

# Versuch O10 - 624568

Date: 2023-06-26  
Tags: O10  
Created by: Samuel Brinkmann

## Versuch O10

	Matrikelnummer
Person 1:	624568
Person 2:	626758

### 0. Rohdaten und Auswertung

**Tab.1: Bessel-Methode mit Linse 2:** Position des Gegenstandes  $P_G$ , des Reiters der Linse auf der linken  $P_L$  bzw. rechten  $P_R$  Besselposition und des Schirmes  $P_B$

(für 8 unterschiedliche Abstände zwischen Gegenstand und Schirm)

Position des Gegenstandes	$P_G = 0.0 \text{ cm}$	(immer gleiche Position)
Ungenauigkeit der Position des Gegenstandes	$u_{PG} = 0.2 \text{ cm}$	(immer gleich)
Ungenauigkeit der Position des Schirms (Ablesegenauigkeit)	$u_{PB} = 0.05 \text{ cm}$	(bleibt gleich)

$P_B$ (cm)	$P_L$ (cm)	$u_{PL}$ (cm)	$P_R$ (cm)	$u_{PR}$ (cm)		$l = P_B - P_G$ (cm)	$u_l$ (cm)	$e = P_R - P_L$ (cm)	$u_e$ (cm)	$f$ (cm)	$u_f$ (cm)
100	42,7	0,5	56,3	0,5		100,00	0,25	13,6	1,0	24,54	0,09
105	39,8	0,5	66	0,5		105,00	0,25	26,2	1,0	24,62	0,14
110	37,9	0,5	73,7	0,5		110,00	0,25	35,8	1,0	24,59	0,18
114,8	35,5	0,5	79,5	0,5		114,80	0,25	44,0	1,0	24,48	0,20
120	34,8	0,5	86,1	0,5		120,00	0,25	51,3	1,0	24,52	0,23
125	33,6	0,5	91,8	0,5		125,00	0,25	58,2	1,0	24,48	0,24
130	33,4	0,5	97,3	0,5		130,00	0,25	63,9	1,0	24,65	0,26

135	32,8	0,5	102,9	0,5		135,00	0,25	70,1	1,0	24,65	0,27
-----	------	-----	-------	-----	--	--------	------	------	-----	-------	------

Die Unsicherheiten  $u_{PL}$  und  $u_{PR}$  wurden quantitativ durch mehrfaches verschieben der Linse und einschätzen der Schärfe des Bildes auf dem Schirm ermittelt. Die Unsicherheit durch das Ablesen der Position kann gegenüber der Schärfe vernachlässigt werden. Die Unsicherheit von  $l$  ergibt sich aus der Summe der Unsicherheiten für  $P_G$  und  $P_B$  wie folgt  $u_l = u_{PG} + u_{PB}$  (keine Gauß'sche Fehlerfortpflanzung, da sich die Unsicherheiten auf der gleichen Skala befinden und im worst-case addiert werden müssen). Die Unsicherheit von  $e$  analog zu der von  $l$  mit  $u_e = u_{PL} + u_{PR}$ . Die Unsicherheit von  $f$  ergibt sich mit der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung als  $u_f = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{e}{l} \cdot u_e\right)^2 + \left(\left(\frac{1}{4} + \frac{e^2}{4 \cdot l^2}\right) \cdot u_l\right)^2}$ .

**Tab.2: Sphärometer mit Linse 3: Vorzeichen von  $h$  beachten**

	Ergebnis	Unsicherheit	Sphärometer-Messung	Messwert	Unsicherheit
Brechungsindex	$n = 1.52$	-----	Glasplatte	$m_0 = 11.70$ mm	$u_{m0} = 0.005$ mm
Seite 1 (konvex / konkav)	$h_1 = 0.790$ mm	$u_{h1} = 0.01$ mm	Linse Seite 1 (mit Nummer)	$m_1 = 12.49$ mm	$u_{m1} = 0.005$ mm
Seite 2 (konvex / konkav)	$h_2 = 0.790$ mm	$u_{h2} = 0.01$ mm	Linse Seite 2	$m_2 = 12.49$ mm	$u_{m2} = 0.005$ mm

$h_i = m_i - m_0$  (nach Abb.7 der Versuchsanleitung) und Unsicherheit  $u_{h_i} = u_{m_0} + u_{m_i}$  ( $i = 1,2$ ) (keine Gauß'sche Fehlerfortpflanzung, da sich die Unsicherheiten auf der gleichen Skala befinden und im worst-case addiert werden müssen). Die Unsicherheiten  $m_i$  für  $i=1,2,3$  ergeben sich aus der Ablesegenauigkeit des Sphärometers.

