66.70 Estructura del Computador

Algebra de Boole

Algebra de Boole

...Para qué le podría hacer falta a un ingeniero?

...otra Algebra más!?

Algebra de Boole

- Concebida por George Boole (1815-1864) en su libro "THE LAWS OF THOUGHT"
  - Una oración es una proposición si sólo se le puede asignar uno de dos valores de verdad: Verdadero o Falso
  - ~~"El universo se generó a partir del Big Bang"~~
  - ~~"Pienso, luego existo"~~
  - Frases complejas creadas combinando otras simples

- Su formalización más precisa fue presentada recién en 1904 por Edward Vermilye Huntington:

  - 7 Axiomas –

- Establece un paralelo entre la Teoría de Conjuntos y el Cálculo Proposicional: *ambos son un Algebra de Boole*

- Da una base teórica para poder diseñar y analizar circuitos lógicos (electrónica digital)

Postulados de Huntington

- P1) Se define un conjunto *K* de objetos sujetos a una *ley de equivalencia* "=" de modo que
  si $a=b$ b puede sustituir a a en cualquier expresión sin afectar su validez
- P2) Regla de combinación "+" de modo que si a y b estan en K entonces $a+b$ esta en *K*

  P2´) Regla de combinación "." de modo que si a y b estan en K entonces $a.b$ esta en *K*
- P3) Existe un elemento *0* en *K* de modo que para todo *a* en *K*, $a+0=a$

  P3´) Existe un elemento *1* en *K* de modo que para todo *a* en *K*, $a.1 = a$
- P4) $a + b = b + a$

  P4´) $a . b = b . a$
- P5) $a . (b + c) = (a. b) + (a . c)$

  P5´) $a + (b . c) = (a+b) . (a + c)$
- P6) Existe un ~a de modo que $a\ .\ {\sim}a = 0$
  $a + {\sim}a = 1$
- P7) Existen en *K* al menos dos elementos que no son equivalentes entre sí

Algebra de Boole

Postulados

Teoremas

Aplicación a un problema específico

Aplicando el Algebra de Boole

Los siete postulados de Huntington deben verificarse en:

- los elementos del conjunto K
- los dos operadores

- Investigar si los circuitos de relés pueden expresarse por medio del álgebra de Boole

Principio de dualidad

+ ⇔ -

0 ⇔ 1

- *Presente en los Postulados de Huntington*
- *Si dos expresiones son iguales => sus duales también* son iguales

Teoremas

- Idempotencia: $a + a = a$ $a \cdot a = a$
- Elemento absorbente: $a + 1 = 1$ $a \cdot 0 = 0$
- Absorción : $a + (a \cdot b) = a$ $a \cdot (a + b) = a$
- Asociatividad: $a + (b + c) = (a + b) + c$ $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
- Complemento único: El elemento *a*' asociado al *a* es único
- Involución: $(a')' = a$
- En cualquier álgebra booleana: $0' = 1$ $1' = 0$
- Leyes de De Morgan $(a + b)' = a' \cdot b'$ $(a \cdot b)' = a' + b'$

Teoremas

Idempotencia

→ $x \cdot x = x.$

$$
\begin{aligned}
x \cdot x &= xx + 0 && \text{por el postulado: } 3a) \\
&= xx + xx' && 6b) \\
&= x(x + x') && 5a) \\
&= x \cdot 1 && 6a) \\
&= x && 3b)
\end{aligned}
$$

→ $x + x = x.$

$$
\begin{aligned}
x + x &= (x + x) \cdot 1 && \text{por el postulado: } 3b) \\
&= (x + x)(x + x') && 6a) \\
&= x + xx' && 5b) \\
&= x + 0 && 6b) \\
&= x && 3a)
\end{aligned}
$$

Teoremas

Idempotencia

$\longrightarrow$ $x + 1 = 1.$

$$\begin{aligned} x + 1 &= 1 \cdot (x + 1) && \text{por el postulado: } 3b) \\ &= (x + x')(x + 1) && 6a) \\ &= x + x' \cdot 1 && 5b) \\ &= x + x' && 3b) \\ &= 1 && 6a) \end{aligned}$$

$\longrightarrow$ $x \cdot 0 = 0$ por dualidad.

Funciones lógicas

- Comparar con las funciones del Análisis Matemático
- Dos valores posibles
- Variables binarias: dependientes e independientes
- Expresión algebraica: operadores lógicos
- Representación por tablas de verdad

Funciones lógicas

- Funciones de dos variables: *cuántas? cuáles?*
- Idem N variables

Cómo expresar una función lógica

- ¿Cada función tiene una única Tabla de Verdad?

