

gilt, dann erhalten wir, indem wir für irgendein $j \in J$ das Skalarprodukt mit e_j bilden

$$0 = \sum_{i \in J} \alpha_i \langle e_j | e_i \rangle = \alpha_j,$$

es müssen also alle Koeffizienten verschwinden.

- (iii) Sei $(e_i)_{i \in I}$ ein Orthonormalsystem und $(\alpha_i)_{i \in I}, (\beta_i)_{i \in I} \subset \mathbb{K}$, dann gilt für jede endliche Teilmengen $J, K \subset I$

$$\left\langle \sum_{i \in J} \alpha_i e_i \left| \sum_{k \in K} \beta_k e_k \right. \right\rangle = \sum_{i \in J \cap K} \overline{\alpha_i} \beta_i.$$

Da das Skalarprodukt stetig ist, gilt die Gleichung auch für unendliche J , vorausgesetzt die auftretenden Reihen konvergieren. Insbesondere erhalten wir für die Norm

$$\left\| \sum_{i \in I} \alpha_i e_i \right\|^2 = \sum_{i \in I} |\alpha_i|^2$$

Satz 11.20. Sei $(e_i)_{i \in I}$ ein Orthonormalsystem und $(\alpha_i)_{i \in I} \subset \mathbb{K}$. Dann konvergiert $\sum_{i \in I} \alpha_i e_i$ genau dann, wenn $\sum_{i \in I} |\alpha_i|^2 < \infty$. Dabei ist die Reihe $\sum_{i \in I} \alpha_i e_i$ unbedingt konvergent, das heißt Konvergenz und Grenzwert hängen nicht von der Reihenfolge der Summation ab.

Beweis. Falls $\sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i e_i$ konvergiert, dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass

$$1 > \left\| \sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i e_i - \sum_{i=1}^N \alpha_i e_i \right\|^2 = \left\| \sum_{i=N+1}^{\infty} \alpha_i e_i \right\|^2 = \sum_{i=N+1}^{\infty} |\alpha_i|^2,$$

was $\sum_{i \in \mathbb{N}} |\alpha_i|^2 < \infty$ impliziert.

Gilt andererseits $\sum_{i \in \mathbb{N}} |\alpha_i|^2 < \infty$, dann existiert für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass $\sum_{i \in \mathbb{N}+1} |\alpha_i|^2 < \epsilon^2$. Dann gilt für $M > K > N$

$$\left\| \sum_{i=1}^M \alpha_i e_i - \sum_{i=1}^K \alpha_i e_i \right\|^2 = \left\| \sum_{i=K+1}^M \alpha_i e_i \right\|^2 = \sum_{i=K+1}^M |\alpha_i|^2 \leq \sum_{i \in \mathbb{N}+1} |\alpha_i|^2 < \epsilon^2.$$

Diese Ungleichung entspricht genau der Cauchy-Bedingung für die Partialsummen der Reihe $\sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i e_i$, welche daher konvergiert.

Sei nun $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung und $\epsilon > 0$. Es existiert wieder $N \in \mathbb{N}$ so, dass $\sum_{i \in \mathbb{N}+1} |\alpha_i|^2 < \epsilon^2$. Da φ bijektiv ist, existiert $M \in \mathbb{N}$ so, dass $\{1, \dots, N\} \subset \varphi(\{1, \dots, M\})$. Dann gilt

$$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i - \sum_{i=1}^M \alpha_{\varphi(i)} e_{\varphi(i)} \right\|^2 = \sum_{i \in \mathbb{N} \setminus \varphi(\{1, \dots, M\})} |\alpha_i|^2 \leq \sum_{i=N+1}^{\infty} |\alpha_i|^2 < \epsilon^2.$$

Damit haben wir gezeigt, dass die umsortierte Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{\varphi(i)} e_{\varphi(i)}$ gegen den selben Grenzwert konvergiert wie die ursprüngliche. \square

Bemerkung 11.21. Wir können hier bereits ein weiteres Phänomen beobachten, dass in endlichdimensionalen Räumen nicht auftreten kann. Sei $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem und wir betrachten die Koeffizienten $\alpha_i = \frac{1}{i}$. Da $\sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{i^2} < \infty$ ist, ist dann die Reihe

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{e_i}{i}$$

unbedingt konvergent.

Andererseits ist die Reihe nicht absolut konvergent, denn es gilt

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \left\| \frac{e_i}{i} \right\| = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{i} = \infty.$$

Satz 11.22 (Besselungleichung). Sei $(e_i)_{i \in I}$ ein Orthonormalsystem, dann gilt für jedes $x \in \mathcal{H}$ die Ungleichung

$$\sum_{i \in I} |\langle e_i | x \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Damit ist insbesondere die Reihe $\sum_{i \in I} \langle e_i | x \rangle e_i$ konvergent. Gleichheit gilt in dieser Ungleichung genau dann, wenn

$$x = \sum_{i \in I} \langle e_i | x \rangle e_i$$

ist.

Beweis. Für ein beliebige $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}
0 &\leq \left\| x - \sum_{i=1}^N \langle e_i | x \rangle e_i \right\|^2 \\
&= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^N \langle x | e_i \rangle \langle e_i | x \rangle - \sum_{i=1}^N \langle e_i | x \rangle \overline{\langle e_i | x \rangle} + \sum_{i,j=1}^N \langle e_i | x \rangle \overline{\langle e_j | x \rangle} \langle e_j | e_i \rangle \\
&= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^N |\langle e_i | x \rangle|^2.
\end{aligned}$$

Im Grenzwert für $N \rightarrow \infty$ ergibt sich die gesuchte Ungleichung und auch die zweite Aussage folgt unmittelbar. \square

Bemerkung 11.23. Ist $(e_i)_{i \in I}$ ein Orthonormalsystem und $V = \overline{\text{lin}\{e_i | i \in I\}}$ der Abschluss des von ihnen aufgespannten Raumes, dann können wir setzen

$$x_{\parallel} = \sum_{i \in I} \langle e_i | x \rangle e_i \text{ und } x_{\perp} = x - x_{\parallel}.$$

Dabei liegt x_{\parallel} in V und x_{\perp} ist orthogonal zu jedem e_i und liegt damit in V^{\perp} (Satz 11.16). Die so erhaltene Zerlegung $x = x_{\parallel} + x_{\perp}$ ist eindeutig, denn falls für irgendwelche $y_{\parallel} \in V$ und $y_{\perp} \in V^{\perp}$ ebenfalls $x = y_{\parallel} + y_{\perp}$ gilt, dann wäre

$$V \ni x_{\parallel} - y_{\parallel} = y_{\perp} - x_{\perp} = V^{\perp}.$$

Das einzige Element das in V und in V^{\perp} enthalten ist, ist aber der Nullvektor.

Korollar 11.24. Sei $(e_i)_{i \in I}$ eine Orthonormalbasis. Dann existieren für jedes $x \in \mathcal{H}$ eindeutig bestimmte Koeffizienten $(\alpha_i)_{i \in I}$ so, dass

$$x = \sum_{i \in I} \alpha_i e_i.$$

Die Koeffizienten sind dabei durch $\alpha_i = \langle e_i | x \rangle$ gegeben.

Beweis. Die Form der Koeffizienten folgt durch Skalarproduktbildung von links mit e_j . Nutzen wir die Notation der vorhergehenden Bemerkung, dann muss x_{\perp} orthogonal zu $\overline{\text{lin}\{e_i | i \in I\}} = \mathcal{H}$ sein. Das einzige zum ganzen Hilbertraum orthogonale Element ist jedoch der Nullvektor und es folgt

$$x = x_{\parallel} = \sum_{i \in I} \langle e_i | x \rangle e_i \quad \square$$

Bemerkung 11.25. Es ist wichtig den Unterschied zwischen Orthonormalbasen und „gewöhnlichen Basen“ zu verstehen. Letztere bezeichnen wir in diesem Zusammenhang häufig als algebraische Basen. Bezüglich einer algebraischen Basis können wir jedes Element eindeutig als endliche Linearkombination darstellen, wofür lediglich die Vektorraumstruktur notwendig ist. Bezüglich einer Orthonormalbasis können wir das nur mittels einer Reihe wodurch ein Grenzwertprozess und damit die Norm involviert sind.

Es kann zwar gezeigt werden, dass es für jeden Vektorraum auch algebraische Basen gibt, jedoch sind diese in vielen Fällen, insbesondere für unendlichdimensionale Banachräume, nicht besonders nützlich.

Wir wollen hier kurz noch auf den Fall von Fourierreihen eingehen. Ein Spezialfall der obigen Aussage ist, dass wir für jede Funktion in $f \in \mathbf{L}^2([0, 1])$ eine eindeutige Darstellung als Fourierreihe bekommen

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \exp 2\pi k i t,$$

wobei

$$\alpha_k = \int_0^1 \exp -2\pi k i t f(t) dt$$

die Fourierkoeffizienten sind. Es ist jedoch wichtig sich bewusst zu machen, dass die oben auftretende Reihe lediglich im \mathbf{L}^2 -Sinne konvergiert. Im allgemeinen ergibt es also keinen Sinn die obige Reihendarstellung an einem einzelnen Punkt auszuwerten. Tatsächlich kann allerdings gezeigt werden, dass die Reihe für stetiges f auch gleichmäßig konvergiert, was jedoch nichts mit den Hilbertraumkonzepten zu tun hat, mit denen wir uns hier beschäftigen.

Wir wenden uns nun der Frage zu, ob es Orthonormalbasen gibt.

Satz 11.26 (Gram-Schmidt-Orthonormalisierung). *Sei $(v_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ eine abzählbare Menge die mindestens ein von 0 verschiedenes Element enthält. Dann existiert ein Orthonormalsystem $(e_i)_{i \in I}$ so, dass*

$$\text{lin} \{v_i \mid i \in \mathbb{N}\} = \text{lin} \{e_i \mid i \in I\}$$

ist, wobei I höchstens abzählbar ist.

Beweis. Wir können (durch Umsortieren) voraussetzen, dass $v_1 \neq 0$ ist. Dann spannen v_1 und $\frac{v_1}{\|v_1\|}$ offenbar den selben eindimensionalen Raum auf. Wir fahren nun induktiv fort. Angenommen, wir haben für ein $n \in \mathbb{N}$ bereits ein Orthonormalsystem e_1, \dots, e_l gefunden, so dass

$$\text{lin} \{v_1, \dots, v_n\} = \text{lin} \{e_1, \dots, e_l\}$$

gilt. Wir betrachten nun

$$v = v_{n+1} - \sum_{i=1}^l \langle e_i \mid v_{n+1} \rangle e_i.$$

Es lässt sich leicht nachrechnen, dass v orthogonal zu jedem der Vektoren e_1, \dots, e_l ist.

Gilt nun $v = 0$, dann ist v_{n+1} eine Linearkombination der Vektoren e_1, \dots, e_l und damit auch eine Linearkombination der Vektoren v_1, \dots, v_n . Dann gilt aber

$$\operatorname{lin}\{v_1, \dots, v_{n+1}\} = \operatorname{lin}\{v_1, \dots, v_n\} = \operatorname{lin}\{e_1, \dots, e_l\}.$$

Gilt $v \neq 0$, dann setzen wir $e_{l+1} = \frac{v}{\|v\|}$, so dass dann e_1, \dots, e_{l+1} wieder ein Orthonormalsystem bilden. Die obige Gleichung erlaubt uns dann offensichtlich v_{n+1} als Linearkombination von e_1, \dots, e_{l+1} zu schreiben oder andererseits e_{l+1} als Linearkombination von v_1, \dots, v_{n+1} . Damit gilt

$$\operatorname{lin}\{v_1, \dots, v_{n+1}\} = \operatorname{lin}\{e_1, \dots, e_{l+1}\}.$$

Hat der Raum $\operatorname{lin}\{v_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ endliche Dimension k , dann bricht das obige Verfahren bei $l = k$ ab (Warum?). Andernfalls liefert das Verfahren eine Folge, wir erhalten also ein abzählbares Orthonormalsystem. \square

Das Gram-Schmidt-Verfahren lässt sich nicht auf den Fall überabzählbar vieler Vektoren v_i verallgemeinern. Die Aussage des Satzes gilt zwar auch dann, der Beweis benötigt aber andere Methoden. Wir werden uns daher hier auf die Fälle beschränken, in denen abzählbar viele Vektoren ausreichen. Glücklicherweise ist dadurch der Großteil der praktische relevanten Beispiele abgedeckt.

Definition 11.27. Sei X ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $D \subset X$ heißt dicht, wenn $\overline{D} = X$ gilt. Wir nennen X separabel, wenn es eine abzählbare dichte Teilmenge gibt.

Bemerkung 11.28. Nach der Definition ist eine Teilmenge D dicht, wenn ihr Abschluss X ergibt. Aus unserem Wissen über Randpunkte ergeben sich die folgenden äquivalenten Formulierungen:

- (i) D ist dicht,
- (ii) jeder Punkt von X ist innerer Punkt oder Randpunkt von D ,
- (iii) jeder Punkt von X ist Berührungspunkt von D ,
- (iv) für jedes $x \in X$ und jedes $\epsilon > 0$ existiert ein $y \in D$, so dass $d(x, y) < \epsilon$,
- (v) für jedes $x \in X$ existiert eine Folge $(y_n) \subset D$ die gegen x konvergiert.

Dichte Teilmengen spielen insbesondere für unsere unendlichdimensionalen Funktionenräume eine große Rolle. Häufig haben die Funktionen in diesen Teilmengen deutlich bessere Eigenschaften als die im gesamten Raum (zum Beispiel glatte Funktionen als Teilmenge von \mathbf{L}^1), so dass wir auf diesen Teilmengen Techniken anwenden können, die für allgemeine Funktionen nicht zur Verfügung stehen. Manchmal lassen sich solche Überlegungen dann sogar mit einem „Dichtheitsargument“ auf den ganzen Raum verallgemeinern.

Beispiel 11.29. (i) Für den Raum \mathbb{R}^n (mit einer beliebigen Norm) ist \mathbb{Q}^n eine dichte abzählbare Teilmenge. Der \mathbb{R}^n ist also separabel (analog \mathbb{C}^n).

- (ii) Für den Raum der quadratintegrierbaren Folgen ℓ^2 , haben wir bereits gezeigt dass der Teilraum der endlichen Folgen \mathbf{c}_c eine dichte Teilmenge ist. Diese ist allerdings nicht abzählbar. Betrachten wir jedoch

$$\mathbf{c}_c(\mathbb{Q}) = \{x \in \mathbf{c}_c \mid \operatorname{Re}(x_n), \operatorname{Im}(x_n) \in \mathbb{Q} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\},$$

dann erhalten wir eine abzählbare dichte Teilmenge.

- (iii) Wir wandeln nun den Raum der quadratsummierbaren Folgen etwas ab, indem wir als Indexmenge der Folgen \mathbb{R} (statt wie üblich \mathbb{N}) verwenden. Wir definieren

$$\ell^2(\mathbb{R}) = \left\{ x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K} \mid \sum_{\lambda \in \mathbb{R}} |x_\lambda|^2 < \infty \right\}.$$

Die Bedingung impliziert insbesondere, dass für jedes $x \in \ell^2(\mathbb{R})$, lediglich höchstens abzählbar viele Einträge x_λ von Null verschieden sein können (Warum?), aber welche das sind variiert natürlich von Punkt zu Punkt. Auf diesem Raum wird durch

$$\langle x | y \rangle := \sum_{\lambda \in \mathbb{R}} \overline{x_\lambda} y_\lambda$$

ein Skalarprodukt definiert. Auch dieser Fall stellt einen Spezialfall von $\mathbf{L}^2(\Omega)$ dar, wir wählen dazu $\Omega = \mathbb{R}$ und μ das Zählmaß. Der so entstehende Raum ist ein Hilbertraum. In diesem Raum können wir nun ein überabzählbares Orthonormalsystem (tatsächlich eine Orthonormalbasis) angeben indem wir für jedes $\kappa \in \mathbb{R}$ definieren

$$e_\lambda^\kappa = \begin{cases} 1 & \kappa = \lambda \\ 0 & \kappa \neq \lambda \end{cases}.$$

Es lässt sich nun leicht nachrechnen, dass zwei verschiedene dieser Basisvektoren den Abstand $\sqrt{2}$ haben. Wäre nun $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine abzählbare dichte Teilmenge, dann müsste es für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ ein $n \in \mathbb{N}$ so geben, dass $\|e^\lambda - x_n\| < \frac{\sqrt{2}}{2}$ ist. Auf Grund der Dreiecksungleichung müsste dabei jedem e^λ ein anderes x_n zugeordnet werden, wir würden also eine injektive Abbildung von \mathbb{R} nach \mathbb{N} erhalten. Das ist jedoch auf Grund der Überabzählbarkeit von \mathbb{R} unmöglich. Dieser Hilbertraum ist damit nicht separabel.

- (iv) Die $\mathbf{L}^2(\Omega)$ Räume können in Abhängigkeit vom Maßraum separabel sein oder auch nicht. Für die für uns wichtigen Beispiele $\Omega = \mathbb{R}^n$ oder $\Omega = U \subset \mathbb{R}^n$ mit dem Lebesgue-Maß sind die Räume separabel, was wir jedoch vorerst nicht zeigen werden.

Lemma 11.30. *Sei X ein metrischer Raum. Sei M eine dichte Teilmenge von X und N eine dichte Teilmenge von N . Dann ist N auch dicht in X .*

Beweis. Sei x ein beliebiger Punkt von x und $\epsilon > 0$. Da M dicht in X ist, existiert ein $y \in M$ so, dass $d(x, y) < \frac{\epsilon}{2}$. Da N dicht in M ist, existiert ein $z \in N$ so, dass $d(y, z) < \frac{\epsilon}{2}$. Dann gilt auf Grund der Dreiecksungleichung auch $d(x, z) < \epsilon$. Wir können also für jedes $x \in X$ und jedes $\epsilon > 0$ einen Punkt $z \in N$ finden, so dass $d(x, z) < \epsilon$, also ist N dicht in X . \square

Satz 11.31. *Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, dann sind äquivalent*

(i) *V ist separabel,*

(ii) *es gibt eine Folge $(v_n) \subset V$ so, dass $\text{lin}\{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ dicht in V ist.*

Falls $\|\cdot\|$ von einem Skalarprodukt induziert wird, V also ein Prähilbertraum ist, dann ist ebenfalls äquivalent

(iii) *V besitzt eine abzählbare Orthonormalbasis.*

Beweis. Der endlichdimensionale Fall ist hier uninteressant (Warum?). Wir beschränken uns also auf unendlichdimensionale Räume. Sei V zunächst separabel, dann existiert eine abzählbare, dichte Teilmenge. Wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die Elemente dieser Menge mit den natürlichen Zahlen indiziert sind, es also eine dichte Folge $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gibt. Dann ist der von dieser Folge aufgespannte Vektorraum natürlich erst recht dicht.

Es gebe nun andererseits eine Folge (v_n) , die einen dichten Teilraum aufspannt. Wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die (v_n) alle von 0 verschieden sind. Da $\text{lin}\{v_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ dicht ist, ist es auf Grund des obigen Lemmas ausreichend, eine abzählbare dichte Teilmenge dieses Raumes zu finden. Wir nennen nun

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k$$

ein \mathbb{Q} -Linearkombination, wenn die Koeffizienten $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ aus \mathbb{Q} (falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) beziehungsweise aus $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ (falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) sind. Sei $\sum_{k=1}^n \alpha_k v_k$ eine Linearkombination und $\epsilon > 0$. Dann setzen wir

$$\delta = \frac{\epsilon}{n \max\{\|v_1\|, \dots, \|v_n\|\}} > 0.$$

Da \mathbb{Q} dicht in \mathbb{R} ist (und $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ dicht in \mathbb{C}) können wir nun für jedes α_i ein β_i aus \mathbb{Q} beziehungsweise $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ finden, so dass

$$|\alpha_i - \beta_i| < \delta$$

gilt. Dann ist

$$\left\| \sum_{k=1}^n \alpha_k v_k - \sum_{k=1}^n \beta_k v_k \right\| \leq \sum_{k=1}^n |\alpha_k - \beta_k| \|v_k\| \leq \sum_{k=1}^n \delta \max\{\|v_1\|, \dots, \|v_n\|\} < \epsilon.$$

Damit ist gezeigt, dass die Menge der \mathbb{Q} -Linearkombinationen auch dicht in $\text{lin } v_i \mid i \in \mathbb{N}$ und damit auch dicht in V ist. Schließlich können wir diese Menge als

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{\alpha_1 \in \mathbb{Q}} \cdots \bigcup_{\alpha_n \in \mathbb{Q}} \{\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n\}$$

also als abzählbare Vereinigung endlicher Mengen schreiben, womit ihre Abzählbarkeit gezeigt ist.

Sei nun V ein Prähilbertraum. Falls $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine abzählbare Orthonormalbasis ist, dann ist $\text{lin } \{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ dicht in V und der Raum damit nach dem bereits gezeigten separabel. Sei andererseits V ein separabler Hilbertraum. Dann existiert eine Folge $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die einen dichten Teilraum aufspannt. Wir können nun mittels Gram-Schmidt-Orthogonalisierung ein Orthonormalsystem $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ finden, dass den selben, dichten Raum aufspannt und haben damit eine Orthonormalbasis gefunden. \square

Satz 11.32. *Jeder Prähilbertraum besitzt eine Orthonormalbasis.*

Beweis. Wir haben die Aussage oben für separable Räume gezeigt. Den Beweis für den allgemeinen Fall geben wir hier nicht an. \square

11.2 Lineare Operatoren

In diesem Abschnitt wollen wir uns nun mit linearen Abbildungen befassen. Solche linearen Abbildungen werden, insbesondere auf Funktionenräumen, auch manchmal als lineare Operatoren (oder nur Operatoren) bezeichnet. Es gibt verschiedene Konventionen, was genau unter einem Operator zu verstehen ist. Bei uns sollen Operatoren Abbildungen von einem normierten Raum auf sich selbst sein.

Beispiel 11.33. Wir wollen zunächst ein Beispiel einer unstetigen, linearen Abbildung angeben. Dazu betrachten wir einen separablen Hilbertraum mit einer Orthonormalbasis $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Sei

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle e_i | x \rangle e_i$$

ein Element welches nicht im von den e_n aufgespannten Untervektorraum liegt. Sei V nun der von den e_n und von x aufgespannte Untervektorraum mit dem Skalarprodukt des umgebenden Hilbertraumes. Dann sind die Elemente x, e_1, e_2, \dots eine algebraische Basis für V und wir können durch

$$\begin{aligned} \varphi : V &\rightarrow \mathbb{C} \\ \alpha x + \beta_1 e_1 + \dots + \beta_k e_k &\mapsto \alpha \end{aligned}$$

ein lineares Funktional definieren. Dieses ist jedoch offensichtlich nicht stetig, denn die Folge

$$x_n = \sum_{i=1}^n \langle e_i | x \rangle e_i$$

konvergiert für $n \rightarrow \infty$ gegen x , es gilt aber $\varphi(x_n) = 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $\varphi(x) = 1$.

Es ist auch möglich solche unstetigen linearen Funktionale auf dem ganzen Hilbertraum anzugeben, die Konstruktion ist jedoch nicht ganz einfach.

Im Folgenden werden wir stets mit mehreren normierten Räumen arbeiten V, W arbeiten. Wir werden oft die selbe Notation für die Normen auf V und W sowie für die Operatornormen verwenden. Welche Norm gemeint ist wird durch das Objekt auf das sie angewandt wird ersichtlich.

Definition 11.34. Eine lineare Abbildung $A : V \rightarrow W$ heißt beschränkt, wenn es ein $K > 0$ gibt, so dass für alle $v \in V$ gilt $\|Av\| \leq K \|v\|$. Für eine beschränkte lineare Abbildung definieren wir die Operatornorm

$$\|A\| := \sup \{ \|Av\| \mid v \in V \text{ mit } \|v\| = 1 \}.$$

Falls V endlichdimensional ist, dann ist nach Satz 6.15 jede lineare Abbildung beschränkt, im unendlichdimensionalen Fall gilt das jedoch nicht mehr.

Satz 11.35. Sei $A : V \rightarrow W$ eine beschränkte lineare Abbildung. Dann gelten

$$\begin{aligned}\|A\| &= \sup \{ \|Av\| \mid v \in V \text{ mit } \|v\| \leq 1 \} \\ &= \sup \left\{ \frac{\|Av\|}{\|v\|} \mid v \in V \setminus \{0\} \right\} \\ &= \min \{ K \in (0, \infty) \mid \|Av\| \leq K \|v\| \text{ für alle } v \in V \}.\end{aligned}$$

Insbesondere gilt auch $\|Av\| \leq \|A\| \|v\|$. Ist $B : W \rightarrow U$ eine weitere beschränkte lineare Abbildung, dann gilt

$$\|BA\| \leq \|B\| \|A\|.$$

Beweis. Setze

$$\begin{aligned}\|A\|_1 &= \sup \{ \|Av\| \mid v \in V \text{ mit } \|v\| \leq 1 \} \text{ und} \\ \|A\|_2 &= \sup \left\{ \frac{\|Av\|}{\|v\|} \mid v \in V \setminus \{0\} \right\} \text{ und} \\ \|A\|_3 &= \inf \{ K \in (0, \infty) \mid \|Av\| \leq K \|v\| \text{ für alle } v \in V \}.\end{aligned}$$

Offenbar gilt $\|A\| \leq \|A\|_1$. Für jedes $v \neq 0$ gilt, da $\frac{v}{\|v\|}$ normiert ist, $\frac{\|Av\|}{\|v\|} = \left\| A \frac{v}{\|v\|} \right\| \leq \|A\|$ woraus auch $\|A\|_2 \leq \|A\|$ folgt.

Sei nun $\epsilon > 0$. Dann gibt es auf Grund der Definition von $\|A\|_3$ ein $v \in V$ so, dass $\|Av\| > (\|A\|_3 - \epsilon) \|v\|$ gilt. Dieses v ist offensichtlich nicht der Nullvektor und daher gilt

$$\|A\|_3 - \epsilon < \frac{\|Av\|}{\|v\|} \leq \|A\|_2.$$

Da diese Ungleichung für beliebiges $\epsilon > 0$ gelten muss, folgt $\|A\|_3 \leq \|A\|_2$.

Ist nun K irgendeine Konstante, so dass für alle $v \in V$ gilt $\|Av\| \leq K \|v\|$, dann folgt falls zusätzlich $\|v\| \leq 1$ ist $\|Av\| \leq K$. Bilden wir das Infimum über alle solchen Konstanten folgt $\|Av\| \leq \|A\|_3$. Nehmen wir nun das Supremum über alle solchen v erhalten wir $\|A\|_1 \leq \|A\|_3$.

Damit muss $\|A\| = \|A\|_1 = \|A\|_2 = \|A\|_3$ gelten.

Die Ungleichung $\|Av\| \leq \|A\| \|v\|$ folgt für $v \neq 0$ aus der Definition von $\|\cdot\|_2$ und ist für $v = 0$ trivial. Mit dieser Ungleichung ist außerdem gezeigt, dass das Infimum in der Definition von $\|\cdot\|_3$ tatsächlich ein Minimum ist.

Schließlich gilt für jedes $v \in V$

$$\|BAv\| \leq \|B\| \|Av\| \leq \|B\| \|A\| \|v\|,$$

woraus $\|BA\| \leq \|B\| \|A\|$ folgt. □

Satz 11.36. Seien V, W normierte Räume und $A : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Dann sind äquivalent

- (i) A ist Lipschitz-stetig,
- (ii) A ist stetig,
- (iii) A ist stetig in 0,
- (iv) A ist beschränkt.

Beweis. Die ersten beiden Implikationen von oben nach unten sind offensichtlich.

Sei nun A stetig in 0, das heißt insbesondere es existiert $\delta > 0$ so, dass

$$A(B_\delta(0)) \subset B_1(0).$$

Für jedes $v \in V \setminus \{0\}$ ist dann $\delta \frac{v}{2\|v\|} \in B_\delta(0)$ und damit

$$A\left(\delta \frac{v}{2\|v\|}\right) \in B_1(0).$$

Das heißt aber es gilt

$$\left\| \frac{\delta}{2\|v\|} Av \right\| < 1 \text{ beziehungsweise } \|Av\| < \frac{2}{\delta} \|v\|$$

und A ist beschränkt.

Ist schließlich A beschränkt, dann gilt

$$\|Av - Aw\| = \|A(v - w)\| \leq \|A\| \|v - w\|$$

und A ist damit Lipschitz-stetig. □

Die Frage nach Beschränktheit, und damit Stetigkeit, hängt natürlich von den auf V und W gewählten Normen ab. Das ist wichtig, da es, im Gegensatz zum endlichdimensionalen Fall, auf vielen Funktionenräumen wesentlich unterschiedliche Normen gibt.

Beispiel 11.37. (i) Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge und $x \in K$. Dann ist die Auswertung im Punkt x

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbf{C}(K) &\rightarrow \mathbb{K} \\ f &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

ein lineares Funktional auf dem Raum der stetigen Funktionen auf K . Auf diesem Raum betrachten wir üblicherweise die Supremum-Norm

$$\|f\|_\infty = \sup \{ |f(x)| \mid x \in K \},$$

bezüglich der der Raum vollständig ist. Dann gilt für jedes $f \in \mathbf{C}(K)$

$$|\varphi(f)| = |f(x)| \leq \|f\|_\infty$$

und damit $\|\varphi\| \leq 1$. Tatsächlich gilt $\|\varphi\| = 1$ (Warum?).

(ii) Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum. Dann ist

$$\begin{aligned} \int : \mathbf{L}^1(\Omega) &\rightarrow \mathbb{K} \\ f &\mapsto \int f d\mu \end{aligned}$$

eine lineare Abbildung. Aus der Dreiecksungleichung für Integrale folgt dann die Beschränktheit dieser Abbildung

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu = \|f\|.$$

(iii) Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ eine messbare, beschränkte Funktion. Dann ist

$$\begin{aligned} T_f : \mathbf{L}^2(\Omega) &\rightarrow \mathbf{L}^2(\Omega) \\ g &\mapsto fg \end{aligned}$$

ein stetige lineare Abbildung, die wir den Multiplikationsoperator zur Funktion f nennen. Ist $K > 0$ eine Schranke für f , dann erhalten wir für beliebiges $g \in \mathbf{L}^2(\Omega)$

$$\|T_f g\|^2 = \int |fg|^2 d\mu \leq \int K^2 |g|^2 d\mu = K^2 \|g\|^2$$

und damit die Beschränktheit des Multiplikationsoperators. Tatsächlich ist es ausreichend, dass f wesentlich beschränkt ist, das heißt es gibt $K > 0$ und eine Nullmenge $N \in \Sigma$ so, dass $|f(\omega)| \leq K$ für alle $\omega \in \Omega \setminus N$ gilt (Warum?).

(iv) Sei \mathcal{H} ein separabler Hilbertraum und $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis. Dann können wir durch

$$\begin{aligned} S : \mathcal{H} &\rightarrow \mathcal{H} \\ \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i &\mapsto \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_{i+1} \end{aligned}$$

eine stetige Abbildung definieren, die wir einen Shift-Operator nennen. Sind $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und $(\beta_i)_{i \in \mathbb{N}}$ quadratsummierbare Koeffizientenfolgen, dann gilt

$$\begin{aligned} \left\langle S \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i \middle| S \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i e_i \right\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_{i+1} \middle| \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i e_{i+1} \right\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{\alpha_i} \beta_i \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i \middle| \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i e_i \right\rangle. \end{aligned}$$

Der Shift-Operator erhält also Skalarprodukte und damit auch die Norm. Die Abbildung ist damit eine Isometrie und natürlich insbesondere stetig. Sie ist jedoch kein Isomorphismus, da das Bild von S der Raum $\overline{\text{lin}\{e_i \mid i \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\}}$ ist. Eine solche Abbildung ist auf endlichdimensionalen Räumen nicht möglich.

Bemerkung 11.38. In der Physik kommen häufig auch unbeschränkte und damit unstetige lineare Abbildungen vor. Diese sind allerdings von etwas anderer Art, als unsere typischen Beispiele unstetiger Abbildungen bisher waren, da sie nicht auf dem ganzen Raum definiert sind.

