Ecole Normale Supérieure

de l'Enseignement Technique de Lokossa

Mécanique des Fluides

Novembre 2016

Table des matières

Chapitre 1

Introduction et les Concepts Fondamentaux

1 Introduction

La mécanique des fluides est une science de la mécanique appliquée qui étudie le comportement des liquides et des gaz au repos ou en mouvement. Cette branche de la mécanique englobe une variété de problèmes allant de l'étude d'un écoulement sanguin dans des capillaires déformables à l'écoulement de pétrole brut dans des conduites de l'ordre du mètre de diamètre. Les principes de la mécanique des fluides sont nécessaire pour expliquer le fonctionnement des composants que l'on rencontre aujourd'hui dans tous les automatismes hydrauliques (distributeurs, vérin, pompes, turbine etc...). Les objectifs de ce chapitre consistent à définir les propriétés de base d'un fluide et à introduire les différents types d'écoulements de fluides.

2 Définitions

Un fluide peut être considéré comme étant une substance formée d'un grand nombre de particules matérielles, très petites et libres de se déplacer les unes par rapport aux autres. C'est donc un milieu matériel continu, déformable, sans rigidité, et qui peut s'écouler. Les forces de cohésion entre les particules élémentaires sont très faibles de sorte que le fluide est un corps sans forme qui prend la forme du récipient qui les contient. Parmi les fluides on fait souvent la distinction entre liquides et gaz. Les fluides peuvent aussi se classer en deux familles relativement par leur viscosité. La viscosité est une de leur caractéristique physico-chimique qui définit le frottement interne des fluides. Les fluides peuvent être classés en deux grandes familles, à savoir : La famille des fluides newtoniens (comme l'eau,l'air et la plupart des gaz) et celle des fluides non-newtoniens (le sang, les gels, les boues, les pâtes, les suspensions, les émulsions...). Les fluides newtoniens ont une viscosité constante ou qui ne peut varier qu'en fonction de la température. La deuxième famille est constituée par les fluides non-newtoniens qui ont la particularité d'avoir leur viscosité qui varie en fonction de la vitesse et des contraintes qu'ils subissent lorsque ceux-ci s'écoulent.

2.1 Fluide parfait

Un fluide est dit parfait s'il est possible de décrire son mouvement sans prendre en compte les effets de frottement. C'est-à-dire quand la composante tangentielle $d\overrightarrow{F}_T$ est nulle. Autrement dit, la force $d\overrightarrow{F}$ est normale à l'élément de surface dS.

2.2 Fluide réel

Contrairement à un fluide parfait, dans un fluide réel, les forces tangentielles de frottement interne qui s'opposent au glissement relatif des couches fluides sont prises en compte. Ce phénomène de frottement visqueux apparaît lors du mouvement du fluide. C'est seulement au repos qu'un fluide réel se comporte comme un fluide parfait, et on suppose que les forces de contact sont perpendiculaires aux éléments de surface sur lesquels elles s'exercent.

2.3 Fluide incompressible

Un fluide est dit incompressible lorsque le volume occupé par une masse donnée ne varie pas en fonction de la pression extérieure. Les liquides peuvent être considérés comme fluides incompressible (eau, huile, mercure, benzène, chloroforme). La masse volumique d'un fluide incompressible est constante.

2.4 Fluide compressible

Un fluide est dit compressible lorsque le volume occupé par une masse donnée varie en fonction de la pression de la pression extérieure. La masse volumique d'un fluide compressible est variable. Les gaz sont des fluides compressibles. Par exemple, l'air, l'hydrogène, le méthane à l'état gazeux.

3 Notion de contrainte

Sous l'action des contraintes de cisaillement, les fluides se déforment de façon continue. Cette contrainte de cisaillement est créée dès qu'une force tangentielle agit sur une surface quelque soit l'amplitude de cette contrainte. Tous les fluides au repos peuvent être classés sur leur réponse à cette contrainte dite tangentielle. On considère une surface élémentaire δA où s'exerce la force $\delta\overrightarrow{F}$ agissant sur cette surface et qui peut être décomposée en une force normale $\delta\overrightarrow{F}_n$ et une force tangentielle $\delta\overrightarrow{F}_t$ comme le montre la Figure 1.1

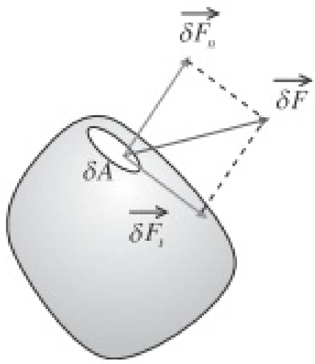

Figure 1.1 – Définition d'une contrainte appliquée à une surface de volume fluide

La force par unité de surface est appelée contrainte notée σ. Les composantes de cette contrainte sont définie comme suit

– la contrainte normale :

$$\sigma_n = \lim_{\delta A \to 0} \frac{\delta F_n}{\delta A} \tag{1.1}$$

– la contrainte de cisaillement :

$$\tau = \lim_{\delta A \to 0} \frac{\delta F_t}{\delta A} \tag{1.2}$$

4 Hypothèse de milieu continu

Le concept de milieu continu suppose une distribution continue de la masse du système dans l'espace vide. Le calcul du nombre de Knudsen (sans dimension) défini par

$$Kn = \frac{\lambda}{L} \tag{1.3}$$

où λ est la longueur correspondant au libre parcours moyen ou encore la distance moyenne d'un point de vue statistique entre deux collisions successives des molécules et L est la longueur caractéristique de la géométrie de l'écoulement étudié, permet de savoir si le milieu est continu ou pas.

Il a été établi que :

– lorsque $Kn \leq 10^{-2}$, le modèle peut être considéré comme continu ;
– lorsque $10^{-2} \leq Kn \leq 10^{-1}$, l'écoulement se fait avec glissement sur les parois ;
– lorsque $10^{-1} \leq Kn \leq 10$, on se trouve dans la zone de transition ;
– lorsque $Kn > 10$, le modèle n'est plus continu.

5 Propriétés physiques des fluides

5.1 Masse volumique

La masse volumique est définie comme la masse par unité de volume :

$$\rho = \frac{m}{V} \tag{1.4}$$

Elle s'exprime en Kg/m^3. La masse volumique d'un gaz varie avec la pression mais celle d'un liquide peut être considéré comme constante en générale.
La densité d est définie comme la masse volumique du fluide rapportée à la masse volumique de l'eau dans le cas des fluides. :

$$d = \frac{\rho}{\rho_e}$$

Dans le cas des gaz on prendra l'air comme fluide de référence.

