CAROZZAT
Pierre

MACS207b. Processus de Hawkes

1. M est une mesure de Poisson sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

Par théorème de représentation d'un processus de Poisson non homogène, $N(t)$ est un Poisson non homogène d'intensité $\left(\nu + \int_0^s \varphi(s-u)\,dN(u)\right)ds$. Notons $\lambda(s) = \nu + \int_0^s \varphi(s-u)\,dN(u)$

Par conséquent,

$$\mathbb{E}(N(t)) = \mathbb{E}\left(\int_0^t \lambda(s)\,ds\right) \quad \text{) linéarité}$$

$$\boxed{= \nu t + \mathbb{E}\left(\int_0^t \left(\int_0^s \varphi(s-u)\,dN(u)\right)ds\right)}$$

2. Soit $t > 0$.

Posons $g_t :]-\infty, t] \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \phi(t-x)$

N et g_t sont croissants (donc monotones) donc à variations finies

Par la formule de changement de variable, on a :

$$N(t)\underbrace{g_t(t)}_{=0} = \int_0^t N(s)\,dg_t(s) + \int_0^t g_t(s)\,dN(s) + \underbrace{[g_t, N]_t}_{=0 \text{ car } g_t \text{ est continue}}$$

Donc $\int_0^t \phi(t-s)\,dN(s) = -\int_0^t N(s)\,\underbrace{dg_t(s)}_{= -\phi(t-s)ds}$

Donc $\boxed{\int_0^t \phi(t-s)\,dN(s) = \int_0^t N(s)\,\varphi(t-s)\,ds}$

3. Pour $n \geq 1$, l'hypothèse de récurrence suivante :

HR_n : " $\int_0^\infty \varphi_n(t)\,dt = \kappa^n$ "

Initialisation : HR_1 est vraie par définition de κ.

Soit $n \geq 1$ tel que HR_n est vérifiée. Montrons HR_{n+1}.

$$\int_0^\infty \varphi_{n+1}(t)\,dt = \int_0^\infty (\varphi_n * \varphi)(t)\,dt$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_0^t \varphi(t-s)\,\varphi_n(s)\,ds\right) dt$$

Fubini car φ positive mesurable et par récurrence φ_n aussi et changement de variable $(u = t-s)$

$$= \int_0^\infty \varphi(s)\left(\int_0^\infty \varphi_n(u)\,du\right) ds$$

par HR_n

$$= \int_0^\infty \varphi(s)\,\kappa^n\,ds$$

$$= \kappa^{n+1}$$ d'où HR_{n+1}.

Donc $\boxed{\int_0^\infty \varphi_n(t)\,dt = \kappa^n}$

4. Par récurrence, $\forall n \geq 0$, $\varphi_n \in L^1(\mathbb{R}^+, dt)$

De plus, $\sum_{n \geq 1} \|\varphi_n\|_{L^1}$ converge (série géométrique de terme $\kappa < 1$ d'après 3.). Donc par convergence absolue, φ converge dans $L^1(\mathbb{R}^+, dt)$ (vers $\frac{\kappa}{1-\kappa}$). De plus, la convergence est presque-sure car les variables sont déterministes et la convergence est dans $L^1(\mathbb{R}^+, dt)$.

5. D'après la question 1 :

$$\mathbb{E}(N(t)) = \nu t + \mathbb{E}\left(\int_0^t \left(\int_0^s \varphi(s-u)\,dN(u)\right) ds\right)$$ Fubini

$$= \nu t + \mathbb{E}\left(\int_0^t \left(\int_u^t \varphi(s-u)\,ds\right) dN(u)\right)$$ changement de variable ($s = x - u$)

$$= \nu t + \mathbb{E}\left(\int_0^t \underbrace{\left(\int_0^{t-u} \varphi(s)\,ds\right)}_{\phi(t-u)} dN(u)\right)$$

$$= \nu t + \mathbb{E}\left(\int_0^t \phi(t-u)\,dN(u)\right)$$ d'après 3.

$$= \nu t + \mathbb{E}\left(\int_0^t \varphi(t-u)\,N(u)\,du\right)$$ propriété de $\mathbb{E}(.)$

$$\boxed{= \nu t + \int_0^t \varphi(t-u)\,\mathbb{E}(N(u))\,du}$$

6. La fonction $\begin{array}{l}\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \nu t\end{array}$ est mesurable et bornée sur tout compact. D'après le théorème 1, on a donc : (on prend $f = \mathbb{E}(N(.))$)

$$\mathbb{E}(N(t)) = \nu t + \int_0^t \varphi(t-s)\,\nu s\,ds$$

i.e $$\boxed{\mathbb{E}(N(t)) = \nu t + \nu \int_0^t \varphi(t-s)\,s\,ds}$$

7. Pour $n \geq 1$, soit l'hypothèse de récurrence suivante :

$$HR_n : \text{“} \varphi_n(t) = \frac{\alpha^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\alpha t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t) \text{”}$$

<u>Initialisation</u> : HR_1 vraie par définition de φ.