Ein wichtiges Beispiel ist der „Impulsoperator“ $\frac{d}{dx}$ (zum Beispiel auf dem Raum $\mathbf{L}^2([0, 1])$ oder $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$). Ganz offensichtlich lässt sich dieser Operator nicht auf dem ganzen Hilbertraum definieren, da viele \mathbf{L}^2 -Funktionen natürlich nicht differenzierbar sind. Allerdings sind die differenzierbaren Funktionen, auf denen er sich definieren lässt, ein dichter Teilraum (das können wir noch nicht zeigen). Wie genau der Definitionsbereich gewählt werden sollte ist eine erstaunlich interessante und auch komplizierte Frage, die wir hier nicht weiter erörtern können. Es ist jedoch leicht ersichtlich, dass der entstehende Operator nicht beschränkt sein wird. Auf dem Raum $\mathbf{L}^2([0, 1])$ haben beispielsweise die Funktionen $x \mapsto \exp(2\pi kix)$ für jedes k die \mathbf{L}^2 -Norm 1, aber die Normen der Funktionen

$$\frac{d}{dx} \exp 2\pi kix = 2\pi k \exp 2\pi kix$$

sind unbeschränkt.

Große Teile der Theorie beschränkter Operatoren, die wir in diesem und den folgenden Kapiteln entwickeln werden, lassen sich auf solche unbeschränkten Operatoren erweitern (falls man bei der Wahl des Definitionsbereiches Vorsicht walten lässt). Der dafür nötige zusätzliche Aufwand ist allerdings erheblich.

Definition 11.39. Wir bezeichnen den Vektorraum der beschränkten linearen Abbildungen von V nach W mit $B(V, W)$. Für $B(V, V)$ schreiben wir kurz $B(V)$. Lineare Abbildungen von V nach V (stetig oder nicht) nennen wir oft Operatoren auf V . Für $B(V, \mathbb{K})$ schreiben wir kurz V' . Dieser Raum heißt der (topologische) Dualraum zu V und seine Elemente werden als stetige lineare Funktionale bezeichnet.

Bemerkung 11.40. Definieren wir für $A, B \in B(V, W)$, $v \in V$ und $\alpha \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned}(A + B)v &:= Av + Bv \\ (\alpha A)v &:= \alpha(Av),\end{aligned}$$

dann erhält $B(V, W)$ eine Vektorraumstruktur (Nachrechnen!). Analog zum endlichdimensionalen Fall ist die Operatornorm eine Norm auf diesem Raum (Ebenfalls nachrechnen!) Wird nichts anderes gesagt, dann werden wir für lineare Abbildungen immer mit der Operatornorm arbeiten.

Satz 11.41. Falls W ein Banachraum ist, dann auch der Raum $B(V, W)$.

Beweis. Sei $(A_n) \subset B(V, W)$ eine Folge so, dass $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|A_n\| < \infty$. Für jedes $v \in V$ erhalten wir

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \|A_n v\| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \|A_n\| \|v\| < \infty.$$

Da W vollständig ist, konvergiert also die Reihe

$$Sv := \sum_{n \in \mathbb{N}} A_n v$$

für jedes v (also punktweise) und es gilt

$$\|Sv\| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \|A_n v\| \leq \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \|A_n\| \right) \|v\|.$$

Damit ist S eine beschränkte lineare Abbildung.

Analog folgt für jedes $v \in V$

$$\left\| \left(S - \sum_{n=1}^N A_n \right) v \right\| = \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} A_n v \right\| \leq \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} \|A_n\| \right) \|v\|$$

und daher im Supremum über alle normierten v

$$\left\| S - \sum_{n=1}^N A_n \right\| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \|A_n\|.$$

Da die rechte Seite für $N \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert, konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ auch bezüglich der Operatornorm gegen S .

Wir haben gezeigt, dass jede absolut konvergente Reihe in $B(V, W)$ konvergiert und daraus folgt mit Lemma 11.8 die Vollständigkeit. \square

Eine wesentliche Eigenschaft beschränkter linearer Abbildungen ist es, dass es ausreicht sie auf einer dichten Teilmenge zu kennen.

Satz 11.42. *Seien V ein normierter Vektorraum, W ein Banachraum und $D \subset V$ ein dichter Teilraum. Sei $A : D \rightarrow W$ eine beschränkte, lineare Abbildung, dann existiert eine eindeutige beschränkte, lineare Fortsetzung auf ganz V , das heißt eine Abbildung $\bar{A} : V \rightarrow W$ so, dass $\bar{A}|_D = A$. Außerdem gilt $\|\bar{A}\| = \|A\|$.*

Insbesondere müssen zwei beschränkte lineare Abbildungen bereits gleich sein, wenn sie auf einem dichten Teilraum übereinstimmen.

Beweis. Sei zunächst $v \in V$. Da D dicht ist, existiert eine Folge $(v_n) \subset D$, die gegen v konvergiert. Für jede stetige Fortsetzung \bar{A} müsste (falls sie existiert) nun gelten

$$\bar{A}v = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{A}v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Av_n.$$

Damit ist einerseits die Eindeutigkeit gezeigt, andererseits ist klar, wie eine mögliche Fortsetzung konstruiert werden kann.

Dazu betrachten wir nun die Folge (Av_n) . Sei $\epsilon > 0$. Da die Folge (v_n) konvergiert, ist sie insbesondere eine Cauchy-Folge und es existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass für $n, m \geq N$ gilt $\|v_n - v_m\| < \frac{\epsilon}{\|A\|}$. Dann gilt aber auch

$$\|Av_n - Av_m\| \leq \|A\| \|v_n - v_m\| < \epsilon.$$

Damit ist auch die Folge (Av_n) eine Cauchy-Folge und – wegen der Vollständigkeit von W – konvergent.

Sei nun $(w_n) \subset D$ eine weitere Folge, die ebenfalls gegen v konvergiert. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Av_n - Aw_n\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|A\| \|v_n - w_n\| = 0$$

und damit konvergiert die Folge (Aw_n) gegen den selben Grenzwert wie (Av_n) . Wir können nun definieren: für $v \in V$ wähle eine beliebige gegen v konvergente Folge $(v_n) \subset D$ und setze

$$\overline{A}v := \lim_{n \rightarrow \infty} Av_n.$$

Nach dem oben gezeigten existiert der Grenzwert auf der rechten Seite und hängt nicht von der Wahl der Folge (v_n) ab. Es ist offensichtlich, dass \overline{A} eine Fortsetzung von A ist, denn falls $v \in D$ liegt, können wir die konstante Folge (v, v, \dots) wählen.

Sei nun $w \in V$ ein weiterer Punkt, $(w_n) \subset D$ eine gegen w konvergente Folge und $\alpha \in \mathbb{K}$, dann gilt

$$\overline{A}(v + \alpha w) = \lim_{n \rightarrow \infty} A(v_n + \alpha w_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} Av_n + \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} Aw_n = \overline{A}v + \alpha \overline{A}w,$$

womit die Linearität von w gezeigt ist. Außerdem gilt $\|Av_n\| \leq \|A\| \|v_n\|$ und damit im Grenzwert für $n \rightarrow \infty$ auch $\|\overline{A}v\| \leq \|A\| \|v\|$. Da die letzte Gleichung für jedes $v \in V$ gilt, folgt $\|\overline{A}\| \leq \|A\|$. Da \overline{A} eine Fortsetzung von A ist, kann $\|\overline{A}\|$ aber natürlich nicht echt kleiner sein (Warum?). \square

Bemerkung 11.43. Der obige Satz impliziert für den Fall eines Hilbertraumes insbesondere, dass eine beschränkte, lineare Abbildung eindeutig durch ihre Werte auf einer Orthonormalbasis bestimmt ist. Wir betrachten hier der Einfachheit halber einen Operator $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$. Es sei nun $(e_i)_{i \in I}$ eine Orthonormalbasis. Dann können wir diesem A eindeutige Matrixelemente $(A_{ij})_{i,j \in I}$ zuweisen, durch die Gleichung

$$Ae_j = \sum_{i \in I} A_{ij} e_i.$$

Diese Matrixelemente sind dann durch die Formel $\langle e_i | Ae_j \rangle$ gegeben (Warum?). Wir können also auch auf unendlichdimensionalen Räumen Operatoren (jetzt unendlichdimensionale) Matrizen zuordnen.

Im Gegensatz zum endlichdimensionalen Fall ist für eine gegebene Matrix $(A_{ij})_{i,j \in I} \subset \mathbb{K}$ nicht ohne weiteres klar, ob diese mittels der obigen Gleichung einen Operator auf dem Hilbertraum definiert. Zwar definiert die Gleichung einen eindeutigen linearen Operator auf dem dichten Teilraum $\text{lin} \{e_i \mid i \in I\}$, dieser kann aber nur dann auf den ganzen Raum \mathcal{H} fortgesetzt werden, wenn er beschränkt ist. Das ist jedoch gegebenenfalls schwierig aus den Matrixkoeffizienten abzulesen.

Wir werden uns nun genauer mit linearen Abbildungen auf Hilberträumen beschäftigen. Es seien von nun an also \mathcal{H} und \mathcal{K} Hilberträume.

Für ein festes $x \in \mathcal{H}$ wird durch $y \mapsto \langle x|y \rangle$ ein stetiges lineares Funktional auf \mathcal{H} gegeben. Der folgende wichtige Satz sagt aus, dass jedes stetige Funktional von dieser Form ist.

Definition 11.44. Seien V, W zwei normierte Räume. Eine lineare Abbildung $\varphi : V \rightarrow W$ heißt isometrisch oder eine Isometrie, wenn für alle $v \in V$ gilt $\|\varphi(v)\| = \|v\|$. Ist die Abbildung zusätzlich surjektiv (und damit bijektiv), dann sprechen wir von einem isometrischen Isomorphismus.

Isometrische Isomorphismen erhalten alle Strukturen eines normierten Vektorraumes. Existiert zwischen zwei normierten Räumen also ein isometrischer Isomorphismus, dann sind die beiden Räume „im Wesentlichen gleich“, wir haben lediglich ihre Elemente unterschiedlich bezeichnet.

Theorem 11.45 (Satz von Fréchet-Riesz). *Die Abbildung*

$$\begin{aligned}\varphi : \mathcal{H} &\rightarrow \mathcal{H}' \\ x &\mapsto \langle x | \cdot \rangle\end{aligned}$$

ist ein konjugiert linearer isometrischer Isomorphismus.

Beweis. Für $x, \tilde{x}, y \in \mathcal{H}$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt

$$\varphi(x + \alpha\tilde{x})(y) = \langle x + \alpha\tilde{x} | y \rangle = \langle x | y \rangle + \overline{\alpha} \langle \tilde{x} | y \rangle = (\varphi(x) + \overline{\alpha}\varphi(\tilde{x}))(y).$$

Da das für jedes y gilt, folgt die konjugierte Linearität der Abbildung.

Sei nun zunächst $x \in \mathcal{H}$ fest. Dann folgt aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung für jedes $y \in \mathcal{H}$

$$|\varphi(x)(y)| = |\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

und daher ist $\|\varphi(x)\| \leq \|x\|$. Setzen wir für y den Punkt x ein, dann sehen wir, dass $\|\varphi(x)\| = \|x\|$ sein muss. Die Abbildung φ ist also eine Isometrie und damit insbesondere injektiv.

Schließlich bleibt noch die Surjektivität zu zeigen. Sei dazu $\theta \in \mathcal{H}'$ ein stetiges lineares Funktional und $(e_i)_{i \in I}$ eine Orthonormalbasis. Für eine endliche Teilmenge $J \subset I$ setzen wir

$$x_J = \sum_{i \in J} \overline{\theta(e_i)} e_i.$$

Dieses Element erfüllt

$$\|x_J\|^2 = \sum_{i \in J} |\theta(e_i)|^2 = |\theta(x_J)| \leq \|\theta\| \|x_J\|.$$

Damit ist $\|x_J\|$ unabhängig von J durch $\|\theta\|$ beschränkt und

$$\begin{aligned}\sum_{i \in I} |\theta(e_i)|^2 &= \sup \left\{ \sum_{i \in J} |\theta(e_i)|^2 \mid J \subset I \text{ endlich} \right\} \\ &= \sup \left\{ \|x_J\|^2 \mid J \subset I \text{ endlich} \right\} \leq \|\theta\|^2.\end{aligned}$$

Damit ist nach Satz 11.22 die folgende Reihe konvergent

$$x = \sum_{i \in I} \theta(e_i) e_i.$$

Für dieses x und für beliebiges y gilt nun $\langle x|y \rangle = \theta(y)$. Um das zu sehen stellen wir fest, dass beide Seiten stetige lineare Funktionale in y sind. Daher ist es ausreichend, die Gleichheit auf irgendeiner Orthonormalbasis zu überprüfen, aber $\langle x|e_j \rangle = \theta(e_j)$ folgt sofort aus der Definition von x . \square

Der Satz von Fréchet-Riesz hat einige wichtige Anwendungen, deren wichtigste sicher die Existenz von adjungierten Operatoren ist.

Korollar 11.46. *Seien $x \in \mathcal{H}$ und $A \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$. Dann gelten*

$$\begin{aligned}\|x\| &= \sup \{ |\langle x|y \rangle| \mid y \in \mathcal{H} \text{ mit } \|y\| \leq 1 \} \text{ und} \\ \|A\| &= \sup \{ |\langle x|Ay \rangle| \mid x \in \mathcal{K}, y \in \mathcal{H} \text{ mit } \|x\|, \|y\| \leq 1 \}.\end{aligned}$$

Insbesondere stimmen x und \tilde{x} überein, falls $\langle x|y \rangle = \langle \tilde{x}|y \rangle$ für alle $y \in \mathcal{H}$ gilt. Auch stimmen A und \tilde{A} überein, falls $\langle x|Ay \rangle = \langle x|\tilde{A}y \rangle$ für alle $x \in \mathcal{K}$ und alle $y \in \mathcal{H}$ gilt.

Beweis. Die erste Gleichung folgt unmittelbar aus dem Satz von Fréchet-Riesz, da die Hilbertraumnorm von x gleich der Operatornorm von $\langle x|\cdot \rangle$ ist, welche auf der rechten Seite der ersten Gleichung steht. Die zweite Gleichung folgt dann daraus, denn

$$\begin{aligned}\|A\| &= \sup \{ \|Ay\| \mid y \in \mathcal{H} \text{ mit } \|y\| \leq 1 \} \\ &= \sup \{ |\langle x|Ay \rangle| \mid x \in \mathcal{K}, y \in \mathcal{H} \text{ mit } \|x\|, \|y\| \leq 1 \}.\end{aligned} \quad \square$$

Satz 11.47. *Zu jedem $A \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ existiert ein eindeutig bestimmter Operator $A^* \in B(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ so, dass für beliebiges $y \in \mathcal{H}$ und $x \in \mathcal{K}$ gilt*

$$\langle A^*x|y \rangle = \langle x|Ay \rangle.$$

Beweis. Sei zunächst $x \in \mathcal{K}$ fest. Die Abbildung $y \mapsto \langle x|Ay \rangle$ ist ein stetiges lineares Funktional auf \mathcal{H} . Damit existiert nach dem Satz von Fréchet-Riesz genau ein $z \in \mathcal{H}$ so, dass $\langle x|Ay \rangle = \langle z|y \rangle$. Wir definieren nun $A^*x := z$. Aus der Eindeutigkeit im Satz von Fréchet-Riesz folgt dann auch hier die Eindeutigkeit.

Es bleibt nun zu zeigen, dass die so definierte Abbildung $A^* : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{H}$ linear und stetig ist. Für die Linearität seien $x, \tilde{x} \in \mathcal{K}$, $y \in \mathcal{H}$ und $\alpha \in \mathbb{K}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\langle A^*(x + \alpha\tilde{x})|y \rangle &= \langle x + \alpha\tilde{x}|Ay \rangle = \langle x|Ay \rangle + \overline{\alpha}\langle \tilde{x}|Ay \rangle = \langle A^*x|y \rangle + \overline{\alpha}\langle A^*\tilde{x}|y \rangle \\ &= \langle A^*x + \alpha A^*\tilde{x}|y \rangle.\end{aligned}$$

Da diese Gleichheit für alle $y \in \mathcal{H}$ gelten muss, folgt die Linearität

$$A^*(x + \alpha\tilde{x}) = A^*x + \alpha A^*\tilde{x}.$$

Die Beschränktheit von A^* folgt aus der Gleichung

$$\begin{aligned}\|A\| &= \sup \{ |\langle x|Ay \rangle| \mid x \in \mathcal{K}, y \in \mathcal{H} \text{ mit } \|x\|, \|y\| \leq 1 \} \\ &= \sup \{ |\langle y|A^*x \rangle| \mid x \in \mathcal{K}, y \in \mathcal{H} \text{ mit } \|x\|, \|y\| \leq 1 \} = \|A^*\|. \quad \square\end{aligned}$$

Definition 11.48. Der eindeutig bestimmte Operator aus dem vorhergehenden Satz wird als der zu A adjungierte Operator oder kürzer als die zu A Adjungierte bezeichnet.

Beispiel 11.49. Wir betrachten wieder den Shift-Operator aus Beispiel 11.37

$$S \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_{i+1}.$$

Für ein beliebiges Element $\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j e_j$ gilt dann

$$\left\langle \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j e_j \left| S \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i \right. \right\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j e_j \left| \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_{i+1} \right. \right\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{\beta_{i+1}} \alpha_i = \left\langle \sum_{j=2}^{\infty} \beta_j e_{j-1} \left| \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i \right. \right\rangle.$$

Daraus können wir nun die Formel für den adjungierten Operator ablesen

$$S^* \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j e_j = \sum_{j=2}^{\infty} \beta_j e_{j-1}.$$

Satz 11.50. Sei \mathcal{M} ein weiterer Hilbertraum und $A, \tilde{A} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ sowie $B : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{M}$ beschränkte lineare Abbildungen und $\alpha \in \mathbb{K}$. Dann hat die Adjungierte die folgenden Eigenschaften

- (i) konjugierte Linearität: $(A + \alpha\tilde{A})^* = A^* + \overline{\alpha}\tilde{A}^*$,
- (ii) Idempotenz: $(A^*)^* = A$,
- (iii) $(AB)^* = B^*A^*$,
- (iv) Isometrie: $\|A^*\| = \|A\|$,
- (v) C^* -Eigenschaft: $\|A^*A\| = \|AA^*\| = \|A\|^2$.

Beweis. Die ersten drei Eigenschaften sind einfache Folgerungen aus der Definition. Wir zeigen hier exemplarisch die Idempotenz. Sei dazu $x \in \mathcal{H}$ und $y \in \mathcal{K}$, dann gilt

$$\langle (A^*)^* x | y \rangle = \langle x | A^* y \rangle = \langle Ax | y \rangle,$$

woraus die gesuchte Gleichung folgt.

Die Isometrie haben wir bereits gezeigt.

Wir wenden uns jetzt noch der C^* -Eigenschaft zu. Einerseits gilt $\|A^* A\| \leq \|A^*\| \|A\| = \|A\|^2$. Andererseits folgt aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung für jedes $y \in \mathcal{H}$

$$\|Ay\|^2 = |\langle y | A^* Ay \rangle| \leq \|y\| \|A^* Ay\| \leq \|A^* A\| \|y\|^2,$$

und damit $\|Ay\| \leq \sqrt{\|A^* A\|}$. □

Definition 11.51. Seien $A \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ und $B \in B(\mathcal{H})$. Wir definieren die folgenden Eigenschaften

- (i) A ist eine Isometrie genau dann, wenn $A^* A = I$,
- (ii) A ist unitär genau dann, wenn $A^* A = I$ und $AA^* = I$,
- (iii) B ist normal genau dann, wenn $B^* B = BB^*$,
- (iv) B ist selbstadjungiert genau dann, wenn $B = B^*$,
- (v) B ist eine Projektion genau dann, wenn $B^2 = B$,
- (vi) B ist eine orthogonale Projektion oder Orthoprojektion genau dann, wenn B eine selbstadjungierte Projektion ist.

Bemerkung 11.52. (i) Offenbar ist jede unitäre Abbildung eine Isometrie. Ist $B \in B(\mathcal{H})$ ein Operator, dann ist B normal falls es unitär oder selbstadjungiert ist.

- (ii) Für eine unitäre Abbildung U ist U^* die inverse Abbildung und diese ist ebenfalls unitär. Beide Abbildungen sind Isometrien. Damit sind unitäre Abbildungen die strukturerhaltenden Abbildungen zwischen Hilberträumen.
- (iii) Die Observablen (beobachtbaren Größen) werden in der Quantenmechanik durch selbstadjungierte Operatoren modelliert. Ist $x \in \mathcal{H}$ nun normiert (ein reiner Zustand oder eine Wellenfunktion), dann ist $\langle x | Ax \rangle$ der Erwartungswert der Observablen A im Zustand x . Für selbstadjungiertes A gilt

$$\overline{\langle x | Ax \rangle} = \langle Ax | x \rangle = \langle x | Ax \rangle,$$

die Erwartungswerte sind also reell, was wir für physikalische Größen natürlich erwarten sollten.

Auch unitäre Operatoren spielen für die Physik jedoch eine große Rolle, da Symmetrien des physikalischen Systems durch solche Operatoren modelliert werden. Prominentestes Beispiel ist der Zeitentwicklungsoperator $\exp(iHt)$ wobei H der Hamiltonoperator des Systems ist (Wir können hier noch nicht verstehen, was mit der Exponentialfunktion gemeint ist.).

(iv) Für eine Isometrie A und $x, y \in \mathcal{H}$ gilt

$$\langle Ax | Ay \rangle = \langle x | y \rangle.$$

Daraus folgt natürlich auch $\|Ax\| = \|x\|$.

Gilt andererseits $\|Ax\| = \|x\|$ für alle $x \in \mathcal{H}$, dann erhalten wir mittels der Polarisationsgleichung

$$\langle x | y \rangle = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 i^k \left\| x + i^k y \right\|^2$$

und der Linearität von A auch $\langle Ax | Ay \rangle = \langle x | y \rangle$ und damit, dass A eine Isometrie ist. Die Definition hier ist also konsistent mit Definition 11.44.

- (v) Zwischen endlichdimensionalen Räumen der selben Dimension ist jede Isometrie automatisch unitär. Wir haben mit dem Shift-Operator bereits ein Beispiel kennen gelernt, das zeigt, dass es auf unendlichdimensionalen Räumen Isometrien gibt, die nicht bijektiv also insbesondere nicht unitär sind, sie sind aber immer injektiv.
- (vi) Für jede Projektion P ist $I - P$ ebenfalls eine Projektion für jede Orthoprojektion ebenfalls eine Orthoprojektion.

Der folgende Satz sagt aus, dass es „im wesentlichen“ nur einen separablen Hilbertraum gibt.

Satz 11.53. *Seien \mathcal{H} und \mathcal{K} zwei separable Hilberträume, dann gibt es eine unitäre Abbildung $\varphi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$.*

Beweis. Wir wählen je eine Orthonormalbasis $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ für \mathcal{H} und $(h_i)_{i \in \mathbb{N}}$ für \mathcal{K} . Dann erfüllt die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{H} &\rightarrow \mathcal{K} \\ \sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i e_i &\mapsto \sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i h_i \end{aligned}$$

die geforderten Bedingungen (Warum?). □

Bemerkung 11.54. Der obige Satz ist das Hilbertraum-Analogon zur Aussage, dass alle Vektorräume gleicher (endlicher) Dimension isomorph sind. Für die Praxis haben beide Sätze keine besonders große Bedeutung, da einerseits der Isomorphismus nicht eindeutig bestimmt ist (wir können beliebige Basen wählen) und andererseits im Allgemeinen nicht klar ist, ob es Basen gibt, die die für uns relevanten Operatoren in eine „handhabbare“ Form bringen.

Wir wollen uns noch etwas mit Orthoprojektionen und deren geometrischer Interpretation befassen.

Bemerkung 11.55. Eine einfache Rechnung zeigt, dass für die von einem Skalarprodukt induzierte Norm die Parallelogrammidentität gilt, das heißt für $x, y \in \mathcal{H}$

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Tatsächlich gilt auch die Umkehrung: Eine Norm wird von einem Skalarprodukt induziert, genau dann wenn sie die obige Gleichung für alle $x, y \in \mathcal{H}$ erfüllt, was wir hier jedoch nicht beweisen wollen. Als Korollar erhalten wir, indem wir die Gleichung auf $y - x$ und $z - x$ anwenden

$$\|y - z\|^2 = 2\|y - x\|^2 + 2\|z - x\|^2 - 4\left\|\frac{1}{2}(y + z) - x\right\|^2. \quad (11.1)$$

Definition 11.56. Sei V ein Vektorraum. Eine Teilmenge $A \subset V$ heißt konvex, falls zu beliebigen Punkten $x, y \in A$ die Verbindungsstrecke

$$\{x + t(y - x) \mid t \in [0, 1]\}$$

in A enthalten ist.

Satz 11.57. Sei \mathcal{H} ein Hilbertraum, $K \subset \mathcal{H}$ abgeschlossen und konvex und $x \in \mathcal{H}$. Dann existiert genau ein Punkt $x_e \in K$ so, dass

$$\|x - x_e\| = \text{dist}(x, K) := \inf \{ \|x - y\| \mid y \in K \}.$$

Für allgemeine Teilmengen K (also nicht abgeschlossen und konvex) gibt es keinen Grund, warum der Abstand sein Minimum annehmen sollte. Die Leserin überlege sich als Übungsaufgabe Beispiele im \mathbb{R}^2 wo das nicht der Fall ist.

Beweis. Wir setzen $\text{dist}(x, K) = d$ und stellen fest, dass es eine Folge $(y_n) \subset K$ von Punkten gibt, so dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - y_n\| = d$$

gilt. Das heißt für ein $\epsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass für $n \geq N$ gilt $\|x - y_n\|^2 \leq d^2 + \frac{\epsilon^2}{2}$. Wir nutzen nun Gleichung (11.1) und finden für $n, m \geq N$

$$\|y_n - y_m\|^2 = 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4\left\|\frac{1}{2}(y_n + y_m) - x\right\|^2.$$

Der Punkt $\frac{1}{2}(y_n + y_m)$ ist der Mittelpunkt der Strecke von y_n zu y_m (Warum?) und liegt, da K konvex ist, in K . Damit gilt

$$\|y_n - y_m\|^2 \leq 2\left(d^2 + \frac{\epsilon^2}{2}\right) + 2\left(d^2 + \frac{\epsilon^2}{2}\right) - 4d^2 = \epsilon^2.$$

Damit ist (y_n) eine Cauchy-Folge die gegen ein $y \in \mathcal{H}$ konvergiert. Da K abgeschlossen ist muss y in K liegen und aus der Stetigkeit der Norm folgt $\|y - x\| = d$

Es bleibt jetzt noch die Eindeutigkeit zu zeigen. Seien $y, z \in K$ zwei Punkte, die den Abstand minimieren, dann gilt, nochmals mit Gleichung (11.1),

$$\|y - z\|^2 = 2\|y - x\|^2 + 2\|z - x\|^2 - 4\left\|\frac{1}{2}(y + z) - x\right\|^2 \leq 2d^2 + 2d^2 - 4d^2 = 0$$

und damit müssen die beiden Punkte übereinstimmen. \square

Korollar 11.58. *Sei $V \subset H$ ein abgeschlossener Untervektorraum, $x \in \mathcal{H}$ und $x_e \in V$ der Punkt, der den Abstand minimiert. Dann ist x_e genau der Punkt, der $x - x_e \in V^\perp$ erfüllt.*

Es gilt $\mathcal{H} = V \oplus V^\perp$, das heißt für jedes $x \in \mathcal{H}$ gibt es eindeutig bestimmte Elemente $x_\parallel \in V$ und $x_\perp \in V^\perp$ so, dass $x = x_\parallel + x_\perp$.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $x - x_e \in V^\perp$ liegt und betrachten dazu das Verhalten des Abstands entlang einer Geraden in V die durch x_e verläuft. Für jedes $y \in V \setminus \{0\}$ und $t \in \mathbb{R}$ ist auch $x_e + ty \in V$. Die Funktion

$$t \mapsto \|x - (x_e + ty)\|^2 = \|(x - x_e) - ty\|^2 = \|x - x_e\|^2 - 2t \operatorname{Re}\langle x - x_e | y \rangle + t^2 \|y\|^2$$

hat nun ein globales Minimum an der Stelle

$$t_{\min} = \frac{\operatorname{Re}\langle x - x_e | y \rangle}{\|y\|^2}.$$

Nach der Definition von x_e muss dieses Minimum aber genau für $t = 0$ angenommen werden, was nur für $\operatorname{Re}\langle x - x_e | y \rangle = 0$ möglich ist. Wiederholen wir das Argument für die Abbildung $t \mapsto \|x - (x_e + tiy)\|^2$ erhalten wir auch $\operatorname{Im}\langle x - x_e | y \rangle = 0$. Da das für jedes $y \in V$ gilt, folgt $x - x_e \in V^\perp$.

Damit erhalten wir auch sofort die gesuchte Zerlegung $x_\parallel = x_e$ und $x_\perp = x - x_e$. Sei $x = \tilde{x}_\parallel + \tilde{x}_\perp$ mit $\tilde{x}_\parallel \in V$ und $\tilde{x}_\perp \in V^\perp$ eine weitere solche Zerlegung, dann gilt

$$V \ni x_\parallel - \tilde{x}_\parallel = x_\perp - \tilde{x}_\perp \in V^\perp,$$

was nur möglich ist, wenn beide Seiten verschwinden.

Ist nun $\tilde{x}_e \in V$ irgendein Element so, dass $x - \tilde{x}_e \in V^\perp$, dann gilt wegen der eben gezeigten Eindeutigkeit der Zerlegung $\tilde{x}_e = x_e$. \square

Korollar 11.59. *Sei $V \subset \mathcal{H}$ ein abgeschlossener Untervektorraum. Dann ist der Operator $P_V : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, der x auf den eindeutig bestimmten, den Abstand minimierenden Punkt $x_e \in V$ abbildet, eine Orthoprojektion.*

Beweis. Nutzen wir die Notation des vorhergehenden Korollars, dann gilt für $x \in \mathcal{H}$ offenbar $x_\parallel = P_V x$ und $x_\perp = (I - P_V)x$. Für $x, y \in \mathcal{H}$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt dann offenbar

$$P_V x + \alpha P_V y \in V \text{ und } (I - P_V)x + \alpha(I - P_V)y \in V^\perp$$

und die Summe der beiden Vektoren ist $x + \alpha y$. Da die Zerlegung eines Vektors in $V \oplus V^\perp$ eindeutig ist, folgt daraus die Linearität $P_V(x + \alpha y) = P_V x + \alpha P_V y$.

Für jedes $x \in \mathcal{H}$ gilt $P_V x \perp (I - P_V)x$ und damit

$$\|x\|^2 = \|P_V x + (I - P_V)x\|^2 = \|P_V x\|^2 + \|(I - P_V)x\|^2 \geq \|P_V x\|^2.$$

Da P_V auf V wie die identische Abbildung wirkt, gilt also $\|P_V\| = 1$.

Da $P_V x$ stets in V liegt, gilt offenbar für jedes $x \in \mathcal{H}$ die Gleichung $P_V^2 x = P_V x$. Schließlich ist

$$\langle P_V x | y \rangle = \langle P_V x | P_V y + (I - P_V)y \rangle = \langle P_V x | P_V y \rangle = \langle P_V x + (I - P_V)x | P_V y \rangle = \langle x | P_V y \rangle$$

und P_V damit selbstadjungiert. \square

Tatsächlich ist sogar jede Orthoprojektion von dieser Form (Übung).

Korollar 11.60. Für jede Teilmenge $M \subset \mathcal{H}$ gilt $M^{\perp\perp} = \overline{\text{lin } M}$. Insbesondere gilt für Untervektorräume $V \subset \mathcal{H}$ die Gleichung $V^{\perp\perp} = \overline{V}$ und für abgeschlossene Untervektorräume $V^{\perp\perp} = V$. Ein Unterraum V ist dicht in \mathcal{H} genau dann, wenn $V^\perp = \{0\}$ ist.