5.2 Volume spécifique

L'inverse de la masse volumique par unité de masse est appelé volume spécifique ou volume massique :

$$v = \frac{1}{\rho} \tag{1.5}$$

Il s'exprime en m^3/Kg

5.3 Poids spécifique

Il est défini comme le produit de la masse volumique par l'accélération de la pesanteur :

$$\gamma = \rho g [N.m^{-3}] \tag{1.6}$$

6 Viscosité

C'est une grandeur qui caractérise les frottements internes du fluide, autrement dit, sa capacité à s'écouler. Elle caractérise la résistance d'un fluide à son écoulement lorsqu'il est soumis à l'application d'une force. C'est-à- dire, les fluides de grande viscosité résistent à l'écoulement et les fluides de faible viscosité s'écoulent facilement. Elle peut être mesurée par un viscosimètre à chute de bulle dans lequel on mesure le temps écoulé pour la chute d'une bille dans le fluide. Elle peut également être mesurée par un récipient dont le fond comporte un orifice de taille standarisée. La vitesse à laquelle le fluide s'écoule par cet orifice permet de déterminer la viscosité du fluide. La viscosité est déterminée par la capacité d'entraînement que possède une couche en mouvement sur les autres couches adjacentes .Par exemple, si on considère un fluide visqueux placé entre deux plaques P_1 et P_2, tel que la plaque P_1 est fixe et la plaque P_2 est animée d'une vitesse $\overrightarrow{U}$. Si on représente par un vecteur la vitesse de chaque particule située dans une section droite perpendiculaire à l'écoulement, la courbe lieu des extrémités de ces vecteurs représente le profil de vitesse. Le mouvement du fluide peut être considéré comme résultant du glissement des couches de fluide les unes sur les autres. La vitesse de chaque couche est une fonction de l'altitude. On distingue deux type de viscosités à savoir : la viscosité dynamique et cinématique.

6.1 Viscosité dynamique

La viscosité dynamique exprime la proportionnalité entre la force qu'il faut exercer sur une plaque lorsqu'elle est plongée dans un courant et la variation de vitesse des veines de fluide entre les deux faces de la plaque. Elle est exprimée par un coefficient représentant la contrainte de cisaillement nécessaire pour produire un gradient de vitesse d'écoulement d'une unité dans la matière. Considérons un fluide en écoulement entre deux plaques parallèles dont l'une est fixe et l'autre animée d'un mouvement de translation à une vitesse $\overrightarrow{U}$ sous l'action d'une force $\overrightarrow{F}$ (Figure 1.2)

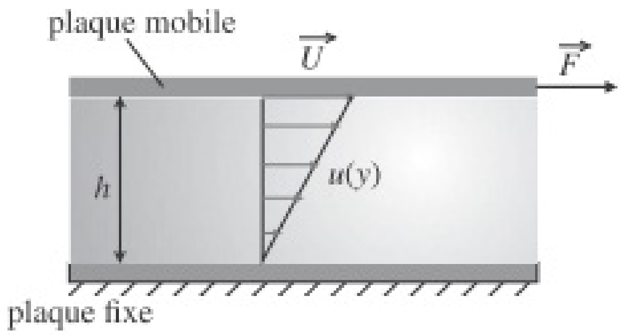

Figure 1.2 – Représentation de l'expérience de Newton

La force $\overrightarrow{F}$ crée une contrainte de cisaillement qui est égale à

$$\tau = \frac{F}{A} \tag{1.7}$$

où A est la surface de la plaque. La loi de Newton peut alors s'écrire comme

$$\tau = \mu\dot{\gamma} \tag{1.8}$$

où

$$\dot{\gamma} = \frac{du}{dy}$$

est le taux de cisaillement et μ est la viscosité dynamique qui dépend en générale de la pression et de la température. Lorsque le fluide est parfait (fluide idéal non visqueux) alors $\mu = 0$.

Remarque : Dans le système international (SI), l'unité de la viscosité dynamique est le Pascal.seconde (Pa.s)

6.2 Viscosité cinématique

La viscosité cinématique est le rapport de la viscosité dynamique et de la masse volumique.

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

Elle s'exprime en m^2/s.
Remarque : On utilise souvent le Stokes (St) comme unité de mesure de la viscosité cinématique.

$$1St = 10^{-4}m^2/s$$

- Lorsque la température augmente, la viscosité d'un fluide décroît car sa densité diminue.
- La viscosité cinématique caractérise le temps d'écoulement d'un liquide. Par contre, la viscosité dynamique correspond à la réalité physique du comportement d'un fluide soumis à une sollicitation.

Chapitre 2

Statique des Fluides

1 Introduction

Lors du dimensionnement des structures telles que les barrages, les réservoirs ... etc., les effets de la pression sont pris en considération. Les ingénieurs doivent calculer les forces exercées par les fluides avant de concevoir de telles structures.
Ce chapitre porte donc sur l'étude des fluides au repos, c'est-à-dire lorsque le fluide n'est animé d'aucun mouvement. Il s'agit donc de calculer la pression en tout point du domaine fluide et les efforts exercés par ce fluide au repos sur des solides indéformables avec lequel il est en contact en utilisant les lois et théorèmes fondamentaux de la statique des fluides

2 Force de pression

La pression est une grandeur scalaire. C'est l'intensité de la composante de la force qu'exerce le fluide sur l'unité de surface. Soit $d\overrightarrow{F}$ la force élémentaire exercée par un fluide sur un élément de surface dS entourant le point A (voir Figure 2.1).

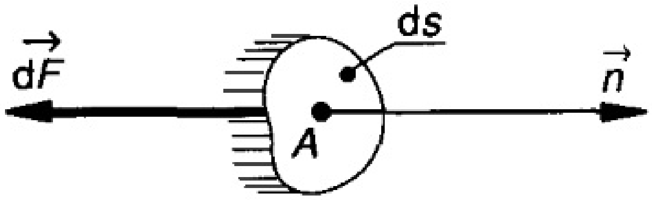

Figure 2.1 – Force élémentaire exercée par un fluide sur une surface

Sur la facette de centre A, d'aire dS, orientée par sa normale extérieure $\overrightarrow{n}$, la force de pression élémentaire $d\overrightarrow{F}$ s'exprime par

$$d\overrightarrow{F} = -p_A dS \overrightarrow{n} \tag{2.1}$$

où p_A représente la pression du fluide au point A définie par

$$p_A = \frac{\|d\overrightarrow{F}\|}{dS}(N/m^2) \tag{2.2}$$

A partir de l'expression (2.1), on détermine la force exercée par un fluide sur une surface S :

$$\overrightarrow{F} = -\int_S p(A) dS \overrightarrow{n} \tag{2.3}$$

3 Principe fondamental de la statique (PFS)

Considérons le domaine fluide (Figure2.2) et isolons un volume élémentaire δV et d'aire δS entourant un point M de ce volume.