$r = 16.4$  mm (ohne Unsicherheit)

### Abbe-Methode mit Linse 2+3:

**Tab.3a: gleich bleibende Größen**

	Ergebnis	Unsicherheit
Abstand der Linsen	$d = 73$ mm	$u_d = 5$ mm
Position Gegenstand	$P_G = 0.0$ mm	$u_{pG} = 2$ mm

**Tab.3b: Messwerte für Linsensystem 2+3**

Position der Kante $P_K$ (cm)	Unsicherheit Position der Kante $u_{pK}$ (cm)	Untersuchte Gegenstands-größe $G$ (cm)	Untersuchte Bildgröße $B$ (cm)	Unsicherheit Bildgröße $u_B$ (cm)		Vergrößerung $\Gamma = B/G$	$\Gamma = 1 + G/B$	$u_\Gamma$	$x = P_K - P_G$ (cm)	$u_x$ (cm)
-------------------------------	---	--	--------------------------------	-----------------------------------	--	-----------------------------	--------------------	------------	----------------------	------------

11.9	0.3	1	2.5	0.1		2.5	1.400	0.017	11.9	0.5
10.7	0.3	1	3.3	0.1		3.3	1.303	0.010	10.7	0.5
10.1	0.3	1	3.8	0.1		3.8	1.263	0.007	10.1	0.5
9.8	0.3	1	4.4	0.1		4.4	1.227	0.006	9.8	0.5
9.6	0.3	1	4.8	0.1		4.8	1.208	0.005	9.6	0.5
9.4	0.3	1	5.3	0.1		5.3	1.189	0.004	9.4	0.5
13.2	0.3	1	1.9	0.1		1.9	1.526	0.028	13.2	0.5
16.7	0.3	1	1.2	0.1		1.2	1.83	0.07	16.7	0.5

Die Unsicherheiten  $u_{PK}$  wurde quantitativ durch mehrfaches verschieben der Linse und einschätzen der Schärfe des Bildes auf dem Schirm ermittelt. Die Unsicherheit durch das Ablesen der Position kann gegenüber der Schärfe vernachlässigt werden. Die Unsicherheit  $u_B$  wurde durch mehrfaches messen bei unterschiedlichen Schirmpositionen abgeschätzt. Die Unsicherheit für  $u_\eta$  ergibt sich mit der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung wie folgt:  
 $u_\eta = G/B^2 \cdot u_B$ . Die Unsicherheit für  $u_x$  ergibt sich aus der Summe der Unsicherheiten  $u_{PK}$  und  $u_{PG}$  (keine Gauß'sche Fehlerfortpflanzung, da sich die Unsicherheiten auf der gleichen Skala befinden und im worst-case addieren).

Umdrehen des Reiters mit dem Linsensystem

**Tab.3c: Messwerte für Linsensystem 3+2**

Position der Kante $P_K'$ (cm)	Unsicherheit Position der Kante $u_{PK}'$ (cm)	Untersuchte Gegenstands-größe $G$ (cm)	Untersuchte Bildgröße $B$ (cm)	Unsicherheit Bildgröße $u_B$ (cm)		Vergrößerung $\eta' = B/G$	$\eta' = 1 + G/B$	$u_\eta'$	$x' = P_K' - P_G$ (cm)	$u_x'$ (cm)
19.1	0.3	1	2.5	0.1		2.5	1.400	0.017	19.1	0.5
17.9	0.3	1	3.3	0.1		3.3	1.303	0.010	17.9	0.5
17.5	0.3	1	3.8	0.1		3.8	1.263	0.007	17.5	0.5
17.1	0.3	1	4.4	0.1		4.4	1.227	0.006	17.1	0.5
16.9	0.3	1	4.8	0.1		4.8	1.208	0.005	16.9	0.5
16.6	0.3	1	5.3	0.1		5.3	1.189	0.004	16.6	0.5
20.5	0.3	1	1.9	0.1		1.9	1.526	0.028	20.5	0.5
24.4	0.3	1	1.2	0.1		1.2	1.83	0.07	24.4	0.5