Beweis. Sei zunächst $x \in \overline{\text{lin } M}$ und $y \in M^\perp = \overline{\text{lin } M}^\perp$ (Satz 11.16), dann gilt $\langle x | y \rangle = 0$. Da das für jedes solche y gilt, folgt $x \in M^{\perp\perp}$ und wir haben gezeigt $\overline{\text{lin } M} \subset M^{\perp\perp}$. Sei nun $x \in M^{\perp\perp}$ und sei P die Projektion auf den Untervektorraum $\overline{\text{lin } M}$. Dann ist $(I - P)x \in \overline{\text{lin } M}^\perp = M^\perp$ und es gilt

$$0 = \langle x | (I - P)x \rangle = \langle Px + (I - P)x | (I - P)x \rangle = \|(I - P)x\|^2.$$

Damit ist $(I - P)x = 0$ und daher $x = Px \in \overline{\text{lin } M}$. \square

Bemerkung 11.61. Wie im endlichdimensionalen Fall definieren wir für $A \in B(V, W)$

$$\begin{aligned} \ker(A) &= \{v \in V \mid Av = 0\}, \\ \text{im}(A) &= \{Av \mid v \in V\}. \end{aligned}$$

Beide Mengen sind immer Untervektorräume. Der Kern ist immer ein abgeschlossener Untervektorraum (Warum?).

Das Bild einer Abbildung muss jedoch nicht abgeschlossen sein. Betrachte dazu zum Beispiel die Abbildung

$$\begin{aligned} A : \mathbb{I}^2 &\rightarrow \mathbb{I}^2 \\ (x_1, x_2, x_3, \dots) &\mapsto \left(\frac{1}{1}x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, \dots \right). \end{aligned}$$

Diese Abbildung ist linear und beschränkt (Warum?). Ihr Bild enthält nun die endlichen Folgen \mathbf{c}_c (Warum?), ist also insbesondere dicht in \mathbb{I}^2 . Das Bild ist jedoch nicht ganz \mathbb{I}^2 , denn wäre beispielsweise

$$A(x_1, x_2, x_3, \dots) = \left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right) \in \mathbb{I}^2,$$

dann müsste $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = 1$ gelten, aber diese Folge ist nicht quadratsummierbar.

Satz 11.62. *Sei $A \in B(H)$. Dann gelten*

$$\begin{aligned} \operatorname{im} A^\perp &= \ker A^* \text{ und} \\ \ker A^\perp &= \overline{\operatorname{im} A^*}. \end{aligned}$$

Beweis. Sei $x \in \ker A^*$ und $y \in \mathcal{H}$, dann gilt

$$\langle x | Ay \rangle = \langle A^* x | y \rangle = 0.$$

Damit ist $x \in \operatorname{im} A^\perp$.

Sei andererseits $x \in \operatorname{im} A^\perp$, dann gilt für jedes $y \in \mathcal{H}$

$$0 = \langle x | Ay \rangle = \langle A^* x | y \rangle,$$

woraus $A^* x = 0$ und damit $x \in \ker A^*$ folgt.

Schließlich gilt

$$\overline{\operatorname{im} A^*} = (\operatorname{im} A^*)^{\perp\perp} = (\ker A^{**})^\perp = \ker A^\perp.$$

□

11.3 Stetig invertierbare Operatoren

Wie bisher seien V, W normierte Vektorräume beziehungsweise \mathcal{H}, \mathcal{K} Hilberträume.

Definition 11.63. Eine Abbildung $T \in B(V, W)$ heißt stetig invertierbar, wenn es ein $T^{-1} \in B(W, V)$ gibt, so dass $TT^{-1} = I_W$ und $T^{-1}T = I_V$ gilt. Die Abbildung T^{-1} heißt die Inverse zu T .

Bemerkung 11.64. (i) Die Inverse ist, falls sie existiert, eindeutig bestimmt wodurch die Notation T^{-1} gerechtfertigt wird.

(ii) Offenbar ist die Verkettung zweier stetig invertierbarer Abbildungen S und T wieder stetig invertierbar und es gilt $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$. Auch ist die Inverse einer stetig invertierbaren Abbildung stetig invertierbar mit $(T^{-1})^{-1} = T$. Daraus folgt insbesondere, dass die Menge der stetig invertierbaren Operatoren auf einem normierten Vektorraum V eine Gruppe ist.

(iii) Die Umkehrabbildung einer linearen Abbildung ist — falls sie existiert — immer automatisch linear (Warum?). In dem für uns wichtigsten Fall, dass V, W Banachräume sind, dann ist die Inverse jeder stetigen Abbildung — falls sie existiert — auch automatisch stetig. Diesen „Satz über die offene Abbildung“ werden wir hier jedoch nicht beweisen. Es ist also prinzipiell ausreichend, die Bijektivität der Abbildung zu zeigen.

(iv) Ist $T \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ stetig invertierbar, dann zeigt die Gleichungen

$$\begin{aligned} I_{\mathcal{H}} &= I_{\mathcal{H}}^* = (T^{-1}T)^* = T^*(T^{-1})^* \\ I_{\mathcal{K}} &= I_{\mathcal{K}}^* = (TT^{-1})^* = (T^{-1})^*T^*, \end{aligned}$$

dass T^* ebenfalls stetig invertierbar ist und $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$ gilt.

Beispiel 11.65. (i) Jeder isometrische Isomorphismus ist stetig invertierbar, da die Umkehrabbildung wieder eine Isometrie ist (Warum?).

(ii) Sei $(e_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ eine Orthonormalbasis. Dann ist der durch $Te_i = e_{i+1}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ definierte stetige Operator eine Isometrie, da er aber nicht surjektiv ist natürlich nicht stetig invertierbar. Wir haben bereits die Adjungierte $T^*e_i = e_{i-1}$ für $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $T^*e_1 = 0$ ausgerechnet (Beispiel 11.37). Es gilt $T^*T = I$, es gibt also eine stetige Linksinverse aber keine Rechtsinverse. Auch das kann im endlichdimensionalen für Abbildungen von einem Raum auf sich selbst nicht passieren.

Der Operator T^* liefert ein weiteres Beispiel für einen nicht stetig invertierbaren Operator. Hier ist der Grund jedoch leichter einzusehen, da der Operator wegen $\ker T^* = \mathbb{K}e_1$ nicht injektiv ist.

- (iii) Der Operator, der durch $Te_i = \frac{1}{i}e_i$ definiert wird (Warum ist dieser beschränkt?) ist nicht stetig invertierbar. Das Bild des Operators ist zwar dicht, da es mindestens $\text{lin}\{e_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ enthält (Wie genau sieht das Bild aus?), aber nicht der ganze Raum \mathcal{H} (vergleiche Bemerkung 11.61). Auch dieses Verhalten ist im endlichdimensionalen nicht möglich.

Satz 11.66. *Sei V ein Banachraum und $T \in B(V, W)$. Dann ist die Abbildung T stetig invertierbar genau dann, wenn sie dichtes Bild hat und nach unten beschränkt ist, das heißt es existiert $\epsilon > 0$ so, dass $\|Tv\| \geq \epsilon \|v\|$ für jedes $v \in V$ gilt.*

Beweis. Falls die Abbildung T stetig invertierbar ist, dann ist sie insbesondere surjektiv, das Bild also ganz sicher dicht in W . Außerdem gilt für jedes $v \in V$

$$\|v\| = \|T^{-1}Tv\| \leq \|T^{-1}\| \|Tv\|,$$

was zeigt, dass T nach unten beschränkt ist.

Besitze T nun andererseits dichtes Bild und es gelte $\|Tv\| \geq \epsilon \|v\|$ für jedes $v \in V$. Da T nach unten beschränkt ist, ist sie sicher injektiv, wir können also durch $STv := v$ für $v \in V$ auf im T eine lineare Abbildung definieren. Diese erfüllt dann

$$\|STv\| = \|v\| \leq \frac{1}{\epsilon} \|Tv\|,$$

und damit gilt $\|S\| \leq \frac{1}{\epsilon}$. Die Abbildung S ist also beschränkt und kann damit nach Satz 11.42 eindeutig zu einer beschränkten linearen Abbildung $\bar{S} : W \rightarrow V$ mit der selben Norm fortgesetzt werden. Offenbar gilt $\bar{S}Tv = STv = v$ für jedes $v \in V$. Damit gilt natürlich auch für alle $v \in V$

$$T\bar{S}Tv = Tv.$$

Die Abbildungen $T\bar{S}$ und I_W sind also beschränkte lineare Operatoren auf W , die auf der dichten Teilmenge im T übereinstimmen. Damit stimmen sie aber auf ganz W überein. Die Abbildungen T und $\bar{S} = S$ zueinander inverse, beschränkte Abbildungen.

Insbesondere ist natürlich im $T = W$, es reicht aber aus die Dichtheit vorauszusetzen. \square

Beispiel 11.67. Sei $f : [0, 1]$ eine beschränkte Funktion und T_f der zugehörige Multiplikationsoperator ($T_f g = fg$) auf $\mathbf{L}^2([0, 1])$. Falls es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass $\mu(|f| < \epsilon) = 0$ ist, dann ist die Funktion $\frac{1}{f}$ fast überall durch $\frac{1}{\epsilon}$ beschränkt und der Multiplikationsoperator $T_{\frac{1}{f}}$ damit beschränkt. Offensichtlich sind T_f und $T_{\frac{1}{f}}$ zueinander invers.

Gilt andererseits $\mu(|f| < \epsilon) > 0$ für jedes $\epsilon > 0$, dann sind die Elemente der Folge $g_n = \mathbb{1}_{|f| < \frac{1}{n}}$ alle von 0 verschieden und es gilt

$$\|T_f g_n\|^2 = \int |f|^2 |g_n|^2 d\lambda \leq \frac{1}{n^2} \int |g_n|^2 d\lambda = \frac{1}{n^2} \|g_n\|^2.$$

Damit kann T_f aber nicht nach unten beschränkt sein und ist damit nicht stetig invertierbar.

Bemerkung 11.68. Im Folgenden wird öfter von Potenzen und Reihen von Operatoren die Rede sein. Wie für Zahlen werden wir T^0 stets als die Identität I interpretieren. Für Vielfache der Identität schreiben wir häufig nur λ statt λI .

Satz 11.69 (Neumannsche Reihe). *Sei $T \in B(V)$. Falls die Neumannsche Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} T^k$$

konvergiert, dann ist ihr Grenzwert $(I - T)^{-1}$. Die Reihe konvergiert insbesondere falls V ein Banachraum ist und $\|T\| < 1$.

Beweis. Angenommen $\sum_{k=0}^{\infty} T^k$ konvergiert gegen $S \in B(V)$. Dann gilt

$$0 = S - S = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N T^k - \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} T^k = \lim_{N \rightarrow \infty} T^N,$$

und damit auch

$$\begin{aligned} S(I - T) &= (I - T)S = (I - T) \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N T^k = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N (T^k - T^{k+1}) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} (I - T^{N+1}) = I. \end{aligned}$$

Der Operator S ist also die Inverse zu $I - T$.

Ist nun V ein Banachraum, dann auch $B(V)$. Ist $\|T\| < 1$, dann gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|T\|^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|T\|^k < \infty,$$

womit die Neumannsche Reihe absolut konvergent und damit auch konvergent ist. \square

Wir werden von jetzt an nur noch komplexe Vektorräume betrachten.

Definition 11.70. Sei $T \in B(V)$. Die Menge

$$\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T - \lambda \text{ ist stetig invertierbar}\}$$

heißt die Resolventenmenge von T und die Abbildung

$$\begin{aligned} R(T, \cdot) : \rho(T) &\rightarrow B(V) \\ \lambda &\mapsto (T - \lambda)^{-1} \end{aligned}$$

heißt Resolvente von T .

Das Komplement $\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ heißt Spektrum von T .

Bemerkung 11.71. (i) Falls V endlichdimensional ist, dann ist $T - \lambda$ nicht (stetig) invertierbar genau dann, wenn $\ker(T - \lambda) \neq \{0\}$ genau dann, wenn es ein $v \in V \setminus \{0\}$ gibt, so dass $Tv - \lambda v = 0$. Im endlichdimensionalen Fall besteht das Spektrum eines Operators also genau aus seinen Eigenwerten.

Auch Operatoren auf unendlichdimensionalen Räumen können natürlich Eigenwerte besitzen und wir nennen diesen Teil des Spektrums das Punktspektrum. In unendlichdimensionalen Räumen ist es jedoch möglich, dass λ kein Eigenwert ist (also $T - \lambda$ injektiv ist) und $T - \lambda$ trotzdem nicht stetig invertierbar ist, das Spektrum eines Operators hat also im Allgemeinen neben dem Punktspektrum noch weitere Bestandteile.

- (ii) Selbst für unbeschränkte Operatoren wird das Spektrum als die Menge der λ definiert, für die $T - \lambda$ nicht stetig invertierbar ist. Dass diese Definition die „richtige“ Verallgemeinerung der Menge der Eigenwerte auf den unendlichdimensionalen Fall ist, ist an dieser Stelle alles andere als offensichtlich. Es wird sich vielmehr erst später herausstellen, dass Spektrum und Resolvente nützliche Information über den Operator enthalten.
- (iii) Häufig werden auch die Operatoren $(T - \lambda)^{-1}$, also die Werte der oben definierten Abbildung, als Resolvente bezeichnet.
- (iv) Falls $A, T \in B(V)$ vertauschen ($AT = TA$), dann gilt natürlich auch $A(T - \lambda) = (T - \lambda)A$. Ist $\lambda \in \rho(T)$ und multiplizieren wir von links und von rechts mit der Resolvente $R(T, \lambda)$, dann erhalten wir

$$R(T, \lambda)A = AR(T, \lambda),$$

der Operator A vertauscht also auch mit der Resolvente von T . Insbesondere vertauscht T mit seiner eigenen Resolvente und die Resolventen $R(T, \lambda)$ und $R(T, \kappa)$ vertauschen untereinander.

- (v) Für die Resolvente $R(T, \lambda)$ wird oft auch die Notation

$$\frac{1}{T - \lambda}$$

verwendet. Bei Verwendung dieser Schreibweise muss insbesondere beachtet werden, dass Ausdrücke der Form

$$\frac{A}{T - \lambda}$$

nur dann Sinn ergeben, wenn A und T vertauschen, da sonst nicht klar ist ob $AR(T, \lambda)$ oder $R(T, \lambda)A$ gemeint sein soll.

- (vi) Für $\lambda, \kappa \in \rho(T)$ gilt offenbar

$$(T - \lambda) - (T - \kappa) = \kappa - \lambda.$$

Multiplikation mit $R(T, \lambda), R(T, \kappa)$ ergibt die Resolventengleichung

$$R(T, \kappa) - R(T, \lambda) = (\kappa - \lambda)R(T, \lambda)R(T, \kappa).$$

Beispiel 11.72. (i) Für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ ist $\frac{1}{1-\lambda}I$ die Inverse zu $I - \lambda$. Damit gilt $\sigma(I) = \{1\}$. Analog gilt $\sigma(0) = \{0\}$.

(ii) Wir betrachten auf \mathbb{I}^2 den Shift-Operator

$$S(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, x_3, \dots).$$

Angenommen es gilt $Sx = \lambda x$ für irgendein $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, dann gilt

$$(0, x_1, x_2, x_3, \dots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4, \dots)$$

woraus induktiv $0 = x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \dots$ folgt. Da 0 ebenfalls kein Eigenwert des Shift-Operators sein kann, besitzt dieser keine Eigenwerte. Wir werden später jedoch zeigen, dass das Spektrum von S aus der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe besteht.

Satz 11.73. Sei V ein Banachraum und $T \in B(V)$. Dann gelten

- (i) $\rho(T)$ ist offen,
- (ii) $\sigma(T)$ ist kompakt und enthalten in $B_{\|T\|}(0) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq \|T\|\}$,
- (iii) $\sigma(T)$ ist nicht leer,
- (iv) die Resolvente ist eine analytische Funktion.

Beweis. Für jedes λ mit $|\lambda| > \|T\|$ ist $\|\frac{T}{\lambda}\| < 1$ und damit ist $I - \frac{T}{\lambda}$ nach dem Satz über die Neumannsche Reihe stetig invertierbar. Das gilt dann natürlich auch für $\lambda - T = \lambda(I - \frac{T}{\lambda})$ und damit ist $\lambda \in \rho(T)$.

Sei nun $\lambda \in \rho(T)$ beliebig und $d = \frac{1}{\|R(T, \lambda)\|}$. Für jedes $\kappa \in B_d(\lambda)$ gilt dann $\|(\kappa - \lambda)R(T, \lambda)\| < 1$ und damit, konvergiert die Neumannsche Reihe

$$(I - (\kappa - \lambda)R(T, \lambda))^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (\kappa - \lambda)^k R(T, \lambda)^k.$$

Weiter gilt

$$T - \kappa = (I - (\kappa - \lambda)R(T, \lambda))(T - \lambda)$$

und die rechte Seite ist invertierbar. Damit haben wir gezeigt, dass gilt $B_d(\lambda) \subset \rho(T)$ und daher ist $\rho(T)$ eine offene Menge.

Außerdem erhalten wir für die Resolvente auf $B_d(\lambda)$ die Formel

$$R(T, \kappa) = R(T, \lambda) (I - (\kappa - \lambda)R(T, \lambda))^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} R(T, \lambda)^{k+1} (\kappa - \lambda)^k.$$

Das ist eine $B(V)$ -wertige Potenzreihenentwicklung der Resolvente um den Entwicklungspunkt λ und die Resolvente ist damit analytisch.

Wir haben bereits gezeigt, dass $\sigma(T)$ beschränkt und abgeschlossen (da $\rho(T)$ offen) ist. Damit ist $\sigma(T)$ kompakt.

Dass $\sigma(T)$ nicht leer ist folgt aus einer Banachraumwertigen Variante des Satzes von Liouville. Wir werden diese Aussage hier nicht beweisen. \square

Bemerkung 11.74. (i) Banachraumwertige Potenzreihen teilen viele der Eigenschaften ihrer reell- oder komplexwertigen Gegenstücke. Im wesentlichen können die meisten Sätze und Beweise aus Abschnitt 6.4 ohne große Schwierigkeiten verallgemeinert werden. Insbesondere sind sie die durch solche Reihen definierten Funktionen glatt.

(ii) Die obigen Eigenschaften klassifizieren alle Mengen, die Spektrum eines Operators sein können. In anderen Worten: Sei $A \subset \mathbb{C}$ eine nichtleere, kompakte Menge und \mathcal{H} ein unendlichdimensionaler Hilbertraum. Dann existiert ein Operator $T \in B(\mathcal{H})$ so, dass $\sigma(T) = A$.

Satz 11.75. Sei $T \in B(\mathcal{H})$. Dann gilt $\sigma(T^*) = \overline{\sigma(T)}$.

Beweis. Es ist $\lambda \in \sigma(T)$ genau dann, wenn $\lambda - T$ nicht stetig invertierbar genau dann, wenn $(\lambda - T)^* = \bar{\lambda} - T^*$ nicht stetig invertierbar genau dann, wenn $\bar{\lambda} \in \sigma(T^*)$ genau dann, wenn $\lambda \in \overline{\sigma(T^*)}$. \square

Beispiel 11.76. Wir betrachten nun den Shift-Operator auf ℓ^2

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, x_4, \dots).$$

Für beliebiges $\lambda \in B_1(0)$ ist $(1, \lambda, \lambda^2, \dots)$ eine quadratsummierbare Folge (Warum?) und es gilt

$$T(1, \lambda, \lambda^2, \dots) = \lambda(1, \lambda, \lambda^2, \dots).$$

Damit ist jeder Wert in $\overline{B_1(0)}$ ein Eigenwert. Da $\|T\| = 1$ gilt (Warum?), wissen wir bereits, dass $\sigma(T) \subset \overline{B_1(0)}$ gelten muss und da das Spektrum abgeschlossen ist gilt $\sigma(T) = \overline{B_1(0)}$. Die Spektralwerte auf dem Rand sind allerdings keine Eigenwerte (Warum?).

Der adjungierte Operator zu T ist

$$T^*(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$$

von dem wir bereits in Beispiel 11.72 gezeigt haben, dass er keine Eigenwerte besitzt. Dennoch gilt $\sigma(T^*) = \overline{B_1(0)}$.

Satz 11.77. Sei $T \in B(\mathcal{H})$ selbstadjungiert, dann gilt $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.

Beweis. Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$ und $\lambda = \alpha + i\beta$. Dann gilt

$$\operatorname{Im}\langle x|(T - \lambda)x\rangle = \operatorname{Im}\langle x|(T - \alpha)x\rangle + \operatorname{Im}\langle x|i\beta x\rangle = |\beta| \|x\|^2$$

und wir erhalten mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|\beta| \|x\|^2 \leq \operatorname{Im}\langle x|(T - \lambda)x\rangle \leq |\langle x|(T - \lambda)x\rangle| \leq \|x\| \|(T - \lambda)x\|.$$

Damit ist $T - \lambda$ nach unten beschränkt und daher insbesondere injektiv. Zahlen mit nichtverschwindendem Imaginärteil können also keine Eigenwerte von T sein.

Wenden wir diese Erkenntnis aus $\bar{\lambda}$ an, dann erhalten wir

$$\operatorname{im}(T - \lambda)^\perp = \ker(T - \lambda)^* = \ker(T - \bar{\lambda}) = \{0\}.$$

Damit ist $\operatorname{im}(T - \lambda)$ nach Korollar 11.60 dicht in \mathcal{H} und $T - \lambda$ nach Satz 11.66 stetig invertierbar. Daher gilt $\lambda \in \rho(T)$. \square

Bemerkung 11.78. Wie bereits erwähnt, repräsentieren selbstadjungierte Operatoren auf einem Hilbertraum in der Quantenmechanik die Observablen. Die Spektralwerte eines Operators sind dann die möglichen Messwerte die eine Messung der entsprechenden Observablen ergeben kann.

Diese Spektralwerte können Eigenwerte sein und diese sind häufig diskret, worin der mathematische Grund für die „Quantisierung“ bestimmter physikalischer Größen liegt. Im Allgemeinen besitzen jedoch auch selbstadjungierte Operatoren Spektralwerte die keine Eigenwerte sind. Ist T selbstadjungiert und $\lambda \in \mathbb{R}$ kein Eigenwert dann gilt zwar stets (Satz 11.62)

$$\operatorname{im}(T - \lambda)^\perp = \ker(T - \lambda)^* = \ker(T - \lambda) = \{0\},$$

das Bild von $T - \lambda$ ist also immer dicht. Der Operator $T - \lambda$ muss aber nicht nach unten beschränkt und daher nicht stetig invertierbar sein. Wir nennen diesen Teil des Spektrums auch das kontinuierliche oder stetige Spektrum.

Falls $\lambda \in \sigma(T)$ kein Eigenwert ist, also $T - \lambda$ nicht nach unten beschränkt ist, dann existiert für jedes $\epsilon > 0$ ein $x \in \mathcal{H}$ so, dass $\|(T - \lambda)x\| \leq \epsilon \|x\|$. Nochmal umformuliert: Es existiert eine Folge $(x_n) \subset \mathcal{H}$ so, dass $\|x_n\| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} (T - \lambda)x_n = 0$ gilt. Eine solche Folge nennen wir einen approximativen Eigenvektor und den zugehörigen Spektralwert λ einen approximativen Eigenwert. Wichtig ist, dass die Folge (x_n) im Allgemeinen nicht konvergent ist, andernfalls wäre $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ . Wir haben damit gezeigt, das Spektrum eines selbstadjungierten Operators besteht aus Eigenwerten und approximativen Eigenwerten. Für allgemeinere Operatoren kann das Spektrum jedoch weitere Bestandteile enthalten (das sogenannte residuale Spektrum).

Ein Beispiel ist der Hamiltonoperator des Wasserstoffatoms (der Operator ist wieder unbeschränkt, was für das Argument hier jedoch unwichtig ist) welcher bis auf Konstanten die folgende Form hat

$$-\Delta - \frac{1}{r}.$$

Dabei ist der erste Term der Laplaceoperator und der zweite Term der Multiplikationsoperator mit der Abstandsfunktion. In der theoretischen Quantenmechanik werden nun üblicherweise mit einigem Aufwand die Eigenwerte dieses Operators bestimmt, die alle negativ sind und, bis auf kleine Korrekturen, den Energieniveaus der gebundenen Zustände des Wasserstoffatoms entsprechen. Darüber hinaus besitzt der Operator jedoch das kontinuierliche Spektrum $[0, \infty)$, was deutlich schwieriger zu zeigen ist. Diesen Spektralwerten entsprechen keine eindeutig zugeordneten Zustände, es sind ja schließlich keine Eigenwerte. Sie entsprechen jedoch den Energieniveaus von freien Zuständen eines Elektrons in Wechselwirkung mit einem Proton.

Definition 11.79. Der Spektralradius eines Operators $T \in B(V)$ ist

$$r(T) = \max \{ |\lambda| \mid \lambda \in \sigma(T) \}.$$

Bemerkung 11.80. Wir wissen bereits, dass der Spektralradius durch $\|T\|$ nach oben beschränkt ist. Es gibt jedoch Operatoren, für die der Spektralradius echt kleiner als die Norm ist.

Sei zum Beispiel T ein nilpotenter Operator, das heißt es existiert ein n so, dass $T^n = 0$ ist. Von 0 verschiedene nilpotente Operatoren existieren bereits auf endlichdimensionalen Räumen (Welche?). In diesem Fall ist für $\lambda \neq 0$ die Neumannsche Reihe

$$\left(I - \frac{T}{\lambda}\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{T}{\lambda}\right)^k$$

offensichtlich konvergent, da sie nach endlich vielen Termen abbricht. Damit ist $\lambda - T$ für jedes $\lambda \neq 0$ invertierbar. Wir haben gezeigt: das Spektrum von nilpotenten Operatoren besteht nur aus 0 und damit ist der Spektralradius natürlich 0.

Satz 11.81. Für selbstadjungierte Operatoren $T \in B(\mathcal{H})$ gilt $\|T\| = r(T)$.

Beweis. Wie bereits bemerkt gilt immer $r(T) \leq \|T\|$. Die Aussage ist gezeigt, wenn entweder $\|T\|$ oder $-\|T\|$ im Spektrum von T liegt. Aus der Definition der Norm folgt, dass es eine Folge x_n gibt, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\|x_n\| = 1$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Tx_n\| = \|T\|$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \left\| (T^2 - \|T\|^2)x_n \right\|^2 &= \|T^2x_n\|^2 - \|T\|^2 \langle x_n | T^2x_n \rangle - \|T\|^2 \langle T^2x_n | x_n \rangle + \|T\|^4 \|x_n\|^2 \\ &\leq \|T\|^2 \|Tx_n\|^2 - 2\|T\|^2 \|Tx_n\|^2 + \|T\|^4 \end{aligned}$$

und für $n \rightarrow \infty$ konvergiert die rechte Seite gegen 0. Damit gilt

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} (T^2 - \|T\|^2)x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (T - \|T\|)(T + \|T\|)x_n.$$

Entweder ist nun $\|T\| \in \sigma(T)$ oder wir können die letzte Gleichung mit dem stetigen Operator $(T - \|T\|)^{-1}$ multiplizieren und erhalten

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} (T + \|T\|)x_n.$$

Damit ist aber $T + \|T\|$ nicht nach unten beschränkt, nicht stetig invertierbar und $-\|T\| \in \sigma(T)$. \square

Die Aussage gilt allgemeiner für alle normalen Operatoren, was wir hier jedoch nicht zeigen werden.

11.4 Der Satz von Stone-Weierstraß und der stetige Funktionenkalkül

Das Ziel in diesem Kapitel soll es sein, Funktionen von (selbstadjungierten) Operatoren A wie beispielsweise \sqrt{A} oder $\exp(itA)$ zu definieren. Eine solche Zuordnung von Funktionen zu Operatoren wird als Funktionenkalkül bezeichnet. Es gibt verschiedene Funktionenkalküle, die sich darin unterscheiden, auf welche Funktionen beziehungsweise auf welche Operatoren sie angewendet werden können. Die einfachste Art von Funktionen, die wir ohne weiteres auf jeden Operator anwenden können, sind Polynome.

Definition 11.82. Die Menge der polynomialen Abbildungen von \mathbb{R} nach \mathbb{K} bezeichnen wir mit $\mathbb{K}[X]$. Seien nun $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ und $p \in \mathbb{K}[X]$, genauer

$$p(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i x^i.$$

Für einen Operator $T \in B(V)$ definieren wir dann

$$p(T) = \sum_{i=0}^n \alpha_i T^i.$$

Definition 11.83. Eine Algebra \mathcal{A} ist ein Vektorraum über \mathbb{K} mit einer assoziativen und distributiven Multiplikationsoperation $(a, b) \mapsto ab$, das heißt so dass für alle $a, \tilde{a}, b, \tilde{b}, c \in \mathcal{A}$ gilt

$$\begin{aligned} (ab)c &= a(bc) \\ a(b + \tilde{b}) &= ab + a\tilde{b} \\ (a + \tilde{a})b &= ab + \tilde{a}b. \end{aligned}$$

Die Algebra \mathcal{A} heißt kommutativ, falls für alle $a, b \in \mathcal{A}$ gilt $ab = ba$.

Ist auf \mathcal{A} eine Norm gegeben welche $\|ab\| \leq \|a\| \|b\|$ erfüllt, sprechen wir von einer normierten Algebra beziehungsweise von einer Banachalgebra falls \mathcal{A} zusätzlich vollständig ist.

Eine Teilmenge $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ heißt Unteralgebra, wenn sie ein Untervektorraum ist und für alle $a, b \in \mathcal{B}$ gilt $ab \in \mathcal{B}$.

Sei \mathcal{B} eine weitere Algebra. Eine lineare Abbildung $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ heißt Algebrenhomomorphismus, falls für alle $a, b \in \mathcal{A}$ gilt $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.

Beispiel 11.84. (i) Die einfachsten Beispiele für kommutative (Banach)algebren sind die Räume \mathbb{R} beziehungsweise \mathbb{C} mit der gewöhnlichen Addition und Multiplikation.

(ii) Mit der punktweisen Multiplikation wird der Raum aller reell- oder komplexwertigen Funktionen über einer Menge X zu einer Algebra.

Viele wichtige Beispiele sind nun Unteralgebren dieser Funktionalalgebra. So sind der Raum der Polynome $\mathbb{K}[X]$, der Raum $\mathbf{B}(K)$ der beschränkten Funktionen auf einer Menge K sowie der Raum der stetigen, beschränkten Funktionen $\mathbf{C}_b(K)$ auf einem metrischen Raum K jeweils Algebren. Auf den letzten beiden Mengen können wir die Supremumnorm

$$\|f\|_\infty = \sup \{ |f(x)| \mid x \in K \}$$

introduzieren und erhalten damit normierte Algebren, die sogar vollständig sind (Sätze 5.79 und 5.82).

Weitere Algebren sind die Räume der stetig differenzierbaren (\mathbf{C}^1), k mal stetig differenzierbaren (\mathbf{C}^k), glatten (\mathbf{C}^∞) oder analytischen (\mathbf{C}^ω) Funktionen. Alle diese Algebren sind kommutativ.

Die \mathbf{L}^p -Räume sind keine Algebren, da das Produkt integrierbarer Funktionen im Allgemeinen nicht integrierbar ist.

- (iii) Der Raum $\mathbb{K}^{n \times n}$ der $n \times n$ -Matrizen mit dem Matrixprodukt ist eine nichtkommutative Algebra. Statt den Raum mit der Operatornorm aus, dann erhalten wir eine Banachalgebra.
- (iv) Allgemeiner ist für einen normierten Raum V der Raum $B(V)$ mit der Hintereinanderausführung als Produkt eine Algebra. Führen wir darauf die Operatornorm ein, dann erhalten wir eine normierte Algebra, die eine Banachalgebra ist falls V ein Banachraum ist.
- (v) Sei $T \in B(V)$ ein beschränkter Operator auf einem normierten Raum V . Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{K}[X] &\rightarrow B(V) \\ p &\mapsto p(T) \end{aligned}$$

ein Algebrenhomomorphismus (Nachrechnen!).

- (vi) Sei \mathcal{A} eine normierte Algebra und \mathcal{B} eine Unteralgebra, dann ist auch $\overline{\mathcal{B}}$ eine Unteralgebra (Übung).

Damit können wir nun genauer formulieren: Ein Funktionenkalkül ist ein Algebrenhomomorphismus von einer Funktionalalgebra in die Algebra $B(V)$ der Operatoren auf einem normierten Vektorraum. Wir haben damit bereits einen ersten Funktionenkalkül kennengelernt: den „polynomialen Funktionenkalkül“. Unser Ziel wird es nun sein, diesen Funktionenkalkül für selbstadjungierte Operatoren auf alle stetigen Funktionen zu erweitern. Die Idee dabei ist, stetige Funktionen in geeigneter Weise durch Polynome zu approximieren.

Lemma 11.85. *Die Wurzelfunktion*

$$\begin{aligned} f : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\rightarrow \sqrt{t} \end{aligned}$$

ist ein gleichmäßiger Grenzwert einer Folge von Polynomen.