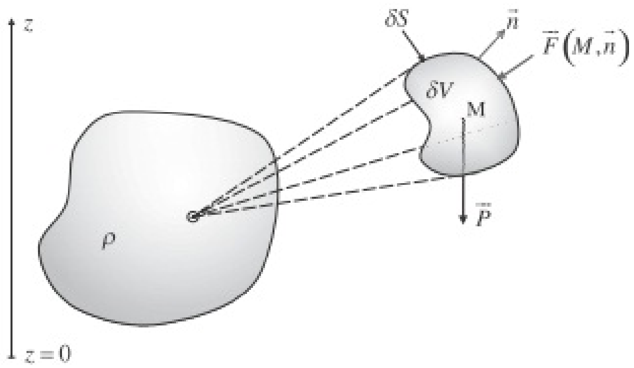

Figure 2.2 – Volume élémentaire d'un domaine fluide

Le fluide étant toujours au repos, nous lui appliquons le principe fondamental de la statique :
– le poids :

$$\overrightarrow{p} = m\overrightarrow{g} = \int_V \rho \overrightarrow{g} dV$$

où ρ est la masse volumique du fluide et m sa masse
– les forces de pression agissant sur la surface δS par le fluide environnement :

$$\overrightarrow{F}(M, \overrightarrow{n}) = -\int_S p(M).dS\overrightarrow{n}$$

Le volume δV de fluide étant à l'équilibre, la somme des efforts exercés est nulle :

$$\int_{\delta V} \rho \overrightarrow{g} dV - \int_{\delta S} p \overrightarrow{n} dS = \overrightarrow{0} \tag{2.4}$$

En appliquant le théorème du gradient, on transforme l'intégrale de surface en intégrale de volume :

$$\int_{\delta S} p \overrightarrow{n} dS = \int_{\delta V} \overrightarrow{\nabla} p dV$$

ce qui conduit pour la relation (2.4) à :

$$\int_{\delta V} \rho \overrightarrow{g} dV - \int_{\delta V} \overrightarrow{\nabla} p dV = 0$$

d'où

$$\rho \overrightarrow{g} - \overrightarrow{\nabla} p = \overrightarrow{0} \tag{2.5}$$

L'équation (2.5) représente la relation de l'hydrostatique.
Dans le cas le plus simple où la masse volumique est indépendante de la pression et où la pression ne varie qu'avec l'altitude z, la projection de la relation (2.5) suivant l'axe (Oz) ascendant conduit à

$$p(z) - p_0 = -\rho g z \tag{2.6}$$

où p_0 est une pression de référence prise à une altitude de référence nulle. De façon plus générale, on peut écrire

$$p_2 - p_1 = -\gamma(z_2 - z_1) = \gamma h \tag{2.7}$$

où $\gamma = \rho g$ est le pods spécifique du fluide, et h est la hauteur dont monte le fluide entre les deux positions 1 et 2 d'altitudes z_1 et z_2 respectivement (voir Figure 2.3)

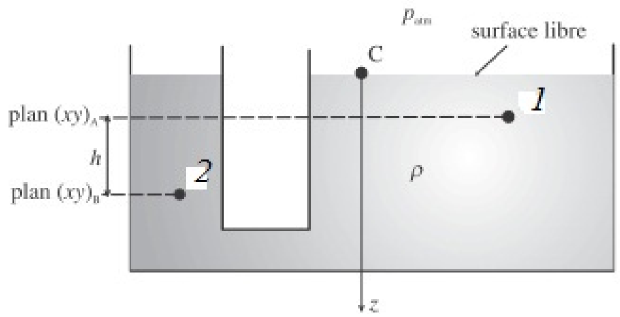

Figure 2.3 – Différence de pression entre deux points d'un fluide au repos

En divisant les deux membres de l'équation (2.7) par γ, on obtient :

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + z_2$$

Comme les positions 1 et 2 sont arbitrairement choisies à l'intérieur d'un fluide de poids volumique γ, on peut écrire en un point quelconque d'altitude z, où règne la pression p :

$$\frac{p}{\gamma} + z = cte \tag{2.8}$$

L'équation (2.8) est une autre forme plus générale de la relation (2.7).

3.1 Théorème de Pascal

Dans un fluide incompressible en équilibre, toute variation de pression en un point entraîne la même variation de pression en tout point :$\Delta P_2 = \Delta P_1$.

4 Efforts exercés sur une surface indéformable

On considère une paroi verticale possédant un axe de symétrie $(G, \overrightarrow{y})$. G est son centre de surface. D'un côté de la paroi se trouve un fluide de poids volumique γ, de l'autre côté, il y a de l'air à la pression atmosphérique P_{atm}. On désigne par P_G la pression au centre de surface G du côté fluide.
La connaissance de la pression au point G permet de déterminer la pression en M par l'usage de la relation fondamentale de l'hydrostatique :

$$P_M - P_G = \gamma(y_G - y_M)$$

Dans le repère défini sur la figure, $y_G = 0$ et $y_M = y$ donc

$$P_M = P_G - \gamma y$$

La force de pression correspondante s'écrit

$$d\overrightarrow{F} = P_M dS\overrightarrow{X} = (P_G - \gamma y)dS.\overrightarrow{X}$$

Soit $\{\tau_{Pousse}\} = \{\overrightarrow{R} = \int_{(S)} d\overrightarrow{F}, \overrightarrow{M}_G = \int_S \overrightarrow{GM} \wedge d\overrightarrow{F}\}_G$.
Le calcul des éléments de réduction du torseur des forces de pression (la résultante et le moment) au point G conduit à

$$\overrightarrow{R} = P_G.S.\overrightarrow{X}$$

et

$$\overrightarrow{M}_G = \gamma.I_{(G,\overrightarrow{z})}.\overrightarrow{z}$$

avec $\int_S ydS = y_G S = 0$ (moment statique de la surface S par rapport à l'axe $(G, \overrightarrow{z})$ et $\int_S y^2 dS = I_{(G,\overrightarrow{z})}$ (moment quadratique de la surface S par rapport à l'axe $(G, \overrightarrow{z})$
On se propose maintenant de déterminer le centre de poussée où le moment résultant des forces de pression est nul. Si ce point existe, il appartient à l'axe de symétrie tel que :

$$\overrightarrow{M}_{G_0} = \overrightarrow{M}_G + \overrightarrow{GG_0} \wedge \overrightarrow{R} = 0$$

alors

$$\overrightarrow{M}_G = \overrightarrow{GG_0} \wedge \overrightarrow{R}$$

d'où après quelques manipulations algébriques on obtient

$$y_0 = -\frac{\gamma I_{(G,\overrightarrow{z})}}{P_G.S}$$

Remarque : Le centre de poussée est toujours au-dessous du centre de surface G.

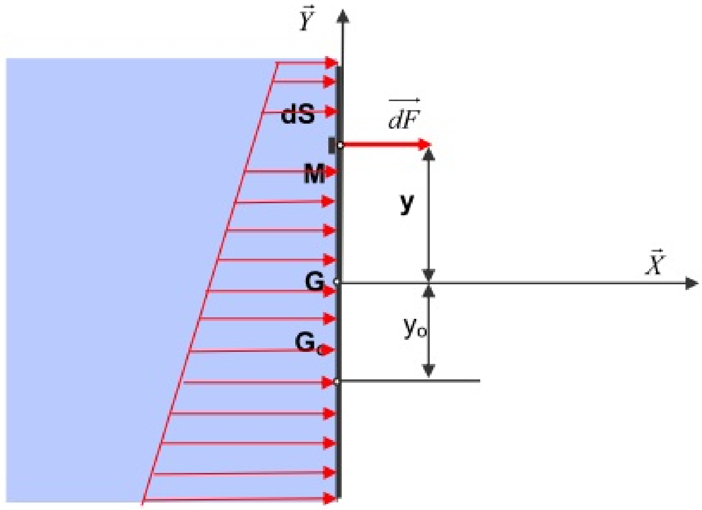

Figure 2.4 – Force exercée par un fluide au repos sur une paroi solide fixe

5 Principe d'Archimède

5.1 Énonce du principe

Dans une situation d'équilibre, tout corps plongé dans un fluide au repos subit une poussée verticale ascendante qui est égale au volume de fluide déplacé. $P_{Arch} = \rho_{fluide}.V_{imm}.g$
Soit un solide de masse volumique ρ_s uniforme, d'aire S et de volume V, et complètement immergé. La résultante des efforts exercés par le fluide sur la surface du solide s'écrit :

