Проецирование сцены и однородные координаты

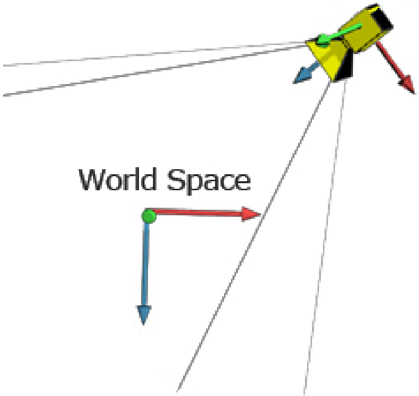
Сергей Кривохатский

СПбГУ, Современное программирование

30 сентября 2022 г.

Позиция объекта в 3D I

- описание (недеформируемого) объекта или камеры можно задать в *локальной системе координат*
- тогда позицию в *мировом пространстве* можно задать преобразованием из локальной системы координат в мировую



Позиция объекта в 3D II

Позиция имеет шесть степеней свободы и может быть задана как композиция вращения и параллельного переноса

$$p_w = \boldsymbol{R} p_o + t$$

где

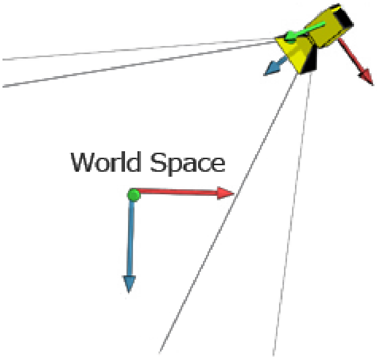
- $p_w = \begin{pmatrix} x_w & y_w & z_w \end{pmatrix}^\intercal$ — точка в мировой системе координат
- $p_o = \begin{pmatrix} x_o & y_o & z_o \end{pmatrix}^\intercal$ — точка в системе координат объекта
- $\boldsymbol{R} \in SO(3)$ — матрица поворота
- $t = \begin{pmatrix} t_x & t_y & t_z \end{pmatrix}^\intercal$ — вектор параллельного переноса

Проецирование точки с помощью камеры

Камера задана позицией $(\boldsymbol{R}_c, t_c)$ и параметрами f_x, f_y, c_x, c_y

- точка в мировой системе координат p_w
- точка в системе координат камеры $p_c = \boldsymbol{R}_c^{-1}(p_w - t_c)$
- координаты проекции

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x \dfrac{x_c}{z_c} + c_x \\ f_y \dfrac{y_c}{z_c} + c_y \end{pmatrix}$$



Матрицы?

Нельзя ли это все записать с помощью матриц?

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ \cdot \end{pmatrix} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{T}_c \boldsymbol{R}_c)^{-1} \begin{pmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \end{pmatrix}$$

Нельзя, поскольку параллельный перенос и проецирование — нелинейные отображения

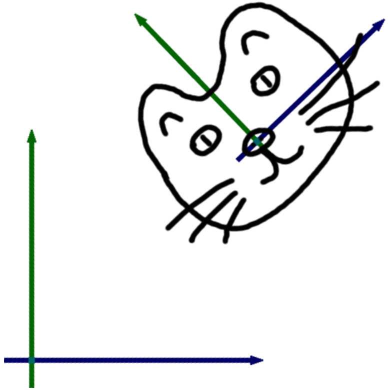
Позиция недеформируемого объекта в 2D

С точками на плоскости отождествляются двухкомпонентные вектора из $\mathbb{R}^2$

$$p = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

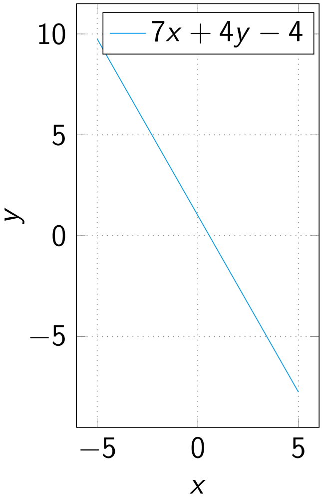
Позиция имеет три степени свободы и может быть задана как композиция вращения и сдвига, как и в 3D

$$p_w = \boldsymbol{R} p_o + t$$



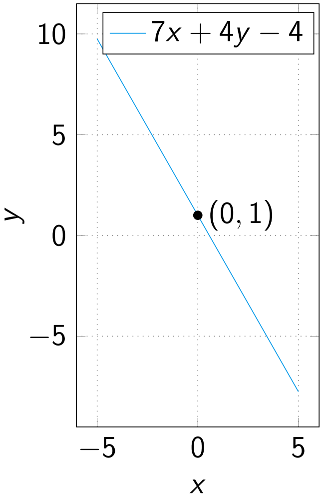
Однородные координаты прямой на плоскости