Beweisskizze. Für $t \in (-1, 1)$ gilt

$$\sqrt{1-t} = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^k,$$

wobei die Koeffizienten a_k positive Zahlen sind (Übung). Leider macht die allgemeine Theorie der Potenzreihen keine Aussage über die Konvergenz im Punkt $t = 1$, wir benötigen aber eine Konvergenzaussage auch dort.

Wir wissen, da die obige Gleichung für jedes $t < 1$ gilt, dass

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^k = 1.$$

Da die Reihe monoton wachsend in t ist, kann $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nicht kleiner 1 sein. Angenommen es wäre nun $\sum_{k=1}^{\infty} a_k > 1$ (der Fall einer divergenten Reihe eingeschlossen). Dann gäbe es ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass $\sum_{k=1}^N a_k > 1$. Da Polynome stetig sind, müsste dann auch für irgendein $t < 1$ gelten

$$1 < \sum_{k=1}^N a_k t^k \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^k,$$

was wir jedoch bereits ausgeschlossen haben. Wir haben damit gezeigt, dass die Reihe auch für $t = 1$ (gegen den richtigen Grenzwert) konvergiert.

Schließlich gilt für alle $t \in [0, 1]$

$$\sum_{k=N}^{\infty} a_k t^k \leq \sum_{k=N}^{\infty} a_k,$$

die rechte Seite ist unabhängig von t und konvergiert für $N \rightarrow \infty$ gegen 0. Damit ist die Reihe gleichmäßig konvergent. Daraus folgt ebenfalls die gleichmäßige Konvergenz der Reihe

$$\sqrt{t} = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} a_k (1-t)^k$$

auf $[0, 1]$. □

Wir betrachten nun die Algebra $\mathbf{C}(K)$ der (zunächst reellwertigen) stetigen Funktionen auf einer kompakten Menge K mit der Supremumnorm.

Korollar 11.86. Sei $\mathcal{A} \subset \mathbf{C}(K)$ eine abgeschlossene Unteralgebra und $f, g \in \mathcal{A}$, dann sind auch \sqrt{f} (für $f \geq 0$), $|f|$, $\max(f, g)$ und $\min(f, g)$ in \mathcal{A} .

Beweis. Sei zunächst $0 \leq f \leq 1$. Dann gibt es auf Grund des obigen Lemmas eine Folge von Polynomen p_n so, dass $p_n(f)$ gleichmäßig gegen \sqrt{f} konvergiert. Da \mathcal{A} eine Algebra ist liegen alle $p_n(f)$ in \mathcal{A} und da \mathcal{A} abgeschlossen ist auch die Grenzfunktion \sqrt{f} . Für beliebiges $f \geq 0$ sehen wir anhand der Gleichung

$$\sqrt{f} = \sqrt{\|f\|_\infty} \sqrt{\frac{f}{\|f\|_\infty}},$$

dass \sqrt{f} ebenfalls in \mathcal{A} liegt.

Wir können nun schreiben

$$\begin{aligned} |f| &= \sqrt{f^2} \\ \max(f, g) &= \frac{1}{2}(f + g + |f - g|) \\ \min(f, g) &= \frac{1}{2}(f + g - |f - g|). \end{aligned} \quad \square$$

Definition 11.87. Sei K eine Teilmenge eines metrischen Raumes. Wir nennen eine Familie $(O_i)_{i \in I}$ (I irgendeine Indexmenge) eine offene Überdeckung, wenn O_i für jedes $i \in I$ offen ist und

$$K \subset \bigcup_{i \in I} O_i.$$

Wir nennen K (überdeckungs-)kompakt, falls es für jede offene Überdeckung $(O_i)_{i \in I}$ von K eine endliche Teilmenge $J \subset I$ gibt so, dass gilt

$$K \subset \bigcup_{i \in J} O_i.$$

Diese Formulierung ist die übliche Definition von Kompaktheit. Sie stimmt in metrischen Räumen mit der Definition von Kompaktheit aus Definition 5.42 überein, die wir hier als folgenkompakt bezeichnen wollen. Entscheidend ist hier nicht, dass es eine endliche Überdeckung durch offene Mengen gibt, sondern dass wir aus jeder gegebenen Überdeckung eine endliche auswählen können.

Satz 11.88. Sei K eine Teilmenge eines metrischen Raumes X . Eine Menge K ist überdeckungskompakt, genau dann wenn sie folgenkompakt ist.

Beweisskizze. Sei K folgenkompakt. Sei $\epsilon > 0$ und $(x_n) \subset K$ eine Folge so, dass $d(x_n, x_m) \geq \epsilon$ für alle $n \neq m$. Keine Teilfolge dieser Folge kann konvergent sein, da sie die Cauchy-Bedingung nicht erfüllen kann. Wir wählen nun in K der Reihe nach willkürlich Punkte x_1, x_2, \dots so aus, dass für jedes $m \in \mathbb{N}$ stets gilt $d(x_n, x_m) \geq \epsilon$ für alle

$n < m$, dann muss dieser Prozess nach endlich vielen Schritten enden, es also keinen weiteren Punkt mit der Eigenschaft mehr geben, da wir sonst eine Folge ohne konvergente Teilfolge konstruiert hätten.

Wir haben damit gezeigt, jede folgenkompakte Menge kann mit endlich vielen ϵ -Kugeln überdeckt werden. Daraus folgt insbesondere die Separabilität von K . Dazu wählen wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ endlich viele $\frac{1}{n}$ -Kugeln, die K überdecken. Dann ist die Menge der Mittelpunkte aller dieser (abzählbar vielen) Kugeln dicht in K (Warum?).

Sei nun $(O_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von K und $(x_n) \subset K$ eine dichte Folge. Wir betrachten die folgende Menge von offenen Kugeln

$$M = \left\{ B_{\frac{1}{k}}(x_n) \mid k \in \mathbb{N} \text{ und } B_{\frac{1}{k}}(x_n) \subset O_i \text{ für irgendein } i \in I \right\}.$$

Sei nun $x \in K$ beliebig. Da die O_i eine Überdeckung sind, existiert irgendein $i \in I$ so, dass $x \in O_i$ und da O_i offen ist, gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ so, dass $B_{\frac{1}{k}}(x) \subset O_i$. Da (x_n) dicht in K ist, existiert ein $n \in \mathbb{N}$ so, dass $x_n \in B_{\frac{1}{2k}}(x)$ und damit natürlich auch

$$x \in B_{\frac{1}{2k}}(x_n) \subset B_{\frac{1}{k}}(x_n) \subset O_i,$$

wobei die mittlere Enthaltenseinsrelation aus der Dreiecksungleichung folgt (Warum?). Damit ist x aber in einer der Mengen aus M enthalten, die Mengen aus M bilden also auch eine offene Überdeckung von K .

Die Menge M ist abzählbar (Warum?), es gibt also eine Folge $(U_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset M$ die alle ihre Elemente durchläuft. Angenommen endlich viele dieser Mengen sind nicht ausreichend, um K zu überdecken. Dann können wir eine Folge $(x_n) \subset K$ finden, so dass für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$x_n \in K \setminus \bigcup_{i=1}^n U_i$$

liegt. Da K folgenkompakt ist, besitzt (x_n) nun eine Teilfolge mit Grenzwert $x \in K$ und da die U_i die Menge K überdecken, existiert $N \in \mathbb{N}$ so, dass $x \in U_N$. Da x Grenzwert einer Teilfolge ist und U_N offen, muss nun $x_m \in U_N$ für unendlich viele $m \in \mathbb{N}$ gelten. Das ist jedoch ein Widerspruch, da nach Definition der Folge (x_n) für $m \geq N$ immer $x_m \notin U_N$ gilt. Es muss also ein $N \in \mathbb{N}$ so geben, dass $K \subset \bigcup_{i=1}^N U_i$.

Schließlich existiert auf Grund der Definition der Mengen in M zu jedem $j \in \{1, \dots, N\}$ ein Index $i_j \in I$ so, dass $U_j \subset O_{i_j}$. Damit sind die Mengen O_{i_1}, \dots, O_{i_N} natürlich erst recht eine Überdeckung von K und wir haben unsere endliche Teilüberdeckung gefunden.

Die andere Richtung ist deutlich einfacher zu zeigen und wir überlassen sie der Leserin als Übungsaufgabe. \square

Das Konzept der Überdeckungskompaktheit ist zunächst etwas gewöhnungsbedürftig. Es hat jedoch einerseits den Vorteil, dass es, anders als Folgenkompaktheit, auch auf topologischen Räumen nützlich ist, die keine metrischen Räume sind. Andererseits erlaubt es selbst auf metrischen Räumen häufig deutlich elegantere Beweise. Der folgende Satz enthält eine solche Anwendung.

Theorem 11.89 (Satz von Stone-Weierstraß). Sei K kompakt und $\mathcal{A} \subset \mathbf{C}(K)$ eine Unteralgebra, die die folgenden Bedingungen erfüllt

- (i) \mathcal{A} enthält die konstanten Funktionen,
- (ii) für verschiedene Punkte $x, y \in K$ existiert stets ein $f \in \mathcal{A}$ so, dass $f(x) \neq f(y)$ (wir sagen \mathcal{A} trennt die Punkte von K),
- (iii) für $f \in \mathcal{A}$ ist auch $\bar{f} \in \mathcal{A}$ (nur relevant über dem Körper $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Dann ist \mathcal{A} dicht in $\mathbf{C}(K)$.

Beweis. Die Menge $\bar{\mathcal{A}}$ ist ebenfalls eine Algebra und wir wollen zeigen, dass $\bar{\mathcal{A}} = \mathbf{C}(K)$ gilt. Wir betrachten zunächst den reellwertigen Fall. Sind x, y verschiedene Punkte von K , dann existiert $\tilde{g} \in \mathcal{A}$ so, dass $\tilde{g}(x) \neq \tilde{g}(y)$. Für $a, b \in \mathbb{R}$ ist dann

$$g := a + \frac{b - a}{\tilde{g}(y) - \tilde{g}(x)}(\tilde{g} - \tilde{g}(x))$$

eine Funktion, die $g(x) = a$ und $g(y) = b$ erfüllt.

Sei nun $f \in \mathbf{C}(K)$ und $\epsilon > 0$. Wir halten zunächst $x \in K$ fest. Wir wählen für jedes $y \in K$ eine Funktion $g_{x,y} \in \mathcal{A}$ so, dass $g_{x,y}(x) = f(x)$ und $g_{x,y}(y) = f(y)$ (Warum geht das auch für $x = y$?). Betrachte die offenen Mengen

$$V_y = \{y \in K \mid g_{x,y}(z) < f(z) + \epsilon\} = (g_{x,y} - f)^{-1}(-\infty, \epsilon).$$

Da stets $y \in V_y$ gilt, überdecken diese Mengen K . Wir nutzen nun die Kompaktheit von K aus, um endlich viele Punkte y_1, \dots, y_n so zu finden, dass V_{y_1}, \dots, V_{y_n} bereits K überdecken und definieren

$$h_x = \min(g_{x,y_1}, \dots, g_{x,y_n}).$$

Diese Funktion liegt nach Korollar 11.86 wieder in $\bar{\mathcal{A}}$ und es gilt $h_x(x) = f(x)$. Für jedes $y \in K$ gibt es nun $i \in \{1, \dots, n\}$ so, dass $y \in V_{y_i}$ liegt und damit gilt

$$h_x(y) \leq g_{x,y_i}(y) < f(y) + \epsilon.$$

Definieren wir nun

$$U_x = \{z \in K \mid h_x(z) > f(z) - \epsilon\},$$

dann sehen wir analog wie oben, dass diese Mengen eine offene Überdeckung von K bilden, aus der wir wieder eine endliche Teilüberdeckung U_{x_1}, \dots, U_{x_m} auswählen können. Wir definieren nun eine weitere Funktion aus $\bar{\mathcal{A}}$ mittels

$$h := \max(h_{x_1}, \dots, h_{x_m}).$$

Jedes $y \in K$ ist in einem U_{x_j} ($j \in \{1, \dots, m\}$) enthalten und daher gilt

$$f(y) - \epsilon < h_{x_j}(y) \leq h(y) \leq f(y) + \epsilon.$$

Wir erhalten also $f - \epsilon < h < f + \epsilon$ beziehungsweise $|f - h| < \epsilon$ beziehungsweise $\|f - h\|_\infty < \epsilon$. Da $\epsilon > 0$ beliebig war, ist f also ein Berührungspunkt von $\overline{\mathcal{A}}$ und liegt damit in $\overline{\mathcal{A}}$. Da das für jedes $f \in \mathbf{C}(K)$ gilt, haben wir die gewünschte Aussage bewiesen.

Wir betrachten nun den komplexwertigen Fall. Sei $\mathbf{C}_\mathbb{R}(K)$ die Teilmenge der reellwertigen Funktionen und

$$\mathcal{A}_\mathbb{R} = \mathcal{A} \cap \mathbf{C}_\mathbb{R}(K).$$

Diese Menge ist eine reelle Unteralgebra von $\mathbf{C}_\mathbb{R}(K)$ (abgeschlossen unter Produkten und Linearkombinationen mit reellen Koeffizienten). Auf Grund der dritten Bedingung liegen für $f \in \mathcal{A}$ die Funktionen $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ in $\mathcal{A}_\mathbb{R}$. Damit trennen die Funktionen von $\mathcal{A}_\mathbb{R}$ die Punkte von K (Warum?). Ist nun $f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f \in \mathbf{C}(K)$ eine beliebige Funktion, dann können nach dem ersten Teil des Beweises sowohl ihr Real- als auch ihr Imaginärteil durch Funktionen in $\mathcal{A}_\mathbb{R}$ und damit durch Funktionen in \mathcal{A} approximiert werden. \square

Beispiel 11.90. Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt.

- (i) Wir betrachten die Algebra $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ der polynomialen Funktionen in n Variablen als Teilmenge von $\mathbf{C}(K)$. Dann erfüllt diese offenbar die Voraussetzungen des Satzes und ist daher dicht.
- (ii) Wir betrachten den Raum der „trigonometrischen Polynome“

$$\operatorname{lin} \{t \mapsto \exp(k_1 t_1 + \dots + k_n t_n) \mid k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}\}.$$

Auch dieser ist eine Algebra, die die Voraussetzungen des Satzes erfüllt (Warum?) und damit dicht in $\mathbf{C}(K)$.

Diese Aussage ist die „erste Hälfte“ eines Beweises dafür, dass die trigonometrischen Polynome dicht auch in $\mathbf{L}^2(K)$ sind (vergleiche Beispiel 11.18).

Korollar 11.91. *Für einen kompakten metrischen Raum K ist der Funktionenraum $\mathbf{C}(K)$ separabel.*

Beweis. Falls $K \subset \mathbb{R}^n$ ist, dann folgt die Aussage direkt aus den obigen Beispielen. Für allgemeineres K stellen wir fest: da K kompakt ist, ist es insbesondere separabel (Beweis von Satz 11.88). Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine dichte Folge in K . Betrachte die stetigen Funktionen $f_n = d(x_n, \cdot)$. Die Menge

$$\left\{ \prod_{k=1}^N f_{i_k} \mid N, i_1, \dots, i_N \in \mathbb{N} \right\}$$

ist abzählbar und der von ihr aufgespannte Untervektorraum \mathcal{A} ist eine Algebra (Warum?).

Für verschiedene $x, y \in K$ gilt $d(x, y) > 0$. Da die x_n dicht sind, existiert ein $n \in \mathbb{N}$ so, dass $d(x, x_n) < \frac{1}{2}d(x, y)$ und damit gilt

$$f_n(x) = d(x_n, x) < \frac{1}{2}d(x, y) \text{ und } f_n(y) = d(x_n, y) > \frac{1}{2}d(x, y),$$

wobei die zweite Ungleichung aus der Dreiecksungleichung folgt. Damit trennen bereits die Funktionen f_n die Punkte von K und nach dem Satz von Stone-Weierstraß ist \mathcal{A} dicht in $\mathbf{C}(K)$. Mit Satz 11.31 folgt dann die Separabilität. \square

Lemma 11.92. *Seien $A, B \in B(V)$ kommutierende Operatoren. Dann ist AB stetig invertierbar genau dann, wenn A und B stetig invertierbar sind.*

Beweis. Die eine Richtung der Aussage gilt immer. Sei nun $AB = BA$ stetig invertierbar. Dann hat AB dichtes Bild und ist nach unten beschränkt. Dann ist auch

$$\text{im } A \supset \text{im } AB$$

dicht. Wäre A nicht nach unten beschränkt, dann gäbe es eine Folge $(x_n) \subset V$ normierter Vektoren so, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = 0$ gilt. Dann würde aber auch

$$\|ABx_n\| = \|BAx_n\| \leq \|B\| \|Ax_n\|$$

gegen 0 konvergieren und AB könnte — im Widerspruch zur Voraussetzung — nicht nach unten beschränkt sein. Damit ist A nach unten beschränkt und hat dichtes Bild und ist damit stetig invertierbar. Aus Symmetriegründen folgt die stetige Invertierbarkeit von B analog. \square

Satz 11.93 (Spektralabbildungssatz für Polynome). *Sei $T \in B(\mathcal{H})$ ein selbstadjungierter Operator und $p \in \mathbb{C}(X)$ ein Polynom. Dann gilt*

$$\sigma(p(T)) = p(\sigma(T)).$$

Beweis. Falls $p = \alpha$ konstant ist, dann gilt

$$\sigma(p(T)) = \sigma(\alpha I) = \{\alpha\} = p(\sigma(T)),$$

wobei wir im letzten Schritt nutzen, dass $\sigma(T)$ nicht leer ist (Satz 11.81). Für $\lambda \in \mathbb{C}$ existiert ein Polynom q vom Grad n so, dass $p(x) - p(\lambda) = (x - \lambda)q(x)$ (Warum?) und damit auch $p(T) - p(\lambda) = (T - \lambda)q(T)$ gilt.

Wir führen jetzt einen Induktionsbeweis über den Grad des Polynoms p durch. Angenommen die Aussage sei für Polynome bis zum Grad n bereits bekannt und p sei ein Polynom vom Grad $n + 1$.

Sei nun zunächst $\lambda \in \sigma(T)$, dann ist $T - \lambda$ nicht stetig invertierbar und nach dem obigen Lemma auch $p(T) - p(\lambda)$ nicht. Damit gilt aber $p(\lambda) \in \sigma(p(T))$. Wir haben $p(\sigma(T)) \subset \sigma(p(T))$ gezeigt.

Es gelte nun andererseits $\kappa \in \sigma(p(T))$. Dann existiert nach dem Fundamentalsatz der Algebra ein $\lambda \in \mathbb{C}$ so, dass $p(\lambda) = \kappa$. Da $p(T) - p(\lambda) = p(T) - \kappa$ nicht invertierbar ist, muss nach dem obigen Lemma entweder $T - \lambda$ nicht invertierbar sein, also $\lambda \in \sigma(T)$, oder $q(T)$ ist nicht stetig invertierbar. Dann gilt aber

$$0 \in \sigma(q(T)) = q(\sigma(T)),$$

wobei wir die Induktionsannahme benutzt haben. Das bedeutet, es existiert $\rho \in \sigma(T)$ so, dass $q(\rho) = 0$ ist, dann gilt aber auch

$$p(\rho) - p(\lambda) = (\rho - \lambda)q(\rho) = 0,$$

und daher $\kappa = p(\lambda) = p(\rho) \in p(\sigma(T))$. Damit haben wir gezeigt $\sigma(p(T)) \subset p(\sigma(T))$ und der Induktionsbeweis ist beendet. \square

Theorem 11.94 (Stetiger Funktionenkalkül). *Sei \mathcal{H} ein Hilbertraum und $T \in B(H)$ selbstadjungiert. Wir definieren*

$$\mathcal{A}(T) := \overline{\text{lin} \{T^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}},$$

die von T erzeugte abgeschlossene Unteralgebra. Dann existiert genau ein isometrischer Algebren-Isomorphismus

$$\Phi : \mathbf{C}(\sigma(T)) \rightarrow \mathcal{A}(T),$$

der die identische Funktion $x \mapsto x$ auf T abbildet. Es gilt $\Phi(\bar{f}) = \Phi(f)^$.*

Beweis. Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit. Sei dazu Φ eine Abbildung mit den oben geforderten Eigenschaften. Da das Polynom x auf T abgebildet wird und Φ ein Algebrenhomomorphismus ist, muss für jedes Polynom $\Phi(p) = p(T)$ gelten, wodurch Φ auf der dichten Teilmenge $\mathbb{C}[X]$ eindeutig bestimmt ist. Da Φ eine Isometrie sein soll, ist die Abbildung insbesondere stetig und kann damit auf genau eine Weise von dieser dichten Teilmenge auf ganz $\mathbf{C}(\sigma(T))$ fortgesetzt werden.

Wir zeigen nun die Existenz. Zunächst definieren wir die Abbildung für $p \in \mathbb{C}[X]$ als $\Phi(p) = p(T)$. Ist p ein reelles Polynom, dann ist $p(T)$ selbstadjungiert (Warum?) und es gilt

$$\|p(T)\| = r(p(T)) = \sup \{ |\kappa| \mid \kappa \in \sigma(p(T)) \} = \sup \{ |p(\lambda)| \mid \lambda \in \sigma(T) \} = \|p\|_\infty.$$

Dabei haben wir Satz 11.81 und den Spektralabbildungssatz für Polynome benutzt.

Für komplexwertiges p ist $\bar{p}p$ ein reelles Polynom und es folgt mit der C^* -Eigenschaft und dem eben gezeigten

$$\|p(T)\|^2 = \|p(T)^* p(T)\| = \|(\bar{p}p)(T)\| = \|\bar{p}p\|_\infty = \|p\|_\infty^2.$$

Damit ist Φ auf den Polynomen tatsächlich eine Isometrie und lässt sich damit eindeutig stetig und linear auf den ganzen Raum $\mathbf{C}(\sigma(T))$ fortsetzen. Wir werden die Fortsetzung hier weiter mit Φ bezeichnen. Ist nun $f \in \mathbf{C}(\sigma(T))$ und (p_n) eine gegen f konvergente Folge von Polynomen, dann ist

$$\|\Phi(f)\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\Phi(p_n)\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|p_n\|_\infty = \|f\|_\infty,$$

womit auch das fortgesetzte Φ eine Isometrie ist.

Es bleibt noch zu zeigen, dass die Fortsetzung auch ein Algebrenhomomorphismus ist. Sei dazu $g \in \mathbf{C}(\sigma(T))$ eine weitere Funktion und (q_n) eine gegen g konvergente Folge von Polynomen. Dann gilt

$$\Phi(p_n g) = \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi(p_n q_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi(p_n) \Phi(q_k) = \Phi(p_n) \Phi(g)$$

wobei wir die Stetigkeit der Abbildungen $h \mapsto p_n h$ und $A \mapsto \Phi(p_n) A$ ausgenutzt haben. Analog erhalten wir dann im Grenzwert für $n \rightarrow \infty$ auch $\Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g)$.

Da bereits $\Phi(\mathbf{C}[X])$ dicht in $\mathcal{A}(T)$ ist, gilt das erst recht für Φ . Außerdem ist Φ als Isometrie natürlich nach unten beschränkt. Damit ist Φ aber stetig invertierbar und daher insbesondere surjektiv, also ein Isomorphismus.

Die Gleichung $\Phi(\bar{f}) = \Phi(f)^*$ gilt offensichtlich für Polynome und folgt damit für beliebige stetige Funktionen da die komplexe Konjugation und die Adjungiertenbildung stetige Operationen sind. \square

Bemerkung 11.95. (i) In Anlehnung an die Notation für Polynome schreiben wir häufig statt $\Phi(f)$ auch $f(T)$.

- (ii) Falls $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen sind, die auf $\sigma(T)$ übereinstimmen, dann sind $f|_{\sigma(T)}$ und $g|_{\sigma(T)}$ das selbe Element von $\mathbf{C}(\sigma(T))$ und damit stimmen $f(T)$ und $g(T)$ ebenfalls überein. Der stetige Funktionenkalkül „interessiert“ sich also nur für das Verhalten der Funktionen auf $\sigma(T)$. Insbesondere reicht es auch aus, dass die Funktionen dort stetig sind.
- (iii) Falls $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (x - x_0)^k$ eine Potenzreihe ist und $\sigma(T)$ im Konvergenzintervall der Reihe enthalten ist, dann konvergieren die Partialsummen der Reihe gleichmäßig gegen die Grenzfunktion (vergleiche Satz 5.88) und es gilt

$$f(T) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (T - x_0)^k.$$

Wichtige Beispiele dafür sind die Exponentialfunktion oder die Winkelfunktionen. Der stetige Funktionenkalkül ordnet jedoch auch solchen stetigen Funktionen Operatoren zu, die sich nicht als Potenzreihe schreiben lassen.

- (iv) Fall T, S kommutierende selbstadjungierte Operatoren sind, dann vertauschen natürlich für beliebige Polynome p und q auch $p(T)$ und $q(S)$. Es gilt dann auch für beliebige stetige f, g immer $f(T)g(S) = g(S)f(T)$. Insbesondere vertauschen verschiedene Funktionen des selben Operators miteinander.
- (v) Ist $\lambda \in \rho(T)$ in der Resolventenmenge von T , dann ist die Funktion $x \mapsto \frac{1}{x-\lambda}$ stetig auf dem Spektrum von T . Dann gilt

$$\frac{1}{T-\lambda}(T-\lambda) = (T-\lambda)\frac{1}{T-\lambda} = 1,$$

da für die zahlwertigen Funktionen die entsprechende Gleichung gilt und Φ ein Algebrenhomomorphismus ist. Damit muss $\frac{1}{T-\lambda}$ aber die Resolvente $R(T, \lambda)$ im Punkt λ sein. Insbesondere besitzt $T - \lambda$ eine Inverse in $B(\mathcal{H})$ genau dann, wenn es eine Inverse in $\mathcal{A}(T)$ besitzt.

- (vi) Für einen beliebigen Operator $A \in B(\mathcal{H})$ ist A^*A ein positiver Operator. Daher können wir definieren

$$|T| = \sqrt{T^*T}.$$

- (vii) Da $\mathcal{A}(T)$ eine Algebra ist, und $f(T) \in \mathcal{A}(T)$ liegt, sind alle Polynome $p(f(T))$ ebenfalls in $\mathcal{A}(T)$ enthalten. Die von $f(T)$ erzeugte Algebra ist also in $\mathcal{A}(T)$ enthalten. Da $\mathcal{A}(T)$ auch abgeschlossen ist, gilt dann auch $\mathcal{A}(f(T)) \subset \mathcal{A}(T)$.
- (viii) Falls $\lambda \in \sigma(T)$ ein Eigenwert ist und $v \in \mathcal{H}$ ein zugehöriger Eigenvektor, dann gilt für jedes Polynom p auch $p(T)v = p(\lambda)v$ (Warum?). Da die Abbildung $A \mapsto Av$ stetig ist, gilt dann für beliebiges stetiges f auch $f(T)v = f(\lambda)v$. Für einen Eigenwert $\lambda \in \sigma(T)$ ist also auch $f(\lambda)$ ein Eigenwert von $f(\sigma)$.
- (ix) Falls $\lambda \in \sigma(T)$ ein isolierter Punkt ist, das heißt es existiert $\epsilon > 0$ so, dass $B_\epsilon(\lambda) \cap \sigma(T) = \{\lambda\}$, dann ist die charakteristische Funktion $\mathbb{1}_{\{\lambda\}}$ stetig auf dem Spektrum (Warum?). Der Operator $P_\lambda := \mathbb{1}_{\{\lambda\}}(T)$ ist dann eine Orthoprojektion, da $\overline{\mathbb{1}_{\{\lambda\}}} = \mathbb{1}_{\{\lambda\}}$ und $\mathbb{1}_{\{\lambda\}}^2 = \mathbb{1}_{\{\lambda\}}$ gilt. Auch kann P_λ nicht der Nulloperator sein, da $\mathbb{1}_{\{\lambda\}}$ nicht die Nullfunktion ist.

Da für beliebiges $x \in \sigma(T)$ gilt $x\mathbb{1}_{\{\lambda\}}(x) = \lambda\mathbb{1}_{\{\lambda\}}(x)$ muss auch $TP_\lambda = \lambda P_\lambda$ gelten. Für $v \in \mathcal{H}$ gilt also $TP_\lambda v = \lambda P_\lambda v$. Die Elemente des Bildes von P_λ sind also Eigenvektoren von T zum Eigenwert λ .

Gilt umgekehrt $Tv = \lambda v$, dann folgt aus dem vorherigen Punkt $P_\lambda v = \mathbb{1}_{\{\lambda\}}(\lambda)v = v$ und damit ist v im Bild von P_λ . Wir haben also gezeigt: ist $\lambda \in \sigma(T)$ ein isolierter Punkt, dann ist es ein Eigenwert und der Operator P_λ ist der Projektionsoperator auf den zugehörigen Eigenraum.

Andererseits können selbstadjungierte Operatoren natürlich Eigenwerte besitzen, die keine isolierten Punkte des Spektrums sind.

- (x) Der obige Satz kann in diverse Richtungen verallgemeinert werden. Er gilt zunächst allgemeiner für beliebige normale Operatoren. Mit entsprechenden Anpassungen kann er auch auf Tupel T_1, \dots, T_n von kommutierenden selbstadjungierten oder normalen Operatoren verallgemeinert werden. Die allgemeinste Version ist der Satz von Gelfand-Neumark: Jede abgeschlossene, kommutative Unteralgebra von $B(\mathcal{H})$ ist isometrisch isomorph zur Algebra der stetigen Funktionen auf einem kompakten Raum.

Auch die Klasse der betrachteten Funktionen kann auf alle beschränkten, Borel-messbaren Funktionen erweitert werden (zum beschränkten oder Borel-Funktionenkalkül). Lassen wir auch unbeschränkte Operatoren zu, dann kann sogar auf die Beschränktheit der Funktionen verzichtet werden.

- (xi) Es ist jedoch im Allgemeinen nicht möglich, Funktionen von mehreren, nicht kommutierenden Operatoren zu definieren. In diesem Falle scheitern wir bereits bei einfachen Polynomen: soll die Funktion $(x, y) \mapsto xy$ nun auf TS oder auf ST oder vielleicht doch auf $\frac{1}{2}(TS + ST)$ abgebildet werden?

Die Frage wie ein gegebenes klassisches physikalisches System zu „quantisieren“ ist — welchen klassischen Observablen (Funktionen) also welche quantenmechanischen Observablen (Operatoren) zugeordnet werden sollten — lässt sich also nicht durch Konstruktion eines passenden Funktionenkalküls beantworten.

Beispiel 11.96. Sei $T \in B(\mathcal{H})$ selbstadjungiert. Wir betrachten nun die Funktionen $x \mapsto \exp(isx)$ für $s \in \mathbb{R}$. Dann gilt $\exp(isT)\exp(itT) = \exp(i(s+t)T)$, da für die zahlwertigen Funktionen die entsprechende Gleichung gilt. Insbesondere erhalten wir auch

$$\exp(isT)^* = \overline{\exp(is \cdot)}(T) = \exp(-isT)$$

und sehen, dass $\exp(isT)$ für jedes $s \in \mathbb{R}$ ein unitärer Operator ist.

Falls T der Hamilton-Operator eines physikalischen Systems ist, dann ist $\exp(isT)$ der sogenannte Zeitentwicklungsoperator. Ein System, dass im Zeitpunkt 0 im Zustand x ist, befindet sich dann im Zeitpunkt s im Zustand $\exp(isT)x$. Die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion lässt sich dann so interpretieren, dass die Zeitentwicklung eines Zustandes x um zunächst s und des resultierenden Zustandes $\exp(isT)x$ um t zum selben Ergebnis führt wie die Zeitentwicklung des ursprünglichen Zustandes x um $s+t$.

Da die Exponentialfunktion eine Reihe mit Konvergenzradius ∞ ist gilt

$$\exp(isT) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!} s^k.$$

Mit anderen Worten: die Funktion $s \mapsto \exp(isT)$ ist eine $B(\mathcal{H})$ -wertige Potenzreihe und damit insbesondere beliebig differenzierbar. Mit einer Banachraumwertigen Version von Satz 6.52 gilt dann

$$\frac{d}{ds} \exp(isT) = iT \exp(isT).$$

Die Hilbertraumwertige Abbildung $\exp(isT)x$ erfüllt also die zum Operator T gehörige Schrödingergleichung $x'(t) = iTx(t)$. Für viele physikalisch relevante Systeme ist der Hamilton-Operator allerdings unbeschränkt, wodurch die obigen Überlegungen deutlich verkompliziert werden.