Die Unsicherheiten  $u_{PK'}$  wurde quantitativ durch mehrfaches verschieben der Linse und einschätzen der Schärfe des Bildes auf dem Schirm ermittelt. Die Unsicherheit durch das Ablesen der Position kann gegenüber der Schärfe vernachlässigt werden. Die Unsicherheit  $u_B$  wurde durch mehrfaches messen bei unterschiedlichen Schirmpositionen abgeschätzt. Die Unsicherheit für  $u_\eta$  ergibt sich mit der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung wie folgt:  
 $u_\eta = G/B^2 \cdot u_B$ . Die Unsicherheit für  $u_x'$  ergibt sich aus der Summe der Unsicherheiten  $u_{PK'}$  und  $u_{PG}$  (keine Gauß'sche Fehlerfortpflanzung, da sich die Unsicherheiten auf der gleichen Skala befinden und im worst-case addieren).

# 1. Theorie

An dieser Stelle wird eine kurze Zusammenfassung über die dem Versuch zugrundeliegenden Physik gegeben. Eine ausführliche Betrachtung kann der Versuchsanleitung und einschlägiger Literatur entnommen werden.

Für dünne Linsen gilt die Abbildungsgleichung (Linsengleichung)

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \quad \text{Gl.(1)}$$

die den Zusammenhang der Gegenstandsweite  $g$  und der Bildweite  $b$  sowie der Brennweite  $f$  beschreibt.

Exemplarisch zeigt Abb. 1 den Strahlengang einer dünnen Sammellinse, für den Fall  $g > f$ .

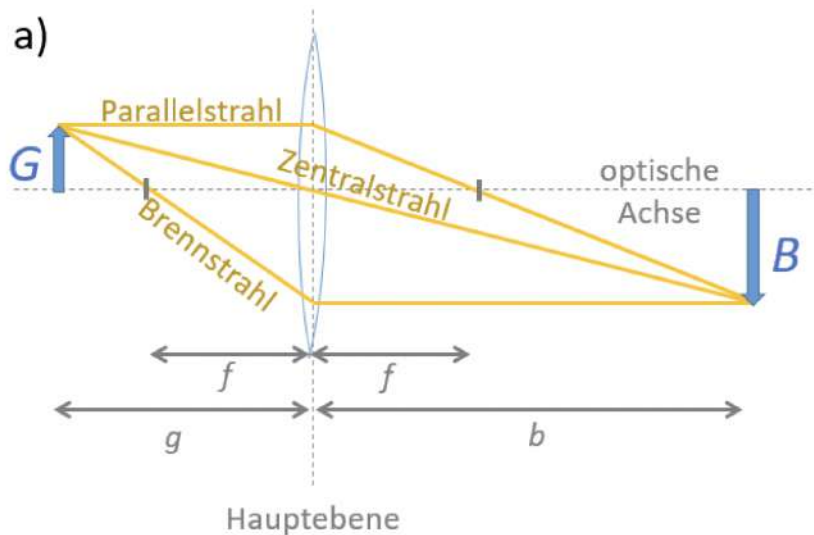


Abb.1: Strahlengang einer dünnen Sammellinse für  $g > f$  (aus Versuchsanleitung S.71)

In diesem Modell wird näherungsweise die Betrachtung vollzogen, dass die Strahlen an der Mittelebene der dünnen Linse "abknicken" wie Abb. 1 zu entnehmen ist.

Die Vergrößerung ist definiert über

$$\gamma = \frac{b}{g} \quad \text{Gl.(2)}$$

## 1.1. Dicke Linsen und Linsensysteme

Das Modell der anhand Abb. 1 vorgestellten Strahlenoptik ist nicht mehr ohne Weiteres anwendbar, wenn dicke Linsen oder Linsensysteme betrachtet werden.

Damit Gl.(1) auch in diesem Fall Gültigkeit behält, wird das Konzept der Hauptebenen eingeführt, wie Abb. 2 zeigt.