- ¿Cada función tiene una única Expresión Algebraica?

$$¿\quad x'y'z + x'yz + xy' = x'z + xy' \quad ?$$

- Expresiones "*equivalentes*"

Buscando la representación algebraica unívoca

ALGUNAS DEFINICIONES

LITERAL: Una variable y/o su complemento.

TÉRMINO PRODUCTO: Conjunto de literales relacionadas por el conectivo “**•**”

TÉRMINO SUMA: Conjunto de literales relacionadas por el conectivo “**+**”

TÉRMINO NORMAL:
Término producto o suma en el cual ningún literal aparece más de una vez
- Producto normal
- Suma normal

TÉRMINO CANÓNICO:
Término normal que contiene tantos literales como variables la función.

Buscando la representación algebraica unívoca

'El adjetivo "canónico" se usa con frecuencia en matemáticas para indicar que algo es natural, como debe ser e independiente de elecciones arbitrarias, que es absoluto y no relativo a un observador, que es intrínseco y no depende de un sistema de referencia… '

(Wikipedia)

SUMA CANÓNICA Y PRODUCTO CANONICO:

- *"Suma de minitérminos"*
- *"Producto de maxitérminos"*

¿cómo paso de la tabla de verdad a la expresión canónica?

Representaciones unívocas de una función lógica

- ✓ Tabla de verdad
- ✓ Expresión algebraica por suma de minitérminos
- ✓ Expresión algebraica por producto de maxitérminos
- ✓ Suma de minitérminos en forma numérica
- ✓ Producto de maxitérminos en forma numérica

Compuerta

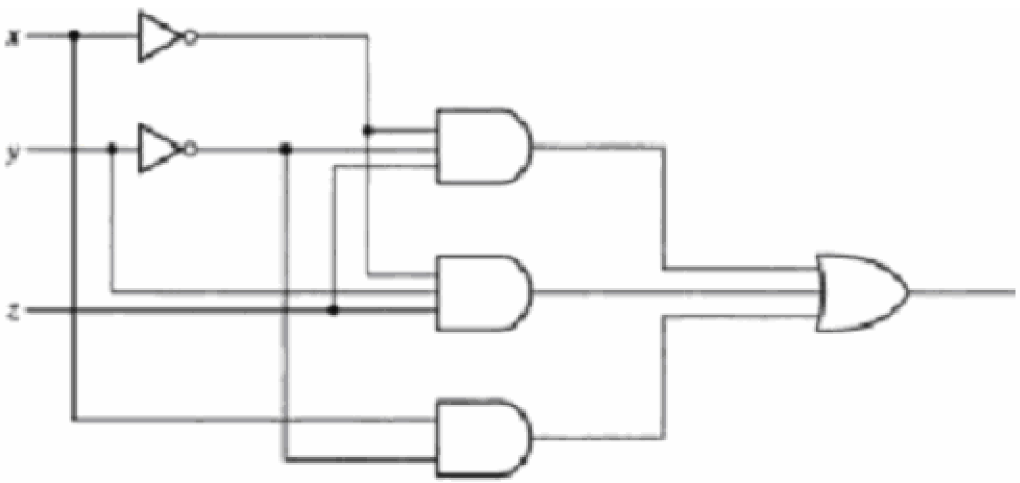
- Símbolo tipo bloque que representa una operación lógica
- Compuertas: *AND, OR, NOT, NAND, NOR, XOR*
- Relación directa entre la expresión algebraica y su representación gráfica
- Porqué representar por compuertas?

Dada una función lógica F(x,y,..)

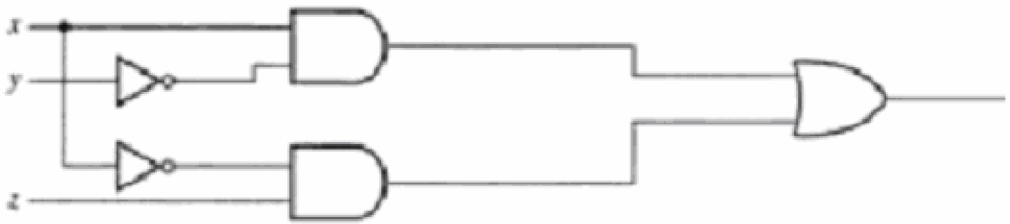
¿porqué? *¿porqué?*

“Expresión unívoca” “Expresión simple”