Satz 11.97 (Spektralabbildungssatz). *Sei T ein selbstadjungierter Operator und $f : \sigma(T) \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, dann gilt $\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$.*

Beweis. Sei $\mathcal{A}(T)$ wieder die von T erzeugte, abgeschlossene Unteralgebra von $B(\mathcal{H})$. Sei nun $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann ist $f(T) - \lambda \in \mathcal{A}(T)$. Falls dieser Operator eine stetige Inverse

besitzt, muss diese ebenfalls in $\mathcal{A}(f(T)) \subset \mathcal{A}(T)$ liegen. Da der stetige Funktionenkalkül ein Isomorphismus von Algebren ist, besitzt der Operator $f(T) - \lambda$ eine stetige Inverse in $\mathcal{A}(T)$ genau dann, wenn die Funktion $f - \lambda$ eine Inverse in $\mathbf{C}(\sigma(T))$ besitzt. Das ist genau dann der Fall, wenn $f - \lambda$ keine Nullstellen in $\sigma(T)$ besitzt, wenn also $\lambda \notin \sigma(T)$ liegt. Also ist $f(T) - \lambda$ genau dann nicht stetig invertierbar, wenn $\lambda \in \sigma(T)$. \square

Der folgende Satz zeigt, dass der stetige Funktionenkalkül sich auch in Bezug auf Verkettungen von Funktionen gut verhält.

Satz 11.98. *Sei $T \in B(\mathcal{H})$ selbstadjungiert und $g : \sigma(T) \rightarrow \mathbb{R}$, $f : \sigma(g(T)) \rightarrow \mathbb{C}$ stetige Funktionen. Dann gilt $(f \circ g)(T) = f(g(T))$.*

Beweis. Da g reellwertig ist, ist $g(T)$ ein selbstadjungierter Operator. Außerdem gilt auf Grund des Spektralabbildungssatzes, dass $\sigma(g(T)) = g(\sigma(T))$ ist. Daher ist $f \circ g$ eine stetige Funktion auf $\sigma(T)$ und beide Seiten der Gleichung sind tatsächlich definiert.

Wir definieren nun

$$\mathcal{B} = \{f \in \mathbf{C}(\sigma(g(T))) \mid f(g(T)) = (f \circ g)(T)\}$$

und wollen zeigen, dass \mathcal{B} mit $\mathbf{C}(\sigma(g(T)))$ übereinstimmt. Zunächst gilt für die Funktionen $\mathbb{1}(x) = 1$ und $\text{id}(x) = x$

$$\begin{aligned}\mathbb{1}(g(T)) &= I = (\mathbb{1} \circ g)(T) \\ \text{id}(g(T)) &= g(T) = (\text{id} \circ g)(T).\end{aligned}$$

Diese Funktionen liegen also in \mathcal{B} . Für beliebiges $f, \tilde{f} \in \mathcal{B}$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned}(f + \alpha\tilde{f})(g(T)) &= f(g(T)) + \alpha\tilde{f}(g(T)) = (f \circ g)(T) + \alpha(\tilde{f} \circ g)(T) \\ &= (f \circ g + \alpha\tilde{f} \circ g)(T) = ((f + \alpha\tilde{f}) \circ g)(T) \\ (f\tilde{f})(g(T)) &= f(g(T))\tilde{f}(g(T)) = (f \circ g)(T)(\tilde{f} \circ g)(T) \\ ((f \circ g)(\tilde{f} \circ g))(T) &= ((f\tilde{f}) \circ g)(T).\end{aligned}$$

Damit ist \mathcal{B} eine Algebra und enthält insbesondere die Polynome. Schließlich gilt, falls $(f_n) \subset \mathcal{B}$ eine Folge ist, die in $\mathbf{C}(\sigma(g(T)))$ gegen f konvergiert, dann konvergiert die Folge $(f_n \circ g)$ auch in $\mathbf{C}(\sigma(T))$ gegen $f \circ g$ (Warum?). Nutzen wir nun zweimal die Stetigkeit des stetigen Funktionenkalküls, dann erhalten wir

$$f(g(T)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(g(T)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n \circ g)(T) = (f \circ g)(T)$$

und damit ist f ebenfalls in \mathcal{B} . Damit ist \mathcal{B} eine abgeschlossene Unteralgebra von $\mathbf{C}(\sigma(g(T)))$ die die Polynome enthält. Da die Polynome aber dicht in $\mathbf{C}(\sigma(g(T)))$ sind, muss gelten $\mathcal{B} = \mathbf{C}(\sigma(g(T)))$. \square

12 Partielle Differenzialgleichungen

12.1 Einführung

Definition 12.1. Eine partielle Differentialgleichung ist eine Gleichung in einer unbekannten Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ($U \subset \mathbb{R}^n$ offen), in der f und partielle Ableitungen von f vorkommen. Die Ordnung der Gleichung ist die höchste vorkommende Ableitung. Eine partielle Differentialgleichung der Form

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| < k} a_\alpha \partial^\alpha f = b$$

mit $a_\alpha, b : U \rightarrow \mathbb{R}$ heißt linear.

Beispiel 12.2. (i) $\Delta f = 0$ Laplacegleichung: beschreibt das Gravitations- bzw. elektrostatische Potential ohne Massen/Ladungen.

(ii) $-\Delta f = \rho$ Poissongleichung: beschreibt das Gravitations- bzw. elektrostatische Potential bei vorgegebener Massen-/Ladungsdichte ρ .

(iii) $\partial_t f - \Delta f = \rho$ Wärmeleitungsgleichung: Zeitentwicklung einer Temperatur- oder Konzentrationsverteilung durch Wärmeleitung/Diffusion

(iv) $i\partial_t f = -\Delta f + Vf$ Schrödingergleichung: Wellenfunktion eines quantenmechanischen Teilchens im Potential V

(v) $\partial_t^2 f - \Delta f = \rho$ Wellengleichung: Ausbreitung von elektromagnetischen oder Druckwellen

(vi)

$$\begin{array}{ll} \operatorname{rot} B = \partial_t E + j & \operatorname{rot} E = -\partial_t B \\ \operatorname{div} E = \rho & \operatorname{div} B = 0 \end{array}$$

Maxwellgleichungen: $(E, B : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gesucht) Elektromagnetisches Feld bei vorgegebener Stromdichte j und Ladungsdichte ρ

(vii) Navier-Stokes-Gleichung: Beschreibung der Bewegung von Fluiden

(viii) Einstein-Gleichungen: Zusammenhang zwischen materiellem Inhalt und Geometrie der Raumzeit

Bemerkung 12.3. Im Kontext von partiellen Differentialgleichungen tauchen häufig Differentialoperatoren wie beispielsweise der Laplace-Operator $\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2$ auf. Wie genau Definitions- und Wertebereich dieser Operatoren gewählt werden, hängt von der Situation ab und wird auch nicht immer explizit erwähnt. Wir werden hier zunächst immer voraussetzen, dass die Definitionsbereiche aus hinreichend oft stetig differenzierbaren Funktionen bestehen. Ist das gegeben können wir Linearkombinationen und Produkte (Hintereinanderausführungen) von Differentialoperatoren definieren.

Eng damit verknüpft ist die Frage, was für Funktionen wir als Lösungen von Differentialgleichungen zulassen wollen. Wir werden hier zunächst klassische Lösungen betrachten, also Funktionen die hinreichend oft differenzierbar sind um sie in die Differentialgleichung einsetzen zu können, werden jedoch später auf diesen Punkt zurückkommen.

Beispiel 12.4. Wir betrachten die Wellengleichung in $1 + 1$ Dimensionen, das heißt die Gleichung für $f \in \mathbf{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$\partial_t^2 f - \partial_x^2 f = 0.$$

Angenommen f sei eine Lösung. Wir führen eine Variablentransformation durch: $\tilde{f}(u, v) := f(u - v, u + v)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \partial_u \partial_v \tilde{f}(u, v) &= \partial_u (-\partial_1 f(u - v, u + v) + \partial_2 f(u - v, u + v)) \\ &= -\partial_1^2 f(u - v, u + v) - \partial_2 \partial_1 f(u - v, u + v) \\ &\quad + \partial_1 \partial_2 f(u - v, u + v) + \partial_2^2 f(u - v, u + v) = 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass es $\tilde{g} \in \mathbf{C}^1(\mathbb{R})$ gibt, so dass $\partial_v \tilde{f}(u, v) = \tilde{g}(v)$. Wähle g eine Stammfunktion von \tilde{g} , dann muss es $h \in \mathbf{C}^2(\mathbb{R})$ geben so, dass $\tilde{f}(u, v) = g(v) + h(u)$. Rücksubstitution liefert

$$f(t, x) = g\left(\frac{1}{2}(x - t)\right) + h\left(\frac{1}{2}(x + t)\right).$$

Andererseits überzeugt man sich leicht, dass der obige Ausdruck für beliebige $g, h \in \mathbf{C}^2(\mathbb{R})$ die partielle Differentialgleichung löst.

Bemerkung 12.5. (i) Das Beispiel illustriert, dass der Lösungsraum von partiellen Differentialgleichungen im Allgemeinen sehr groß ist. Um ein „gut gestelltes Problem“ zu erhalten muss man zusätzliche Anfangs- und/oder Randbedingungen stellen. Diese werden entsprechend durch das zu modellierende System vorgegeben. Im obigen Fall sind die „richtigen“ Zusatzbedingungen z. B. durch Angabe von $f(0, x)$ und $\partial_1 f(0, x)$ gegeben und man spricht von einem Anfangswertproblem.

(ii) Die Wahl des richtigen Koordinatensystems kann die Behandlung von partiellen Differentialgleichungen stark vereinfachen. Häufig kann man sich dabei von Symmetrien des Systems leiten lassen.

Bemerkung 12.6. Eine häufig anzutreffende Methode um explizite Lösungen zu bestimmen ist ein Separationsansatz. Wir betrachten hier als Beispiel die Laplace-Gleichung in 2 Dimensionen (auf \mathbb{R}^2)

$$\partial_1^2 f + \partial_2^2 f = 0,$$

machen den Ansatz $f(x, y) = g(x)h(y)$ und formen zu

$$\frac{g''(x)}{g(x)} + \frac{h''(y)}{h(y)} = 0$$

um. Da x und y unabhängig voneinander variiert werden können, müssen die beiden Summanden in der Gleichung separat konstant sein, und das Problem zerfällt in die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$g''(x) = \lambda g(x) \text{ und } h''(y) = -\lambda h(y).$$

Der gewählte Ansatz ist allerdings eine starke Einschränkung und führt nur dann zum Erfolg, wenn die gesuchte Lösung „zufällig“ die vermutete Gestalt hat. Viele Anfangs- und Randbedingungen werden sich so aber nicht erfüllen lassen und auch Eindeutigkeitsaussagen für Lösungen werden wir so nicht erhalten.

Ist die Differentialgleichung wie im vorliegenden Fall linear und homogen, dann können verschiedene aus dem Separationsansatz gewonnene Lösungen natürlich durch Linearkombination zu weiteren Lösungen zusammengesetzt werden. Auf diese Weise ist es für manche Gleichungen möglich eine Lösungstheorie aufzubauen.

Bemerkung 12.7. Die aus Sicht der Mathematik interessanten Fragen im Zusammenhang mit partiellen Differentialgleichungen sind ähnlich wie bei gewöhnlichen Differentialgleichungen. Existenz von Lösungen, Eindeutigkeit von Lösungen von Anfangs- oder Randwertproblemen, Abhängigkeit der Lösungen von Anfangs- oder Randwerten, numerische Lösungen etc. Anders als bei gewöhnlichen Differentialgleichungen gibt es jedoch keine Theorie mehr, die größere Klassen von partiellen Differentialgleichungen abdeckt. Stattdessen benötigt jede praktisch wichtige Differentialgleichung ihre eigene Lösungstheorie.

12.2 Harmonische Funktionen

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit Lösungen der Laplace-Gleichung beziehungsweise Poisson-Gleichung befassen. Dafür sei stets $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge.

Definition 12.8. Der Differentialoperator $\Delta f = \partial_1^2 + \cdots + \partial_n^2$ heißt Laplace-Operator. Eine Funktion $f \in C^2(U)$ heißt harmonisch, falls $\Delta f = 0$ gilt.

Bemerkung 12.9. Es lässt sich leicht nachrechnen, dass für eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $\operatorname{div} \operatorname{grad} f = \Delta f$ gilt. Diese Darstellung des Laplace-Operators hat den Vorteil, dass grad und div jeweils koordinatenunabhängig definiert sind. Auf diese Weise lässt sich der Laplace-Operator auf beliebigen (orientierten) riemannschen Mannigfaltigkeiten definieren. Selbst auf \mathbb{R}^n kann die Formel nützlich sein, wenn wir den Operator bezüglich eines anderen Koordinatensystems darstellen wollen.

Bemerkung 12.10. (i) Sei $S_r \subset \mathbb{R}^n$ die Sphäre mit Radius $r > 0$ um den Koordinatenursprung und ω_r die zugehörige Volumenform.

Wir betrachten die Skalierung um den Faktor r , also die Abbildung

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto rx.\end{aligned}$$

Diese Abbildung ist linear und stimmt damit mit ihrer Ableitung überein $D\varphi(x) = \varphi$. Natürlich können wir φ zu einem Diffeomorphismus $S_1 \rightarrow S_r$ einschränken und die Volumenform ω_r entlang dieses Diffeomorphismus zurückziehen. Da der Raum der $(n-1)$ -Formen auf der $(n-1)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit S_r eindimensional ist, muss

$$\varphi_*\omega_r = \alpha\omega_1$$

gelten, wobei α eine Funktion auf S_1 ist. Indem wir beide Seiten auf eine Orthonormalbasis eines beliebigen Tangentenraumes von S_1 anwenden, erhalten wir $\alpha = r^{n-1}$.

Sei nun $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann folgt aus der Invarianz von Integralen über Formen unter Pull-Backs

$$\int_{S_r} f\omega_r = \int_{S_1} \varphi_*(f\omega_r) = \int_{S_1} f(r\cdot)\varphi_*\omega_r = r^{n-1} \int_{S_1} f(r\cdot)\omega_1.$$

- (ii) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Hyperfläche mit Volumenform ω und $n : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Normalenvektorfeld, das heißt ein normiertes, stetiges Vektorfeld, dass in jedem Punkt $x \in M$ senkrecht auf dem Tangentenraum $T_x M$ steht.

Sei nun $v \in \mathbb{R}^n$ irgendein Vektor und $e_1, \dots, e_{n-1} \in T_x M$ eine Orthonormalbasis so, dass n, e_1, \dots, e_{n-1} positiv orientiert ist, dann gilt für die v zugeordnete $(n-1)$ -Form

$$j(v)(e_1, \dots, e_{n-1}) = \langle v | n \rangle \omega(e_1, \dots, e_n).$$

Für $v \in T_x M$ sind beide Seiten der Gleichung 0, für $v = n_x$ sind beide Seiten der Gleichung 1 und für allgemeine v folgt die Gleichung aus der Linearität in v . Da beide Seiten $(n-1)$ -Formen sind, stimmen sie also als Formen auf M überein.

Ist $v : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld, dann erhalten wir aus dieser Gleichung einen Zusammenhang zwischen dem „Oberflächenintegral erster und zweiter Art“.

$$\int_M v d\sigma = \int_M J(v) = \int_M \langle v | n \rangle \omega.$$

- (iii) Für Integrale von Funktionen über Mannigfaltigkeiten gelten den Sätzen aus Abschnitt 8.4 entsprechende Grenzwertsätze. Wir werden die folgenden Spezialfälle benötigen: Falls M eine kompakte Mannigfaltigkeit mit Volumenform ω ist, I ein Intervall und $f : I \times M \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, dann ist die Funktion

$$F(s) := \int f(s, \cdot) \omega$$

stetig. Ist $\tilde{I} \subset I$ ein kompaktes Intervall, das s enthält, dann ist $\tilde{I} \times M$ kompakt und f daher auf dieser Menge beschränkt. Da M kompakt ist, sind konstante Funktionen über M integrierbar (Warum?), und damit haben wir für eine Umgebung von s eine von s unabhängige integrierbare Majorante gefunden und können Korollar 8.53 anwenden.

Mit einem analogen Argument und Korollar 8.55 folgt: ist f sogar stetig differenzierbar, dann ist F differenzierbar und es gilt

$$F'(s) = \int \partial_s f(s, \cdot) \omega.$$

Satz 12.11 (Mittelwerteigenschaft). *Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion. Wir bezeichnen mit $S_r(x)$ die Sphäre mit Radius r um den Punkt x mit ω_r ihre Volumenform und mit $O(r)$ ihr Volumen (Oberfläche für $n = 3$). Ist $\overline{B_r(x)} \subset U$, dann gilt*

$$f(x) = \frac{1}{O(r)} \int_{S_r(x)} f \omega_r$$

(rechts steht die Mittelung von f über die Kugeloberfläche $S_r(x)$).

Beweis. Wir können zunächst durch Verschieben erreichen, dass $x = 0$ gilt. Nach den obigen Vorüberlegungen gilt nun für jedes $s \in (0, r]$

$$\int_{S_s} f \omega_r = s^{n-1} \int_{S_1} f(s \cdot) \omega_1$$

wobei ω die Volumenform der Einheitssphäre sein soll. Insbesondere erhalten wir $O(s) = s^{n-1} O(1)$ (für $f = 1$). Wir betrachten nun die Funktion

$$F : (0, r] \rightarrow \mathbb{R} \\ s \mapsto \frac{O(1)}{O(s)} \int_{S_s} f \omega_s = \int_{S_1} f(s \cdot) \omega$$

Nach den obigen Überlegungen ist F auf $(0, r]$ stetig und auf $(0, r)$ differenzierbar. Für die Ableitung des Integranden gilt (Warum?)

$$\partial_s f(sx) = \langle \text{grad } f(sx) | x \rangle$$

Da wir uns auf der Einheitssphäre befinden, stimmt $x \in S_1$ in jedem Punkt mit dem Normalenvektor der Sphäre überein und daher erhalten wir für $s \in (0, r)$

$$\begin{aligned} F'(s) &= \int_{S_1} \langle \text{grad } f(s \cdot) | \cdot \rangle \omega_1 = \int_{S_1} (\text{grad } f)(s \cdot) d\sigma = \int_{B_1(0)} \text{div}((\text{grad } f)(s \cdot)) d\lambda^n \\ &= \int_{B_1(0)} s \Delta f(s \cdot) d\lambda^n = 0. \end{aligned}$$

Dabei haben wir noch den Integralsatz von Gauß verwendet.

Damit ist die Funktion F auf $(0, r)$ und wegen der Stetigkeit auch auf $(0, r]$ konstant. Wir wollen noch den konstanten Wert der Funktion ermitteln. Sei dazu $\epsilon > 0$. Wegen der Stetigkeit von f im Punkt 0 existiert ein $\delta > 0$ so, dass $|f(x) - f(0)| < \frac{\epsilon}{O(1)}$ falls $\|x\| < \delta$. Für $s < \delta$ gilt dann

$$O(1)f(0) - \epsilon = \frac{O(1)}{O(s)} \int_{S_s} \left(f(0) - \frac{\epsilon}{O(1)} \right) \omega_s \leq \frac{O(1)}{O(s)} \int_{S_s} f \omega_s = F(s) \leq O(1)f(0) + \epsilon.$$

Damit haben wir gezeigt, dass $\lim_{s \rightarrow 0} F(s) = O(1)f(0)$ gilt, womit der Beweis beendet ist. \square

Bemerkung 12.12. Tatsächlich gilt auch die Umkehrung der obigen Gleichung: erfüllt eine Funktion in allen Punkten die Mittelwerteigenschaft, dann ist sie harmonisch. Der obige Beweis lässt sich entsprechend anpassen (Wie?) was wir hier jedoch nicht tun wollen.

Die Mittelwerteigenschaft hat eine Reihe interessanter Konsequenzen, mit denen wir uns hier jedoch nicht im Detail beschäftigen wollen. Beispielsweise kann damit gezeigt werden, dass harmonische Funktionen automatisch beliebig differenzierbar und sogar analytisch sind.

Satz 12.13 (Maximumprinzip). *Sei U wegzusammenhängend und $f \in C^2(U)$ eine harmonische Funktion. Falls f auf U ihr Maximum annimmt, das heißt falls*

$$f(x) = \sup f(U)$$

für ein $x \in U$ gilt, dann ist f konstant.

Beweis. Sei $a = f(x) = \sup f(U)$. Sei $y \in U$ ein beliebiger Punkt. Da U wegzusammenhängend ist, können wir eine stetige Kurve $c : [0, 1] \rightarrow U$ so finden, dass $c(0) = x$ und $c(1) = y$ gilt. Wir betrachten nun das Verhalten von f entlang dieser Kurve, also die stetige Funktion $f \circ c$. Sei I das maximale Intervall so, dass $f \circ c|_I = a$ (die Vereinigung über alle solchen Intervalle). Da $f \circ c$ stetig ist, muss dieses Intervall abgeschlossen sein

(Warum?), es gilt also $I = [0, b]$. Prinzipiell ist hier auch noch der Fall $b = 0$ also $I = \{0\}$ möglich.

Wir nehmen nun an, es wäre $b < 1$. Da U offen ist, existiert $r > 0$ so, dass $\overline{B_r(c(b))} \subset U$ gilt. Wegen der Stetigkeit von c muss $c(b+t)$ für hinreichend kleine $t > 0$ in $B_r(c(b))$ liegen. Indem wir t gegebenenfalls weiter verkleinern können wir außerdem erreichen, dass $f(c(b+t)) < a$ ist, denn andernfalls hätten wir I weiter vergrößern können. Setzen wir $c(b+t) = z$, dann muss es wegen der Stetigkeit von f eine Kugel $B_\delta(z)$ geben, auf der f kleiner $\frac{f(z)+a}{2} < a$ ist. Sei nun $s = \|c(b) - z\|$, dann können wir die Sphäre $S_s(c(b))$ in $A = S_s(c(b)) \cap B_\delta(z)$ und $B = S_s(c(b)) \setminus B_\delta(z)$ zerlegen. Beide Teile haben positives Volumen O_A beziehungsweise O_B mit $O_A + O_B = O(s)$. Damit gilt für das Mittel von f über $S_s(c(b))$

$$\begin{aligned} \frac{1}{O(s)} \int_{S_s} f \omega &= \frac{1}{O(s)} \left(\int_A f \omega + \int_B f \omega \right) \leq \frac{1}{O(s)} \left(\frac{f(z)+a}{2} O_A + a O_B \right) \\ &< a \frac{O_A + O_B}{O(s)} = f(c(b)). \end{aligned}$$

Diese Ungleichung widerspricht aber der Mittelwerteigenschaft. Es muss also $b = 1$ gelten also $f(y) = a$. Da y beliebig war, ist damit die behauptete Konstanz bewiesen. \square

Da für harmonisches f natürlich auch $-f$ harmonisch ist, gilt eine analoge Aussage auch für das Minimum der Funktion.

Das Maximumprinzip kann nun verwendet werden um Eindeutigkeitsaussagen über die Lösungen bestimmter Randwertprobleme der Laplace- oder Poissonsgleichung zu erhalten. Mit $\mathbf{C}^2(\overline{U})$ soll im Folgenden der Raum der auf \overline{U} stetigen und auf U zweimal stetig differenzierbaren Funktionen bezeichnet werden.

Satz 12.14. *Sei U beschränkt und wegzusammenhängend, $\rho \in \mathbf{C}(U)$ und $h \in \mathbf{C}(\partial U)$, dann gibt es höchstens eine Funktion $f \in \mathbf{C}^2(\overline{U})$ die das sogenannte Dirichlet-Problem*

$$\begin{aligned} \Delta f &= \rho \text{ auf } U \\ f|_{\partial(U)} &= h \end{aligned}$$

löst.

Beweis. Seien f und \tilde{f} zwei Lösungen des Problems. Dann ist $g = f - \tilde{f}$ eine harmonische Funktion, die auf dem Rand von U verschwindet. Da \overline{U} kompakt ist, muss f auf dieser Menge sowohl ihr Maximum als auch ihr Minimum annehmen. Das ist aber auf Grund des Maximumprinzips nur dann möglich, wenn $g = 0$ gilt. \square

Dieser Satz sagt natürlich noch nichts über die Existenz von Lösungen aus. Existenzaussagen erhalten wir auch nur unter zusätzlichen Voraussetzungen an den Rand ∂U oder indem wir unsere Regularitätsanforderungen an die Lösungen abschwächen.

In der Physik werden Differentialgleichungen häufig aus Extremalprinzipien „hergeleitet“. Wir wollen das hier am Beispiel der Laplace-Gleichung demonstrieren. Um die entsprechende Aussage zeigen zu können, benötigen wir noch etwas Vorbereitung.

Definition 12.15. Wir sagen eine Funktion $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ hat kompakten Träger in U , wenn es eine kompakte Menge $K \subset U$ gibt, so dass $f|_{U \setminus K} = 0$ ist. Die Räume der stetigen beziehungsweise k mal differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in U bezeichnen wir mit $\mathbf{C}_c(U)$ beziehungsweise mit $\mathbf{C}_c^k(U)$.

Bemerkung 12.16. Es ist nicht ausreichend, dass die Funktion am Rand von U gegen 0 gehen. Vielmehr muss es eine Umgebung des Randes geben, auf der die Funktion bereits verschwindet. Analog wie für Formen definieren wir den Träger einer Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ als

$$\text{supp } f = \overline{\{x \in U \mid f(x) \neq 0\}}$$

wobei der Abschluss in U und nicht in \mathbb{R}^n gemeint ist. Auf diese Weise hat eine Funktion kompakten Träger genau dann, wenn ihr Träger eine kompakte Menge ist.

Da $U \setminus \text{supp } f$ offen ist und f dort verschwindet verschwinden dort auch alle ihre Ableitungen. Der Träger von Ableitungen von f ist also im Träger von f enthalten.

Satz 12.17 (Fundamentallemma der Variationsrechnung für stetige Funktionen).

Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion so, dass

$$\int_U f \varphi d\lambda^n = 0$$

für jedes $\varphi \in \mathbf{C}_c^\infty(U)$ gilt, dann ist $f = 0$.

Beweis. Angenommen es wäre $f \neq 0$. Wir setzen ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraus, dass $f(x) > 0$ für ein $x \neq 0$ ist (andernfalls betrachten wir $-f$). Dann gibt es wegen der Stetigkeit von f eine Umgebung $B_{2\delta}(x)$ auf der $f > \frac{f(x)}{2}$ gilt. Wir wählen nun eine positive, glatte Funktion φ so, dass $f = 1$ auf $B_\delta(x)$ und $f = 0$ auf $U \setminus B_{2\delta}(x)$ gilt (solche Funktionen haben wir bereits explizit konstruiert). Dann gilt

$$\int_U f \varphi d\lambda^n \geq \int_{B_\delta(x)} f \varphi d\lambda^n \geq \frac{f(x)}{2} \int_{B_\delta(x)} d\lambda^n$$

und da die Kugel $B_\delta(x)$ positives Volumen hat (Warum?) ist dieses Integral im Widerspruch zur Voraussetzung positiv. \square

Mit dem folgenden Lemma können wir bestimmte Aussagen über Funktionen auf \mathbb{R}^n auf Funktionen auf U verallgemeinern.

Lemma 12.18. Sei $K \subset U$ kompakt und $f : U \rightarrow \mathbb{K}$ eine k mal stetig differenzierbare Funktion ($k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$). Dann existiert eine Funktion $g \in \mathbf{C}_c^k(U)$ so, dass für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $\max \alpha \leq k$ die Funktionen $\partial^\alpha f$ und $\partial^\alpha g$ auf K übereinstimmen. Insbesondere können alle Funktionen φ mit kompaktem Träger in U durch 0 zu Funktionen auf \mathbb{R}^n fortgesetzt werden, die mindestens so oft differenzierbar sind wie φ .

Beweis. Wir zeigen zunächst den letzten Satz. Sei $\varphi : U \rightarrow \mathbb{K}$ eine Funktion mit kompaktem Träger $L \subset U$. Wir betrachten die Fortsetzung

$$\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}$$

$$x \mapsto \begin{cases} \varphi(x) & x \in U \\ 0 & x \notin U. \end{cases}$$

Diese Abbildung ist auf der offenen Mengen U offenbar mindestens so oft differenzierbar wie φ . Da U offen ist gilt $\partial U \subset \mathbb{R}^n \setminus U \subset \mathbb{R}^n \setminus L$. Die letzte Menge ist offen und ρ verschwindet auf ihr, ist dort also insbesondere glatt.

Sei nun $x \in K$. Dann existiert eine Kugel $B_{2\epsilon_x}(x)$ so, dass ihr Abschluss ganz in U liegt. Die Kugeln $B_{\epsilon_x}(x)$ für $x \in K$ bilden eine offene Überdeckung von K , es muss also x_1, \dots, x_k so geben, dass bereits $B_{\epsilon_{x_1}}(x_1), \dots, B_{\epsilon_{x_k}}(x_k)$ ganz K überdecken. Wir wählen nun glatte, nichtnegative Funktionen h_1, \dots, h_n so, dass h_i auf $B_{\epsilon_{x_i}}(x_i)$ stets ≥ 1 und außerhalb von $B_{2\epsilon_{x_i}}(x_i)$ identisch 0 ist und setzen

$$h = \sum_{i=1}^k h_i.$$

Damit gilt $h \geq 1$ auf der offenen Menge

$$V = \bigcup_{i=1}^n B_{\epsilon_{x_i}}(x_i)$$

und $h = 0$ außerhalb der kompakten und in U enthaltenen Menge

$$M = \bigcup_{i=1}^n \overline{B_{2\epsilon_{x_i}}(x_i)}.$$

Sei nun $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, die auf $(-\infty, 0]$ verschwindet und auf $[1, \infty)$ konstant 1 ist (wir wissen bereits, dass solche Funktionen existieren). Dann ist $\varphi = q \circ h$ eine glatte Funktion, die auf der offenen Menge V konstant 1 ist und außerhalb von M verschwindet, φ liegt also $\mathbf{C}_c^\infty(U)$.

Die Funktion $f\varphi$ hat nun kompakten Träger und ist mindestens so oft differenzierbar wie f . Nach dem ersten Teil des Beweises kann sie durch 0 zu einer Funktion g auf ganz \mathbb{R}^n fortgesetzt werden. Auf der offenen Menge V — und damit erst recht auf $K \subset V$ — stimmen f , $f\varphi$ und g überein, weshalb auch alle ihre Ableitungen (so sie existieren) dort übereinstimmen. \square

Satz 12.19 (Greensche Formel). Seien $f, g \in \mathbf{C}^2(U)$ Funktionen, $V \subset U$ offen und beschränkt so, dass $\overline{V} \in U$ und ∂V eine $(n-1)$ dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann gelten

$$\int_V (f\Delta g + \langle \text{grad } f | \text{grad } g \rangle) d\lambda^n = \int_{\partial V} f \text{grad } g d\sigma \text{ und}$$

$$\int_V (f\Delta g - g\Delta f) d\lambda^n = \int_{\partial V} (f \text{grad } g - g \text{grad } f) d\sigma.$$

Hat f oder g kompakten Träger in U folgt insbesondere

$$\int_U f \Delta g d\lambda^n = - \int_U \langle \text{grad } f | \text{grad } g \rangle d\lambda^n.$$

Beweis. Für ein Vektorfeld v und eine Funktion f auf U gilt (Nachrechnen!)

$$\text{div}(fv) = \langle \text{grad } f | v \rangle + f \text{div } v.$$

Die erste Greensche Formel folgt dann, indem wir $v = \text{grad } g$ setzen und dann den Satz von Gauß anwenden, die zweite indem wir f und g vertauschen und die entstehende Formel von der ersten subtrahieren.