$$\overrightarrow{F} = -\int_S p\overrightarrow{n}dS \tag{2.9}$$

L'équation (2.9) peut s'écrire encore sous la forme

$$\overrightarrow{F} = -\int_V \overrightarrow{\nabla}pdV \tag{2.10}$$

La relation de l'hydrostatique conduit, lorsque la masse volumique est indépendante de l'altitude, à :

$$\overrightarrow{\nabla}p = \rho_f \overrightarrow{g}$$

soit

$$\overrightarrow{F} = -\int_V \rho_f \overrightarrow{g}dV = -\rho_f \overrightarrow{g}V = -m_f \overrightarrow{g}$$

La force totale exercée sur le corps est la somme de la force d'Archimède et du poids du solide

$$\overrightarrow{R} = \overrightarrow{F} + \int_V \rho_s \overrightarrow{g}\,\overrightarrow{g}dV = (\rho_s - \rho_f)\overrightarrow{g}V \tag{2.11}$$

Le moment au centre G d'inertie du solide, des efforts de pression est

$$\overrightarrow{M}_G = -\int_S \overrightarrow{GM} \wedge p\overrightarrow{n}dS \tag{2.12}$$

$\forall M \in S$

Par définition du centre d'inertie, on a

$$\int_V \overrightarrow{GM} dV = 0 \tag{2.13}$$

$\forall M \in S$

Par conséquent, en appliquant la relation du rotationnel, on obtient

$$-\int_S \overrightarrow{GM} \wedge p\,\overrightarrow{n}\,dS = \int_V \overrightarrow{\nabla} \wedge (p\overrightarrow{GM})dV = \int_V \overrightarrow{\nabla} p \wedge \overrightarrow{GM} dV$$

Soit, en utilisant la relation de l'hydrostatique et (2.13), on trouve

$$\overrightarrow{M}_G = \rho_f \overrightarrow{g} \wedge \int_V \overrightarrow{GM} dV = \overrightarrow{0} \tag{2.14}$$

La relation (2.14) montre que le centre de poussée coïncide avec le centre de masse du solide et ceci quelle que soit la forme du solide immergé.

Dans le cas d'un solide partiellement immergé dans deux fluides, le centre de poussée ne correspond plus avec le centre de masse G du solide. La poussée d'Archimède s'exprime alors sous la forme :

$$\overrightarrow{F} = -(\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2)\overrightarrow{g} \tag{2.15}$$

Remarques :

– Si le solide immergé est homogène, alors le centre de poussée, point d'application de la poussée d'Archimède sera confondu avec le centre de gravité du solide. L'équilibre du solide est indifférent.

– Si le solide immergé est hétérogène, alors le centre de poussée, point d'application de la poussée d'Archimède n'est pas confondu avec le centre de gravité du solide.L'équilibre du solide est stable si le centre de poussée est au-dessus du centre de gravité du solide et instable dans le cas contraire.

5.2 Généralisation du principe

Dans une situation d'équilibre, tout corps partiellement immergé entre deux fluides au repos subit une poussée verticale ascendante qui est égale aux volumes des deux fluides déplacés.

Chapitre 3

Cinématique des Fluides

1 Introduction

La cinématique des fluides est une branche de la mécanique des fluides qui décrit le mouvement d'un fluide et ses conséquences sans prendre en considération la nature des forces provoquant le mouvement. Il s'agit ici de décrire le mouvement du fluide en description lagrangienne et eulerienne.

2 Description lagrangienne

En description lagrangienne, chaque particule matérielle prise individuellement dans la configuration non déformée, c'est-à-dire à l'instant initial t_0 est suivie dans son mouvement au cours du temps.
Soit $\overrightarrow{x}(\overrightarrow{X}, t)$ le vecteur position d'une particule donnée dans la configuration déformée, c'est-à-dire l'instant t et $\overrightarrow{X}$ sa position initiale à l'instant initial t_0. En coordonnées cartésienne on peut écrire ;

$$\overrightarrow{x} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k} \tag{3.1}$$

où

$$x = x(x_0, y_0, z_0, t)$$

$$y = y(x_0, y_0, z_0, t)$$

$$z = z(x_0, y_0, z_0, t)$$

avec x_0, y_0, z_0 les coordonnées initiales et x, y, z les coordonnées au temps t de la particule.
La vitesse $\overrightarrow{v}$ de la particule dans la configuration initiale (x_0, y_0, z_0) peut être calculée par

$$\overrightarrow{v} = \frac{d\overrightarrow{x}}{dt}|_(x_0, y_0, z_0) \tag{3.2}$$

Ainsi, l'accélération dans configuration initiale (x_0, y_0, z_0) est :

$$\overrightarrow{a} = \frac{d^2\overrightarrow{x}}{dt}|_(x_0, y_0, z_0) \tag{3.3}$$

2.1 Description eulerienne

Elle consiste à établir à un instant t donné l'ensemble des vitesses associées à chaque point de l'espace occupé par le fluide. Dans cette représentation, la vitesse s'écrit :

$$\vec{v}(\vec{x},t) = \vec{v}_x(x,y,z,t)\,\vec{i} + \vec{v}_y(x,y,z,t)\,\vec{j} + \vec{v}_z(x,y,z,t)\,\vec{k} \tag{3.4}$$

avec

$$\vec{x} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

2.2 Relation entre la description eulerienne et lagrangienne

Dans la description d'Euler, la vitesse peut s'écrire comme suit :

$$\vec{v}(\vec{x},t) = \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}_x(x,y,z,t)\,\vec{i} + \vec{v}_y(x,y,z,t)\,\vec{j} + \vec{v}_z(x,y,z,t)\,\vec{k} \tag{3.5}$$

avec

$$\frac{dx}{dt} = v_x(x,y,z,t)$$
$$\frac{dy}{dt} = v_y(x,y,z,t)$$
$$\frac{dz}{dt} = v_z(x,y,z,t)$$

Si on intègre les équations précédentes, on aboutit à des constantes d'intégrations qui doivent être trouvées à partir des conditions initiales. La solution donne alors les équations de Lagrange et on retrouve le système d'équations $\vec{x}(\vec{X},t)$. En principe, la méthode lagrangienne peut être donc déduite de l'approche eulerienne.

