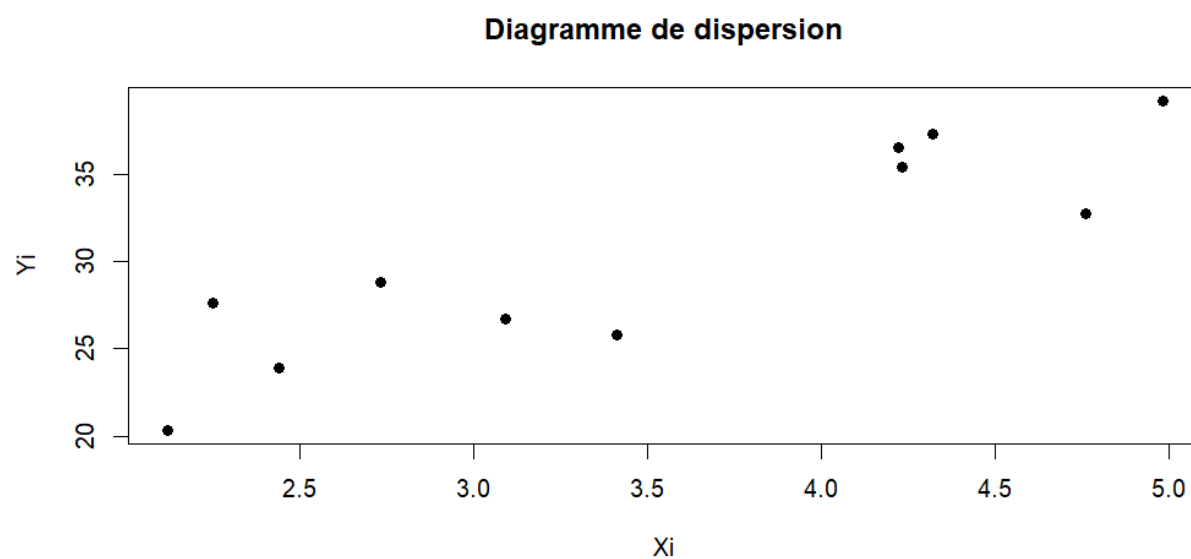


2-c) Diagramme de dispersion

```
R 4.4.1
> Xi<-c(2.12,2.25,4.23,4.98,4.76,4.22,3.09,2.73,2.44,4.32,3.41)
> Yi<-c(20.3,27.6,35.4,39.2,32.7,36.5,26.7,28.8,23.9,37.3,25.8)
> Wi<-c(1/24,1/12,1/48,7/48,1/24,1/12,1/6,5/48,1/12,7/48,1/12)
>
>
> #Construction du diagramme de dispersion
>
> plot(Xi,Yi, main = "Diagramme de dispersion",xlab = "Xi",ylab = "Yi", pch=19)
>
```



Les valeurs des estimateurs Beta, Beta0 et Beta1

Beta = 8.41

Beta_1 = 5.50

Beta_0 = 11.44

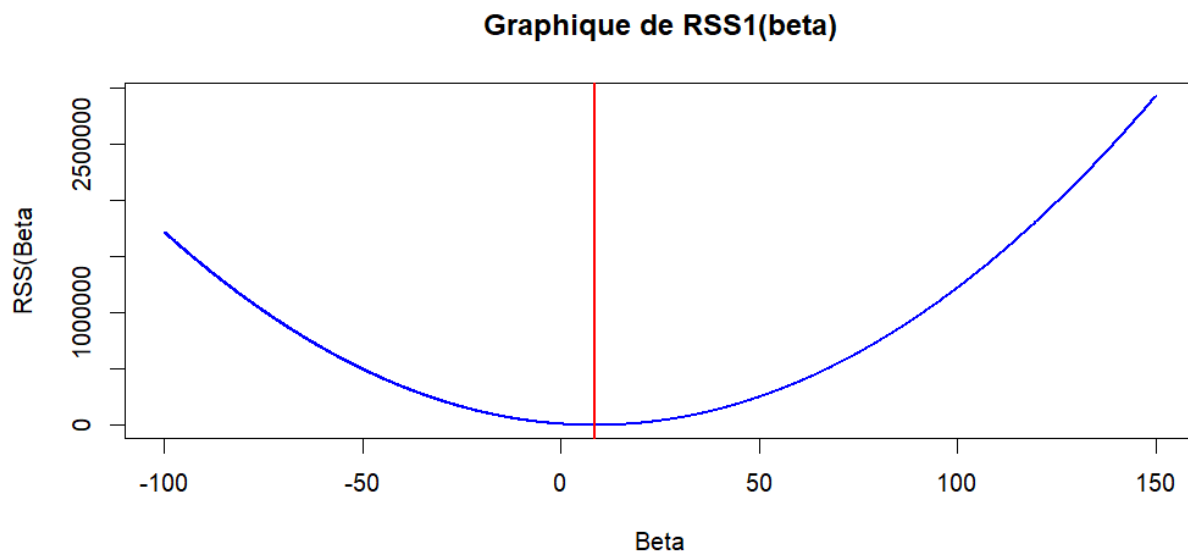
Les détails du calcul à la page suivante

```

> #Construction du diagramme de dispersion
>
> plot(Xi,Yi, main = "Diagramme de dispersion",xlab ="Xi",ylab = "Yi", pch=19)
>
>
> #Valeur de numériques des estimateurs obtenus precedemment
>
> ## Calcul de la somme des produits pondérés Xi*Yi et Xi^2
> sum_w_Xi_Yi <- sum(Wi * Xi * Yi)
> sum_w_Xi <- sum(Wi * Xi)
> sum_w_Yi <- sum(Wi * Yi)
> sum_w_Xi2 <- sum(Wi * Xi^2)
> sum_w <- sum(Wi)
>
> # Calcul de Beta_1
> Beta_1 <- (sum_w_Xi_Yi - (sum_w_Xi * sum_w_Yi) / sum_w) / (sum_w_Xi2 - (sum_w_Xi^2) / sum_w)
>
> # Calcul de Beta_0
> Beta_0 <- (sum_w_Yi - Beta_1 * sum_w_Xi) / sum_w
>
> # Affichage des résultats
> print(paste("Beta_1 =", Beta_1))
[1] "Beta_1 = 5.50799160304272"
> print(paste("Beta_0 =", Beta_0))
[1] "Beta_0 = 11.4430315353435"
>
> Calcul de Beta
Erreur : symbole inattendu dans "Calcul de"
> #Calcul de Beta
> Beta<-sum(Xi*Yi)/sum(Xi*Xi)
> print(paste("Beta = ",Beta))
[1] "Beta = 8.41547040208603"
>