Den zweiten Teil der Aussage erhalten wir zunächst für den Fall $U = \mathbb{R}^n$, indem wir die soeben bewiesene Formel für $V = B_r(0)$ anwenden, wobei r so groß gewählt wird, dass die Kugel den kompakten Träger von f beziehungsweise g enthält. Sei nun U eine beliebige offene Menge und ohne Beschränkung der Allgemeinheit habe g kompakten Träger $K \subset U$. Wir können nun g durch 0 zu einer \mathbf{C}^2 -Funktion \tilde{g} auf \mathbb{R}^n fortsetzen und eine \mathbf{C}^2 -Funktion \tilde{f} auf \mathbb{R}^n finden, die auf K in allen ihren Ableitungen mit f übereinstimmt. Dann gilt, da die Integranden außerhalb von K ohnehin verschwinden

$$\int_U f \Delta g d\lambda^n = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f} \Delta \tilde{g} d\lambda^n = - \int_{\mathbb{R}^n} \langle \text{grad } \tilde{f} | \text{grad } \tilde{g} \rangle d\lambda = - \int_U \langle \text{grad } f | \text{grad } g \rangle. \quad \square$$

Satz 12.20 (Dirichlet-Prinzip). Sei $h : \partial U \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Auf dem Raum

$$X = \{u \in \mathbf{C}^2(\overline{U}) \mid \|\text{grad } u\| \in \mathbf{L}^2(U) \text{ und } u|_{\partial U} = h\}$$

betrachten wir das Funktional

$$E : X \rightarrow \mathbb{R} \\ u \mapsto \int_U \|\text{grad } u\|^2 d\lambda^n.$$

Nimmt dieses Funktional für eine Funktion f sein Minimum an, dann ist f eine harmonische Funktion.

Bemerkung 12.21. In der Elektrostatik beschreibt die Laplace-Gleichung das Verhalten des elektrostatischen Potentials u (oder auch des Gravitationspotentials). Dann ist $\text{grad } u$ das zugehörige elektrische Feld und das Funktional E entspricht — bis auf Konstanten — der Feldenergie. Der Satz sagt dann aus, dass das Potential mit minimaler Energie eine Lösung der Laplace-Gleichung ist.

Beweis. Sei f die minimierende Funktion. Nach der Greenschen Formel gilt für jedes $\varphi \in \mathbf{C}_c^\infty(U)$

$$\int_U \varphi \Delta f d\lambda^n = - \int_U \langle \text{grad } \varphi | \text{grad } f \rangle d\lambda^n.$$

Wir betrachten nun die Funktion

$$t \mapsto E(f + t\varphi),$$

wobei wir feststellen, dass das Argument stets wieder in X liegt. Da

$$\frac{1}{t}(E(f + t\varphi) - E(f)) = 2 \int_U \langle \text{grad } f | \text{grad } \varphi \rangle d\lambda^n + t \int_U \|\text{grad } \varphi\|^2 d\lambda^n$$

für $t \rightarrow 0$ gegen

$$2 \int_U \langle \text{grad } f | \text{grad } \varphi \rangle$$

konvergiert, haben wir gezeigt, dass die Richtungsableitung von E im Punkt f in Richtung φ existiert. Da E in f ein Minimum hat, muss diese Richtungsableitung verschwinden, woraus mit den obigen Überlegungen

$$\int_U \varphi \Delta f d\lambda^n = 0$$

folgt.

Da das für jedes glatte φ mit kompaktem Träger gilt, folgt nach dem Fundamentallemma $\Delta f = 0$. □

Zu beachten ist, dass die Umkehrung nicht gilt. Für harmonische Funktionen folgt aus dem obigen Argument lediglich das Verschwinden bestimmter Richtungsableitungen, was jedoch auch an lokalen Maxima oder Sattelpunkten passieren kann. Auch lässt sich hier noch nicht die Existenz von Lösungen ableiten, da es nicht sichergestellt ist, dass das Funktional E einen kritischen Punkt besitzt (da es sich um ein Problem in einem unendlichdimensionalen Raum handelt).

12.3 Distributionen und Fundamentallösungen

Bemerkung 12.22. Im Folgenden Abschnitt soll es unter anderem um die folgenden Fragen gehen.

- (i) Was ist die berühmte δ -Funktion und gibt es nur eine davon?
- (ii) Löst das Potential einer Punktladung $x \mapsto \frac{1}{\|x\|}$ die Poisson-Gleichung $\Delta f = \rho$ und was ist die zugehörige Ladungsdichte ρ ?
- (iii) Können Funktionen Lösungen von Differentialgleichungen sein, wenn sie nicht differenzierbar sind und was soll das dann bedeuten?
- (iv) Können wir eine Lösung von $\Delta f = \rho$ für kompliziertes ρ aus Lösungen für einfaches ρ zusammensetzen?

Im Folgenden sei stets $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und \mathbb{K} einer der Körper \mathbb{R} oder \mathbb{C} . Unser Ziel wird nun sein, verallgemeinerte Funktionen, sogenannte Distributionen, einzuführen. Dazu werden wir zunächst besonders schöne Funktionen, sogenannte Testfunktionen betrachten. Es gibt verschiedene Räume, die als Testfunktionen fungieren können. Wir betrachten hier zunächst den gängigsten.

Definition 12.23 (Testfunktionen). Eine glatte Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit kompaktem Träger bezeichnen wir als Testfunktion. Den Raum der Testfunktionen bezeichnen wir mit $\mathbf{D}(U)$ oder $\mathbf{C}_c^\infty(U)$.

Bemerkung 12.24. Wir wissen bereits, dass es Testfunktionen gibt und es ist leicht einzusehen, dass der Raum $\mathbf{D}(U)$ eine Unter algebra des Raumes aller Funktionen ist. Darüber hinaus sind partielle Ableitungen von Testfunktionen wieder Testfunktionen. Allgemeiner gilt: jeder Differentialoperator

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n, |\alpha| \leq k} a_\alpha \partial^\alpha$$

mit glatten Koeffizientenfunktionen $a_\alpha : U \rightarrow \mathbb{K}$ definiert eine Abbildung von $\mathbf{D}(U) \rightarrow \mathbf{D}(U)$.

Wir wollen auch über Konvergenz und Stetigkeit auf dem Raum der Testfunktionen sprechen. Die dafür nötige Topologie kommt allerdings nicht von einer Norm, ja noch nicht einmal von einer Metrik. Da wir bisher nicht über allgemeine Topologie gesprochen haben, werden wir hier nur ad hoc die Konvergenz von Folgen von Testfunktionen definieren.

Definition 12.25. Eine Folge $(\varphi_k) \subset \mathbf{D}(U)$ konvergiert gegen $\varphi \in \mathbf{D}(U)$ wenn es eine kompakte Menge $K \subset U$ gibt mit $\text{supp}(\varphi_k) \subset K$ und $\partial^\alpha \varphi_k$ konvergiert gleichmäßig gegen $\partial^\alpha \varphi$ für jeden Multiindex α .

Beispiel 12.26. Für eine beliebige Testfunktion $\varphi \neq 0$ auf \mathbb{R}^n konvergiert $\frac{1}{n}\varphi$ gegen die Nullfunktion, aber nicht die „breitlaufende“ Folge von Funktionen $\varphi_n = \frac{1}{n}\varphi(\frac{1}{n}\cdot)$. Für letztere konvergiert zwar $\partial^\alpha \varphi_n$ gleichmäßig gegen 0 für alle Multiindizes α , es gibt aber keine kompakte Menge, in die sich die Träger aller φ_n einschließen lassen.

Definition 12.27 (Distributionen). Eine Distribution γ ist ein stetiges, lineare Funktional auf $\mathbf{D}(U)$. Das heißt eine lineare Abbildung $\gamma : \mathbf{D}(U) \rightarrow \mathbb{K}$ so, dass $\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma(\varphi_k) = \gamma(\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k)$ für jede konvergente Folge $(\varphi_k) \subset \mathbf{D}(U)$. Wir bezeichnen den Raum der Distributionen auf U mit $\mathbf{D}'(U)$.

Beispiel 12.28. (i) Sei $x \in U$, dann ist

$$\begin{aligned} \delta_x : \mathbf{D}(U) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto \varphi(x) \end{aligned}$$

eine Distribution. Sei $(\varphi_k) \subset \mathbf{D}(U)$ eine gegen φ konvergente Folge. Dann konvergiert insbesondere φ_k gleichmäßig gegen φ und damit

$$\delta_x(\varphi_k) = \varphi_k(x) \rightarrow \varphi(x) = \delta_x(\varphi).$$

(ii) Sei $(a_i)_{i \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{K}$ eine Folge, dann wird durch

$$\gamma(\varphi) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i \varphi(i)$$

eine Distribution in $\mathbf{D}'(\mathbb{R})$ definiert. Zunächst ist die Summe auf der rechten Seite für jedes φ endlich, da $\varphi(i)$ nur für endlich viele $i \in \mathbb{Z}$ von 0 verschieden sein kann. Ist nun (φ_k) eine gegen φ konvergente Folge von Testfunktionen, dann existiert ein kompaktes K , dass die Träger aller φ_k (und damit auch den Träger von φ) enthält. Dann gilt für jedes k

$$\gamma(\varphi_k) = \sum_{i \in \mathbb{Z} \cap K} a_i \varphi_k(i)$$

wobei die Summe endlich ist und die Stetigkeit folgt aus der punktweisen Konvergenz von φ und der Stetigkeit von Addition und skalarer Multiplikation.

(iii) Für $i < n$ und $x \in U$ ist durch

$$\varphi \mapsto \partial_i \varphi(x)$$

ebenfalls eine Distribution gegeben.

(iv) Ist $M \subset U$ eine orientierte k -Mannigfaltigkeit und ω eine k -Form (zum Beispiel Volumenform), dann wird durch

$$\varphi \mapsto \int_M \varphi \omega$$

eine Distribution gegeben. Die Stetigkeit folgt dabei aus dem Satz von Lebesgue.

- (v) Allgemeiner ist für jedes Borel-Maß, also für jedes Maß auf der Borel- σ -Algebra von U , durch

$$\varphi \mapsto \int_U \varphi d\mu$$

eine Distribution gegeben. Die Stetigkeit folgt wieder aus dem Satz von Lebesgue.

Bemerkung 12.29. Der auf dem Raum der Testfunktionen eingeführte Konvergenzbegriff ist sehr strikt, stellt also sehr starke Anforderungen an das Verhalten der Funktionenfolge. Als Konsequenz ist die Forderung nach Stetigkeit der linearen Abbildungen relativ schwach, es ist also leicht diese zu erfüllen und es gibt dadurch viele Distributionen.

Distributionen sollen nun Verallgemeinerungen von Funktionen sein. Dafür ist es nötig, dass wir klassische Funktionen als Distributionen interpretieren können, oder anders ausgedrückt, wir wollen unsere klassischen Funktionen in den Raum der Distributionen einbetten. Das ist nicht für beliebige, aber doch für eine sehr große Klasse von Funktionen möglich.

Definition 12.30. Eine Lebesgue-messbare Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{K}$ heißt lokal integrierbar, falls es für jedes $x \in U$ eine Umgebung V so gibt, dass $f|_V$ auf V integrierbar ist. Wir bezeichnen die Menge aller lokal integrierbar Funktionen mit $\mathbf{L}_{\text{loc}}^1(U)$.

Genau wie in den \mathbf{L}^p -Räumen identifizieren wir auch in $\mathbf{L}_{\text{loc}}^1$ Funktionen die fast überall übereinstimmen.

Satz 12.31. Eine messbare Funktion f ist lokal integrierbar genau dann, wenn f auf jeder kompakten Menge $K \subset U$ integrierbar ist.

Beweis. Falls f auf jeder kompakten Menge integrierbar ist und $x \in U$, dann existiert ein $\epsilon > 0$ so, dass $\overline{B_\epsilon(x)} \subset U$ gilt. Diese Menge ist dann aber eine Umgebung von x auf der, da sie kompakt ist, f integrierbar ist.

Ist andererseits f lokal integrierbar und K kompakt, dann existiert zu jedem $x \in K$ eine Umgebung V_x , auf der f integrierbar ist. Wir können, indem wir die V_x gegebenenfalls verkleinern, annehmen, dass alle V_x offen sind. Dann sind die Mengen $(V_x)_{x \in K}$ eine offene Überdeckung von K und wir können wegen der Kompaktheit eine endliche Teilüberdeckung V_{x_1}, \dots, V_{x_k} auswählen. Dann gilt

$$\int_K |f| d\lambda^n \leq \sum_{i=1}^k \int_{V_{x_i}} |f| d\lambda^n < \infty$$

und f ist über K integrierbar. □

Beispiel 12.32. (i) Jede beschränkte, messbare Funktion ist lokal integrierbar.

(ii) Jede stetige Funktion ist lokal integrierbar.

(iii) Die Funktion $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{|x|}}$ ($x \in \mathbb{R}$) ist lokal integrierbar.

(iv) Die Funktion $x \mapsto \frac{1}{x}$ ($x \in \mathbb{R}$) ist nicht lokal integrierbar.

Satz 12.33. Für $f \in \mathbf{L}_{\text{loc}}^1(U)$ ist

$$\begin{aligned}\tilde{f} : \mathbf{D}(U) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto \int f \varphi d\lambda^n\end{aligned}$$

eine Distribution.

Beweis. Da f lokal integrierbar ist, ist es über den kompakten Träger von φ integrierbar und da φ beschränkt ist, gilt das dann auch für $f\varphi$. Das Integral existiert also. Die Linearität in φ ist offensichtlich. Sei $(\varphi_k) \subset \mathbf{D}(U)$ eine gegen φ konvergente Folge. Dann existiert $K \subset U$ so, dass $\text{supp } \varphi_k \subset K$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ und φ_k konvergiert gleichmäßig gegen φ , das heißt für hinreichend große k ist $\|\varphi_k\|_\infty < \|\varphi\|_\infty + 1$. Insbesondere gilt also $\|\varphi_k\|_\infty \leq C$ für ein $C > 0$. Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}$ auch $|f\varphi_k| \leq Cf \mathbb{1}_K$. Die Funktion auf der rechten Seite ist unabhängig von k und integrierbar und damit folgt mit dem Satz von Lebesgue

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int f \varphi_k d\lambda^n = \int f \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k d\lambda^n = \int f \varphi d\lambda^n$$

also ist \tilde{f} stetig. □

Bemerkung 12.34. (i) Wir können also herkömmliche Funktionen in unserem Raum $\mathbf{D}'(U)$ verallgemeinerter Funktionen wiederfinden. Es ist leicht zu überprüfen, dass die Einbettung $f \mapsto \tilde{f}$ von $\mathbf{L}_{\text{loc}}^1(U)$ in $\mathbf{D}'(U)$ linear ist.

(ii) Die Abbildung ist nicht surjektiv, es gibt also Distributionen, die nicht von Funktionen induziert werden. Ein Beispiel ist die δ -Distribution, die wir hier der Einfachheit halber auf $U = \mathbb{R}^n$ betrachten. Ist nämlich φ eine Testfunktion mit $\varphi(0) \neq 0$, dann konvergiert die Folge $\varphi_k = \varphi(k \cdot)$ punktweise fast überall gegen die Nullfunktion (diese Folge konvergiert nicht gleichmäßig und damit erst recht nicht im Sinne der Konvergenz von Testfunktionen, was hier jedoch nicht von Belang ist). Enthält $B_r(0)$ den Träger von φ , dann gilt für jedes lokal integrierbare f die Ungleichung $|f\varphi_k| \leq |f| \mathbb{1}_{B_r(0)} \|\varphi\|_\infty$ und wir können aus dem Satz von Lebesgue folgern

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{f}(\varphi_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f \varphi_k d\lambda^n = 0.$$

Andererseits gilt $\delta_0(\varphi_k) = \varphi_k(0) = \varphi(0)$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Damit kann also unmöglich $\delta_0 = \tilde{f}$ gelten.

Der Raum der Distributionen enthält also neben den Funktionen weitere Objekte, die „zu singulär“ sind um sich als Funktionen darstellen zu lassen.

(iii) Der Ausdruck

$$\int_U f \varphi d\lambda^n$$

erinnert an das \mathbf{L}^2 -Skalarprodukt, ist jedoch etwas prinzipiell anderes. Die beiden involvierten Funktionen f und φ kommen hier aus ganz unterschiedlichen Räumen, von denen einer (\mathbf{D}) viel kleiner, der andere $(\mathbf{L}_{\text{loc}}^1)$ viel größer als \mathbf{L}^2 ist.

(iv) Schwieriger ist es zu sehen, dass die Abbildung $f \mapsto \tilde{f}$ tatsächlich eine Einbettung, also injektiv, ist. Auf Grund der Linearität ist es ausreichend, zu zeigen dass aus $\tilde{f} = 0$ bereits $f = 0$ (fast überall) folgt. Das ergibt sich aus der folgenden Aussage, die wir in Satz 12.17 wenigstens für stetige f bewiesen haben, für allgemeine f jedoch hier nicht zeigen werden.

Satz 12.35 (Fundamentallemma der Variationsrechnung). Sei $f \in \mathbf{L}_{\text{loc}}^1(U)$ und

$$\int_U f \varphi d\lambda^n = 0$$

für jedes $\varphi \in \mathbf{C}_c^\infty(U)$, dann ist $f = 0$ fast überall.

Ohne Beweis.

Bemerkung 12.36. Sei nun $f : U \rightarrow \mathbb{K}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt für jede Testfunktion φ und für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\int_U (\partial_i f) \varphi d\lambda^n = - \int_U f (\partial_i \varphi) d\lambda^n.$$

Diese Gleichung folgt für $U = \mathbb{R}^n$ aus dem Hauptsatz der Analysis, wie wir in Übungsaufgabe 1 vom Blatt 11 gesehen haben. Für allgemeinere U , können wir mit Lemma 12.18 ein $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}$ wählen, dass auf $\text{supp } \varphi$ in allen Ableitungen mit f übereinstimmt und φ durch 0 zu einer Funktion ρ auf ganz \mathbb{R}^n fortsetzen. Dann gilt, da alle Integranden außerhalb von K ohnehin verschwinden

$$\int_U (\partial_i f) \varphi d\lambda^n = \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_i g) \rho d\lambda^n = - \int_{\mathbb{R}^n} g \partial_i \rho d\lambda^n = - \int_U f (\partial_i \varphi) d\lambda^n.$$

Es ist also egal, ob wir die zur Ableitung einer differenzierbaren Funktion gehörige Distribution auf φ anwenden, oder die zur Funktion selbst gehörige Distribution auf $-\partial_i \varphi$ anwenden. Dadurch wird die folgende Definition motiviert.

Definition 12.37. Sei $\gamma \in \mathbf{D}'(U)$ und $i \in \{1, \dots, n\}$. Wir definieren die i te partielle Ableitung von γ durch die Gleichung

$$(\partial_i \gamma)(\varphi) = \gamma(-\partial_i \varphi).$$

Beispiel 12.38. Sei

$$H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

die Heaviside-Funktion (welcher Wert bei 0 festgelegt wird spielt keine Rolle). Dann gilt für jede Testfunktion $\varphi \in \mathbf{D}(\mathbb{R})$

$$\tilde{H}'(\varphi) = - \int H \varphi' d\lambda = - \int_0^\infty \varphi'(x) dx = \varphi(0) = \delta_0(\varphi).$$

Im Distributionensinne gilt also $\tilde{H}' = \delta_0$.

Bemerkung 12.39. (i) Da die Konvergenz einer Folge von Testfunktionen auch die Konvergenz aller ihrer Ableitungen einschließt, ist das Funktional $\varphi \mapsto -\gamma(\partial_i \varphi)$ tatsächlich stetig. Die Ableitung einer Distribution ist also tatsächlich wieder eine Distribution.

(ii) Der Ableitungsbegriff für Distributionen ist eine echte Erweiterung des klassischen Ableitungsbegriffs, denn falls \underline{f} differenzierbar ist, dann gilt auf Grund der vorhergehenden Bemerkung $\partial_i \tilde{f} = \partial_i f$.

(iii) Wir haben Ableitungen von Distributionen definiert, indem wir die Ableitung „auf die Testfunktion verschieben“. Mit der selben Strategie lassen sich auch eine Reihe weiterer interessanter Strukturen auf Distributionen verallgemeinern, die zunächst nur für Testfunktionen definiert sind.

(iv) Da jede $\mathbf{L}_{\text{loc}}^1$ -Funktion einer Distribution entspricht haben wir damit insbesondere Ableitungen für eine sehr große Klasse von Funktionen definiert. Der Nachteil ist natürlich, dass diese Ableitungen im Allgemeinen keine Funktionen mehr sein werden. Falls eine Funktion $f \in \mathbf{L}_{\text{loc}}^1(U)$ aber eine distributionelle Ableitung besitzt, die selbst von einer Funktion induziert wird, falls es also eine Funktion $g \in \mathbf{L}_{\text{loc}}^1(U)$ gibt, so dass für jede Testfunktion φ

$$- \int_U f \partial_i \varphi d\lambda^n = \int_U g \varphi d\lambda^n$$

gilt, dann sagen wir f ist schwach differenzierbar und nennen $\partial_i f := g$ ihre schwache Ableitung. Auf Grund des Fundamentallemmas ist so eine schwache Ableitung, falls sie existiert, eindeutig bestimmt.

Schwach differenzierbare Funktionen und die zugehörigen Räume, sogenannte Sobolev-Räume, spielen für die Theorie der partiellen Differentialgleichungen eine große Rolle.

Falls eine Funktion klassisch differenzierbar ist, dann ist sie auch schwach differenzierbar und wegen der vorhergehenden Bemerkung stimmen die klassische und die schwache Ableitung überein.

(v) Da die Ableitung einer Distribution wieder eine Distribution ist, kann jede Distribution prinzipiell beliebig oft abgeleitet werden. In Bezug auf Ableitungen verhält sich unser Raum verallgemeinerter Funktionen also deutlich besser als die klassischen Funktionen. Andererseits gibt es Operationen, die wir auf unsere verallgemeinerten Funktionen nicht ohne Weiteres übertragen können.

- Distributionen können nicht punktweise ausgewertet werden, es ergibt also keinen Sinn zu fragen, welchen Wert eine Distribution an einem Punkt annimmt. Vielmehr ist der Wert einer Distribution auf φ ein „gewichtetes Mittel“.

Dieses Verhalten ist nicht völlig neu. Auch für Funktionen der \mathbf{L}^p -Räume (und $\mathbf{L}_{\text{loc}}^1$) ergibt eine Auswertung an einem Punkt keinen Sinn.

Selbst wenn unsere Distribution von einer Funktion induziert wurde, die wir punktweise auswerten können (also von einer stetigen Funktion), dann können und werden die distributionellen Ableitungen im Allgemeinen keine Funktionen sein (außer wenn die Funktion klassisch differenzierbar ist) und lassen sich dementsprechend nicht punktweise auswerten.

- Der Raum der Distributionen ist zwar ein Vektorraum, das Produkt von Funktionen lässt sich jedoch nicht zu einem für alle Distributionen definierten Produkt verallgemeinern. Wir können Distributionen also im Allgemeinen nicht multiplizieren.

Was wir jedoch definieren können, ist das Produkt einer Distribution mit einer glatten Funktion: Sei $\rho \in \mathbf{C}^\infty(U)$ und $\gamma \in \mathbf{D}'(U)$, dann setzen wir

$$(\rho\gamma)(\varphi) := \gamma(\rho\varphi)$$

für beliebiges $\varphi \in \mathbf{D}(U)$. Der Leser überzeuge sich, dass diese Definition des Produktes das Produkt für Funktionen verallgemeinert, dass also $\rho\tilde{f} = \widetilde{\rho f}$ für $f \in \mathbf{L}_{\text{loc}}^1$ gilt.

- Wir können Distributionen nicht auf beliebige Teilmengen einschränken. Ist aber $V \subset U$ eine offene Teilmenge, dann kann jedes $\varphi \in \mathbf{D}(V)$ glatt durch 0 zu einer Funktion $\varphi_0 \in \mathbf{D}(U)$ fortgesetzt werden (Warum?). Damit können wir für jede Distribution $\gamma : \mathbf{D}'(U)$ eine Einschränkung $\gamma|_V \in \mathbf{D}'(V)$ durch

$$\gamma|_V(\varphi) = \gamma(\varphi_0)$$

definieren.

- Wir können Distributionen im Allgemeinen nicht „hintereinanderausführen“. Auch dieses Problem besteht bereits bei $\mathbf{L}_{\text{loc}}^1$ -Funktionen.

Definition 12.40. Sei

$$D = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n, |\alpha| \leq k} a_\alpha \partial^\alpha$$

ein Differentialoperator der Ordnung k wobei $a_\alpha \in \mathbb{K}$ für alle α (Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten). Wir definieren einen neuen Differentialoperator durch

$$D^\dagger = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n, |\alpha| \leq k} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha \partial^\alpha.$$

Bemerkung 12.41. (i) Da partielle Ableitungen und linearkombinationen auch für Distributionen definiert sind, können wir solche Differentialoperatoren nun auch auf Distributionen anwenden. Es ist leicht zu sehen, dass dann für eine Distribution $\gamma \in \mathbf{D}'(U)$ und eine Testfunktion $\varphi \in \mathbf{D}(U)$ gilt

$$(D\gamma)(\varphi) = \gamma(D^\dagger\varphi).$$

- (ii) Die Menge aller Differentialoperatoren der obigen Form auf dem Raum $\mathbf{C}^\infty(U)$ ist eine kommutative Algebra. Die Abbildung $D \mapsto D^\dagger$ ist dann ein Algebrenisomorphismus von dieser Algebra auf sich selbst und es gilt $D^{\dagger\dagger} = D$.
- (iii) Sei nun D ein Differentialoperator der Ordnung k und $\rho \in \mathbf{L}_{\text{loc}}^1(U)$ eine Funktion. Wir betrachten die partielle Differentialgleichung $Df = \rho$. Ist nun $\gamma \in \mathbf{D}'(U)$ eine Distribution und es gilt $D\gamma = \tilde{\rho}$, dann nennen wir γ eine Lösung der Gleichung im Distributionensinne oder eine distributionelle Lösung. Nach den obigen Definitionen ist das genau dann der Fall, wenn für jede Testfunktion φ gilt

$$\gamma(D^\dagger\varphi) = \int_U \rho\varphi d\lambda^n.$$

Lassen wir Distributionen als Lösungen zu, dann können wir natürlich auch noch etwas allgemeiner nach Lösungen für die Gleichung $D\gamma = \sigma$ fragen, wobei σ eine beliebige, als bekannt vorausgesetzte, Distribution ist.

Wird die distributionelle Lösung von einer Funktion $g \in \mathbf{L}_{\text{loc}}^1(U)$ induziert, gilt also $D\tilde{g} = \tilde{\rho}$, dann nennen wir g eine schwache Lösung der Gleichung $Df = \rho$. Wir wissen bereits, dass die Ableitung von Distributionen mit der klassischen Ableitung übereinstimmt, falls letztere existiert.

Ist nun $g \in \mathbf{C}^k(U)$ eine schwache Lösung, dann gilt für jede Testfunktion φ

$$\begin{aligned} 0 &= (D\tilde{g} - \tilde{\rho})(\varphi) = \int g D^\dagger\varphi d\lambda^n - \int \rho\varphi d\lambda^n \\ &= \int (Dg)\varphi d\lambda^n - \int \rho\varphi d\lambda^n = \int (Dg - \rho)\varphi d\lambda^n, \end{aligned}$$

wobei wir wiederholt Bemerkung 12.36 genutzt haben um den Differentialoperator von φ auf g zu „verschieben“. Aus dem Fundamentallemma folgt dann: Eine mindestens k mal differenzierbare Funktion ist eine schwache Lösung genau dann, wenn sie eine klassische Lösung ist.

- (iv) Indem wir den Raum potentieller Lösungen von Differentialgleichungen erweitern, vereinfachen wir die Suche nach solchen Lösungen. Ob schwache oder distributionelle Lösungen von Differentialgleichungen Sinn ergeben, das heißt also ob sie als Lösungen des physikalischen Problems, welches zu der Differentialgleichung geführt hat, in Frage kommen, lässt sich natürlich nicht mathematisch beantworten sondern hängt vom betrachteten Modell ab. Unabhängig davon können solche Lösungen unter bestimmten Voraussetzungen jedoch auch als mathematisches Werkzeug zur Konstruktion von klassischen Lösungen dienen, wie wir weiter unten sehen werden.
- (v) Mit etwas mehr Aufwand können die obigen Begriffe auf Differentialoperatoren mit glatten Koeffizienten und entsprechende partielle Differentialgleichungen verallgemeinert werden. Wir beschränken uns hier aber auf den Fall konstanter Koeffizienten.

Beispiel 12.42. Wir betrachten die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}f = \rho.$$

Falls ρ stetig ist, dann wissen wir aus dem Hauptsatz der Analysis, dass die Lösungen dieser Gleichung genau die Stammfunktionen von ρ sind. Für unstetiges aber integrierbares ρ liegt die Vermutung nahe, es dennoch mit der Funktion

$$f(x) := \int_{-\infty}^x \rho(t)dt = \int_{\mathbb{R}} \rho(t)H(t-x)dt$$

zu versuchen (H bezeichnet die Heaviside-Funktion). Diese Funktion ist stetig (Warum?), wird aber im Allgemeinen nicht (klassisch) differenzierbar sein. Betrachten wir nun ihre Ableitung im Distributionensinne also für eine Testfunktion φ

$$\begin{aligned} \tilde{f}'(\varphi) &= - \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)dx = - \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \rho(t)H(t-x)\varphi'(x)dt dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \rho(t) \int_{\mathbb{R}} H(t-x)\varphi'(x)dx dt = - \int_{\mathbb{R}} \rho(t) \int_{\mathbb{R}} H(s)\varphi'(t-s)ds dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \rho(t)\tilde{H}'(\varphi(t-\cdot))dt = \int_{\mathbb{R}} \rho(t)\varphi(t)dt = \tilde{\rho}(\varphi). \end{aligned}$$

Dabei haben wir Beispiel 12.38 genutzt. Die Leserin überprüfe noch, warum die Vertauschung der Integrationsreihenfolge oben gerechtfertigt war. Damit ist gezeigt, dass f eine schwache Lösung der Differentialgleichung ist.

Falls ρ stetig ist, dann stimmt die nach dem obigen Verfahren erhaltene Lösung mit der klassische Lösung überein.

Bemerkung 12.43. Die Poissongleichung $\Delta f = \rho$ in drei Dimensionen beschreibt, unter anderem, das Potential eines elektrischen Feldes, welches durch die Ladungsdichte ρ hervorgerufen wird. Ein mögliches Verfahren um Lösungen für die Gleichung zu konstruieren

sieht folgendermaßen aus: Das Potential einer Punktladung im Koordinatenursprung ist durch

$$\kappa(x) = -\frac{1}{O(1) \|x\|}$$

gegeben, wobei $O(1)$ die Oberfläche der Einheitssphäre bezeichnet. Wir werden weiter unten zeigen, dass diese Funktion, oder vielmehr die ihr zugeordnete Distribution, eine Lösung für die Gleichung $\Delta \tilde{\kappa} = \delta_0$ ist.

Da die Koeffizienten der Gleichung konstant sind, erhalten wir das Potential für eine Punktladung am Ort z als $\kappa(\cdot - z)$. Für elektromagnetische Felder gilt das „Superpositionsprinzip“, das heißt die von unterschiedlichen Quellen erzeugten Felder überlagern sich störungsfrei. Der mathematische Grund dafür ist lediglich die Linearität der zu lösenden Gleichung. Für eine gegebene Ladungsdichte ρ stellen wir uns nun vor, dass die in einem kleinen Volumen dV am Ort z befindliche Ladung in guter Näherung das Potential einer Punktladung also $\kappa(\cdot - z)\rho(z)dV$ erzeugt. Um das von ρ erzeugte Feld zu erhalten, müssen wir nun alle diese Felder „aufsummieren“ — oder integrieren — und erhalten

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \kappa(x - z)\rho(z)d\lambda^3(z).$$

Die Funktion κ ist hier ein Beispiel einer sogenannten Fundamentallösung. Wir wollen nun zeigen, dass das beschriebene Verfahren nicht nur tatsächlich zu einer Lösung der Poissonsgleichung führt, sondern wesentlich allgemeiner angewandt werden kann.

Bemerkung 12.44. Sei D ein Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten, das heißt

$$D = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n, |\alpha| \leq k} a_\alpha \partial^\alpha$$

mit $a_\alpha \in \mathbb{K}$. Wir betrachten nun die partielle Differentialgleichung $Df = \rho$ für eine gegebene Funktion ρ auf \mathbb{R}^n , für das Beispiel $D = \Delta$ erhalten wir die Poissonsgleichung. Wir werden die rechte Seite ρ der Gleichung als Quellterm bezeichnen, da ρ in der Poissonsgleichung diese Interpretation hat. Im Allgemeinen, kann die Interpretation der Funktion ρ natürlich anders sein.