3 Dérivée particulaire

Soit $A(\vec{x},t)$ une fonction scalaire donnée. La dérivée de cette fonction par rapport au temps s'écrit :

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial \vec{x}}\frac{\partial \vec{x}}{\partial t}$$

ceci conduit à

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \vec{\nabla} A.\vec{v}$$

Ainsi, la dérivée particulaire est égale à la somme de la dérivée temporelle ($\frac{\partial A}{\partial t}$) et de la dérivée convective ($\vec{\nabla} A.\vec{v}$)

4 Lignes de courant, trajectoire et lignes d'émission

4.1 Lignes de courant

A un instant t donné, on appelle lignes de courant du mouvement dans la configuration courante, les lignes enveloppes du champ des vitesses $\overrightarrow{v}(\overrightarrow{x}, t)$. Ces lignes sont donc définies dans configuration déformée par le système différentiel

$$\frac{dx}{v_x(\overrightarrow{x}, t)} = \frac{dy}{v_y(\overrightarrow{x}, t)} = \frac{dz}{v_z(\overrightarrow{x}, t)} \tag{3.6}$$

L'ensemble des lignes de courant s'appuyant au même instant sur un contour fermé quelconque est appelé tube de courant.

4.2 Trajectoires

On appelle trajectoire, la courbe décrite au cours du temps par une particule fluide quelconque du champ d'écoulement. Les équations paramétriques des trajectoires sont définies par

$$\frac{dx}{v_x(\overrightarrow{x}, t)} = \frac{dy}{v_y(\overrightarrow{x}, t)} = \frac{dz}{v_z(\overrightarrow{x}, t)} = dt \tag{3.7}$$

4.3 Lignes d'émission

On appelle ligne d'émission le lieu géométrique, à un instant t des particules qui sont toutes passées, à différents moments précédent l'instant t, par un même point fixe de l'écoulement.

5 Translation, rotation et Déformation

5.1 Écoulement uniforme

L'écoulement est qualifié d'uniforme en absence de déformation et de rotation. Le mouvement correspond donc à un mouvement de translation solide. Le mouvement de rotation pure s'effectue sans déformation et est donc comparable à la rotation solide.

5.2 Vitesse de déformation quelconque d'un écoulement fluide

L'expression simplifiée du tenseur de vitesse de déformation s'écrit :

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}) \tag{3.8}$$

5.3 Tenseur taux de rotation et vecteur tourbillon

L'expression du tenseur taux de rotation est donnée par la relation

$$R_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}) \tag{3.9}$$

On en déduit que le tenseur gradient de vitesse est égale à la somme du tenseur de taux de déformation et du tenseur de taux de rotation :

$$\overline{\overline{\nabla}}\overrightarrow{u} = \overline{\overline{\dot{\varepsilon}}} + \overline{\overline{R}} \tag{3.10}$$

Le vecteur tourbillon est défini par

$$\overrightarrow{\Omega} = 2\overrightarrow{\omega} = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{u} \tag{3.11}$$

L'écoulement est irrotationnel si $\overrightarrow{\Omega} = \overrightarrow{0}$. Les équations des lignes d'isovorticité sont définies par

$$\overrightarrow{\Omega} \wedge d\overrightarrow{S} = 0 \tag{3.12}$$

ce qui équivaut à

$$\frac{dx}{\Omega_x} = \frac{dy}{\Omega_y} = \frac{dz}{\Omega_z} \tag{3.13}$$

5.4 Écoulement irrotationnel

Un écoulement est dit irrotationnel si

$$\overrightarrow{\Omega} = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$$

Il existe alors dans cette condition une fonction scalaire ϕ appelée potentiel des vitesse tel que

$$\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{\nabla}\phi = \overrightarrow{0}$$

On peut donc poser

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\nabla}\phi$$

Si de plus le fluide est incompressible

$$\overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{u} = 0$$

ce qui conduit à

$$\Delta\phi = 0$$

Par conséquent ϕ vérifie l'équation de Laplace. De plus, la propriété de l'écoulement irrotationnel par un écoulement plan entraîne

$$\Delta\psi = 0$$

ψ vérifie aussi l'équation de Laplace. Les équipotentielles s'obtiennent en prenant $\phi = cte$ ou $d\phi = 0$.

Chapitre 4

Dynamique des Fluides

1 Introduction

Lorsqu'un fluide est en mouvement, la pression en tout point du fluide dépend de l'altitude, de la masse volumique et de la vitesse du fluide. Cette pression est la somme d'une pression motrice et d'une pression dynamique. Dans un écoulement de fluide, la pression et la vitesse sont reliées par la relation de Bernoulli. L'objectif principal de chapitre est d'étudier la dynamique des fluides incompressibles parfaits et réels et des fluides compressibles grâce aux équations fondamentales régissant la dynamique des fluides.

2 Dynamique des fluides incompressibles parfaits

2.1 Écoulement permanent

Un fluide est dit permanent si le champ des vecteurs vitesse des particules fluides est constant dans le temps.

2.2 Equation de continuité

Considérons dans une conduite parfaitement lisse le déplacement d'un certain volume d'un fluide parfait incompressible (voir Figure 4.1). Supposons que la masse fluide comprise entre les sections S_1 et S_2 soit écoulée jusqu'en S_1' et S_2' de telle façon qu'entre S_1 et S_1' d'une part, S_2 et S_2' d'autre part la masse du fluide écoulée soit de $1Kg$. Tout se passe comme si cette masse de fluide de $1Kg$ était passée de la position 1 à la position 2.

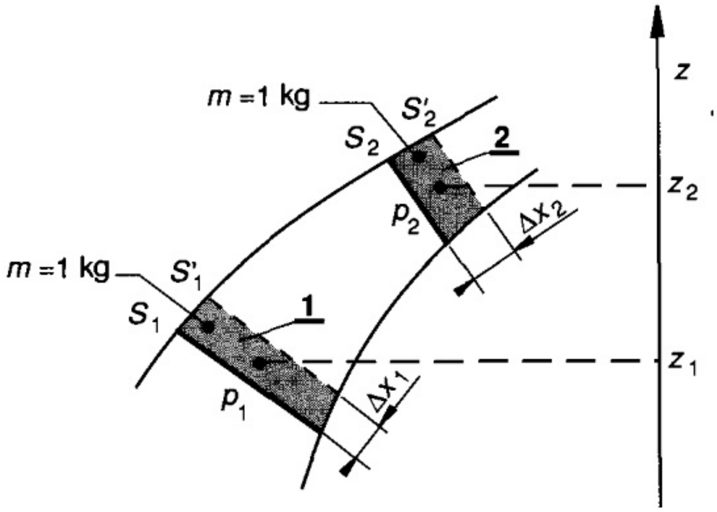

Figure 4.1 – Déplacement d'un fluide parfait incompressible dans une conduite sans frottement

Par conservation de la masse, on aura $\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2$ ou $\rho_1 S_1 \Delta x_1 = \rho_2 S_2 \Delta x_2$. En divisant les deux membres par Δt on obtient $\rho_1 S_1 v_1 = \rho_2 S_2 v_2$ où v désigne la vitesse (m/s). Puisque le fluide est incompressible $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ alors l'équation ci-dessus représente l'équation de continuité

$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

.