```

2-d) Graphique de RSS1 en fonction de Beta



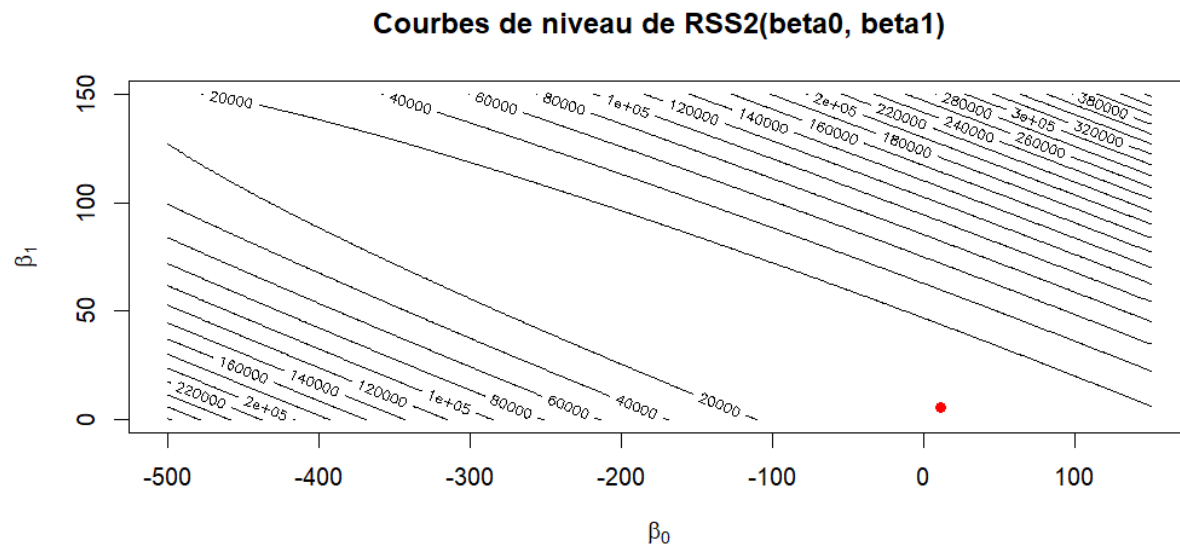
```

/
> #Graphe de RSS1 en fonction de Beta
>
> # Fonction RSS1
> RSS1 <- function(beta) {
+   sum((Yi - beta * Xi) ^ 2)
+ }
> # Calcul des valeurs de RSS1 pour différents beta
> beta_values <- seq(-100, 150, by = 0.1)
> rss_values <- sapply(beta_values, RSS1)
>
> #Tracer du graphe
> plot(beta_values,rss_values, type = 'l', col="blue", lwd=2,
+   xlab = "Beta", ylab = "RSS(Beta)",main = "Graphique de RSS1(beta)")
> abline(v = 8.41, col = 'red', lwd = 2)
> |

```

La valeur de $\text{Beta}=8.41$ calculée algébriquement, correspond presque exactement au minimum de la courbe observée graphiquement, qui est autour de $\text{Beta} = 8$. Cela montre que le calcul algébrique et le graphique sont en accord, avec une différence négligeable.