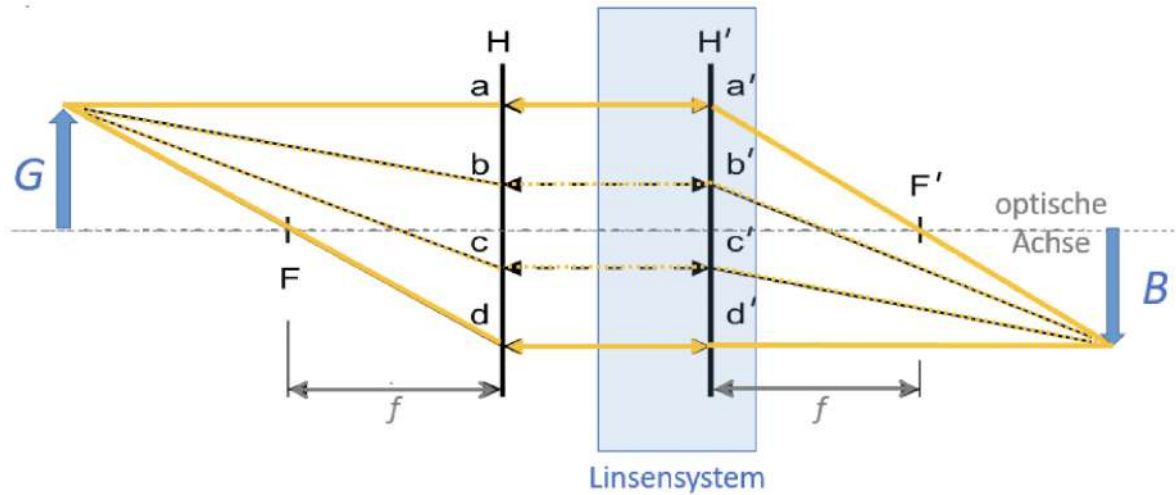


Abb.2: Strahlengang in einem Linsensystem mit Hauptebenen H und H' (aus Versuchsanleitung Abb.2)

Mittels zweier Hauptebenen, kann weiterhin die Konstruktion des Strahlenganges vollzogen werden, damit die Bedingungen einer scharfen Abbildung durch Strahlenoptik beschreibbar bleiben.

## 1.2. Besselverfahren zur Bestimmung der Brennweite

Grundsätzlich ist der Strahlengang von Abb.1 und 2 umkehrbar; demnach könnten Gegenstand (+Gegenstandsweite) und Bild (+Bildweite) vertauscht werden.

Ist der Gegenstand-Schirm-Abstand  $l = b + g > 4f$ , ergeben sich somit zwei Positionen einer Linse (eines Linsensystems) bei denen das Bild scharf abgebildet werden kann, wie sie in Abb 3 definiert sind.

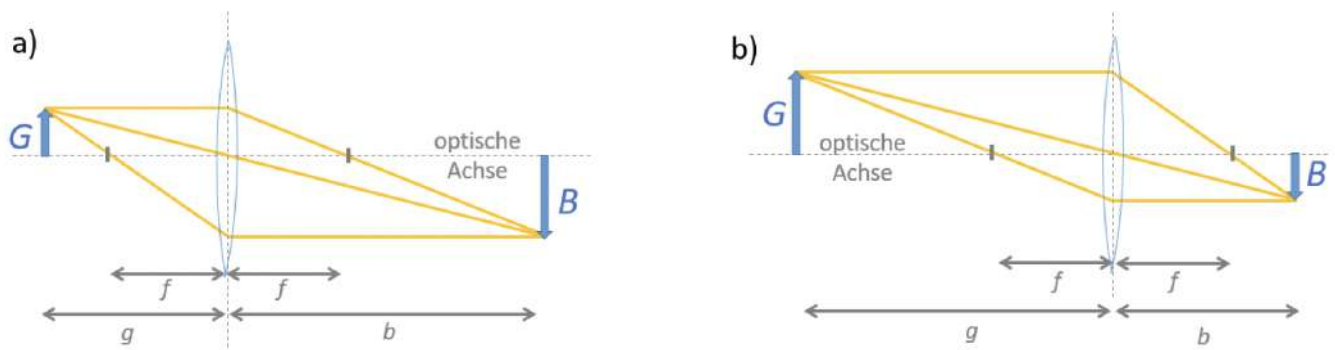


Abb.3: scharfe Positionen a) und b) für die Linse

Ausgehend von der Gültigkeit von Gl.(1) für die beiden Positionen der Linse ergibt sich mit entsprechenden Substitutionen die zentrale Gleichung für die Brennweitenbestimmung durch des Besselverfahrens

$$f = \frac{l^2 - e^2}{4l} \quad \text{Gl.(3)}$$

mit  $e$  dem Abstand der beiden Linsenpositionen.