$$F(x,y,z) = x'y'z + x'yz + xy' \rightarrow F(x,y,z) = x'z + xy'$$



$F(x,y,z) = x'y'z +$



$F(x,y,z) = x'z +$

Criterio de “simplicidad” de una expresión booleana

- ✓ *Menor número de términos*
- ✓ *Menor número de variables en cada término*

Expresión Mínima

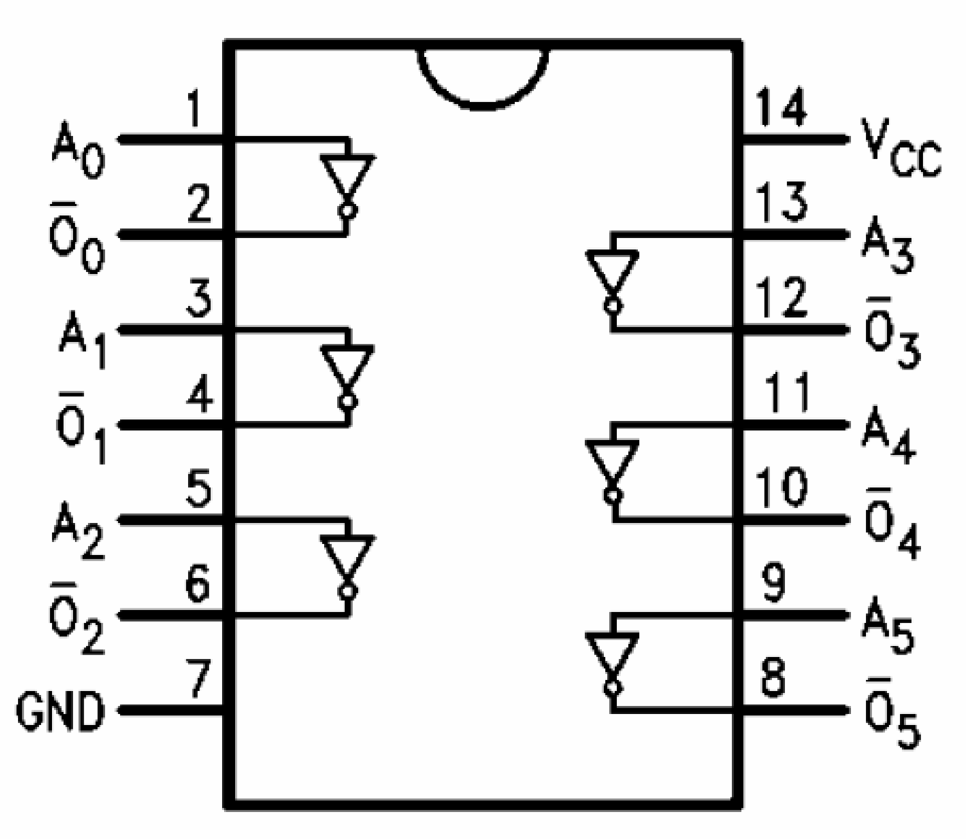
¿Porqué se que son equivalentes?

3 expr. ***equivalentes****:*

$$S = BC + ABC$$
$$S = ABC + AB$$
$$S = BC + AB$$

CI comerciales

74AC04



CI comerciales

74HC00

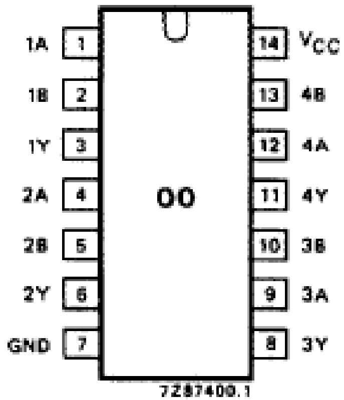


Fig.1 Pin configuration.

74HC00

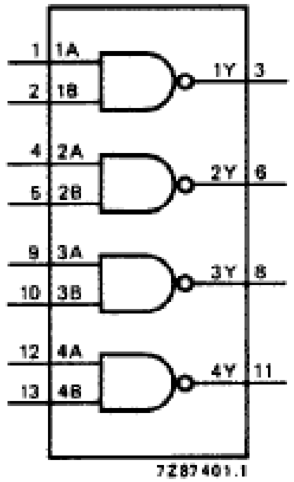
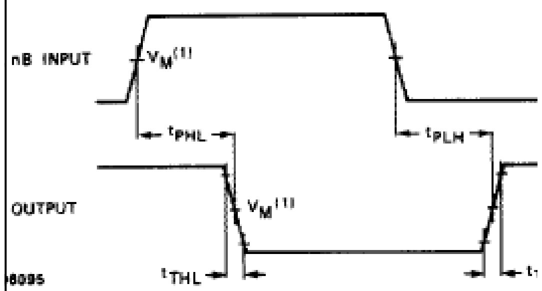