2-e) Graphique de RSS2 en fonction de Beta0 et Beta1



Les courbes de niveau montrent que le point estimé (Beta_0 et Beta_1) est bien situé près du minimum global de la fonction RSS_2 , confirmant que les valeurs calculées sont proches de la solution optimale. Les lignes de contour resserrées autour de ce point indiquent que nous sommes dans une région de faible erreur résiduelle.

```

<
> # Fonction RSS2
> RSS2 <- function(params) {
+   beta0 <- params[1]
+   beta1 <- params[2]
+   sum(Wi * (Yi - beta0 - beta1 * Xi) ^ 2)
+ }
> # Grille de valeurs pour beta0 et beta1
> beta0_values <- seq(-500, 150, by = 1)
> beta1_values <- seq(0, 150, by = 1)
>
> # Calcul de RSS2 pour chaque combinaison de beta0 et beta1
> rss1_grid <- outer(beta0_values, beta1_values, Vectorize(function(b0, b1) RSS2(c
(b0, b1))))
>
> # Tracer des courbes de niveau
> # Tracer les courbes de niveau
> contour(beta0_values, beta1_values, rss_grid, nlevels = 30,
+   xlab = expression(beta[0]), ylab = expression(beta[1]),
+   main = "Courbes de niveau de RSS2(beta0, beta1)")
Erreur : objet 'rss_grid' introuvable
> # Tracer les courbes de niveau
> contour(beta0_values, beta1_values, rss1_grid, nlevels = 30,
+   xlab = expression(beta[0]), ylab = expression(beta[1]),
+   main = "Courbes de niveau de RSS2(beta0, beta1)")
> points(11.44, 5.51, col = 'red', pch = 19) # Point optimal algébrique trouvé
> |

```

2-f) Optimisation des valeurs de valeurs des estimateurs pour le RSS, RSS1 et RSS2

```

>
> # Optimisation numérique pour RSS1
> result_RSS1 <- optim(par = 0, fn = RSS1, method = "Brent", lower = -100, upper =
150)
> beta_optimal_RSS1 <- result_RSS1$par
>
>
> #Optimisation de RSS2
> init_params_RSS2 <- c(0, 0)
> result_RSS2 <- optim(init_params_RSS2, RSS2, method = "BFGS")
> beta0_optimal_RSS2 <- result_RSS2$par[1]
> beta1_optimal_RSS2 <- result_RSS2$par[2]
>
>
> #Optimisation de RSS2
> RSS3 <- function(params) {
+   beta0 <- params[1]
+   beta1 <- params[2]
+   beta2 <- params[3]
+   sum(Wi * (Yi - beta0 - beta1 * Xi - beta2 * Xi^2) ^ 2)
+ }
> init_params_RSS3 <- c(11.44, 5.51, 0)
> result_RSS3 <- optim(init_params_RSS3, RSS3, method = "L-BFGS-B", lower = c(-50
0, -500, -500), upper = c(500, 500, 500))
> beta0_optimal_RSS3 <- result_RSS3$par[1]
> beta1_optimal_RSS3 <- result_RSS3$par[2]
> beta2_optimal_RSS3 <- result_RSS3$par[3]
>

```

```

/
> cat("Résultat optimal pour RSS1:\n")
Résultat optimal pour RSS1:
> cat("Beta optimal pour RSS1:", beta_optimal_RSS1, "\n\n")
Beta optimal pour RSS1: 8.41547

> cat("Résultat optimal pour RSS2:\n")
Résultat optimal pour RSS2:
> cat("Beta0 optimal pour RSS2:", beta0_optimal_RSS2, "\n")
Beta0 optimal pour RSS2: 11.44301
> cat("Beta1 optimal pour RSS2:", beta1_optimal_RSS2, "\n\n")
Beta1 optimal pour RSS2: 5.507998

> cat("Résultat optimal pour RSS3:\n")
Résultat optimal pour RSS3:
> cat("Beta0 optimal pour RSS3:", beta0_optimal_RSS3, "\n")
Beta0 optimal pour RSS3: 19.50651
> cat("Beta1 optimal pour RSS3:", beta1_optimal_RSS3, "\n")
Beta1 optimal pour RSS3: 0.6870021
> cat("Beta2 optimal pour RSS3:", beta2_optimal_RSS3, "\n\n")
Beta2 optimal pour RSS3: 0.6689546

```

Comparaison des valeurs pour RSS1 et RSS2 :

RSS1(β) :

Valeur algébrique : $\beta = 8.41$

Valeur optimisée : $\beta = 8.41$

Comparaison : La différence entre la valeur algébrique et la valeur optimisée est très faible (environ 0.005). Cela montre que les deux méthodes sont en très bon accord, confirmant que le calcul algébrique fournit une solution presque identique à celle obtenue par optimisation numérique.

RSS2 :

Valeurs algébriques : $\beta_0 = 11.44$ et $\beta_1 = 5.50$

Valeurs optimisées : $\beta_0 = 11.44$ $\beta_1 = 5.50$

Comparaison : Ici aussi, la différence est très faible. Pour β_0 , la différence est de l'ordre de 0.003, et pour β_1 , elle est de l'ordre de 0.008. Ces écarts mineurs peuvent être attribués à des approximations algébriques ou des différences dans les méthodes d'optimisation, mais elles restent négligeables.