### 1.3. Methode nach Abbe zur Bestimmung der Brennweite

Durch Substitution von  $b = g$ , wie es durch Gl.(2) gegeben ist, ergibt sich aus Gl.(1)

$$g = \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) \cdot f \quad \text{Gl.(4)}$$

Ist die Lage der Hauptebenen unbekannt, so kann ein noch unbekannter Offset  $c$  addiert werden, woraus sich

$$x = \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) \cdot f + c \quad \text{Gl.(5)}$$

ergibt. Durch Umkehren des Strahlenganges, das in diesem Versuch durch Umdrehen des Reiters mit dem Linsen(-System) erfolgt, ergibt sich

$$x' = \left(1 + \frac{1}{\gamma'}\right) \cdot f' + c' \quad \text{Gl.(6)}$$

mit  $x'$  dem Abstand bis zu K nach umdrehen des Linsensystems.

Die in Gl.(5) und (6) benannten Abstände werden in Abb.4 definiert.

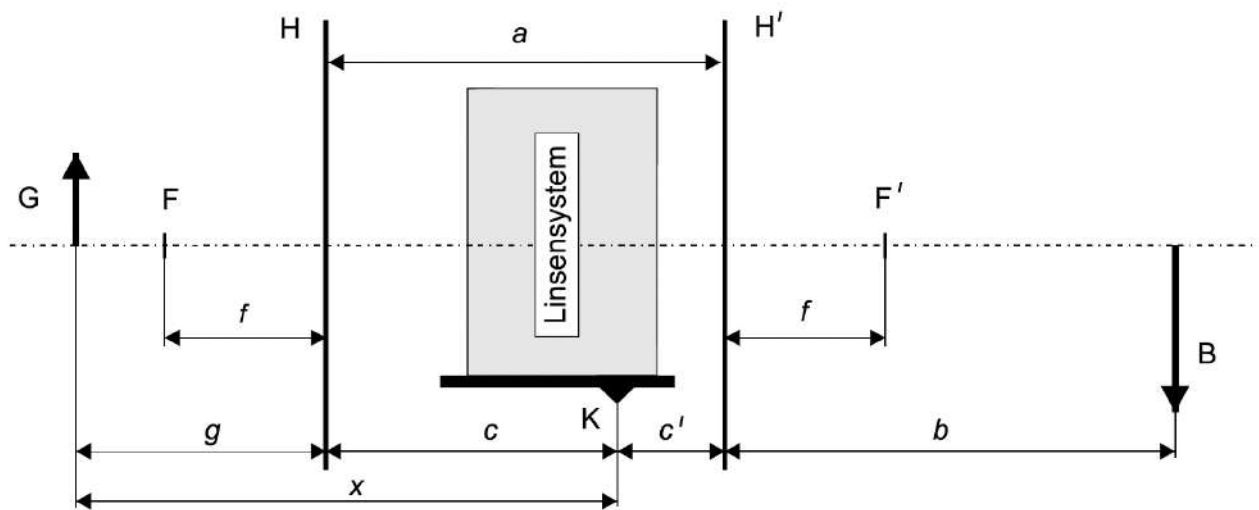


Abb.4: Definitionen der Strecken für die Abbe-Methode (aus Versuchsanleitung Abb.6)

Der Hauptachsenabstand ist hierbei gegeben durch

$$a = c + c' \quad \text{Gl.(7)}$$

### 1.4. Methode der Brennweite mittels Brechungsindex und Krümmungsradius der Linse

Mittels eines Sphärometers kann der Krümmungsradius  $R$  von konvexen ( $h > 0$ ) und konkaven ( $h < 0$ ) Kugeloberflächen bestimmt werden. Mittels geometrischer Überlegungen ergibt sich

$$R = \frac{r^2}{2h} + \frac{h}{2} \quad \text{Gl.(8)}$$

wobei  $r$  der durch die Standfüße des Sphärometers definierte Radius ist.

Aus den Krümmungsradien  $R_1$  und  $R_2$  der beiden Seiten einer Linse lässt sich mit dem Brechungsindex  $n$  die Brechkraft entsprechend

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \cdot \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \text{ Gl.(9)}$$

berechnen.