- прямую $ax + by + c = 0$ можно записать в виде вектора $\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}^\top$
- вектора $\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}^\top$ и $w \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}^\top$ задают одну прямую, если $w \neq 0$
- такие классы эквивалентности векторов в $\mathbb{R}^3 \setminus 0$ формируют *проективное пространство* $\mathbb{P}^2$
- элементы $\mathbb{P}^2$ называют *однородными векторами*



Однородные координаты точки на плоскости

- точка $p = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}^\intercal$ лежит на прямой $\mathbf{l} = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}^\intercal$ когда $ax + by + c = 0$
- это можно записать в векторном виде $\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \mathbf{l} = 0$
- что эквивалентно $\begin{pmatrix} wx & wy & w \end{pmatrix} \mathbf{l} = 0$ при $w \neq 0$
- т. о. точки можно задать однородными векторами из $\mathbb{P}^2$



Однородные координаты

Однородные координаты прямой $ax + by + c = 0$

$$\mathbf{l} = w \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \; w \neq 0$$

Однородные координаты точки $p = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}^\intercal$

$$\mathbf{p} = w \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}, \; w \neq 0$$

Точка $\mathbf{p}$ лежит на прямой $\mathbf{l} \Leftrightarrow \mathbf{p}^\intercal \mathbf{l} = 0$

Точки и прямые

Прямые $\mathbf{l}_1$ и $\mathbf{l}_2$ пересекаются в точке $\mathbf{p} = \mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2$

Док-во: полученная точка лежит на обеих прямых

$$\mathbf{l}_1^\mathsf{T}\mathbf{p} = \mathbf{l}_1^\mathsf{T}(\mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2) = 0$$
$$\mathbf{l}_2^\mathsf{T}\mathbf{p} = \mathbf{l}_2^\mathsf{T}(\mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2) = 0$$

Через точки $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$ проходит прямая $\mathbf{l} = \mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2$

Док-во: полученная прямая проходит через обе точки

$$\mathbf{p}_1^\mathsf{T}\mathbf{l} = \mathbf{p}_1^\mathsf{T}(\mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2) = 0$$
$$\mathbf{p}_2^\mathsf{T}\mathbf{l} = \mathbf{p}_2^\mathsf{T}(\mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2) = 0$$

Пересечение параллельных прямых

- формула пересечения сработает и для параллельных прямых $\mathbf{l}_1 = \begin{pmatrix} a & b & c_1 \end{pmatrix}^\intercal$ и $\mathbf{l}_2 = \begin{pmatrix} a & b & c_2 \end{pmatrix}^\intercal$

$$\mathbf{p} = \mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a & b & c_1 \\ a & b & c_2 \end{vmatrix} = (c_2 - c_1) \begin{pmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}$$

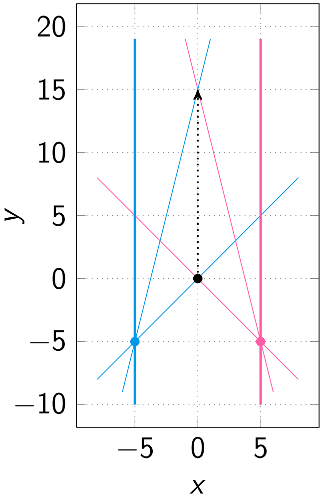
- попробуем перевести $\mathbf{p}$ в точку на плоскости: $\begin{pmatrix} b/0 & -a/0 \end{pmatrix}^\intercal$
- делить на 0 нельзя, но можно думать о $\mathbf{p}$ как о точке, находящейся бесконечно далеко

Пересечение параллельных прямых — пример

- попробуем пересечь прямые $\mathbf{l}_1 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 5\end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$ и $\mathbf{l}_2 = \begin{pmatrix}1 & 0 & -5\end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$

$$\mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2 = -10\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix} = 10\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

- вектор $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$ указывает в бесконечность в направлении оси y