Wir nehmen nun an, dass wir eine Lösung für einen speziellen Quellterm, nämlich die δ -Distribution gefunden haben und das diese Lösung von einer lokal integrierbaren Funktion induziert wird. Es sei also $\kappa : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}$ eine Funktion so, dass $D\tilde{\kappa} = \delta_0$ gilt. Eine solche Funktion κ wird als Fundamentallösung oder Greensche Funktion des Differentialoperators bezeichnet. Ausgeschrieben bedeutet die Gleichung, dass für jedes $\varphi \in \mathbf{D}(\mathbb{R}^n)$ gelten muss

$$\int \kappa(z)D^\dagger \varphi(z)d\lambda^n(z) = \varphi(0).$$

Wir können nun, zunächst formal, die Funktion

$$f(x) = \int \rho(y) \kappa(x - y) d\lambda^n(y) = \int \rho(x - z) \kappa(z) d\lambda^n(z)$$

definieren und für eine Testfunktion φ die folgende Rechnung anstellen

$$\begin{aligned} D\tilde{f}(\varphi) &= \tilde{f}(D^\dagger \varphi) = \int f(x) D^\dagger \varphi(x) d\lambda^n(x) = \int \int \rho(y) \kappa(x - y) D^\dagger \varphi(x) d\lambda^n(y) d\lambda^n(x) \\ &= \int \rho(y) \int \kappa(x - y) D^\dagger \varphi(x) d\lambda^n(x) d\lambda^n(y) \\ &= \int \rho(y) \int \kappa(z) D^\dagger \varphi(z + y) d\lambda^n(z) d\lambda^n(y) = \int \rho(y) \varphi(y) d\lambda^n(y) = \tilde{\rho}(\varphi). \end{aligned}$$

Wir haben also gezeigt, dass f eine schwache Lösung der Differentialgleichung $Df = \rho$ ist.

Diese Rechnung ist zunächst nur formal, da es keine Garantie gibt, dass die Integrale existieren, f lokal integrierbar ist und dass die Vertauschung der Integrationsreihenfolge gerechtfertigt ist. Es gibt verschieden zusätzliche Voraussetzungen, unter denen die obige Rechnung einen tatsächlichen mathematischen Sinn erhält. Generell gilt: je besser sich die Fundamentallösung κ verhält, um so schwächer können die Bedingungen an den Quellterm ρ sein.

Wir wollen hier beispielhaft annehmen, dass κ lokal integrierbar und ρ beschränkt ist und kompakten Träger hat. In diesem Fall gilt $\rho \leq \|\rho\|_\infty \mathbb{1}_{\text{supp } \rho}$ und daher existiert das Integral, welches wir oben zur Definition von f verwendet haben für jedes $x \in \mathbb{R}^n$. Es sei nun K eine kompakte Menge. Gilt für $x, z \in \mathbb{R}^n$ sowohl $x - z \in \text{supp } \rho$ als auch $x \in K$, dann ist $z \in K - \text{supp } \rho$. Für $z \notin K - \text{supp } \rho$ kann also niemals gleichzeitig $x - z \in \text{supp } \rho$ und $x \in K$ gelten. Damit folgt die Abschätzung

$$\int |\rho(x - z)| \mathbb{1}_K(x) d\lambda^n(x) \leq \|\rho\|_\infty \lambda^n(K) \mathbb{1}_{K - \text{supp}(\rho)}(z),$$

wobei die Menge $K - \text{supp}(\rho)$ eine kompakte Menge ist (Übung).

Wir erhalten nun einerseits für jedes kompakte K mit dem Satz von Tonelli

$$\begin{aligned} \int_K |f(x)| d\lambda^n(x) &\leq \int \int |\rho(x - z)| |\kappa(z)| \mathbb{1}_K(x) d\lambda^n(z) d\lambda^n(x) \\ &\leq \|\rho\|_\infty \lambda^n(K) \int |\kappa(z)| \mathbb{1}_{K - \text{supp } \rho}(z) d\lambda^n(z) < \infty, \end{aligned}$$

die Funktion f ist also lokal integrierbar und die Distribution \tilde{f} damit wohldefiniert. Andererseits gilt

$$\begin{aligned} &\int \int |\rho(y)| |\kappa(x - y)| \left| D^\dagger \varphi(x) \right| d\lambda^n(y) d\lambda^n(x) \\ &\leq \left\| D^\dagger \varphi \right\|_\infty \int \int |\rho(x - z)| |\kappa(z)| \mathbb{1}_{\text{supp } \varphi}(x) d\lambda^n(z) d\lambda^n(x). \end{aligned}$$

Da wir eben gezeigt hatten, dass der letzte Ausdruck endlich ist, ist die Funktion $|\rho(y)| |\kappa(x-y)| |D^\dagger \varphi(x)|$ integrierbar über $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ und damit die Anwendung des Satzes von Fubini in der Rechnung weiter oben gerechtfertigt.

Falls eine lokal integrierbare Fundamentallösung für den entsprechenden Operator bekannt ist, beweisen die obigen Überlegungen also die Existenz von mindestens schwachen Lösungen der Differentialgleichung $Df = \rho$ für beschränkte Quellterme ρ mit kompaktem Träger.

Bemerkung 12.45. (i) Fundamentallösungen sind im Allgemeinen nicht eindeutig. Vielmehr können wir zu jeder Fundamentallösung eine beliebige Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung $Dg = 0$ hinzuaddieren und erhalten wieder eine Fundamentallösung. Diese Freiheit bei der Wahl von Fundamentallösungen lässt sich nutzen um beispielsweise Anfangs und/oder Randbedingungen zu erfüllen.

- (ii) Das Finden von Fundamentallösungen kann häufig durch Symmetrieüberlegungen signifikant vereinfacht werden, da die δ -Distribution ein hohes Maß an Symmetrie aufweist.
- (iii) Das Konzept der Fundamentallösungen kann auch für den Spezialfall gewöhnlicher Differentialgleichungen verwendet werden. Das einfachste Beispiel dafür haben wir in Beispiel 12.38 gesehen.
- (iv) Stellen wir stärkere Voraussetzungen an den Quellterm ρ , zum Beispiel $\rho \in \mathbf{C}_c^k(\mathbb{R}^n)$, dann erhalten wir auch „bessere“ Lösungsfunktionen. Im betrachteten Beispiel können wir dann Korollar 8.55 benutzen, um zu zeigen, dass \tilde{f} mindestens k mal stetig differenzierbar ist. In diesem Fall stimmen aber $D\tilde{f}$ und $\tilde{D}f$ überein und wir erhalten, dass die obige Funktion f eine klassische Lösung der Differentialgleichung ist.
- (v) Die zur Definition der Lösungsfunktion f benutzte Konstruktion heißt Faltung von ρ und κ :

$$\rho * \kappa(x) = \int \rho(y) \kappa(x-y) d\lambda^n(y) = \int \rho(x-z) \kappa(z) d\lambda^n(z).$$

Wir haben oben gezeigt, dass die Faltung zweier Funktionen existiert, wenn eine der Funktionen lokal integrierbar ist und die andere beschränkt mit kompaktem Träger ist. Auch falls beide Funktionen integrierbar sind existiert die Faltung (Warum?).

- (vi) Die Definition der Faltung lässt sich auch auf (bestimmte) Distributionen erweitern. Damit können wir gegebenenfalls Lösungen für die Gleichung $D\gamma = \rho$ konstruieren selbst dann, wenn die Fundamentallösung κ und der Quellterm ρ keine Funktionen sondern lediglich Distributionen sind.
- (vii) Durch die obigen Konstruktion können wir nun einen Integralausdruck für Lösungen der Gleichung $Df = \rho$ aufschreiben, und so insbesondere die Existenz von zumindest schwachen Lösungen beweisen, wenn wir eine Fundamentallösung für den

entsprechenden Differentialoperator finden. In diesem Sinne betrachten wir die Differentialgleichung $Df = \rho$ häufig als „gelöst“, wenn eine entsprechende Greensche Funktion gefunden wurde. Für Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten existieren nach dem Satz von Malgrange-Ehrenpreis immer Fundamentallösungen.

Wir wollen hier noch Fundamentallösungen für die Laplace-Operatoren bestimmen. Auf Grund der Rotationssymmetrie des Problems, können diese Funktionen unter Verwendung von Kugelkoordinaten also Lösungen einer gewöhnlichen Differentialgleichung gefunden werden. Wir werden diesen Weg hier nicht gehen, sondern lediglich nachweisen, dass bestimmte Funktionen Fundamentallösungen sind.

Satz 12.46. *Sei $n > 2$. Die Funktion*

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{\|x\|^{n-2}}$$

ist lokal integrierbar und erfüllt $\Delta \tilde{f} = -(n-2)O(1)\delta_0$. Insbesondere ist eine Fundamentallösung $-\frac{f}{(n-2)O(1)}$ eine Fundamentallösung für den Laplace-Operator auf \mathbb{R}^n .

Beweis. Wir stellen zunächst fest, dass die Funktion f lokal integrierbar ist. Für $x \neq 0$ ist die Funktion stetig und damit lokal beschränkt, interessant ist also lediglich der Koordinatenursprung. Das Integral von f beispielsweise über die Einheitskugel lässt sich nach Transformation auf Kugelkoordinaten explizit ausrechnen. Für uns ist hier jedoch eine Abschätzung ausreichend. Sei dazu $U_k = B_{\frac{1}{k}}(0) \setminus B_{\frac{1}{k+1}}(0)$ eine Kugelschale. Auf dieser Kugelschale ist der maximale Wert den f annimmt $(k+1)^{n-2}$ und wir können abschätzen

$$\begin{aligned} \int_{U_k} f d\lambda^n &\leq (k+1)^{n-2} \lambda^n(U_k) \leq (k+1)^{n-2} \lambda^n(B_{\frac{1}{k}}(0)) = (k+1)^{n-2} \lambda^n(B_1(0)) \frac{1}{k^n} \\ &= \lambda^n(B_1(0)) \frac{1}{k^2} \left(\frac{k+1}{k} \right) \leq \lambda^n(B_1(0)) 2^n \frac{1}{k^2}. \end{aligned}$$

Die rechts stehende Folge ist summierbar, daher gilt

$$\int_{B_1(0)} f d\lambda^n = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{U_k} f d\lambda^n < \infty,$$

die Funktion f ist also auch über eine Umgebung von 0 integrierbar.

Eine direkte Rechnung ergibt nun auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (Übung)

$$\text{grad } f = -(n-2) \frac{x}{\|x\|^n} \text{ sowie } \Delta f = 0.$$

Sei nun $\varphi \in \mathbf{D}(\mathbb{R}^n)$ eine Testfunktion. Da $\Delta^\dagger = \Delta$ gilt, wollen wir

$$(\Delta \tilde{f})(\varphi) = \int f \Delta \varphi d\lambda^n$$

berechnen. Wir schließen nun den Träger von φ in einer hinreichend großen Kugel $B_r(0)$ ein und betrachten für $0 < \epsilon < r$ zunächst die Kugelschalen $U_\epsilon = B_r(0) \setminus \overline{B_\epsilon(0)}$. Auf einer Umgebung von U_ϵ sind sowohl f als auch φ glatte Funktionen und wir können daher die Greensche Formel Satz 12.19 anwenden

$$\int_{U_\epsilon} (f \Delta \varphi - \varphi \Delta f) d\lambda^n = \int_{\partial U_\epsilon} (f \operatorname{grad} \varphi - \varphi \operatorname{grad} f) d\sigma \quad (12.1)$$

$$= \int_{S_\epsilon(0)} (f(x) \left\langle \operatorname{grad} \varphi(x) \middle| -\frac{x}{\|x\|} \right\rangle - \varphi(x) \left\langle \operatorname{grad} f(x) \middle| -\frac{x}{\|x\|} \right\rangle) \omega. \quad (12.2)$$

Für die zweite Umformung haben wir ausgenutzt, dass der Rand ∂U_ϵ aus zwei Teilen besteht, einer kleinen Sphäre $S_\epsilon(0)$ und einer großen Sphäre $S_r(0)$, von denen letztere jedoch nicht zum Ergebnis beiträgt, da hier φ und alle ihre Ableitungen verschwinden. Wir stellen fest, dass der zweite Term der linken Seite verschwindet und wollen nun untersuchen, was im Grenzwert $\epsilon \rightarrow 0$ mit den anderen Termen passiert. Außerdem haben wir das Oberflächenintegral mit Bemerkung 12.10 umgeschrieben (Die Leserin überzeuge sich, dass die gewählte Orientierung des Normalenvektorfeldes korrekt ist).

Wir stellen nun fest, dass der zweite Term der linken Seite verschwindet und werden untersuchen, was mit den anderen Termen im Grenzfall $\epsilon \rightarrow 0$ geschieht. Zunächst gilt $f \Delta \varphi \mathbb{1}_{U_\epsilon} \leq \|\Delta \varphi\|_\infty f \mathbb{1}_{B_1(0)}$. Wie wir oben gesehen haben, ist diese Funktion integrierbar und daher konvergiert die linke Seite von (12.1) gegen

$$\int_{B_r(0)} f \Delta \varphi d\lambda^n = \int f \Delta \varphi d\lambda^n.$$

Der Integrand des ersten Termes der rechten Seite von (12.1) lässt sich mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung wie folgt abschätzen

$$|f| \left| \left\langle \operatorname{grad} \varphi \middle| \frac{x}{\|x\|} \right\rangle \right| \leq f \|\operatorname{grad} \varphi\| \leq f \|\|\operatorname{grad} \varphi\|\|_\infty.$$

Nach Voraussetzung ist $\|\operatorname{grad} \varphi\|$ eine stetige Funktion mit kompaktem Träger und der etwas merkwürdig aussehende Term auf der rechten Seite daher endlich. Da f auf der Sphäre $S_\epsilon(0)$ den konstanten Wert $\frac{1}{\epsilon^{n-2}}$ annimmt und die Oberfläche dieser Sphäre durch $O(\epsilon) = O(1)\epsilon^{n-1}$ gegeben ist, gilt

$$\left| \int_{S_\epsilon(0)} f \left\langle \operatorname{grad} \varphi \middle| -\frac{x}{\|x\|} \right\rangle \omega \right| \leq \|\|\operatorname{grad} \varphi\|\|_\infty \frac{1}{\epsilon^{n-2}} O(1) \epsilon^{n-1} = O(1) \|\|\operatorname{grad} \varphi\|\|_\infty \epsilon,$$

der erste Randterm konvergiert für $\epsilon \rightarrow 0$ also gegen 0.

Weiter gilt

$$\int_{S_\epsilon(0)} \left\langle \operatorname{grad} f(x) \middle| -\frac{x}{\|x\|} \right\rangle \omega = \int_{S_\epsilon(0)} \frac{(n-2)}{\|x\|^{n-1}} \omega = \frac{n-2}{\epsilon^{n-1}} O(\epsilon) = (n-2) O(1).$$

Auf Grund der Stetigkeit von φ , existiert für jedes $\delta > 0$ ein hinreichend kleines $\epsilon > 0$ so, dass auf $S_\epsilon(0)$ gilt

$$\varphi(0) - \delta \leq \varphi \leq \varphi(0) + \delta.$$

Multiplizieren wir die Ungleichungen mit $\left\langle \left| \operatorname{grad} f(x) \right| - \frac{x}{\|x\|} \right\rangle$ und integrieren über $S_\epsilon(0)$, dann ergibt sich

$$(\varphi(0) - \delta)(n - 2)O(1) \leq \int_{S_\epsilon(0)} \varphi(x) \left\langle \left| \operatorname{grad} f(x) \right| - \frac{x}{\|x\|} \right\rangle \omega \leq (\varphi(0) + \delta)(n - 2)O(1).$$

Mit anderen Worten konvergiert der zweite Randterm für $\epsilon \rightarrow 0$ gegen $(n - 2)O(1)\varphi(0)$, was den Beweis beendet. \square

Bemerkung 12.47. (i) Wie bereits erwähnt, sind Fundamentallösungen nicht eindeutig. Damit ergibt sich die Frage ob wir oben die richtige Fundamentallösung für den Laplace-Operator gefunden haben oder — besser ausgedrückt — für welches konkrete Problem die obige Lösung die richtige ist. Es ist leicht einzusehen, dass die obigen Fundamentallösungen $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = 0$ erfüllen. Es folgt, dass für eine beschränkte „Ladungsdichte“ ρ mit kompaktem Träger dann auch die Faltung $\rho * f$ im unendlichen Verschwindet (Übung).

- (ii) Nehmen wir nun die Ergebnisse von Bemerkung 12.44, Satz 12.46 zusammen, dann haben wir den folgenden Existenzsatz bewiesen: Sei ρ eine beschränkte, messbare Funktion mit kompaktem Träger, dann hat die Poissongleichung $\Delta f = \rho$ eine schwache Lösung, die den „Randbedingungen“ $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = 0$ genügt.

Insbesondere ist davon der Fall des (von physikalisch sinnvollen Ladungs- oder Massendichten erzeugten) elektrostatischen beziehungsweise Gravitationspotentials im ansonsten leeren Raum abgedeckt.

Setzen wir zusätzlich voraus, dass $\rho \in \mathbf{C}^2(\mathbb{R}^n)$ liegt, dann erhalten wir sogar eine klassische Lösung und nach Aufgabe 3 vom Blatt 12 ist diese eindeutig.

- (iii) Fundamentallösungen für den Laplace-Operator lassen sich auch für $n = 2$ ($x \mapsto C \ln(\|x\|)$) und $n = 1$ ($x \mapsto C|x|$) angeben.

Bemerkung 12.48. Wir wollen nun noch etwas über andere Randbedingungen sprechen. Sei dazu U eine offene Menge und D wieder ein Differentialoperator. Wir nehmen nun an, dass wir die translationsinvariante Fundamentallösung κ für D bereits kennen. Diese ist uns jedoch nicht direkt von Nutzen, da sie und die daraus abgeleiteten Lösungen vermutlich nicht die geforderten Randbedingungen erfüllen.

Die Kenntnis dieser Fundamentallösung liefert uns jedoch eine große Anzahl an Lösungen der homogenen Gleichung $Df = 0$ auf U , denn falls $y \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{U}$ liegt, dann ist die Funktion $\kappa(\cdot - y)$ auf U eine Lösung dieser homogenen Gleichung. Wir erhalten also Lösungen dieser homogenen Gleichung auf U , indem wir virtuelle Quellen außerhalb von U positionieren. Allgemeiner gilt, falls ρ_v ein virtueller Quellterm ist, der außerhalb von

U liegt, das heißt, dass $\text{supp } \rho_v$ eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^n \setminus \overline{U}$ ist, dann können wir setzen

$$f_v(x) = \int \rho_v(z) \kappa(x - z) d\lambda^n(z).$$

Wir wissen bereits, dass für diese Funktion gilt $D\tilde{f} = \tilde{\rho}_v$. Ist φ nun eine Testfunktion mit kompaktem Träger in U , dann erhalten wir

$$(D\tilde{f})(\varphi) = \tilde{\rho}_v(\varphi) = \int \rho_v \varphi d\lambda^n = 0,$$

die Funktion f_h ist also auf U eine schwache Lösung der homogenen Gleichung $Df = 0$.

Wir an, dass die Menge aller Funktionen, die die Randbedingungen erfüllen, ein Vektorraum V ist. Das ist zum Beispiel für Randbedingungen der Form $f|_{\partial U} = 0$ der Fall. Wir suchen nun Fundamentallösungen, die zusätzlich die Randbedingungen erfüllen. Dadurch ist das Problem natürlich nicht mehr verschiebungssymmetrisch, es ist also nicht ausreichend eine Fundamentallösung für eine Punktquelle an einem Ort zu finden und diese dann zu verschieben, sondern wir müssen für jeden Ort der Punktquelle eine andere Fundamentallösung finden, die zusätzlich die geforderten Randbedingungen erfüllt. Wir suchen also eine Funktion $G(x, y)$ so, dass für jedes $y \in U$ gilt $DG(\cdot, y) = \delta_y$ und $G(\cdot, y) \in V$. Falls wir eine solche Greensche Funktion finden, dann erhalten wir durch

$$f(x) = \int \rho(y) G(x, y) d\lambda^n(y)$$

eine schwache Lösung für die Gleichung $Df = \rho$.

Betrachten wir nun nochmal die Gleichung $D\gamma = \delta_y$. Sind γ_1 und γ_2 verschiedene Lösungen dieser Gleichung, dann erfüllt ihre Differenz offenbar $D(\gamma_1 - \gamma_2) = 0$, also die zu D gehörige homogene Differentialgleichung, für welche wir oben eine Vielzahl an Lösungen gefunden haben. Eine Möglichkeit um eventuell die Greensche Funktion $G(x, y)$ zu konstruieren sieht also wie folgt aus: Für eine Punktquelle an $y \in U$ versuchen wir virtuelle Punktquellen (in der Elektrostatik als Spiegelladungen bezeichnet) oder eine virtuelle Quellenverteilung ρ_v außerhalb von U so zu platzieren, dass $\kappa(\cdot - y) + f_v$ die Randbedingungen erfüllt. Dabei hängt ρ_v und damit f_v natürlich im Allgemeinen von y ab.

Wir haben uns oben keine Gedanken über die Existenz von Integralen und ähnliche Details gemacht. Um mit dem obigen Verfahren die Existenz von Lösungen zu beweisen, muss das natürliche nachgeholt werden, was jedoch im Allgemeinen erst bei Kenntnis der konkreten Greenschen Funktion möglich ist. Außerdem ist es bei schwachen oder distributionellen Lösungen im Allgemeinen nicht möglich, diese oder ihre Ableitungen auf den Rand $\partial(U)$ einzuschränken. Deshalb muss dann genauer darüber nachgedacht werden, was die Erfüllung der Randbedingungen für solche Funktionen eigentlich bedeuten soll.

Beispiel 12.49. Als Beispiel für das oben beschriebene Verfahren betrachten wir eine Ladungsverteilung ρ im Halbraum neben einer leitenden unendlich ausgedehnte Ebene,

welche wir hier als die y - z -Ebene annehmen wollen. Die zu lösende Gleichung ist also die Poissongleichung $\Delta f = \rho$, die Teilmenge $U = (-\infty, 0) \times \mathbb{R}^2$ und als Randbedingungen fordern wir, dass $\text{grad } f$ in jedem Punkt senkrecht auf ∂U steht (andernfalls würde das elektrische Feld Ladungen in der leitenden Ebene so lange verschieben, bis das der Fall ist). Es ist leicht einzusehen, dass die Menge aller diese Randbedingungen erfüllenden Funktionen einen Vektorraum bildet.

Wir suchen nun zunächst nach der passenden Greenschen Funktion. Dazu sei $\kappa(x) = -(O(1) \|x\|)^{-1}$ das Coulomb-Potential und $S(x_1, x_2, x_3) = (-x_1, x_2, x_3)$ die Spiegelung an der y - z -Ebene. für jedes $y \in U$ betrachten wir

$$G(x, y) = \kappa(x - y) - \kappa(x - S(y)) = \kappa(x - y) - \kappa(S(x) - y).$$

Anschaulich bringen wir also am Spiegelpunkt von y eine virtuelle Punktladung umgekehrten Vorzeichens an. Es lässt sich nun leicht nachrechnen, dass die Funktion $G(x, y)$ die geforderten Randbedingungen erfüllt, es folgt aber auch unmittelbar aus Symmetrieüberlegungen (Warum?).

Eine schwache Lösung für $\Delta f = \rho$ können wir also wie folgt aufschreiben

$$f(x) = \int_U \rho(y)(\kappa(x - y) - \kappa(x - S(y))) d\lambda^3(y) = \int_U (\rho(y) - \rho(S(y))) \kappa(x - y) d\lambda^3(y).$$

Wir wissen bereits, dass das obige Integral konvergiert, falls ρ beschränkt ist und kompakten Träger hat, da dann auch $\rho - \rho \circ S$ beschränkt ist und kompakten Träger hat. Aus diesem Argument geht natürlich noch nicht die Eindeutigkeit der Lösung hervor.

Wir haben oben physikalische Terminologie benutzt um das Geschehen zu beschreiben. Erhalten haben wir aber eine Aussage über die Existenz von Lösungen eines speziellen Randwertproblems, welche von der physikalischen Interpretation unabhängig ist.

12.4 Die Fouriertransformation

Alle Funktionen in diesem Abschnitt sind komplexwertige Funktionen über \mathbb{R}^n . Finden wir komplexwertige Lösungen für reelle Differentialgleichungen, dann sind Real- und Imaginärteil dieser Lösungen ebenfalls Lösungen und reellwertig.

Definition 12.50. Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ eine integrierbare Funktion. Dann heißt die Funktion von $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f)(p) &:= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int f(x) \exp(-i\langle p|x \rangle) d\lambda^n(x) \\ \mathcal{F}^{-1}(f)(p) &:= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int f(x) \exp(i\langle p|x \rangle) d\lambda^n(x)\end{aligned}$$

die Fouriertransformierte beziehungsweise die invers Fouriertransformierte von f .

Beispiel 12.51. Sei $f = \mathbb{1}_{[-1,1]}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f)(p) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x) \exp(-ipx) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 \exp(-ipx) dx \\ &= \frac{1}{-ip} (\exp(-ip) - \exp(ip)) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(p)}{p}.\end{aligned}$$

Für $p = 0$ ergibt sich leicht $\mathcal{F}(f)(p)(0) = \frac{2}{\pi}$ was genau der stetigen Fortsetzung der obigen Funktion im Nullpunkt entspricht.

Bemerkung 12.52. (i) Die Frage welche der Abbildung Fouriertransformation und welche inverse Fouriertransformation heißt ist Konvention genauso wie die genaue Wahl der Normierungen vor den Integralen (ihr Produkt muss lediglich $\frac{1}{(2\pi)^n}$ ergeben).

- (ii) Die obige Notation ist etwas irreführend insofern, dass die Abbildungen \mathcal{F} und \mathcal{F}^{-1} nicht wirklich zueinander inverse Abbildungen sind. Im Allgemeinen wird $\mathcal{F}(f)$ beziehungsweise $\mathcal{F}^{-1}(f)$ nicht integrierbar sein, so dass die Hintereinanderausführung der Abbildungen gar nicht möglich ist. Diese Asymmetrie ist der Grund für viele der im Folgenden auftretenden Schwierigkeiten.

Es gilt aber: falls $\mathcal{F}(f)$ integrierbar ist, dann ist $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)) = f = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(f))$ fast überall. Diese Aussage wird als Fourier-Umkehr-Satz bezeichnet und wir werden sie weiter unten beweisen.

- (iii) Es ist offensichtlich, dass die obigen Formeln nur für \mathbf{L}^1 -Funktionen Sinn ergeben. Dennoch kann die Fouriertransformation auf allgemeinere Funktionen und sogar Distributionen fortgesetzt werden. Die Integralformeln gelten dann selbstverständlich nicht mehr.

- (iv) Der Integrand in beiden Formeln ist für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ offensichtlich eine stetige Funktion von p und unabhängig von p beschränkt durch die integrierbare Funktion $|f|$. Damit folgt aus Korollar 8.53, dass die Fouriertransformierte oder invers Fouriertransformierte einer integrierbaren Funktion immer eine stetige Funktion ist. Offensichtlich gilt auch

$$|\mathcal{F}f(p)| \leq \int |f(x)| d\lambda^n(x),$$

die Fouriertransformierte beziehungsweise invers Fouriertransformierte ist also stets beschränkt. Es kann sogar die stärkere Aussage gezeigt werden, dass stets

$$\lim_{\|p\| \rightarrow \infty} \mathcal{F}(f)(p) = 0$$

gilt.

- (v) Der Integrand ist für festes x offenbar glatt in der Variablen p . Es gilt für die i -te partielle Ableitung des Integranden

$$\left| \frac{\partial}{\partial p_i} f(x) \exp(i\langle p|x \rangle) \right| = |x_i| |f(x)|,$$

ist die rechte Seite also integrierbar, dann dürfen wir nach Korollar 8.55 die Ableitung unter das Integral ziehen und erhalten

$$\partial_i \mathcal{F}(f) = -i\mathcal{F}(x_i f).$$

Diese Vertauschung von Ableitung und Multiplikation mit x_i ist der eigentliche Grund für die Nützlichkeit der Fouriertransformation im Zusammenhang mit Differentialgleichungen. Es gibt noch eine weitere Variante dieser Aussage die wir weiter unten zeigen werden.

- (vi) Für integrierbare Funktionen f über einem kompakten Intervall $[0, 2\pi]$ können wir die Fourier-Koeffizienten

$$\hat{f}(k) = \int_0^{2\pi} f(x) \exp(-ikx) dx$$

definieren und für eine summierbare Folge $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ die Fourier-Reihe

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \exp(ikx).$$

Große Teile der im Folgenden entwickelten Theorie von Funktionen und ihren Fouriertransformierten lassen sich in entsprechend angepasster Weise auf Funktionen und zugehörige Fourier-Reihen übertragen.

Bemerkung 12.53. Wie am Ende der letzten Bemerkung, werden wir im Folgenden häufig mit Funktionen arbeiten, die durch Multiplikation anderer Funktionen mit bestimmten Polynomen entstehen. Für $i \in \{1, \dots, n\}$ schreiben wir daher jetzt $x_i f$ für die Funktion $x \mapsto x_i f(x)$, was formal natürlich nicht ganz korrekt ist.

Beispiel 12.54. Wir betrachten die quellenfreie Wellengleichung in $1 + n$ Dimensionen: $\partial_t^2 f - \Delta f = 0$, wobei sich der Laplace-Operator nur auf die Ortsvariablen bezieht. In der Übung haben wir gezeigt, dass Überlagerungen von ebenen Wellen, also Funktionen der Form

$$f(t, x) = \int g(p) \exp(i(\|p\| t - \langle p | x \rangle)) d\lambda^n(p) + \int h(p) \exp(i(-\|p\| t - \langle p | x \rangle)) d\lambda^n(p).$$

Lösungen der Gleichung sind, falls g, h stetig mit kompakten Träger sind (tatsächlich können wir mit schwächeren Voraussetzungen auskommen, wie wir weiter unten sehen werden).

Wir wollen nun das Anfangswertproblem betrachten, bei dem $f(0, x) = f_0(x)$ und $\partial_t f(0, x) = f_1(x)$ für bekannte Funktionen f_0, f_1 gefordert wird. In der Übungsaufgabe wurde auch gezeigt, dass partielle Ableitungen unter das Integral gezogen werden können. Sollen die Anfangsbedingungen erfüllt sein, muss also gelten

$$f_0 = \mathcal{F}(g + h) \text{ und } f_1 = i\mathcal{F}(\|p\| (g - h)).$$

Falls die Anfangswerte f_0 und f_1 integrierbar sind, dann können wir die inverse Fouriertransformation anwenden und erhalten

$$\mathcal{F}^{-1}(f_0) = g + h \text{ und } \mathcal{F}^{-1}(f_1) = i\|p\| (g - h),$$

was wir zu

$$\begin{aligned} g &= \frac{1}{2} \left(\mathcal{F}^{-1}(f_0) - \frac{i\mathcal{F}^{-1}(f_1)}{\|p\|} \right) \\ h &= \frac{1}{2} \left(\mathcal{F}^{-1}(f_0) + \frac{i\mathcal{F}^{-1}(f_1)}{\|p\|} \right) \end{aligned}$$

auflösen können.

Die genauen Voraussetzungen, damit dieses Verfahren tatsächlich Lösungen des untersuchten Anfangswertproblems liefert sind nicht ganz einfach zu überschauen. Es müssen natürlich f_0 und f_1 integrierbar sein, zusätzlich müssen aber die nach den obigen Formeln resultierenden Funktionen g und h sich hinreichend gut verhalten, um die Vertauschung von Integration und Differentiation weiter oben zu erlauben.

Lemma 12.55. *Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und f, f' seien integrierbar. Dann gilt $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f = 0$.*

Beweis. Wir betrachten hier nur $x \rightarrow \infty$. Aus dem Hauptsatz der Analysis erhalten wir

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f'(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} f(R) - f(0).$$

Da $f'(x)$ integrierbar ist, existiert der Grenzwert auf der linken Seite nach dem Satz von Lebesgue und damit auch der Grenzwert auf der rechten Seite. Da aber auch f integrierbar ist, muss $\lim_{R \rightarrow \infty} f(R) = 0$ gelten. \square

Verzichten wir auf die Integrierbarkeit von f' , dann ist die obige Aussage falsch.