### 1.5. Prognose für Linsenkombinationen

Für zwei dünne Linsen mit den Brennweiten  $f_1$  und  $f_2$ , die in einem hinreichend kleinen Abstand  $d$  zueinander platziert werden, kann die gesamte Brennweite des Linsensystems durch

$$f = \frac{f_2 f_3}{f_2 + f_3 - d} \text{ Gl.(10)}$$

beschrieben werden.

## 2. experimentelle Untersuchungen

### 2.1. Untersuchungen von Linse 2 mit dem Besselverfahren

Abbildung 5 zeigt eine Fotografie des Messaufbaus.



*Abb.5: Messaufbau des Versuches für das Besselverfahren*

Aus der Experimentellen Bestimmung der Positionen des Gegenstandes  $P_G$ , des Bildes  $P_B$ , sowie den beiden Positionen  $P_L$  und  $P_R$ , bei denen das Bild scharf erscheint, wurde mit Gl.(3) die Brennweite der Linse 2 mehrfach bestimmt. Die Messergebnisse sind Tab. 1 zu entnehmen; die einzelnen Ergebnisse der Brennweite sind in

Abb.6 dargestellt.

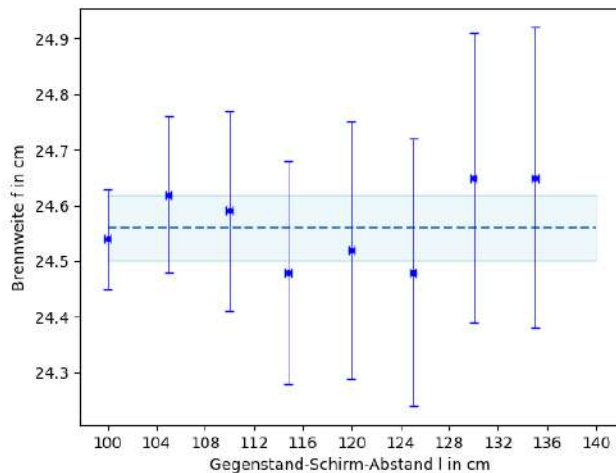


Abb.6: Messergebnisse von  $f(l)$  aus Tab.1 mit gewichtetem Mittelwert (gestrichelte Linie) und Unsicherheit von diesem (leicht blau markiertes Gebiet)

Es ergibt sich ein gewichteter Mittelwert ( $f_{2,Bessel} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \frac{f_i}{u_{f_i}^2}}{\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{u_{f_i}^2}}$ ) und Unsicherheit  $u_{f_{2,Bessel}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{u_{f_i}^2}}}$  von

$$f_{2,Bessel} = (24.56 \pm 0.06) \text{ cm}$$

## 2.2. Untersuchungen mit dem Sphärometer

Entsprechend Gl.(8) mit Unsicherheiten  $u_R = \left| \left( -\frac{r^2}{2h^2} + \frac{1}{2} \right) \cdot u_h \right|$  (ich hab jetzt 20 Minuten probiert, dass eLab diese Formel richtig anzeigt, aber statt der Formel wird eine neue Seite begonnen und die Formel nicht angezeigt. Aus diesem Grund lasse ich diese hier nun ungerändert stehen) ergeben sich aus den Messergebnissen mit dem Sphärometer die Radien

$$R_1 = (170.6 \pm 2.2) \text{ mm} \quad \text{und} \quad R_2 = (170.6 \pm 2.2) \text{ mm}$$

für die beiden Seiten der untersuchten Linse 3. Mit Gl.(9), der sich aus der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung ergebenen Unsicherheit  $u_{f_{3,Sphäro}} = \frac{1}{\left( \frac{(n-1) \cdot 2}{R} \right)^2} \cdot \left( \frac{(n-1) \cdot 2}{R^2} \cdot u_R \right)$  und dem Brechungsindex  $n = 1.52$  kann die Brennweite von Linse 3 mit

$$f_{3,Sphäro} = (164.1 \pm 2.1) \text{ mm}$$

angegeben werden. (Anmerkung: durch  $R_1 = R_2$  hat sich die Gl.(9) und auch die Unsicherheitenberechnung vereinfacht mit  $R := R_1 = R_2$ )



## 2.3. Prognose für Linsencombination

Aus den in Kap. 2.1 und Kap. 2.2 erzielten Messergebnissen kann mit Gl.(10) eine Prognose für die Brennweite  $f_{2+3}$  einer Linsencombination von Linse 2 und 3 gegeben werden. Mit einem Linsenabstand von  $d = (73 \pm 5)$  mm, wie er in diesem Versuch verwendet wurde (vgl. Kap 2.4.), ergibt sich die zu erwartende Brennweite der Linsencombination.