Scanné avec CamScanner

CARDOUAT
Prénom

Soit $n \geq 1$ tel que HR_n est vérifiée.

$$\varphi_{n+1}(t) = \int_0^t \varphi(t-s)\,\varphi_n(s)\,ds \quad \} \, HR_n$$

$$= \int_0^t \alpha e^{-\alpha t} \cancel{e^{\alpha s}} \frac{\alpha^n}{(n-1)!} \cancel{e^{-\alpha s}} s^{n-1}\,ds$$

$$= \frac{\alpha^{n+1}}{(n-1)!} e^{-\alpha t} \underbrace{\int_0^t s^{n-1}\,ds}_{= \frac{t^n}{n}}$$

$$= \frac{\alpha^{n+1}}{n!} t^n e^{-\alpha t} \qquad \text{d'où } HR_{n+1}.$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $\varphi_n(t) = \dfrac{\alpha^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\alpha t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t)$

Puis $\psi(t) = \alpha \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha t)^{n-1}}{(n-1)!}}_{= e^{\alpha t}} e^{-\alpha t} = \alpha$

Donc $\mathbb{E}(N(t)) = \nu t + \nu \alpha \int_0^t s\,ds$

Donc $\boxed{\mathbb{E}(N(t)) = \nu t \left(1 + \alpha \frac{t}{2}\right)}$

8. On a d'une part :

$$\int_0^t \varphi(t-s) X(s)\,ds = \int_0^t \varphi(t-s) N(s)\,ds - \int_0^t \varphi(t-s)\,\mathbb{E}(N(s))\,ds \quad \text{(linéarité)}$$

$$= \underbrace{\int_0^t \varphi(t-s) N(s)\,ds}_{= \int_0^t \phi(t-s)\,dN(s) \text{ d'après 2.}} + \nu t - \mathbb{E}(N(t)) \quad \text{d'après 5.}$$

D'autre part :

$$W(t) = \underbrace{\int_0^t \int_0^{\infty} \mathbb{1}_{\{z \leq \nu + \int_0^s \phi(s-u)\,dN(u)\}}\,dM(s,z)}_{= N(t)} - \int_0^t \int_0^{\infty} \mathbb{1}_{\{z \leq \nu + \int_0^s \varphi(s-u)\,dN(u)\}}\,ds\,dz$$

Scanné avec CamScanner

Puis $-\int_0^t \int_0^\infty \mathbb{1}_{\{z \le \nu + \int_0^s \varphi(s-u)dN(u)\}} \, ds\, dz$ } Fubini

$= -\int_0^t \left(\nu + \int_0^s \varphi(s-u)dN(u)\right) ds$

$= -\nu t - \underbrace{\int_0^t \left(\int_0^s \varphi(s-u)dN(u)\right) ds}_{= \int_0^t \underbrace{\int_0^{t-u} \varphi(s)ds}_{=\Phi(t-u)} \, dN(u)}$ } Fubini et changement de variable

Donc $W(t) + \int_0^t \varphi(t-s)X(s)ds = N(t) - \nu t - \int_0^t \Phi(t-u)dN(u) + \int_0^t \Phi(t-u)dN(u) + \nu t - \mathbb{E}(N(t))$

$= N(t) - \mathbb{E}(N(t))$

$= X(t)$

Donc $\boxed{\forall t \geq 0, \ X(t) = W(t) + \int_0^t \varphi(t-s)X(s)ds}$

9. Soit $v \in [0,1]$

$|X(vT)| \le \underbrace{|W(vT)|}_{\le \sup_{t \le vT}|W(t)|} + \int_0^{vT} |\varphi(vT-s)| \underbrace{|W(s)|}_{\le \sup_{t\le vT}|W(t)|} ds$ d'après 8. et inégalité triangulaire

$\le \sup_{t\le vT}|W(t)| \left(1 + \int_0^{vT} |\varphi(vT-s)| ds\right)$

} changement de variable affine

$\le \sup_{t \le vT}|W(t)| \left(1 + \underbrace{\int_0^{vT}|\varphi(u)| du}_{\le \int_0^\infty |\varphi(u)|du}\right)$ car fonction $|\varphi|$ positive [illegible]

$\le \frac{K}{1-K}$ d'après 4 et inversion $\Sigma - \int$

$\le \frac{1}{1-K} \sup_{t\le vT}|W(t)|$

Puis comme $v\in[0,1]$, $vT\leq T$ et par croissance de $|W|$ qui est positive :

$$\sup_{t\leq vT}|W(t)|\leq\sup_{t\leq T}|W(t)|$$

Donc finalement, $|X(vT)|\leq\frac{1}{1-K}\sup_{t\leq T}|W(t)|$

et cela $\forall v\in[0,1]$

Donc $\boxed{\sup_{v\in[0,1]}|X(vT)|\leq\frac{1}{1-K}\sup_{t\leq T}|W(t)|}$

10. $N(t)$ est un processus de Poisson d'intensité $\lambda(s)ds$.

