Сингулярное разложение и решение линейных систем

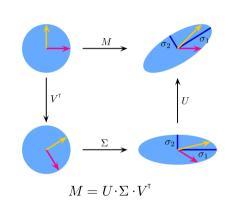
Сергей Кривохатский

СПбГУ, Современное программирование

7 октября 2022 г.

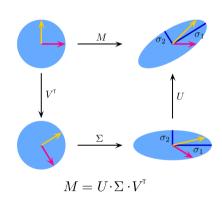
Сингулярное разложение 1

- ightharpoonup пусть M вещественнозначная матрица m imes n
- lacktriangleright тогда $m{M} = m{U} m{\Sigma} m{V}^\intercal c$ ингулярное разложение (SVD)
- $lackbox{m U}$ ортогональная матрица m imes m
- $ightharpoonup \Sigma$ диагональная матрица m imes n с неотрицательными элементами
- $ightharpoonup oldsymbol{V}$ ортогональная матрица n imes n



Сингулярное разложение II

- диагональные элементы называются сингулярными числами
- будем считать, что сингулярные числа расположены в порядке невозрастания



Про матрицы вида $A^{\mathsf{T}}A$ I

Рассмотрим сингулярное разложение

$$m{A} = m{U}m{\Sigma}m{V}^\intercal = egin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_n \end{pmatrix} egin{pmatrix} \sigma_1 & & & & \ & & \sigma_m \end{pmatrix} egin{pmatrix} m{v}_1^\intercal \ dots \ m{v}_m^\intercal \end{pmatrix}$$

где

- $ightharpoonup u_i$ вектора-столбцы размерности n
- \triangleright v_i вектора-столбцы размерности m
- $ightharpoonup \sigma_i$ сингулярные числа

Про матрицы вида $A^{\mathsf{T}}A$ II

Подставим сингулярное разложение матрицы $oldsymbol{A}$ в $oldsymbol{A}^{\mathsf{T}}oldsymbol{A}$

$$egin{aligned} m{A}^{\intercal}m{A} &= (m{V}m{\Sigma}^{\intercal}m{U}^{\intercal})(m{U}m{\Sigma}m{V}^{\intercal}) = \ &= m{V}m{\Sigma}^{\intercal}m{\Sigma}m{V}^{\intercal} = \ &= m{V}\operatorname{diag}(\sigma_1^2,\ldots,\sigma_m^2)m{V}^{\intercal} \ &= m{V}m{\Lambda}m{V}^{\intercal} \end{aligned}$$

 $oldsymbol{V}$ — ортогональная матрица, значит

- $ightharpoonup v_i$ собственные вектора матрицы ${m A}^{\mathsf{T}}{m A}$,
- $ightharpoonup \sigma_i^2 \geqslant 0$ собственные числа

Линейные наименьшие квадраты I

Задача линейных наименьших квадратов

$$(\mathbf{A}x - b)^{\mathsf{T}}(\mathbf{A}x - b) \rightarrow \min$$

Из лекции про оптический поток мы помним: чтобы найти минимум, нужно решить систему

$$\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{b}$$

 $\mathsf{E}\mathsf{c}\mathsf{n}\mathsf{u}$ матрица $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ обратима, то

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}b$$

Линейные наименьшие квадраты II

Подставим в $(oldsymbol{A}^\intercal oldsymbol{A})^{-1} oldsymbol{A}^\intercal b$ сингулярное разложение $oldsymbol{A}$

$$egin{aligned} x &= (oldsymbol{V} oldsymbol{\Lambda} oldsymbol{V}^{\intercal})^{-1} (oldsymbol{U} oldsymbol{\Sigma} oldsymbol{V}^{\intercal})^{\intercal} b = (oldsymbol{V} oldsymbol{\Lambda}^{-1} oldsymbol{V}^{\intercal}) (oldsymbol{V} oldsymbol{\Sigma}^{\intercal} oldsymbol{U}^{\intercal}) b = \ &= oldsymbol{V} egin{pmatrix} 1/\sigma_1 & & & & \\ & & & & \\ & & & & 1/\sigma_m \end{pmatrix} oldsymbol{U}^{\intercal} b = oldsymbol{V} oldsymbol{\Sigma}^{+} oldsymbol{U}^{\intercal} b \end{aligned}$$

Получили псевдообратнуюю к $m{A}$ матрицу $m{A}^+$

$$oldsymbol{A}^+oldsymbol{A} = (oldsymbol{V} oldsymbol{\Sigma}^+oldsymbol{U}^\intercal) (oldsymbol{U} oldsymbol{\Sigma} oldsymbol{V}^\intercal) = oldsymbol{1}$$

Линейные наименьшие квадраты III

Если у $m{A}$ сингулярные числа $\sigma_i=0$ для i>r, матрица $m{A}^{\mathsf{T}}m{A}$ вырождена, задача имеет множество решений, а $m{\Sigma}^+$ имеет вид

$$egin{pmatrix} 1/\sigma_1 & & & & \ & \ddots & & \ & & 1/\sigma_r & \end{pmatrix}$$

Можно показать, что и в таком случае $x = \mathbf{A}^+ \mathbf{b}$ будет решением, причем минимальным в смысле $\|x\|$

Линейные наименьшие квадраты IV

Pассмотрим систему Sy = c

$$egin{pmatrix} s_1 & & & & \ & & s_r & \ & & & \end{bmatrix} egin{pmatrix} y_1 \ dots \ y_r \ dots \end{pmatrix} = egin{pmatrix} c_1 \ dots \ c_r \ dots \end{pmatrix}$$

 $m{S}^+ c = ig(c_1/s_1 \ \cdots \ c_r/s_r \ 0 \ \cdots ig)^{\sf T}$ будет ее точным решением, если $c_i = 0$ для i > r, иначе решением в смысле наимешьших квадратов

$$egin{aligned} oldsymbol{\mathcal{A}} & x = b \ oldsymbol{\mathcal{U}} oldsymbol{\Sigma} oldsymbol{V}^\intercal & x = b \ oldsymbol{\Sigma} oldsymbol{(V}^\intercal & x) = oldsymbol{U}^\intercal b \end{aligned}$$

 $\Rightarrow egin{array}{c} oldsymbol{\Sigma}^+ oldsymbol{U}^\intercal b - ext{решение для} \ oldsymbol{V}^\intercal x$, значит

$$x = \boldsymbol{V} \boldsymbol{\Sigma}^+ \boldsymbol{U}^{\mathsf{T}} b = \boldsymbol{A}^+ b$$

будет решением $\boldsymbol{A} x = b$

Решение СЛАУ с помощью SVD

СЛАУ можно решить с помощью сингулярного разложения

- ightharpoonup решить переопределенную систему $\mathbf{A}x = b$ в смысле $\|\mathbf{A}x b\|^2 o \min$ можно вычислив \mathbf{A}^+ : $x = \mathbf{A}^+b$
- недоопределенная система решается аналогично
- ightharpoonup легко заметить, что так же можно решить и определенную систему (вычислив $oldsymbol{A}^{-1}$)
- такое решение подходит как метод по умолчанию
- для частных случаев бывают более эффективные методы

Спасибо за внимание!

11/11