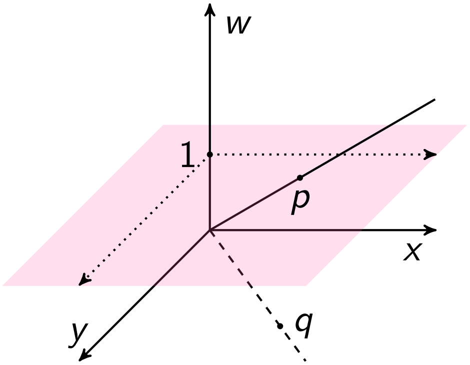


Идеальные точки и прямая на бесконечности

- конечные точки на плоскости имеют вид $w\begin{pmatrix}x & y & 1\end{pmatrix}^\mathsf{T}$, $w \neq 0$
- можно расширить плоскость *идеальными точками* вида $w\begin{pmatrix}x & y & 0\end{pmatrix}^\mathsf{T}$, $w \neq 0$ и $x^2 + y^2 \neq 0$
- все идеальные точки лежат на прямой $\mathbf{l}_\infty = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}^\mathsf{T}$ — *прямой на бесконечности*: $\begin{pmatrix}x & y & 0\end{pmatrix}\mathbf{l}_\infty = 0$
- любая прямая, параллельная данной, пересекается с ней в одной точке на $\mathbf{l}_\infty$, показывающей направление этих прямых: $\begin{pmatrix}a & b & c_1\end{pmatrix}^\mathsf{T} \times \begin{pmatrix}a & b & c_2\end{pmatrix}^\mathsf{T} = (c_2 - c_1)\begin{pmatrix}b & -a & 0\end{pmatrix}^\mathsf{T}$
- конечные и идеальные точки вместе формируют $\mathbb{P}^2$

Модель проективной плоскости

- о $\mathbb{P}^2$ можно думать как о наборе прямых в $\mathbb{R}^3$
- конечные точки соответствуют прямым, пересекающим плоскость $w = 1$
- идеальные точки соответствуют прямым, лежащим на плоскости $w = 0$



Принцип двойственности

Вспомним некоторые из рассмотренных фактов

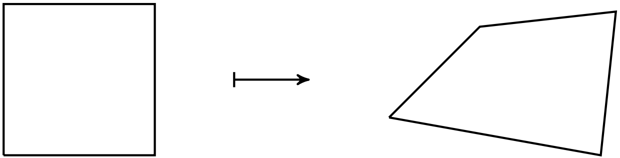
- $\mathbf{p}^\mathsf{T}\mathbf{l} = 0 \Leftrightarrow$ точка $\mathbf{p}$ лежит на прямой $\mathbf{l}$
- Прямые $\mathbf{l}_1$ и $\mathbf{l}_2$ пересекаются в точке $\mathbf{p} = \mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2$

- $\mathbf{l}^\mathsf{T}\mathbf{p} = 0 \Leftrightarrow$ прямая $\mathbf{l}$ проходит через точку $\mathbf{p}$
- Через точки $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$ проходит прямая $\mathbf{l} = \mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2$

Для любой теоремы двумерной проективной геометрии существует двойственная, которую можно получить сменой ролей точек и прямых

Проективные преобразования I

Проективное преобразование или *гомография* — взаимно однозначное отображение $h \colon \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$, такое, что три точки $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ и $\mathbf{p}_3$ лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $h(\mathbf{p}_1)$, $h(\mathbf{p}_2)$ и $h(\mathbf{p}_3)$ также лежат на одной прямой



Проективные преобразования II

Отображение $h\colon \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ является проективным $\Leftrightarrow$ существует невырожденная матрица $\boldsymbol{H}_{3\times 3}$, такая, что $\forall \mathbf{p} \in \mathbb{P}^2\colon h(\mathbf{p}) = \boldsymbol{H}\mathbf{p}$

Доказательство $\Leftarrow$

Пусть точки $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ и $\mathbf{p}_3$ лежат на прямой $\mathbf{l}$, то есть $\mathbf{l}^\intercal \mathbf{p}_i = 0$ для $i \in \{1, 2, 3\}$ и пусть $\boldsymbol{H}$ — невырожденная матрица, тогда

$$\mathbf{l}^\intercal \boldsymbol{H}^{-1} \boldsymbol{H} \mathbf{p}_i = 0$$

то есть точки $\boldsymbol{H}\mathbf{p}_i$ лежат на прямой $(\boldsymbol{H}^{-1})^\intercal \mathbf{l}$