Donc $W(t)=N(t)-\int_0^t\lambda(s)ds$ est une martingale pour la filtration $\mathcal{F}_t^N=\sigma(N(u),u\leq t)$.

En effet, pour tout processus de Poisson N, $N(t)-N(s)$ $\perp\!\!\!\perp$ $\mathcal{F}_s^N$ donc $\mathbb{E}(N(t)-N(s)|\mathcal{F}_s^N)=\mathbb{E}(N(t)-N(s))=\int_s^t\lambda(u)du$ et le résultat ~~en~~ découle.

~~Puis en~~

Par ailleurs, $\mathbb{1}_{\{z\leq\nu+\int_0^s\varphi(s-u)dN(u)\}}$ est prévisible et $\sup_t\mathbb{E}\left(\int_0^t\int_{\mathbb{R}^+}\mathbb{1}_{\{z\leq\nu+\int_0^s\varphi(s-u)dN(u)\}}dsdz\right)<+\infty$.

Donc d'après le théorème de représentation des martingales,

$$W_t^2-\int_0^t\int_0^\infty\mathbb{1}_{\{z\leq\nu+\int_0^s\varphi(s-u)dN(u)\}}^2dsdz$$ est une martingale locale.

Donc $\langle W\rangle_t=\int_0^t\int_0^\infty\mathbb{1}_{\{z\leq\nu+\int_0^s\varphi(s-u)dN(u)\}}^2dsdz$

ie $\boxed{\langle W\rangle_t=\int_0^t\int_0^\infty\mathbb{1}_{\{z\leq\nu+\int_0^s\varphi(s-u)dN(u)\}}dsdz}$

11. D'après 9. :

$$\left(\frac{1}{T}\sup_{v\in[0,1]}|X(vT)|\right)^2 \leq \frac{1}{T^2}\,\frac{1}{(1-K)^2}\,\sup_{t\leq T}|W(t)|^2$$

Puis $\mathbb{E}\left(\left(\frac{1}{T}\sup_{v\in[0,1]}|X(vT)|\right)^2\right) \leq \frac{1}{T^2}\,\frac{1}{(1-K)^2}\,\mathbb{E}\left(\sup_{t\leq T}|W(t)|^2\right)$

Puis d'après l'inégalité de Doob et la question 10 :

$$\exists\, c_p\in\mathbb{R}^+,\ \mathbb{E}\left(\sup_{t\leq T}|W(t)|^2\right) \leq c\,\mathbb{E}\left(\underbrace{\int_0^T\int_0^\infty \mathbb{1}_{\{z\leq \nu+\int_0^s\varphi(s-u)\,dN(u)\}}\,dz\,ds}_{=\nu T+\int_0^T\int_0^s\varphi(s-u)\,dN(u)\,ds}\right)$$

$$\leq c_p\,\mathbb{E}(N(T)) \quad \text{d'après 1. et linéarité}$$

Donc $\boxed{\mathbb{E}\left(\left(\frac{1}{T}\sup_{v\in[0,1]}|X(vT)|\right)^2\right) \leq \frac{1}{T^2}\,\underbrace{\frac{c_p}{(1-K)^2}}_{:=c}\,\mathbb{E}(N(T))}$

12. D'après 6. :

$$|\mathbb{E}(N(T))| \leq \nu T+\nu\int_0^T|\varphi(T-s)|\,|s|\,ds \quad \text{(inégalité triangulaire)}$$

$$\leq \nu T+\nu T\underbrace{\int_0^T|\varphi(T-s)|\,ds}_{\text{bornée car } \varphi \text{ converge dans } L^1 \text{ d'après 4.}}$$

Donc d'après 11. :

$$0\leq \mathbb{E}\left(\left(\frac{1}{T}\sup_{v\in[0,1]}|X(vT)|\right)^2\right) \leq \underbrace{\frac{\nu\left(1+\int_0^T|\varphi(T-s)|\,ds\right)}{T}}_{\xrightarrow[T\to+\infty]{} 0}.$$

On conclut par encadrement que $\boxed{\frac{1}{T}\sup_{v\in[0,1]}|X(vT)| \xrightarrow[L^2]{T\to\infty} 0}$