Modélisation Vélib

Priam Cardouat, Célia Doclot, Nicolas Wittmann

1 June 2021

Table des matières

1 Introduction

On considère un système de vélos partagés, type Vélib, où les vélos sont disponibles dans des stations dédiées et peuvent être empruntés pour faire des trajets d'une station à une autre. Nous nous proposons dans un premier temps de donner une modélisation du Vélib.

2 Modèle

On suppose que la capacité des stations est illimitée pour l'accueil des vélos, c'est-à-dire que l'on peut toujours rendre un vélo dans une station (une station peut toutefois être vide de vélos). On suppose aussi que tous les trajets se font d'une station à une autre exclusivement, il n'est pas possible de revenir à la station dont on part. De plus, il y a un nombre fini N de vélos ainsi qu'un nombre fini S de stations.

Nous allons nous baser sur un modèle des colonies, en nous réferant entre autre au livre *Lectures on Stochastic Networks* par F. Kelly et E. Yudovin.

2.1 Colonies et espace d'états

Pour les colonies, nous avons tout d'abord S colonies qui correspondent aux S stations. La première difficulté est de pouvoir représenter les vélos en cours de trajets : ils ne sont pas représentés avec les S stations car ils ne se trouvent pas dans cet état. Si on les représentait comme encore dans la station de départ alors qu'il sont déjà emprunté des utilisateurs pourraient trouver la station vide alors qu'il est encore marqué qu'il y a des vélos et il en va de même si on ajoute directement 1 à l'arrivée cela reviendrait à faire comme si le trajet était instantané. On ne peux pas non plus faire disparaître le vélo de la station de départ sans l'ajouter ailleurs car on aurait un nombre non constant de vélos.

Il faut donc créer un état intermédiaire qui correspond au trajet. Par ailleurs, une fois le vélo et son client dans cet état, il faut qu'il sache dans quelle station il va : il faut donc un état par trajet. Un état intermédiaire par station ne permet pas de représenter le trajet choisi. En effet, avoir un seul état supplémentaire par station nous ferait perdre l'information sur la loi du temps de trajet et donc du temps passé dans l'état intermédiaire entre

2 stations. Il faut donc $S-1$ états intermédiaires par station correspondants au trajets possibles depuis cette station. Ainsi, il faut finalement S^2 colonies pour modéliser les états des Vélib (à savoir les S stations et les $(S-1)*S$ trajets possibles).

En ce qui concerne les états du modèles, nous allons considérer le nombre de vélos disponibles à chaque station et à chaque trajet. Ainsi, la station i a un nombre n_i de vélos, et le trajet de la station i vers la station j (avec $i \neq j$), noté $\beta_{i,j}$, a un nombre $n_{\beta i,j}$ de vélos. L'espace des états est donc donné par $\{n \in N^{S^2}, \sum_{i=1}^{S^2} n_i = N\}$.

Nous avons bien un processus de Markov puisqu'à l'instant $t+1$, l'état ne dépend que de celui à l'instant t.

2.2 Exemple de diagramme des transitions

Nous pouvons représenter le diagramme de transition alors obtenu sur un exemple simple avec 3 stations :

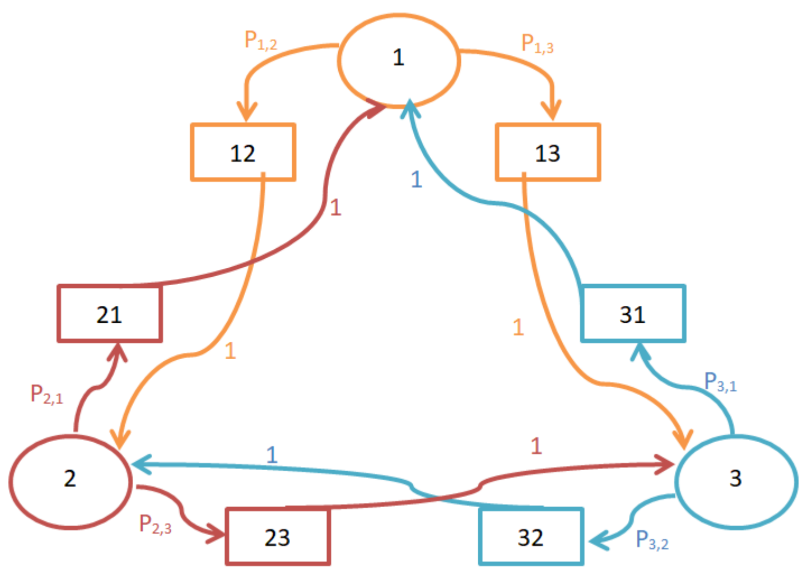

FIGURE 1 – Diagramme des transitions pour 3 stations

Sur cette figure, les stations sont numérotées , 1, 2, 3 et les trajets possibles

ij avec $i \neq j$. La probabilité de passer d'une station i au trajet ij est donnée par $P_{i,j}$ avec P la matrice de transition, puis la probabilité de passer d'un trajet à la station de destination est de 1.

2.3 Taux de transition

Nous avons deux types de transitions : les transitions partant d'une station allant à un trajet (qui part de cette station) et les transitions allant d'un trajet à une station (qui en est la destination).

— Le premier cas correspond à l'arrivée d'un client donc le départ d'un vélo (sous réserve qu'il y ait des vélos disponibles) de la station i allant vers la station j :
  Ce cas de figure correspond à, pour reprendre les notations du document sur les colonies, $T_{i,\beta_{i,j}}$. On aura alors un taux de transition de $q(n, T_{i,\beta_{i,j}}(n)) = \lambda_i 1_{(n_i>0)} * P_{i,j}$ avec λ_i qui est un nombre de départs par unité de temps (disons un nombre de départ par minute, il faudra faire attention à l'homogénéisation) et n_i le nombre de vélos à la station i dans l'état n.

— Le deuxième cas correspond au passage de l'état "en trajet" à l'arrivée à destination (disons pour le trajet entre la station i et la station j) toujours sous réserve qu'il y ait des personnes en cours de trajet :
  Nous aurons donc un taux de transition de $q(n, T_{\beta_{i,j},j}(n)) = 1/\tau_{i,j} 1_{(n_{i,j}>0)}$ avec $\tau_{i,j}$ le temps de trajet moyen entre la station i et la station j et $n_{i,j}$ le nombre de personnes en train de faire ce trajet.

— Tous les autres taux de transition sont nuls : ceux allant directement d'une station à une autre, ceux allant d'une station i à un état $\beta_{j\neq i,k}$, ceux allant d'un état de transportβ à un autre ou ceux allant de $\beta_{i,j}$ à une station autre que la j.

2.4 Paramètres du modèle

Ainsi, les paramètres du modèles sont les taux de départ λ_i (en nombre de départs par unité de temps, par exemple le nombre de départ par minute), les temps de trajets moyens $\tau_{i,j}$ entre les stations (en unité de temps, en minute par exemple), ainsi que la matrice de transition P, correspondant aux probabilités qu'un client partant d'une certaine station se rende dans telle autre.