Проективные преобразования III

- проективное преобразование — обратимое линейное отображение однородных координат
- если матрица $\boldsymbol{H}$ задает гомографию h, то и $w\boldsymbol{H}$ ($w \neq 0$) тоже задает h

$$\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} wa \\ wb \\ wc \end{pmatrix} = w \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

- матрица гомографии имеет восемь степеней свободы

Матрица поворота

- вращение в $\mathbb{R}^2$: $\boldsymbol{p} \mapsto \boldsymbol{R}\boldsymbol{p}$, где $\boldsymbol{R}_{2\times 2}$ — матрица поворота
- чтобы использовать матрицу поворота в $\mathbb{P}^2$, ее достаточно просто расширить

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{R} & 0 \\ 0^\intercal & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{p} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{R}\boldsymbol{p} \\ 1 \end{pmatrix}$$

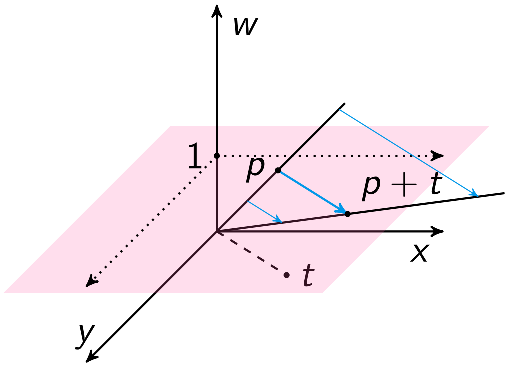
- вращение влияет как на конечные, так и на идеальные точки

Матрица параллельного переноса

- параллельный перенос в $\mathbb{R}^2$:
  $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}^\intercal \mapsto \begin{pmatrix} x + t_x & y + t_y \end{pmatrix}^\intercal$
- в $\mathbb{P}^2$ это гомография, найти матрицу несложно

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + t_x \\ y + t_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

- не влияет на идеальные точки



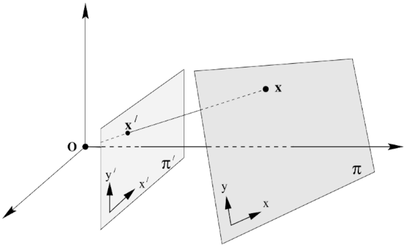
Композиция вращения и параллельного переноса

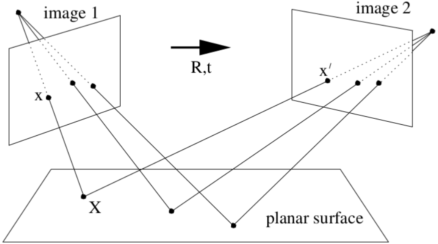
- для задания позиции объекта используется композиция вращения и параллельного переноса: $p \mapsto \boldsymbol{R}p + t$
- это преобразование также можно записать в виде матрицы

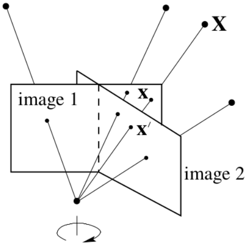
$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & t \\ 0^\intercal & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{R} & 0 \\ 0^\intercal & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{R} & t \\ 0^\intercal & 1 \end{pmatrix}$$

- такие матрицы составляют специальную евклидову группу $SE(2)$

Примеры проективных преобразований $\mathbb{P}^2$







Проективное пространство $\mathbb{P}^3$

- конечная точка $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^3$ задается однородным вектором $w \begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix}^\mathsf{T}$, $w \neq 0$
- идеальные точки имеют вид $w \begin{pmatrix} x & y & z & 0 \end{pmatrix}^\mathsf{T}$, $w \neq 0$ и $x^2 + y^2 + z^2 \neq 0$
- плоскость $ax + by + cz + d = 0$ задается однородным вектором $w \begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix}^\mathsf{T}$, $w \neq 0$
- точка $\mathbf{p}$ лежит на плоскости $\boldsymbol{\pi}$, когда $\mathbf{p}^\mathsf{T} \boldsymbol{\pi} = 0$
- все идеальные точки лежат на плоскости на бесконечности $\boldsymbol{\pi}_\infty = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^\mathsf{T}$: $\begin{pmatrix} x & y & z & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\pi}_\infty = 0$
- существует двойственность между точками и плоскостями