$$f_{2+3} = (119.7 \pm 3.0) \text{ mm}$$

Die Unsicherheit ergibt sich mit der Rauschen Fehlerforpflanzung wie folgt

$$u_{f_{2+3}} = \sqrt{\left( \left( f_3 \cdot \frac{1}{f_2+f_3-d} + f_2 \cdot f_3 \cdot \frac{1}{(f_2+f_3-d)^2} \right) \cdot u_{f_2} \right)^2 + \left( \left( f_2 \cdot \frac{1}{f_2+f_3-d} + f_2 \cdot f_3 \cdot \frac{1}{(f_2+f_3-d)^2} \right) \cdot u_{f_3} \right)^2 + \left( \left( -f_2 \cdot f_3 \cdot \frac{1}{(f_2+f_3-d)^2} \right) \cdot u_d \right)^2}$$

## 2.4. Abbe-Verfahren für Linsencombination <sub>ges</sub>

Es wurden für unterschiedliche Vergrößerungen  $\beta = B/G$  die Abstände  $x = P_K - P_G$  experimentell bestimmt. Entsprechend Gl.(5) ermöglicht die Substitution der Abszisse  $\beta = 1 + G/B$  eine Linearisierung der  $x(\beta)$ -Messergebnisse, wie Abb. 7 zeigt.

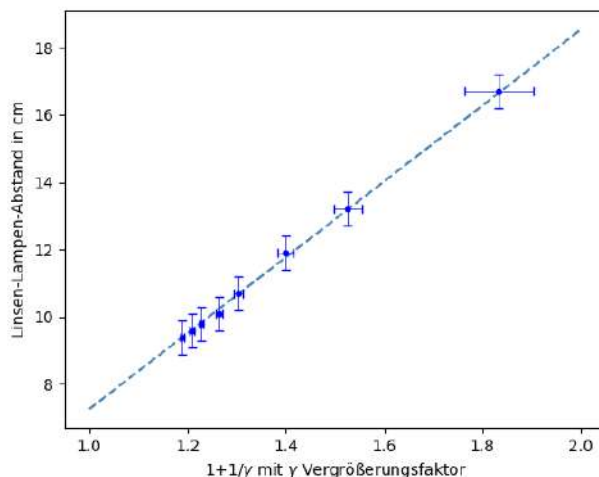


Abb.7: Messwerte aus Tab.3b  $x(\beta)$  mit linearem Fit (gestrichelte Linie)

Aus dem linearen Fit-Ergebniss ergibt sich eine Brennweite  $f_{ges} = (11.3 \pm 1.3) \text{ cm}$

Eine analog Auswertung für die zweite Messreihe, die mit umgedrehtem Linsensystem aufgenommen wurde, ergibt entsprechend Gl.(6) die in Abb.8 dargestellten Ergebnisse.

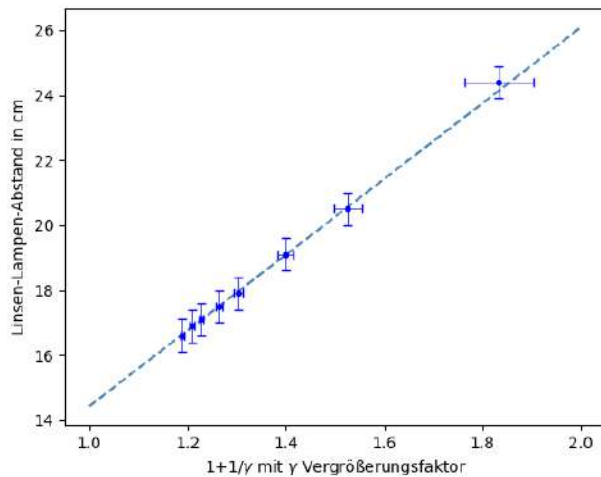


Abb. 8: Messwerte aus Tab. 3c  $x(l)$  mit linearem Fit (gestrichelte Linie)

Aus dem linearen Fit-Ergebnis ergibt sich eine Brennweite  $_{ges} = (11.7 \pm 1.3) \text{ cm}$

Die Prognose der Brennweite des Linsensystems liegt in den Unsicherheitsbereichen der beiden ermittelten Brennweiten und genauso haben die beiden ermittelten Brennweiten überschneidene Unsicherheitsbereiche, wodurch ich diese als zuverlässig ansehe. Die ermittelten Werte haben sehr große Unsicherheitsbereich mit  $\sim 10\%$  des eigentlichen Wertes. Hier hätte man womöglich die Unsicherheit der Position des Gegenstandes bzw. der Linse schärfer abschätzen können. Dies würde, bei weiterer Überschneidung der Unsicherheitsbereiche, zu noch vertrauenswürdigeren Ergebnissen führen.