Satz 12.56. Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetig differenzierbare Funktion und $i \in \{1, \dots, n\}$. Falls f und $\partial_i f$ integrierbar sind, dann gilt $\mathcal{F}(\partial_i f) = ip_i \mathcal{F}(f)$.

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall $n = 1$. Da f und f' integrierbar sind, gilt nach dem obigen Lemma $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$. Mit partieller Integration ergibt sich

$$\int_{-R}^R f'(x) \exp(-ipx) dx = f(x) \exp(-ipx) \Big|_{-R}^R + ip \int_{-R}^R f(x) \exp(-ipx) dx,$$

woraus sich im Grenzwert $R \rightarrow \infty$ die gesuchte Gleichung ergibt.

Sei nun n beliebig. Um die Notation einfach zu halten betrachten wir nur den Fall $i = 1$, die anderen Fälle folgen jedoch analog. Da nach Voraussetzung $\partial_1 f$ integrierbar ist, gilt nach dem Satz von Fubini

$$\int \partial_1 f(x) d\lambda^n(x) = \int \int \partial_1 f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 d\lambda^{n-1}(x_2, \dots, x_n),$$

insbesondere muss das innere Integral für λ^{n-1} -fast-alle (x_2, \dots, x_n) existieren, was genau dann der Fall ist, wenn $x_1 \mapsto \partial_1 f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ eine integrierbare Funktion ist. Analog muss die Abbildung $x_1 \mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ für fast alle (x_2, \dots, x_n) integrierbar sein. Das heißt, es gibt eine Nullmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ so, dass für $(x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ die Funktion $g(x) = f(x, x_2, \dots, x_n)$ die Voraussetzungen des eben bewiesenen eindimensionalen Falls erfüllt. Da die Nullmenge Ω für die äußere Integration keine Rolle spielt, folgt nochmal mit dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned} & \int \partial_1 f(x) \exp(-i\langle p|x \rangle) d\lambda^n(x) \\ &= \int \int g'(x_1) \exp(-ip_1 x_1) dx_1 \exp(-i(p_2 x_2 + \dots + p_n x_n)) d\lambda^{n-1}(x_2, \dots, x_n) \\ &= ip_1 \int \int g(x_1) \exp(-ip_1 x_1) dx_1 \exp(-i(p_2 x_2 + \dots + p_n x_n)) d\lambda^{n-1}(x_2, \dots, x_n) \\ &= ip_1 \int f(x) \exp(-i\langle p|x \rangle) d\lambda^n(x). \end{aligned} \quad \square$$

Mit dem vorhergehenden Satz und Bemerkung 12.52 können wir nun eine Klasse von Funktionen angeben, auf der sich die Fouriertransformation besonders gut verhält.

Definition 12.57. Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$. Die Funktion f heißt schnell fallend, falls für jedes Polynom p die Funktion pf beschränkt ist. Wir nennen f eine Schwarz-Funktion, wenn sie glatt ist und $\partial^\alpha f$ für jeden Multiindex α schnell fällt. Den Raum der Schwarzfunktionen über \mathbb{R}^n bezeichnen wir mit $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Beispiel 12.58. (i) Jede beschränkte Funktion mit kompaktem Träger ist schnell fallend.

(ii) Jede Testfunktion $\varphi \in \mathbf{D}(\mathbb{R}^n)$ ist eine Schwarz-Funktion.

(iii) Die Funktion $x \mapsto \exp(-\|x\|^2)$ ist eine Schwarzfunktion, die keinen kompakten Träger hat.

Bemerkung 12.59. (i) Aus den obigen Definitionen ist ersichtlich, dass die Räume der schnell fallenden Funktionen und der Schwarz-Funktionen Algebren sind. Die Multiplikation einer schnell fallenden Funktion mit einem Polynom ergibt eine schnell fallende Funktion (Warum?).

Der Raum der Schwarz-Funktionen ist abgeschlossen unter der Anwendung von partiellen Ableitungen (und damit Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten).

Für eine Schwarz-Funktion f ist $x_i f$ offenbar wieder glatt. Nach der Kettenregel ist $\partial^\alpha(x_i f)$ für einen Multiindex α eine Linearkombination von Funktionen der Form $(\partial^\beta x_i)(\partial^\gamma f)$, die ebenfalls schnell fallend sind. Damit ist $x_i f$ ebenfalls eine Schwarz-Funktion. Nun folgt induktiv: Das Produkt einer Schwarz-Funktion mit einem Polynom ist wieder eine Schwarz-Funktion.

(ii) Es gelten die Ungleichungen $|x_i| \leq \sqrt{1 + \|x\|^2}$ und $1 \leq \sqrt{1 + \|x\|^2}$ und damit für einen Multiindex α auch $|x^\alpha| \leq \sqrt{1 + \|x\|^2}^{|\alpha|}$. Sei nun

$$p(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n, |\alpha| \leq k} a_\alpha x^\alpha$$

ein Polynom vom Grad k . Dann gilt also

$$|p(x)| \leq \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n, |\alpha| \leq k} |a_\alpha| \sqrt{1 + \|x\|^2}^{|\alpha|} \leq \sqrt{1 + \|x\|^2}^k \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n, |\alpha| \leq k} |a_\alpha|.$$

Wir haben also gezeigt, dass jedes Polynom vom Grad k sich durch $C\sqrt{1 + \|x\|^2}^k$ für passendes $C > 0$ abschätzen lässt.

Daraus folgt, eine Funktion ist schnell fallend genau dann, wenn $(1 + \|x\|^2)^k f$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ beschränkt ist.

(iii) Wir betrachten das Polynom

$$p(x) = \prod_{i=1}^n (1 + x_i^2).$$

Da $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ integrierbar ist (Warum?), ist $\frac{1}{p}$ ebenfalls integrierbar (Warum?). Für eine schnell fallende Funktion f gilt für passendes C

$$|f(x)| \leq \frac{C}{p(x)},$$

jede schnell fallende Funktion ist also integrierbar.

(iv) Ist f eine schnell fallende Funktion, dann ist $x_i f$ integrierbar. Nach Bemerkung 12.52 existiert dann $\partial_i \mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(x_i f)$. Da $x_i f$ wieder eine schnell fallende Funktion ist, können wir das Argument iterativ anwenden und erhalten: Für eine schnell fallende Funktion f ist $\mathcal{F}(f)$ glatt.

Ist andererseits f eine glatte Funktion so, dass alle ihre partiellen Ableitungen integrierbar sind, dann können wir Satz 12.56 iterativ anwenden und erhalten $\mathcal{F}(\partial^\alpha f) = p^\alpha \mathcal{F}(f)$ für jeden Multiindex α . Da die Fourier-Transformierte stets beschränkt ist, folgt daraus dass $\mathcal{F}(f)$ eine schnell fallende Funktion ist.

Satz 12.60. Die Abbildungen \mathcal{F} und \mathcal{F}^{-1} bilden den Schwarz-Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ auf sich selbst ab.

Beweis. Sei f eine Schwarz-Funktion und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Dann ist $x^\alpha f$ ebenfalls eine Schwarz-Funktion. Nach der vorherigen Bemerkung ist $\mathcal{F}(f)$ glatt (da f schnell fallend ist) und es gilt $\partial^\alpha \mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(x^\alpha f)$. Da $x^\alpha f$ ebenfalls glatt ist, muss diese Funktion andererseits schnell fallen. Da das für jedes α gilt, ist $\mathcal{F}(f)$ eine Schwarz-Funktion. \square

Beispiel 12.61. Wir wollen die Fourier-Transformierte der Gauß-Funktion

$$f(x) = \exp(-\alpha \|x\|^2)$$

für $\alpha > 0$ bestimmen. Zunächst betrachten wir den eindimensionalen Fall. Das entsprechende Fourierintegral kann direkt berechnet werden, was jedoch etwas umständlich ist. Stattdessen stellen wir fest, dass f eine Schwarz-Funktion ist, was dann auch für $\mathcal{F}(f)$ gelten muss. Weiter gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f)' &= -i\mathcal{F}(xf) = -i \int x \exp(-\alpha x^2) \exp(-ipx) dx = \frac{i}{2\alpha} \int f'(x) \exp(-ipx) dx \\ &= \frac{i}{2\alpha} \mathcal{F}(f') = -\frac{p}{2\alpha} \mathcal{F}(f). \end{aligned}$$

Wir können diese Differentialgleichung lösen und finden

$$\mathcal{F}(f)(p) = C \exp\left(-\frac{p^2}{4\alpha}\right).$$

Schließlich gilt

$$C = \mathcal{F}(f)(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \exp(-\alpha x^2) dx = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}.$$

Das obige Gauß-Integral kann auf viele verschiedene Arten berechnet werden. Eine davon haben wir in Beispiel 10.26 kennengelernt.

Für $n > 1$ gilt nun

$$\exp(-\alpha \|x\|^2) \exp(-i\langle p|x\rangle) = \prod_{i=1}^n \exp(-\alpha x_i^2) \exp(-ip_i x_i).$$

Da die Funktion über \mathbb{R}^n integrierbar ist können wir das Fourierintegral nun komponentenweise berechnen und erhalten

$$\mathcal{F}(f)(p) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \exp\left(-\frac{p_i^2}{4\alpha}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}^n} \exp\left(-\frac{\|p\|^2}{4\alpha}\right).$$

Die Fourier-Transformierte ist also wieder eine Gauß-Funktion.

Insbesondere erhalten wir, dass die Funktion

$$x \mapsto \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{2}\right)$$

invariant unter der Fourier-Transformation ist.

Lemma 12.62 (Skalierungseigenschaften der Fouriertransformation). *Sei f eine integrierbare Funktion und $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann gilt*

$$\mathcal{F}(f(\alpha \cdot)) = \frac{1}{|\alpha|^n} \mathcal{F}(f)\left(\frac{\cdot}{\alpha}\right).$$

Beweis. Diese Formel ist eine Konsequenz des Transformationssatzes. Die Koordinatentransformation $T(x) = \alpha x$ von \mathbb{R}^n auf \mathbb{R}^n ist linear und daher gilt $DT(x) = T$ und $\det(DT(x)) = \alpha^n$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int f(\alpha x) \exp(-i\langle p|x\rangle) d\lambda^n(x) &= \frac{1}{|\alpha|^n} \int f(T(x)) \exp(-i\langle \frac{p}{\alpha} | T(x) \rangle) |\det(DT(x))| d\lambda^n(x) \\ &= \frac{1}{|\alpha|^n} \int f(y) \exp(-i\langle \frac{p}{\alpha} | y \rangle) d\lambda^n(y). \end{aligned} \quad \square$$

Lemma 12.63. *Sei f eine integrierbare Funktion mit $\int f d\lambda^n = 1$ und φ stetig in 0 und beschränkt, dann gilt*

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \alpha^n \int \varphi(x) f(\alpha x) d\lambda^n(x) = \varphi(0).$$

Beweis. Übung. □

Satz 12.64. (Fourier-Umkehr-Satz) Sei V der Raum der Funktionen so, dass f und $\mathcal{F}(f)$ stetig, beschränkt und integrierbar sind. Dann sind die Abbildungen $\mathcal{F} : V \rightarrow V$ und $\mathcal{F}^{-1} : V \rightarrow V$ zueinander invers.

Beweis. Wir betrachten die fourierinvariante Gauß-Funktion

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{2}\right),$$

welche auf $\int \varphi d\lambda^n = 1$ normiert ist. Wir setzen nun $\varphi_k = \varphi(\frac{\cdot}{k})$. Dann konvergiert die Folge φ_k punktweise gegen $\varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n}$.

Für die zugehörigen Fouriertransformaten gilt nach dem obigen Lemma

$$\psi_k = \mathcal{F}(\varphi_k) = k^n \mathcal{F}(\varphi)(k \cdot) = k^n \varphi(k \cdot).$$

Für $f \in V$ und beliebiges k gilt nun

$$\begin{aligned} \int \mathcal{F}(f)(p) \varphi_k(p) \exp(i\langle p|y\rangle) d\lambda^n(p) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int \int f(x) \varphi_k(p) \exp(i\langle p|y-x\rangle) d\lambda^n(x) d\lambda^n(p) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int \int f(x) \varphi_k(p) \exp(i\langle p|y-x\rangle) d\lambda^n(p) d\lambda^n(x) \\ &= \int f(x) \mathcal{F}(\varphi_k)(x-y) d\lambda^n(x) \\ &= \int f(z+y) \mathcal{F}(\varphi_k)(z) d\lambda^n(z) \\ &= \int f(z+y) \psi_k(z) d\lambda^n(z). \end{aligned}$$

Die Vertauschung der Integrationsreihenfolge ist nach dem Satz von Fubini zulässig (Warum?).

Der Integrand der linken Seite ist unabhängig von k durch die integrierbare Funktion $\frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} |\mathcal{F}(f)|$ beschränkt. Damit konvergiert die linke Seite für $k \rightarrow \infty$ nach dem Satz von Lebesgue gegen

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int \mathcal{F}(f)(p) \exp(i\langle p|y\rangle) d\lambda^n(p) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(y).$$

Da f stetig ist, konvergiert die rechte Seite nach dem obigen Lemma gegen $f(y)$. Es gilt also $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)) = f$ für jedes $f \in V$.

Die zweite Aussage können wir nun leicht erhalten, indem wir die Spiegelung am Koordinatenursprung $S(x) = -x$ betrachten und feststellen, dass $\mathcal{F}(f \circ S) = \mathcal{F}(f) \circ S = \mathcal{F}^{-1}(f)$ gilt. Dann folgt auch

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(f)) = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(f) \circ S \circ S) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)) = f. \quad \square$$

Korollar 12.65. Die Abbildungen \mathcal{F} und \mathcal{F}^{-1} bilden $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ bijektiv auf sich selbst ab.

Bemerkung 12.66. (i) Da wir wissen, dass die Fourier-Transformierte einer integrierbaren Funktion stetig und beschränkt ist, ist V die maximale Menge, auf der der Umkehrsatz gelten kann. Die obige Version des Umkehrsatzes ist oft nur von eingeschränkter Nützlichkeit, da es schwierig ist die Zugehörigkeit einer Funktion zu V zu prüfen (zumindest ohne die Fouriertransformierte explizit auszurechnen). Eine Möglichkeit das Problem zu umgehen, ist es entweder einen kleineren Raum ($\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$) oder einen größeren Raum (\mathbf{L}^2 , Distributionen) zu betrachten.

Auch können wir Differenzierbarkeitseigenschaften von f nutzen: Ist beispielsweise $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ zweimal stetig differenzierbar so, dass f, f', f'' integrierbar sind, dann ist

$$\mathcal{F}(f + f'') = (1 + p^2)\mathcal{F}(f)$$

beschränkt und damit

$$\mathcal{F}(f)(p) \leq \frac{C}{1 + p^2},$$

was für die Integrierbarkeit der Fourier-Transformierten ausreicht. Je höher die Dimension umso stärkere Regularitätsanforderungen müssen wir für diese Art von Argument stellen (Warum?).

Bemerkung 12.67. Wir betrachten nun die Wärmeleitungsgleichung $\partial_t f = \Delta f$ in $1 + n$ Dimensionen. Die Lösungen dieser Gleichung beschreiben beispielsweise die zeitliche Entwicklung einer Temperaturverteilung oder Konzentrationsverteilung f .

Wir können nun die Fouriertransformation auf beide Seiten der Gleichung anwenden, wobei wir hier nur die n Ortsvariablen transformieren. Die Fourier-Transformierte hängt dann neben den p Variablen auch noch von t ab. Wir erhalten dann

$$\begin{aligned} \|p\|^2 \mathcal{F}(f)(t, p) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int \Delta f(t, x) \exp(-i\langle p|x \rangle) d\lambda^n(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int \partial_t f(t, x) \exp(-i\langle p|x \rangle) d\lambda^n(x) = \partial_t \mathcal{F}(f)(t, p). \end{aligned}$$

In dieser Rechnung stecken natürlich einige Annahmen an die Eigenschaften der Lösung $f(t, x)$ auf die wir später zurückkommen müssen.

Wir erhalten also für die Fourier-Transformierte eine gewöhnliche Differentialgleichung für jedes $p \in \mathbb{R}^n$, noch dazu eine, deren Lösung wir leicht angeben können:

$$\mathcal{F}(f)(t, p) = C(p) \exp\left(-\|p\|^2 t\right).$$

Dabei kann die „Konstante“ natürlich von den p -Variablen abhängen. Wir wollen nun zunächst den Fall betrachten, wo C tatsächlich eine Konstante ist. In diesem Fall ist $\mathcal{F}(f)(t, p)$ für $t > 0$ eine Schwarz-Funktion und damit insbesondere eine Fourier-Transformierte.

Wir haben die nötigen Rechnungen in Beispiel 12.61 sogar schon durchgeführt und können die Funktion f daraus ablesen:

$$H_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}^n} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4t}\right).$$

Diese Funktion nennen wir auch den Wärmeleitungskern. Dabei wurde die Konstante C so gewählt, dass $\int H_t d\lambda^n(x) = 1$ für alle $t \in (0, \infty)$ gilt. Die etwas ungewöhnliche Notation für die Argumente von H hat keinen tieferen Sinn. Sie ist jedoch praktisch, da auf diese Weise H_t eine Funktion der Ortsvariablen ist, die Fourier-transformiert und gefaltet werden kann. Es lässt sich nun leicht nachrechnen — und es folgt auch aus dem obigen Argument — dass der Wärmeleitungskern tatsächlich eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist.

Im Kontext der Wärmeleitungsgleichung wird üblicherweise das Cauchy-Problem betrachtet, das heißt das Anfangswertproblem bei dem die Funktion $f(0, x)$ vorgegeben ist. Zu welchen Anfangswerten gehört nun der Wärmeleitungskern? Wir können natürlich nicht $t = 0$ einsetzen, es gilt aber zunächst punktweise $\lim_{t \rightarrow 0^+} H_t(x) = 0$ für $x \neq 0$ und $\lim_{t \rightarrow 0^+} H_t(0) = \infty$. Interessanter ist jedoch die Konvergenz im Sinne von Distributionen. Sei dazu wieder φ die Fourier-invariante Gaußfunktion, so normiert dass $\int \varphi d\lambda^n = 1$. Dann gilt (Nachrechnen!)

$$H_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2t}^n} \varphi\left(\frac{1}{\sqrt{2t}}x\right).$$

Für $t \rightarrow 0^+$ divergiert $\frac{1}{\sqrt{2t}}$ bestimmt gegen ∞ und es folgt aus Lemma 12.63 für jedes $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (ψ stetig in 0, beschränkt und integrierbar wäre auch ausreichend)

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int \psi H_t d\lambda^n = \psi(0).$$

Im Sinne von Distributionen gilt also $\lim_{t \rightarrow 0^+} \tilde{H}_t = \delta_0$. Der Wärmeleitungskern beschreibt also die Zeitentwicklung einer Temperaturverteilung, die für $t = 0$ durch δ_0 gegeben ist.

Wir können nun, mit ähnlichen Methoden wie bei der Untersuchung von Fundamentallösungen im vorhergehenden Abschnitt, versuchen aus dieser Lösung für spezielle Anfangswerte Lösungen für deutlich allgemeinere Anfangswerte zu konstruieren.

Zunächst beschäftigen wir uns mit dem Verhalten von Produkten unter der Fourier-Transformation.

Satz 12.68. *Seien f, g integrierbare Funktionen. Dann ist die Faltung $f * g$ ebenfalls integrierbar und es gilt*

$$\mathcal{F}(f * g) = \sqrt{2\pi}^n \mathcal{F}(f) \mathcal{F}(g).$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \int \int |f(x)| |g(y-x)| d\lambda^n(x) d\lambda^n(y) &= \int |f(x)| \int |g(y-x)| d\lambda^n(y) d\lambda^n(x) \\ &= \int |f(x)| \int |g(z)| d\lambda^n(z) d\lambda^n(x) \\ &= \left(\int |f(x)| d\lambda^n(x) \right) \left(\int |g(z)| d\lambda^n(z) \right) < \infty. \end{aligned}$$

Damit ist die Funktion $(x, y) \mapsto f(x)g(y-x)$ über $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ integrierbar. Aus dem Satz von Fubini folgt dann, dass das Faltungsintegral

$$f * g(y) = \int f(x)g(y-x) d\lambda^n(x)$$

für fast alle $y \in \mathbb{R}^n$ definiert ist und dass

$$\int |f * g|(y) d\lambda^n(y) \leq \int |f(x)| |g(y-x)| d\lambda^n(y) d\lambda^n(x)$$

endlich ist, die Funktion $f * g$ also integrierbar.

Natürlich ist dann auch $(x, y) \mapsto f(x)g(y-x) \exp(-i\langle p|y\rangle)$ für jedes $p \in \mathbb{R}^n$ integrierbar und es folgt nochmal mit dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi}^n \mathcal{F}(f * g)(p) &= \int \int f(x)g(y-x) \exp(-i\langle p|y\rangle) d\lambda^n(x) d\lambda^n(y) \\ &= \int f(x) \int g(y-x) \exp(-i\langle p|y\rangle) d\lambda^n(y) d\lambda^n(x) \\ &= \int f(x) \int g(z) \exp(-i\langle p|z+x\rangle) d\lambda^n(z) d\lambda^n(x) \\ &= \sqrt{2\pi}^n \int f(x) \exp(-i\langle p|x\rangle) \mathcal{F}(g)(p) d\lambda^n(x) \\ &= (2\pi)^n \mathcal{F}(f)(p) \mathcal{F}(g)(p). \end{aligned} \quad \square$$

Bemerkung 12.69. Offensichtlich gilt eine analoge Gleichung auch für die inverse Fourier-Transformation.

Die komplementäre Gleichung

$$\mathcal{F}(fg) = \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g)$$

gilt nur unter zusätzlichen Voraussetzungen an die Funktionen, nämlich dann, wenn der Fourier-Umkehr-Satz angewendet werden kann (offenbar müssen mindestens fg , $\mathcal{F}(f)$ und $\mathcal{F}(g)$ integrierbar sein, damit die Gleichung überhaupt Sinn ergibt). Die Gleichung gilt jedoch beispielsweise für Schwarz-Funktionen.

Bemerkung 12.70. Wir betrachten nun wieder die Wärmeleitungsgleichung $\partial_t f = \Delta f$. Wir hatten bereits gesehen, dass unter noch nicht näher bestimmten Voraussetzungen an die Lösung f , dann gelten muss

$$\mathcal{F}(f)(t, p) = C(p) \exp(-\|p\|^2 t) = \sqrt{2\pi}^n K(p) \mathcal{F}(H_t)(p),$$

wobei sich die Funktionen $C(p)$ und $K(p)$ lediglich um eine Normierung unterscheiden. Ist nun $K(p)$ die Fouriertransformierte einer integrierbaren Funktion f_0 , dann ist diese Gleichung nach dem vorhergehenden Satz erfüllt, falls wir

$$f(t, x) = (f_0 * H_t)(x) = \int f_0(y) H_t(x - y) d\lambda^n(y) = \int f_0(x - z) H_t(z) d\lambda^n(z) \quad (12.3)$$

setzen. Da wir bereits wissen, wie sich H_t für kleine t verhält, erhalten wir falls f_0 eine stetige und beschränkte Funktion ist für jedes $x \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t, x) = f_0(x).$$

Die Funktion f_0 können wir also als Funktion der Anfangswerte interpretieren.

Um zu zeigen, dass (12.3) tatsächlich eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist, müssten wir noch überprüfen, dass die notwendige Vertauschung von Differentiation und Integration erlaubt ist. Da der Wärmeleitungskern eine Schwarz-Funktion ist (und damit auch alle seine Ableitungen) ist das stets der Fall (Nachrechnen!). Die Funktion $f(t, x)$ ist sogar eine glatte Funktion.

Die Funktion $f(t, x)$ ist selbst dann noch eine glatte Lösung der Wärmeleitungsgleichung wenn f_0 unstetig ist. Da die resultierende Funktion $f(t, x)$ für $t \rightarrow 0$ in diesem Fall nicht mehr notwendig konvergiert, müssen wir uns natürlich genauer Gedanken darüber machen, was die Erfüllung der Anfangswerte eigentlich bedeuten soll. Die Wärmeleitungsgleichung hat also die interessante Eigenschaft, die Anfangswerte zu „glätten“.

Lemma 12.71. *Seien f, g integrierbare Funktionen, dann gilt*

$$\int \mathcal{F}(f)g d\lambda^n = \int f \mathcal{F}(g) d\lambda^n.$$

Beweis. Die Funktion $(x, p) \mapsto f(x)g(p) \exp(-i\langle x|p\rangle)$ ist offenbar integrierbar über $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Integrieren wir zuerst über x und dann über p ergibt sich die linke Seite der zu zeigenden Gleichung, integrieren wir zuerst über p und dann über x erhalten wir die rechte Seite. Nach dem Satz von Fubini stimmen aber beide Integrale überein. \square

Lemma 12.72. *Seien f, g integrierbare Funktionen. Falls eine der Funktionen stetig und beschränkt ist, dann ist auch $f * g$ stetig und beschränkt.*

Beweis. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass g stetig und beschränkt ist. Dann ist $f(x)g(y - x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ stetig und $|f(x)g(y - x)| \leq \|g\|_\infty |f(x)|$. Dann folgt aus Korollar 8.53, dass auch die Faltung

$$f * g(y) = \int f(x)g(y - x) d\lambda^n(x)$$

stetig ist. Natürlich ist $f * g$ dann auch durch $\|g\|_\infty \int |f| d\lambda^n$ beschränkt. \square

Bemerkung 12.73. Falls g zusätzlich stetig differenzierbar mit beschränkter, integrierbarer Ableitung ist, dann ist auch $f * g$ stetig differenzierbar. So können wir induktiv fortfahren. Insbesondere sind Faltungen mit Testfunktionen oder Schwarz-Funktionen immer glatt.

In der Quantenmechanik wird die Fourier-Transformation auch auf dem Hilbertraum $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$ verwendet. Im Allgemeinen sind quadratintegrierbare Funktionen nicht notwendig integrierbar (und integrierbare Funktionen nicht notwendig quadratintegrierbar). Es ist jedoch möglich, sie auf diesen Raum fortzusetzen.

Satz 12.74. *Die Fouriertransformation lässt sich eindeutig zu einer unitären Abbildung von $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$ fortsetzen.*

Beweisskizze. Wir setzen $D = \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{C}_b(\mathbb{R}^n)$ also den Raum der integrierbaren, quadratintegrierbaren, stetigen und beschränkten Funktionen. Wir wollen nun zunächst zeigen, dass \mathcal{F} und \mathcal{F}^{-1} \mathbf{L}^2 -Isometrien auf dem Raum \mathbf{D} sind. Seien dazu $f, g \in D$. Es lässt sich leicht überprüfen, dass $\overline{\mathcal{F}(f)} = \mathcal{F}^{-1}(\bar{f}) = \mathcal{F}(\bar{f} \circ S)$ gilt, wobei $S(x) = -x$ die Spiegelung am Koordinatenursprung ist. Es sei φ wieder die Fourier-invariante Gauß-Funktion aus Satz 12.64, $\varphi_k = \varphi(\frac{\cdot}{k})$.

Dann können wir zunächst formal schreiben

$$\begin{aligned} \int \overline{\mathcal{F}(f)} \mathcal{F}(g) d\lambda^n &= \int \mathcal{F}(\bar{f} \circ S) \mathcal{F}(g) d\lambda^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int \mathcal{F}((\bar{f} \circ S) * g) d\lambda^n \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{2\pi}^n \int \mathcal{F}((\bar{f} \circ S) * g) \varphi_k d\lambda^n = \lim_{k \rightarrow \infty} \int (\bar{f} \circ S) * g \mathcal{F}(\varphi_k) d\lambda^n \\ &= (\bar{f} \circ S) * g(0) = \int \bar{f}(S(0-x)) g(x) d\lambda^n(x) = \int \bar{f} g d\lambda^n. \end{aligned}$$

Dabei haben wir Satz 12.68, Lemma 12.63 und das vorhergehende Lemma benutzt. Die Rechnung ist jedoch zunächst nur formal, da nicht sicher ist, dass die Integrale existieren und die Vertauschung von Grenzwert und Integral erlaubt ist.

Wir betrachten nun zunächst den Fall $g = f$. In diesem Fall ist der Integrand in der obigen Rechnung nichtnegativ und wir dürfen Integral und Grenzwert nach dem Satz von Beppo-Levi vertauschen (Warum?). Da f quadratintegrierbar ist, ist der letzte Integralausdruck endlich, womit wir bewiesen haben, dass $\mathcal{F}(f)$ ebenfalls quadratintegrierbar ist.

Für beliebiges g folgt aus dem eben gezeigten nun, dass $\overline{\mathcal{F}(f)} \mathcal{F}(g) = \mathcal{F}((\bar{f} \circ S) * g)$ eine integrierbare Funktion ist. Damit existieren in der obigen Rechnung alle Integrale und wir dürfen die Vertauschung von Integral und Grenzwert nach dem Satz von Lebesgue vornehmen. Die Rechnung zeigt dann:

$$\langle \mathcal{F}(f) | \mathcal{F}(g) \rangle = \langle f | g \rangle.$$

Natürlich gilt die analoge Aussage auch für \mathcal{F}^{-1} . Wir wissen damit, dass \mathcal{F} und \mathcal{F}^{-1} Abbildungen von D nach $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$ sind.

Die Menge D ist nun dicht in $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$. Diese Aussage werden wir hier nicht zeigen. Es kann sogar gezeigt werden, dass der kleinere Raum $\mathbf{D}(\mathbb{R}^n)$ bereits dicht ist. Zur

Erinnerung: das heißt für jedes $f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$ existiert eine Folge (f_k) von Testfunktionen so, dass $\|f - f_k\|_{\mathbf{L}^2}$ gegen 0 konvergiert.

Nach Satz 11.42 lassen sich nun sowohl \mathcal{F} als auch \mathcal{F}^{-1} zu stetigen Operatoren auf $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$ fortsetzen lassen, welche wir hier zunächst mit A und B bezeichnen wollen. Mittels Approximation folgt nun, dass A und B ebenfalls Isometrien sind. Für $f, g \in D$ gilt außerdem

$$\langle Af | g \rangle = \int \overline{\mathcal{F}(f)} g d\lambda^n = \int \mathcal{F}^{-1}(\bar{f}) g d\lambda^n = \int \bar{f} \mathcal{F}^{-1}(g) d\lambda^n = \langle f | Bg \rangle.$$

Mittels Approximation folgt dann, dass die selbe Gleichung auch für die Fortsetzungen, also für beliebige $f, g \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$ gilt. Damit haben wir gezeigt, dass $A^* = B$ gilt.

Damit folgt nun auch für beliebige $f, g \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$

$$\langle f | g \rangle = \langle Af | Ag \rangle = \langle BAf | g \rangle = \langle Bf | Bg \rangle = \langle ABf | g \rangle,$$

woraus $BA = AB = I$ folgt. Damit ist gezeigt, dass die eindeutige Fortsetzung A von \mathcal{F} ein unitärer Operator ist. \square

Bemerkung 12.75. (i) Wie bereits erwähnt, ist nicht jede quadratintegrierbare Funktion integrierbar. Die oben definierte Fortsetzung lässt sich also im Allgemeinen nicht direkt mittels der Integralformel berechnen. Da die Fortsetzung stetig ist, kann sie jedoch durch Approximation berechnet werden. Ist f eine \mathbf{L}^2 -Funktion, dann können wir also eine Folge $(f_k) \subset \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$ wählen, die in \mathbf{L}^2 gegen f konvergiert und dann die Fouriertransformierte als $\mathcal{F}(f) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{F}(f_k)$ berechnen. Dabei ist zu beachten, dass die Folge $\mathcal{F}(f_k)$ im Allgemeinen nicht punktweise, und nichtmal punktweise fast überall, konvergieren wird sondern ebenfalls lediglich in $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$.

Eine Möglichkeit für die approximierende Folge ist (Warum?)

$$f_k = f \mathbb{1}_{B_k(0)}.$$

Es kann jedoch auch nützlich sein andere Approximationen, zum Beispiel stetige oder glatte, zu wählen.

- (ii) In der Quantenmechanik wird die oben definierte Fouriertransformation benutzt um Wellenfunktionen und Operatoren vom „Ortsraum“ in den „Impulsraum“ umzurechnen. Mathematisch handelt es sich dabei um den selben Raum ($\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$), lediglich die physikalische Interpretation der Zustände und Operatoren unterscheidet sich. Welche Darstellung dabei die nützlichere ist, hängt vom Kontext und den betrachteten Operatoren ab.