Проективные преобразования в $\mathbb{P}^3$

- проективное преобразование — взаимно однозначное отображение $h\colon \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^3$, такое, что четыре точки $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3$ и $\mathbf{p}_4$ лежат на одной плоскости тогда и только тогда, когда $h(\mathbf{p}_1)$, $h(\mathbf{p}_2)$, $h(\mathbf{p}_3)$ и $h(\mathbf{p}_4)$ также лежат на одной плоскости
- проективное преобразование задается невырожденной матрицей 4×4 (с точностью до ненулевого множителя)
- матрица проективного преобразования имеет 15 степеней свободы

Матрицы вращения и параллельного переноса в 3D

В 3D матрицы строятся аналогично тому, как это делается в 2D

- вращение и параллельный перенос — группа $SE(3)$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & t \\ 0^\top & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{R} & 0 \\ 0^\top & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{R} & t \\ 0^\top & 1 \end{pmatrix}$$

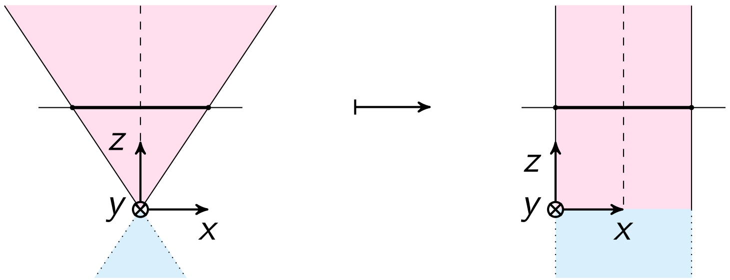
- иногда (например, в OpenCV) выбрасывают нижнюю строку

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{R} & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{R}p + t$$

- в таком случае часто используют обозначение $[\boldsymbol{R} \mid t]$

Проекция

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_x \dfrac{x}{z} + c_x \\[2ex] f_y \dfrac{y}{z} + c_y \end{pmatrix}$$



Матрица проекции

Строим матрицу проекции построчно

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^\top \mapsto \begin{pmatrix} f_x \frac{x}{z} + c_x & f_y \frac{y}{z} + c_y & \cdot \end{pmatrix}^\top$$

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$$

Нужно делить на z. Какой должна быть нижняя строка?

Матрица проекции

Строим матрицу проекции построчно

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^\top \mapsto \begin{pmatrix} f_x \frac{x}{z} + c_x & f_y \frac{y}{z} + c_y & \cdot \end{pmatrix}^\top$$

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z \end{pmatrix}$$

Первые две строки результата должны быть $f_x x + c_x z$ и $f_y y + c_y z$

Матрица проекции

Строим матрицу проекции построчно

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^\mathsf{T} \mapsto \begin{pmatrix} f_x \dfrac{x}{z} + c_x & f_y \dfrac{y}{z} + c_y & \cdot \end{pmatrix}^\mathsf{T}$$

$$\begin{pmatrix} f_x & 0 & c_x & 0 \\ 0 & f_y & c_y & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x x + c_x z \\ f_y y + c_y z \\ \cdot \\ z \end{pmatrix}$$

И полезно сохранить линейную независимость

Матрица проекции

Строим матрицу проекции построчно

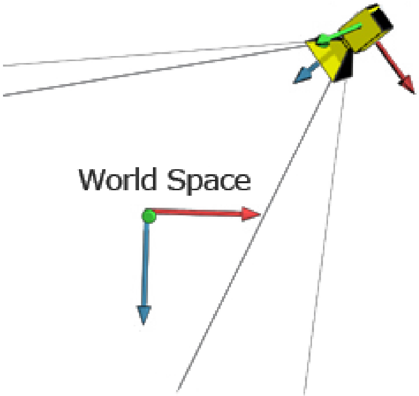
$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^\intercal \mapsto \begin{pmatrix} f_x \frac{x}{z} + c_x & f_y \frac{y}{z} + c_y & \frac{1}{z} \end{pmatrix}^\intercal$$

$$\begin{pmatrix} f_x & 0 & c_x & 0 \\ 0 & f_y & c_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x x + c_x z \\ f_y y + c_y z \\ 1 \\ z \end{pmatrix}$$