Aus den Ordinatenabschnitten der Fit-Ergebnisse kann der Hauptachsenabstand mit  $a = (1.2 \pm 2.4) \text{ cm}$  angegeben werden (Unsicherheit mit Gauß'scher Fehlerfortpflanzung).

(Anmerkung: auch hier gilt wie oben bereits erwähnt, dass eine schärfere Abschätzung der Unsicherheiten zu einem zuverlässigeren Ergebnis geführt hätten, da man ein Ergebnis mit größerer Unsicherheit als der eigentliche Wert nicht als vertrauenswürdig einstufen kann)

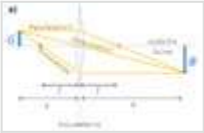
### 3. Fazit

Mit Hilfe der Besselmethode konnten die Brennweiten von Linsen, durch Betrachtung von Differenzen, sehr zuverlässig und wenig Fehleranfällig ermittelt werden. Wir haben durch Messung mit der Abbe Methode unsere Formel für die Prognose der Brennweite bestätigt und somit, dass die Reihenfolge der Linsen in einem Linsensystem (für zwei Sammellinsen) nicht die Brennweite beeinflusst.

Attached files

20230627215937-timestamped.zip (Timestamp archive by Samuel Brinkmann)  
sha256: 71bc9aa5872cb8ae776fd2b08a5cdf7b1c89b2b0d4a55f199b0268f368b444b

unknown.png  
sha256: 58d1a3175eaf1063830d573803490c6630d4a60436c73734a6f3924a7e87be9f



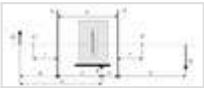
unknown.png  
sha256: 4c9ee8d99aef3f19e592e50adc19c4adbae4690ced123351925ea14714050b90



unknown.png  
sha256: fcfd77fa5a5b1328aeaf15c70f7a6dc992a36ad41bc0e6f7887f1fd07d571e01



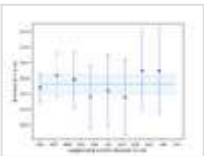
unknown.png  
sha256: 19551c974854cff31a218d44a2dfa2b444d5ae2698718da7a162d9e50d2af6e2



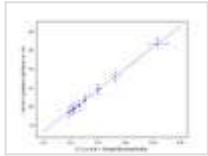
unknown.png  
sha256: 705564353bc77fd503afa6fa0edbec4f6f588b9cee9b76c80778f20d5c4bc301



unknown.png  
sha256: 38933ff66490bb12e166849d408281cb5fa89ca5cc77720644fb5c5f6b31fb0b

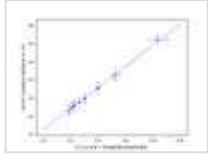


unknown.png  
sha256: 159f3e04e708457fdcdfc8752266af773f75e635b62909e232d8640a496d62be



unknown.png

sha256: 754f3b3fd5d1a4c309abb37c9bcef9417c9b8b129a951efdddfa58e62b0b39d1



20230701230224-timestamped.zip (Timestamp archive by Samuel Brinkmann)

sha256: bfa141e0f3924474a16cb179c65c96bc6cce6994e2864334cbaba577d7b67108

20230701230929-timestamped.zip (Timestamp archive by Samuel Brinkmann)

sha256: 63ccf5be4178d4868b1db30f95a8b12140892cd96c684c2acc7a1e7ac9dbc826

20230701231219-timestamped.zip (Timestamp archive by Samuel Brinkmann)

sha256: b4a03aeb55e7783390828527e5942d0f8a68fce0a42cda0f1b286bdd280f4db



Unique eLabID: 20230626-eeb27923957f216587a6677abdfd731d6ade6c0c  
Link: <https://elabftw.physik.hu-berlin.de/experiments.php?mode=view&id=2119>

## Changelog