# Direct Linear Transform для вычисления матрицы гомографии

Сергей Кривохатский

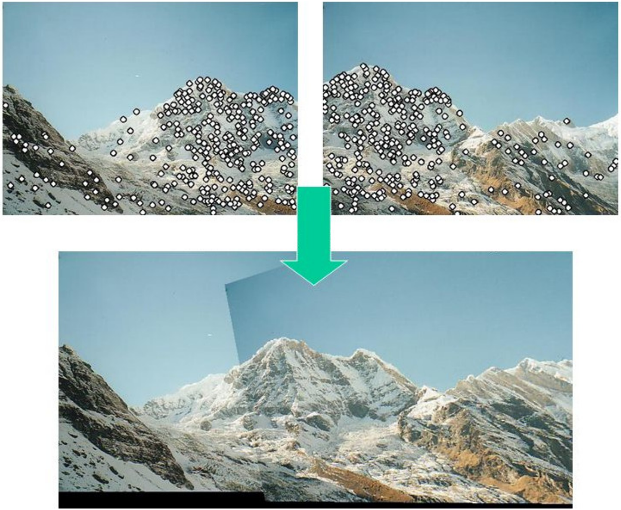
СПбГУ, Современное программирование

30 сентября 2022 г.

# Проективное преобразование плоскости

- *гомография* — взаимно однозначное отображение $h\colon \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$, такое, что три точки $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ и $\mathbf{p}_3$ лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $h(\mathbf{p}_1)$, $h(\mathbf{p}_2)$ и $h(\mathbf{p}_3)$ также лежат на одной прямой
- $h\colon \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ — гомография $\Leftrightarrow$ существует невырожденная матрица $\boldsymbol{H}_{3\times 3}$, такая, что $\forall \mathbf{p} \in \mathbb{P}^2\colon h(\mathbf{p}) = \boldsymbol{H}\mathbf{p}$
- если $\boldsymbol{H}$ задает гомографию $h$, то и $w\boldsymbol{H}$ $(w \neq 0)$ задает $h$, то есть матрица гомографии имеет восемь степеней свободы

# Пример применения вычисления гомографии



# Direct Linear Transform I

Дана точка $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}^\mathsf{T}$ и известно, что существует матрица гомографии $\boldsymbol{H}$, которая переводит ее в точку $\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix}^\mathsf{T}$

$$\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11}x + h_{12}y + h_{13} \\ h_{21}x + h_{22}y + h_{23} \\ h_{31}x + h_{32}y + h_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \cdot u \\ w \cdot v \\ w \cdot 1 \end{pmatrix}$$

Если считать элементы матрицы $h_{ij}$ неизвестными, то можно составить два уравнения

$$\begin{cases} xh_{11} + yh_{12} + h_{13} = uxh_{31} + uyh_{32} + uh_{33} \\ xh_{21} + yh_{22} + h_{23} = vxh_{31} + vyh_{32} + vh_{33} \end{cases}$$

# Direct Linear Transform II

Одно соответствие между точками $p_i \leftrightarrow q_i$ дает два уравнения

$$\begin{cases} x_i h_{11} + y_i h_{12} + h_{13} - u_i x_i h_{31} - u_i y_i h_{32} - u_i h_{33} = 0 \\ x_i h_{21} + y_i h_{22} + h_{23} - v_i x_i h_{31} - v_i y_i h_{32} - v_i h_{33} = 0 \end{cases}$$

которые можно переписать в матричном виде

$$\begin{pmatrix} x_i & y_i & 1 & 0 & 0 & 0 & -u_i x_i & -u_i y_i & -u_i \\ 0 & 0 & 0 & x_i & y_i & 1 & -v_i x_i & -v_i y_i & -v_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ \vdots \\ h_{33} \end{pmatrix} = 0$$

# Direct Linear Transform III

У нас есть девять неизвестных, заданных с точностью до ненулевого множителя, значит нам нужно четыре точечных соответствия

$$
\begin{pmatrix}
x_1 & y_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -u_1x_1 & -u_1y_1 & -u_1 \\
x_2 & y_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -u_2x_2 & -u_2y_2 & -u_2 \\
 & & & & & \vdots & & & \\
0 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & 1 & -v_1x_1 & -v_1y_1 & -v_1 \\
0 & 0 & 0 & x_2 & y_2 & 1 & -v_2x_2 & -v_2y_2 & -v_2 \\
 & & & & & \vdots & & &
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ \vdots \\ h_{33} \end{pmatrix} = 0
$$

# Решение однородной СЛАУ

- из точечных соответствий получена система из восьми линейных уравнений с девятью неизвестными $\boldsymbol{A}h = 0$
- нам нужно нетривиальное решение этой системы
- рассмотрим сингулярное разложение $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\Sigma\boldsymbol{V}^\intercal$

$$\boldsymbol{U}\begin{pmatrix} \sigma_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \sigma_8 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1^\intercal \\ \vdots \\ v_9^\intercal \end{pmatrix} h = 0$$

- подойдет любой коллинеарный $v_9$ вектор
- что будет, если из имеющихся четырех точек три лежат на одной прямой?

# А что, если точек больше? I

- представим, что точечные соответствия $p_i \leftrightarrow q_i$ у нас получены из трекинга уголков
- что будет, если выбрать только четыре из них и посчитать гомографию?

# А что, если точек больше? I

- представим, что точечные соответствия $p_i \leftrightarrow q_i$ у нас получены из трекинга уголков
- что будет, если выбрать только четыре из них и посчитать гомографию?
  - полученная гомография будет идеально переводить одну четверку точек в другую
  - почти всегда точки у нас зашумлены, поэтому на полученную матрицу сильно повлияет шум
- что делать?

# А что, если точек больше? I

- представим, что точечные соответствия $p_i \leftrightarrow q_i$ у нас получены из трекинга уголков
- что будет, если выбрать только четыре из них и посчитать гомографию?
  - полученная гомография будет идеально переводить одну четверку точек в другую
  - почти всегда точки у нас зашумлены, поэтому на полученную матрицу сильно повлияет шум
- что делать?
  - можно сделать всё то же самое, но составить матрицу из всех имеющихся точек

# А что, если точек больше? II

- рассмотрим СЛАУ для многих точек

$$\boldsymbol{A}h = \boldsymbol{U} \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_9 \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^\intercal \\ \vdots \\ v_9^\intercal \end{pmatrix} h = 0$$

- в качестве решения так же берем коллинеарный $v_9$ вектор
- при наличии шума $\sigma_9$ почти всегда будет больше нуля
- в этом случае наше решение дает минимум *алгебраической ошибки* $\|\boldsymbol{A}h\| / \|h\|$ (минимум $\|\boldsymbol{A}h\|$ при $\|h\| = 1$)

# Что осталось за кадром

- остались нерассмотренными важные вопросы
  - как интерпретировать минимизируемую ошибку в случае большого числа точек
  - предобработка точек до DLT для получения более надежных результатов
  - ...
- если нужно будет вычислять гомографию в реальной жизни, прочитайте главу 4 книги «Multiple View Geometry in Computer Vision»

Спасибо за внимание!