

Examen de fin de premier Semestre**Epreuve d'Algèbre (Tronc commun)****EXERCICE 1: (Matrices) (10pts)**

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 7 & -3 & -5 \\ -8 & 4 & 8 \end{pmatrix}$

Zouinhou
Marius

1. Calculer : $A + B$; $A - B$; $\text{tr}(B)$ et $\text{tr}(A - B)$
2. Calculer le déterminant de A ($\det(A)$). La matrice A est-elle inversible ?
3. Déterminer la comatrice de A ($\text{Com}(A)$)
4. Déterminer l'inverse $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t\text{Com}(A)$
5. Comparer A^{-1} et B

EXERCICE 2: (Vecteurs de \mathbb{R}^n et Polynômes) (10pts)

1. Dans le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{R}^3 , on considère les vecteurs :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ t \end{pmatrix} \text{ et } u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- a) - La famille $\{V_1, V_2, V_3\}$ est-elle libre ou liée ? Justifier
 - b) - Pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$, la famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ forme une base de \mathbb{R}^3
2. Soient les polynômes P et $Q \in \mathbb{K}[X]$

$$P = 3X^2 - 1 \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{2}X^3 + 4X$$

- a) - Donner les éléments caractéristiques de : $P + Q$ et de $P \times Q$
 - b) - Décomposer le polynôme $H = 3X^3 - 2X^2 + 6X - 4$ dans \mathbb{R} et dans \mathbb{C} et préciser dans chaque cas le nombre de pôles ou de racines
3. Décomposer la fraction rationnelle en éléments simples en précisant toutes les étapes suivies

$$R = \frac{X^5 - 2X^3 + 4X^2 - 8X + 11}{X^3 - 3X + 2}$$

Bonne Réflexion !