有关有放回的无序抽样问题（unordered sampling with replacement）

假设样本集合$A=\lbrace a_1,a_2,...a_n\rbrace$,从中有放回的随机抽取$k$个，一共有多少种结果？

对于有放回的无序抽样问题其数学模型并不满足古典概型（1.有限样本空间；2.等可能性）中的等可能性要求，因此其计算过程较为复杂。

（对于为什么不满住等可能性可以有如下解释：考虑从1，2，3中随机有放回抽取两个数，抽到1，1的概率（0.25）显然要小于抽到1，2的概率（0.5），故不满足等可能性。）

这里我们假设$A={1,2,3},k=2$，因此一共有6总结果，如下所示：

$$ 1,1 \to (2,0,0) \to 2+0+0=2\ 2,2 \to (0,2,0) \to 0+2+0=2\ 3,3 \to (0,0,2) \to 0+0+2=2\ 1,2 \to (1,1,0) \to 1+1+0=2\ 1,3 \to (1,0,1) \to 1+0+1=2\ 2,3 \to (0,1,1) \to 0+1+1=2 $$

这里我们将上述结果等价为右方结果，即统计每个样本出现的次数。也即求解下式：

$$ x_1+x_2+x_3=2,\quad where \quad x_1,x_2,x_3 \in \lbrace 0,1,2\rbrace \tag{1} $$

将上述情况推广至n,即有：

$$ x_1+x_2+x_3+...x_n=k,,\quad where \quad x_1,x_2,x_3,...x_n \in \lbrace 0,1,2,..., k \rbrace \tag{2} $$

上式不易求解，这里我们进一步将问题转化。考虑式（1），这里我们记：

$$ 1 \to |\ 2 \to ||\ 3 \to |||\ ... $$

因此，$x_1+x_2+x_3+x_4=1+0+1+2=|++|+||$。

现在问题即转化为在k个|中插入n-1个+，一共有多少种结果：

$$ \underbrace{_|_|_|_|..._|_|_}_k\ 向k+1个_中插入n-1个+（允许_中插入多个或0个+），共有多少种结果？ $$

该问题即为k个|和n-1个+一共有多少种排序方式。

一共有n-1+k个空位向其中填入|或+，一共有多少种填入方式：

$$ C_{n+k-1}^k=C_{n+k-1}^{n-1}\tag{3} $$

因此上述问题的最终答案即为式（3）。

https://www.probabilitycourse.com/chapter2/2_1_4_unordered_with_replacement.php