2.3 Notion de débit

Le débit massique q_m d'une veine fluide est la limite du rapport $\frac{dm}{dt}$ quand dt tend vers 0. q_m est la masse de fluide par unité de temps qui traverse une section droite quelconque de la conduite, dm est la masse élémentaire en (Kg) qui traverse la section pendant un intervalle de temps dt.

$$q_m = \rho S_1 v_1 = \rho S_2 v_2$$

Pour une section droite quelconque S de la veine fluide à travers laquelle le fluide s'écoule à la vitesse moyenne v, le débit massique est donné par la relation

$$q_m = \rho S v$$

avec q_m en Kg/s ; ρ en Kg/m^3 et v en m/s.
Le débit volumique d'une veine fluide est la limite du rapport $\frac{dV}{dt}$ lorsque dt tend vers 0. Soit

$$q_v = S.v$$

3 Théorème de Bernoulli pour un écoulement permanent sans échange de chaleur

Considérons dans une conduite parfaitement lisse le déplacement d'un certain volume d'un fluide parfait incompressible (voir Figure 4.1).

Si aucune énergie n'est échangée entre le fluide et le milieu extérieur pendant le trajet de celui-ci, de la position 1 à la position 2, nous savons que l'énergie mécanique de la masse de $1Kg$ de fluide est invariable. Pour un fluide incompressible, l'énergie mécanique peut prendre trois formes :

– Énergie cinétique : $E_c = \frac{1}{2}mv^2$

– Énergie potentielle de pression : $E_{pres} = \frac{p}{\rho}$

– Énergie potentielle de pesanteur : $E_{pp} = gz$

d'où par application du théorème de l'énergie mécanique entre les deux positions on obtient l'équation de Bernoulli pour une masse de fluide de $1Kg$:

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + \frac{p_2 - p_1}{\rho} + g(z_2 - z_1) = 0 \tag{4.1}$$

L'unité de chaque terme de la relation (4.1) est le joule par kilogramme (J/Kg). L'équation (4.1) peut être écrite comme suit

$$\frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2 = \frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1$$

3.1 Théorème de Bernoulli dans le Cas d'un écoulement $1 \rightarrow 2$ avec échange de travail

Par convention, lorsque le fluide traverse une machine (pompe, turbine), il échange de l'énergie avec cette machine, donc du travail mécanique. Soit W_{12} ce travail.

– Si $W_{12} > 0$, le travail est reçu par le fluide ;

– Si $W_{12} < 0$, le travail est fourni. par le fluide

Écrivons que le travail W_{12} échangé entre la masse de fluide de $1Kg$ et le milieu extérieur (machine) pour passer de la position 1 à la position 2 est égal à la variation de l'énergie mécanique du fluide :

$$\frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2 + \frac{1}{\rho}(p_2 - p_1) + g(z_2 - z_1) = W_{12} \tag{4.2}$$

3.2 Théorème d'Euler

Enoncé : La résultante $(\sum \overrightarrow{F}_{ext})$ des actions mécaniques exercées sur un fluide isolé (fluide contenu dans l'enveloppe limitée par S_1 et S_2) est égale à la variation de la quantité de mouvement du fluide qui entre en S_1 à la vitesse $\overrightarrow{v}_1$ et sort par S_2 à une vitesse $\overrightarrow{v}_2$:

$$\sum \overrightarrow{F}_{ext} = q_m(\overrightarrow{v}_2 - \overrightarrow{v}_1)$$

3.3 Puissance d'une machine hydraulique et Rendement

3.3.1 Puissance d'une machine hydraulique

La puissance nette d'une machine hydraulique est le travail par unité de temps qu'elle échange avec le fluide qui la traverse. Soit A et B respectivement, les sections d'entrée et de sortie de la machine. La puissance nette s'exprime par

$$P_n = \frac{dW_{AB}}{dt} \tag{4.3}$$

Soit q_m le débit massique entre A et B et W_{AB} le travail échangé par $1Kg$ de fluide. Alors en une seconde

$$P_n = q_m W_{AB}$$

avec $q_m = \rho S v = \rho q_v$

3.3.2 Rendement

Le rendement global d'une machine est le rapport entre la puissance qu'elle fournit et la puissance qu'elle utilise.

3.3.2.1 Cas d'une machine qui utilise l'énergie mécanique d'un arbre d'entrée et qui fournit au fluide qui la traverse une énergie

Le rendement global η d'une telle machine (pompe) s'exprime par :

$$\eta = \frac{P_n}{P_a} \tag{4.4}$$

où P_a désigne la puissance absorbée sur l'arbre d'entrée et P_n la puissance nette échangée avec le fluide.

3.3.2.2 Cas d'une machine qui utilise l'énergie du fluide et qui fournit sur un arbre de sortie une certaine énergie mécanique

Le rendement global η d'une telle machine (turbine) s'exprime par :

$$\eta = \frac{P_u}{P_n} \tag{4.5}$$

où P_u dénote la puissance utile sur l'arbre de sortie et P_n la puissance nette échangée avec le fluide.

4 Dynamique des fluides incompressibles réels

L'écoulement d'un fluide réel est plus complexe que celui d'un fluide idéal. En effet, il existe des forces de frottement, dues à la viscosité du fluide, qui s'exercent entre les particules de fluide et les parois, ainsi qu'entre les particules elles-mêmes. Pour étudier la dynamique des fluides incompressibles réels, il est indispensable de définir la notion de pertes de charge.

4.1 Fluide réel

Un fluide est dit réel si, pendant son mouvement, les forces de contact ne sont pas perpendiculaires aux éléments de surface sur lesquelles elles s'exercent (elles possèdent donc des composantes tangentielles qui s'opposent au glissement des couches fluides les unes sur les autres). Cette résistance est caractérisée par la viscosité.

4.2 Notion de pertes de charge

4.2.1 Définition

Lorsqu'un fluide parfait s'écoule dans une conduite plus ou moins lisse, une partie de l'énergie du fluide sera utilisée dans les frottements contre les parois, dans les turbines et décollements de la veine fluide. Cette énergie perdue constitue ce qu'il est convenu d'appeler les pertes de charge.
Considérons un écoulement d'un fluide parfait dans une conduite (voir Figure 4.2), tel que entre 1 et 2 il n'y ait pas de machine hydraulique. Notons J_{12} la perte d'énergie ou perte de charge du fluide. J_{12} est une énergie fournie par le fluide donc $J_{12} < 0$

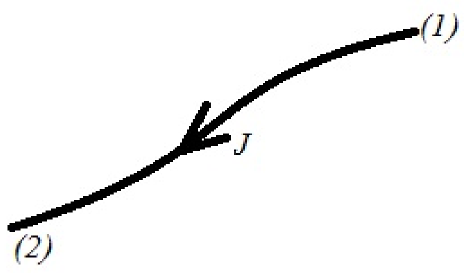

Figure 4.2 – Fluide parfait dans une conduite sans machine hydraulique

Entre 1 et 2, on peut alors écrire que l'énergie mécanique totale en 2, E_{m2} est égale à l'énergie mécanique totale en 1, E_{m1} moins les pertes dans les conduites :

$$E_{m2} - E_{m1} = J_{12}$$

4.2.2 Application de l'équation de Bernoulli à un écoulement avec pertes de charge

D'après l'équation (4.2), on peut donc écrire

$$\frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2 + \frac{1}{\rho}(p_2 - p_1) + g(z_2 - z_1) = J_{12} \tag{4.6}$$