Например, можно сделать так

Проецирование точки с помощью матриц

$$w \begin{pmatrix} u \\ v \\ d \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{PV} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$



где

- $\boldsymbol{V}_{4\times4}$ — *видовая матрица*, обратная к матрице, задающей позицию камеры
- $\boldsymbol{P}_{4\times4}$ — *матрица проекции*

Модель камеры в OpenCV

Матрицу проекции называют еще матрицей *внутренних параметров* камеры. Можно записать ее в виде матрицы $\boldsymbol{K}_{3\times 3}$

$$\begin{pmatrix} f_x & 0 & c_x \\ 0 & f_y & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x x + c_x z \\ f_y y + c_y z \\ z \end{pmatrix}$$

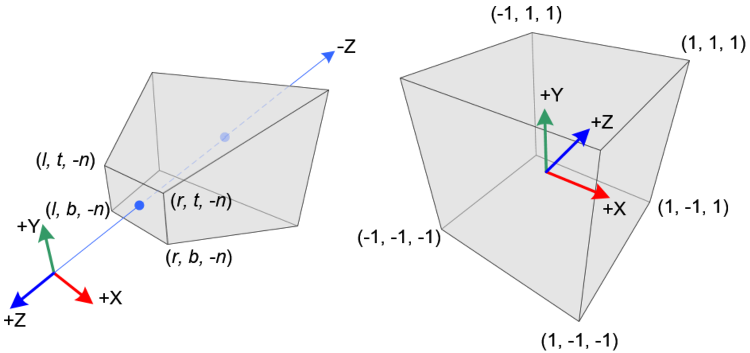
Вместе с матрицей *внешних параметров* $[\boldsymbol{R} \mid t]$ модель камеры выглядит как

$$s \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{K}[\boldsymbol{R} \mid t] \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Спасибо за внимание!

Проекция в OpenGL

Деформируем усеченную пирамиду в куб $2 \times 2 \times 2$



Источник: www.songho.ca

Видимым считается то, что попадает в куб

Матрица проекции в OpenGL I

Строим матрицу проекции построчно

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} \mapsto \begin{pmatrix} -f_x \dfrac{x}{z} & -f_y \dfrac{y}{z} & \cdot \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$$

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$$

Нужно делить на $-z$. Какой должна быть нижняя строка?

Матрица проекции в OpenGL I

Строим матрицу проекции построчно

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^\mathsf{T} \mapsto \begin{pmatrix} -f_x\dfrac{x}{z} & -f_y\dfrac{y}{z} & \cdot \end{pmatrix}^\mathsf{T}$$

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -z \end{pmatrix}$$

В первых двух строках результата нужно получить $f_x x$ и $f_y y$

Матрица проекции в OpenGL I

Строим матрицу проекции построчно

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} \mapsto \begin{pmatrix} -f_x \dfrac{x}{z} & -f_y \dfrac{y}{z} & \cdot \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$$

$$\begin{pmatrix} f_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_y & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x x \\ f_y y \\ \cdot \\ -z \end{pmatrix}$$

Нужно учесть z и сохранить линейную независимость

Матрица проекции в OpenGL I

Строим матрицу проекции построчно

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} \mapsto \begin{pmatrix} -f_x \frac{x}{z} & -f_y \frac{y}{z} & -\frac{b}{z} - a \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$$

$$\begin{pmatrix} f_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x x \\ f_y y \\ az + b \\ -z \end{pmatrix}$$

Какими должны быть a и b?

Матрица проекции в OpenGL II

Пусть n — расстояние от камеры до ближней границы пирамиды видимости, а f — расстояние до дальней, тогда

$$\begin{cases} \dfrac{-b}{-n} - a = -1 \\ \dfrac{-b}{-f} - a = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} na - b = n \\ fa - b = -f \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -\dfrac{f+n}{f-n} \\ b = -\dfrac{2fn}{f-n} \end{cases}$$

Проекция объекта с помощью матриц в OpenGL

$$w \begin{pmatrix} u \\ v \\ d \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{PVM} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

где

- $\boldsymbol{M}$ — *модельная матрица*, задает позицию объекта
- $\boldsymbol{V}$ — *видовая матрица*, обратная к матрице, задающей позицию камеры
- $\boldsymbol{P}$ — *матрица проекции*