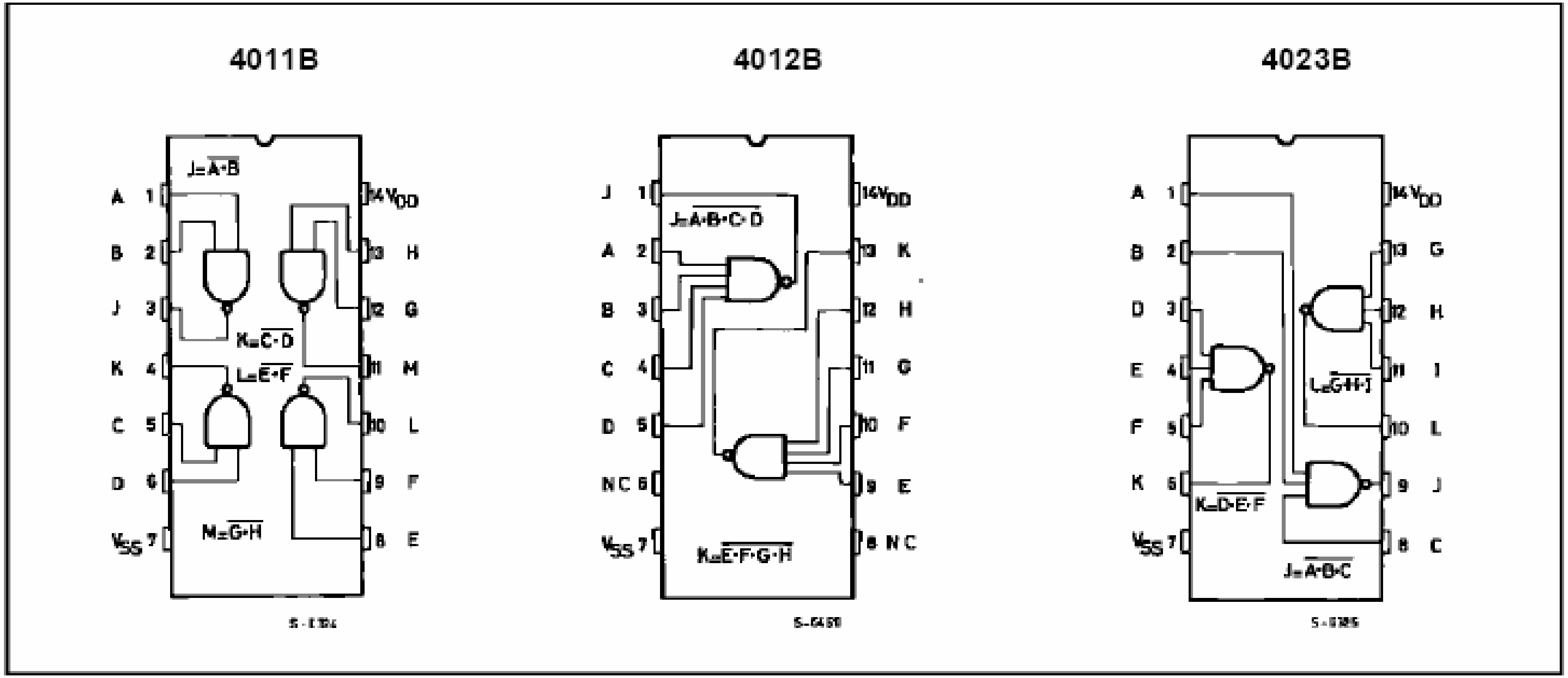
Fig.2 Logic symbol.

74HC00



CI comerciales

PIN CONNECTIONS



Expresiones algebraicas “simples”

- ✓ *Menos compuertas*
- ✓ *Menos entradas por compuerta*

- ✓ *Menor costo*
- ✓ *Menor tamaño*
- ✓ *Menor consumo*

Expresiones algebraicas “simples”

- ✓ *Menos compuertas*
- ✓ *Menos entradas por compuerta*

- ✓ *Menor costo*
- ✓ *Menor tamaño*
- ✓ *Menor consumo*

¿Cómo hago para <u>obtener</u> la expresión más simple?