4.2.3 Différentes expressions de la perte de charge

Suivant l'utilisation, les pertes de charge peuvent s'exprimer par :
– une perte d'énergie cinétique, c'est-à-dire une perte de vitesse du fluide ;

– une perte d'énergie potentielle de pression, c'est-à-dire une perte de pression du fluide : $\frac{\Delta p}{\rho} = J_{12}$ et donc $\Delta p = \rho J_{12} < 0$;
– une perte d'énergie potentielle de pesanteur, c'est-à-dire une perte d'altitude pour le fluide. C'est très souvent cette dernière forme que les pertes de charge s'expriment :$g\Delta z = J_{12}$ et donc $\Delta z = \frac{J_{12}}{g}$

4.3 Écoulement permanent des fluides réels

4.3.1 Viscosité

Soit une conduite de section circulaire dans laquelle on considère l'écoulement permanent d'un fluide réel. Dans une section droite (S) de la conduite, les vecteurs vitesse des différentes particules fluides sont différents. Les filets fluides en contact avec la paroi sont très ralentis par le phénomène de frottement. Ce frottement et donc ce ralentissement dépendra évidement de la rugosité de la paroi.
Considérons maintenant deux particules fluides très voisines M_1 et M_2 appartenant à un rayon de (S) et distantes de dy (Figure 4.3)

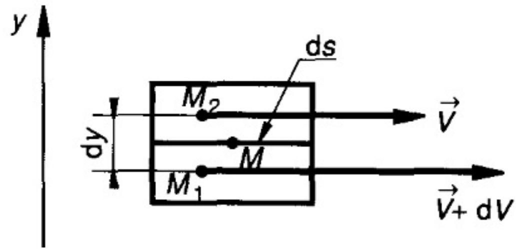

Figure 4.3 – Deux particules fluides en mouvement

Le vecteur vitesse de chaque particule est une fonction de la position de la particule sur le rayon de la conduite : $v = f(y)$. On peut modéliser ces deux particules par deux volumes élémentaires 1 et 2 de fluide en contact suivant une petite facette d'aire dS. Soit M un point de dS. M_1 et M_2 n'étant pas animés de la même vitesse, glissent l'un par rapport à l'autre. Si l'indice 0 est donné à la paroi :

$$\vec{V}(M_1 \in 1/0) = \vec{V} + d\vec{V}$$

et

$$\vec{V}(M \in 2/0) = \vec{V}$$

Appliquons la loi de composition des vecteurs vitesse associée au point M :

$$\vec{V}(M_1 \in 1/0) = \vec{V}(M_1 \in 1/2) + \vec{V}(M_1 \in 2/0)$$

avec

$$\vec{V}(M_1 \in 1/2) = \vec{V}(M_1 \in 1/0) - \vec{V}(M_1 \in 2/0)$$

donc

$$\vec{V}(M_1 \in 1/2) = d\vec{V}$$

Considérons la force élémentaire de contact en M que la particule 2 exerce sur la particule 1. D'après les lois de Coulomb on sait que (voir Figure 4.4)

$$d\overrightarrow{F}(2 \to 1).\overrightarrow{V}(M \in 1/2) < 1$$

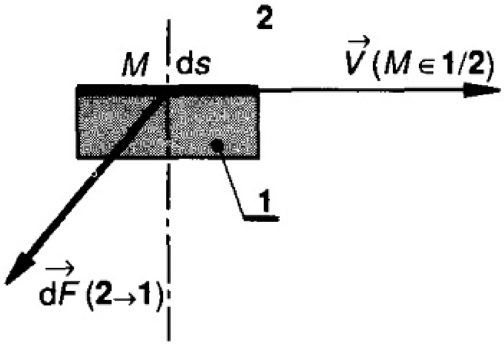

Figure 4.4 – Force élémentaire de contact exercée par une particule sur une autre

Réciproquement si on revient à la Figure 4.3 on peut représenter $d\overrightarrow{F}(1 \to 2)$ opposée à $d\overrightarrow{F}(2 \to 1)$ avec ses deux composantes, normale $d\overrightarrow{F}_n = pds\overrightarrow{y}$ et tangentielle $d\overrightarrow{F}_\tau = \mu dS\frac{dV}{dy}$ (voir Figure 4.5)

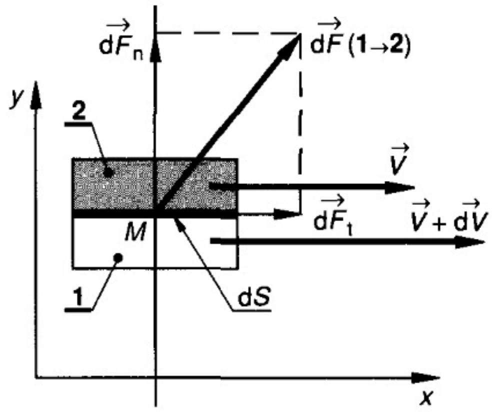

Figure 4.5 – Représentation de la force élémentaire de contact avec ses deux composantes normale et tangentielle

Avec $d\overrightarrow{V} = dv.\overrightarrow{x}$, on trouve la formule de Newton

$$dF_\tau = \mu dS\frac{dv}{dy} \tag{4.7}$$

4.3.2 Viscosité dynamique

Le paramètre μ qui se figure dans la formule de Newton est appelé viscosité dynamique.

4.3.3 Viscosité cinématique

La viscosité cinématique notée ν d'un fluide est égale au rapport de sa viscosité dynamique μ par sa masse volumique ρ :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}[m^2/s] \tag{4.8}$$

Cette viscosité diminue en générale avec la température mais augmente avec la pression.

4.3.4 Différents types d'écoulements

On distingue deux types d'écoulements :
– l'écoulement laminaire : les filets fluides sont des lignes régulières, sensiblement parallèle entre elles
– l'écoulement turbulent : les filets fluides s'enchevêtrent, s'enroulent sur eux-même
Ces deux types d'écoulements peuvent être distingués par application de la formule suivante

$$\mathfrak{R} = \frac{vl}{\nu} \tag{4.9}$$

ou pour une conduite de diamètre intérieur d :

$$\mathfrak{R} = \frac{vd}{\nu} \tag{4.10}$$

$\mathfrak{R}$ est appelé le nombre de Reynold. Suivant la valeur de $\mathfrak{R}$, l'écoulement sera laminaire ou turbulent. v est la vitesse de l'écoulement à travers la section considérée, l est la largeur de la veine fluide, ν est la viscosité cinématique du fluide.
– Si $\mathfrak{R} < 2000$ l'écoulement est certainement laminaire
– Si $\mathfrak{R} > 2000$ l'écoulement peut être turbulent

4.3.5 Pertes de charge singulières

Quand la conduite subit de brusques variations de section ou de direction, il se produit des pertes de charge dite singulières. Elles sont généralement mesurable et font partie des caractéristiques de l'installation. On les exprime par

$$J_s = -\xi\frac{v^2}{2} \tag{4.11}$$

où $s = 1, 2, 3...$ indice de l'accident de forme de la conduite. ξ est un coefficient qui depend de la nature et de la géométrie de l'accident de forme et v est la vitesse de $\ll l'accident \gg$ de forme.
Coude à angle droit : $\xi = 1$, entrée dans une conduite : $\xi = 0.5$, vannes et robinets : $0.05 < \xi < 0.5$

4.3.6 Pertes de charges systématique ou linéaires

C'est la partie d'énergie d'un fluide qui se déplace dans une conduite rectiligne de section constante. On les définie par

$$J_{12} = -\lambda\frac{v^2}{2d}l \tag{4.12}$$

où v désigne la vitesse moyenne d'écoulement dans la conduite, l la longueur de la conduite, d le diamètre de la conduite et λ le coefficient de perte. Ce dernier dépend de la nature de l'écoulement et notamment du nombre de Reynold $\mathfrak{R}$

- Dans un régime laminaire : $\lambda = \frac{64}{\mathfrak{R}}$ (formule de Poiseuille)
- Dans un régime turbulent lisse : $2000 < \mathfrak{R} < 10^5$: $\lambda = 0.316\mathfrak{R}^{-0.25}$ (formule de Blasius)
- Pour un régime turbulent rugueux : $\mathfrak{R} > 10^5$, on utilise le plus souvent pour une conduite industrielle la formule de Blench :

$$\lambda = 0.79\sqrt{\frac{\varepsilon}{D}}$$

  où ε dénote la rugosité conventionnelle (en mm) et D représente le diamètre intérieur de la conduite (en mm)

4.3.7 Application du théorème de Bernoulli à l'écoulement d'un fluide réel

Dans ce cas, l'équation de Bernoulli prend la forme générale suivante pour $1kg$ de fluide :

$$\frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) + \frac{1}{\rho}(p_2 - p_1) + g(z_2 - z_1) = W_{12} + \sum J_{12} \tag{4.13}$$

où W_{12} représente le travail mécanique échangé entre le fluide et les machine placées entre 1 et 2, et $\sum J_{12}$ désigne la somme de toutes les pertes de charge, singulières et linéaires entre les sections repérées 1 et 2.

5 Dynamique des fluides compressibles

Le but de ce chapitre est d'étudier l'écoulement des fluides compressibles. Cette étude ne peut être effectuée sans avoir fixé au préalable un certain nombre d'hypothèses simplificatrices.

5.1 Equations d'état d'un gaz parfait

5.1.1 Lois des gaz parfaits

$$\frac{P}{\rho} = r.T \tag{4.14}$$

où P représente la pression, ρ la masse volumique, r la constante des gaz parfaits ($r = \frac{R}{M} = 287J/Kg^oK$) et T la température en degré Kelvin.

5.1.2 Transformations thermodynamiques

La chaleur récupérée par un gaz parfait à pression constante est :

$$\Delta H = C_p.\Delta T \tag{4.15}$$

avec ΔH la variation d'enthalpie par unité de masse (en KJ/Kg), C_p la chaleur spécifique à pression constante (en KJ/Kg^oK) et ΔT la variation de température.
La chaleur récupérée par un gaz parfait à volume constant est donnée par la relation

$$\Delta U = C_v.\Delta T \tag{4.16}$$

avec ΔU la variation d'énergie interne par unité de masse (en KJ/Kg), C_v la chaleur spécifique à volume constant (en KJ/Kg^oK) et ΔT la variation de température.
Remarque : $H = U + \frac{p}{\rho}$ équivaut à $\Delta H = \Delta U + \Delta(r.T)$ d'où

$$C_p = C_v + r(relationdeMayer)$$

On définit $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$. Ainsi la relation de Mayer devient

$$C_p = r.\frac{\gamma}{\gamma - 1}$$

La variation d'enthalpie est par conséquent

$$\Delta H = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\Delta(\frac{p}{\rho})$$

Pour une transformation adiabatique $\frac{p}{\rho^\gamma} = cte$. D'après la loi des gaz parfaits on obtient

$$\frac{p^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{T} = cte$$

5.2 Classification des écoulement

5.2.1 Célérité du son

Pour un écoulement isentropique, la vitesse de son, appelée également célérité du son est donnée par l'expression suivante :

$$c = \sqrt{\frac{\gamma.p}{\rho}} \tag{4.17}$$

5.2.2 Nombre de Mach

Le nombre de Mach est le rapport de la vitesse d'écoulement v(m/s) et de la célérité du son c(m/s)

$$M = \frac{c}{v} \tag{4.18}$$

Le nombre de Mach varie d'un point à un autre de l'écoulement non seulement parce que la vitesse varie, mais aussi parce que l'état du fluide varie, donc la célérité.

5.2.3 Ecoulement subsonique et supersonique

L'écoulement est dit subsonique si la vitesse d'écoulement est inferieure à la vitesse du son :$M < 1$. Lorsque $M > 1$, l'écoulement est dit supersonique.

5.3 Equation de continuité

L'équation de continuité d'un fluide compressible s'écrit :

$$\rho_1 S_1 v_1 = \rho_2 S_2 v_2 \tag{4.19}$$

5.4 Equation de Saint-Venant

L'équation de Saint-Venant d'un fluide compressible s'écrit :

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = cte \tag{4.20}$$

Entre deux points d'un écoulement cette relation devient :

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p_1}{\rho_1}(\frac{p_2}{\rho_2} - 1) + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} = 0 \tag{4.21}$$

En prenant en considération $\frac{p_1}{\rho_1^\gamma} = \frac{p_2}{\rho_2^\gamma}$ on obtient finalement la relation suivante

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1}.\frac{p_1}{\rho_1}\left((\frac{p_2}{p_1})^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right) + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} = 0 \tag{4.22}$$

5.5 Etat générateur

C'est l'état d'un fluide en un point de l'écoulement où la vitesse v est supposée nulle. En appliquant le théorème de Saint-venant entre ce point et un autre point, on a

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p_i}{\rho_i} \tag{4.23}$$

où l'indice i désigne toutes les variables thermodynamiques relatives à ce point. comme $c = \sqrt{\frac{\gamma.p}{\rho}} = \sqrt{\gamma r.T}$ on obtient

$$\frac{1}{\gamma - 1}c^2 + \frac{v^2}{2} = \frac{1}{\gamma - 1}c_i^2$$

ce qui conduit après multiplication par $\frac{2}{c^2}$

$$1 + \frac{\gamma - 1}{2}M^2 = \frac{T_i}{T}$$

La relation entre les caractéristiques de deux points (1) et (2) d'un même écoulement s'écrit :

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2}M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M_2^2}$$

Remarque :Si M=1, l'état de l'écoulement est appelé état critique. Il est déterminé en fonction de l'état générateur :

$$\frac{T_i}{T_c} = \frac{\gamma + 1}{2}$$