Os Teoremas da Incompletude de Gödel e suas implicações

Alexandre Maros, Nadyan Suriel Pscheidt

Universidade do Estado de Santa Catarina

Abstract

Em 1931 Kurt Gödel abalou as bases filosóficas da lógica e da matemática ao demonstrar o que hoje é conhecido por "Teorema da Incompletude de Gödel". Esse teorema mostrou os limites das provas em teoremas axiomáticos afirmando que irá sempre existir mais verdades do que se pode provar. Outra afirmação é a de que dado um sistema formal, esse próprio sistema não tem como provar sua própria consistência. Nesse artigo iremos abordar e explicar, de forma geral, o Teorema da Incompletude de Gödel, comentando sobre os fatos que o levaram a chegar a esse teorema, como foi feita essa prova e quais as principais consequências que isso acarretou no mundo moderno.

Keywords: Incompletude, postulados, Gödel

1. Introdução

Por milênios a área da matemática e lógica se baseou em cinco postulados descritos por Euclides, que são verdades matemáticas que não possuíam uma prova, porém todos os aceitavam. Frustrados com a falta de provas, matemáticos que buscavam o teorema que unificaria a matemática e faria dela completa estavam convencidos que o sucesso estava próximo, até que Kurt Gödel provou, em 1931, que tal teoria unificadora não era possível. Essa demonstração ficou conhecida como um dos "Teoremas da Incompletude de Gödel", afirmando que irá sempre existir mais verdades do que as que se pode provar (analisando apenas a provabilidade em um sistema formal específico).

Outro Teorema da Incompletude de Gödel se refere ao fato de que um sistema, assumindo que ele seja realmente um sistema consistente, este sistema não pode provar sua própria consistência. Teorema que influenciou inúmeros e que até ajuda na visualização de outros problemas, como o *Problema da Parada.*

1.1. Conceitos-chave

Para entender o Teorema de Gödel é necessário entender alguns conceitos básicos que estão ligados a esse assunto. O primeiro conceito a ser entendido é de um ***Sistema Formal***. Basicamente, um sistema formal é um sistema de axiomas equipados com regras de

Email addresses: `alehstk@gmail.com` (Alexandre Maros), `nadyan.suriel@gmail.com` (Nadyan Suriel Pscheidt)

inferência, que possibilitam a criação de novos teoremas. O conjunto desses axiomas deve ser finito ou pelo menos decidível. Se essa condição é satisfeita, a teoria é chamada de "*axiomatizável*".

Outro conceito é de um sistema formal ser ***completo***. Isso ocorre se, para toda afirmação da linguagem do sistema, ou essa afirmação ou a negação dessa afirmação **devem** ser derivadas (provadas) no sistema.

Por fim temos o conceito de ***consistência***. Um sistema formal é *consistente* se não houver uma afirmação que, tanto a própria afirmação quanto a sua negação são derivadas dentro do sistema. Ou seja, o sistema não tem contradições dentro de si mesmo.

2. O Primeiro Teorema da Incompletude

Poderoso o suficiente para abalar o mundo da ciência nos anos 30, o Teorema da Incompletude de Gödel, nas palavras do próprio, afirma que:

"Qualquer teoria efetivamente gerada capaz de expressar aritmética elementar não pode ser tanto consistente quanto completa. Em particular, para qualquer teoria formal consistente e efetivamente gerada que prova certas verdades aritméticas básicas, existe uma afirmação aritmética que é verdadeira, mas que não pode ser provada em teoria."

Ou seja, Gödel afirma que é impossível explicar conceitos sem referir-se a outros conceitos externos. Por exemplo, um sistema lógico sempre se baseará em suposições que não são, e não podem, ser provadas a partir de derivações dentro do próprio sistema.

Deve-se ressaltar que Gödel não afirma que há verdades que não podem ser provadas. O Teorema de Gödel não lida com provabilidade em um sentido absoluto, mas só analisa a provabilidade em um sistema formal específico.

2.1. A prova

Já que tal teorema não afeta apenas a área da matemática, mas sim as ciências como um todo, Gödel iniciou sua prova através da lógica. A afirmação inicial "Eu estou mentindo" é autocontraditória (ou paradoxo), pois se for atribuído um valor lógico de verdade, o resultado é uma contradição. Existem outras afirmações deste tipo, como "Esta afirmação é falsa" que também leva a uma contradição.

Gödel transformou tais contradições em fórmulas matemáticas. Com essas fórmulas foi provado que toda afirmação necessita de um observador externo. Ou seja, é necessário utilizar conceitos externos para explicar o conceito interno.

Para discutir como Gödel formalizou sua prova, precisa-se discutir mais alguns conceitos.

2.1.1. Consistência-ω

Primeiramente deve-se notar que aqui segue-se o modelo padrão de aritmética. Diz-se que o número n (abreviado por $\underline{n}$) é denominado pelo termo $0^{\prime\cdots\prime}$, onde o símbolo sucessor ' é iterado n vezes. Isso quer dizer que numerais 1, 2, 3 são denominados $0'$, $0''$, $0'''$, ... e são abreviados por $\underline{1}$, $\underline{2}$, $\underline{3}$, ...

Gödel utilizou a noção de consistência-ω. Diz-se que um sistema formal F é ω-consistente se **não** existe o caso de que para alguma fórmula $A(x)$, tanto $F \vdash \neg A(\underline{n})$ para todo n, e $F \vdash \exists x A(x)$.

Outra forma de explicar ω-consistência é como mostra [3]. Suponha que você esteja analisando um sistema M e você pode provar todos esses teoremas:

$$\begin{gathered} 0 \leq 0 \\ 1 \leq 1 \\ 2 \leq 2 \\ \ldots \end{gathered}$$

Você talvez pense que M também poderia provar

$$(\forall n) n \leq n$$

mas dependendo do axioma ele talvez não possa. Se ele não pode provar isso, ele é tido como $\omega - incompleto.$

Porém, M pode ser capaz de provar o oposto

$$\neg(\forall n) n \leq n.$$

Se M prova que $0 = 0$, $1 = 1$, ... e que $\neg(\forall n) n \leq n$ diz-se que M é ω-inconsistente. Note que ele não é necessariamente *inconsistente* já que a negação não é provada. Ele afirma que existe um n tal qual $\neg n \leq n$, mas ele também afirma que n não é 0, 1, 2 ou nenhum outro número.

Um sistema que não é ω-inconsistente é ω-consistente.

2.1.2. Representabilidade

É necessário estabelecer a noção de representabilidade de conjuntos e relações em um sistema formal F. Um conjunto S de números naturais é **fortemente representável** em F com uma variável livre x tal que para todo número natural n:

$$\begin{gathered} n \in S \rightarrow F \vdash A(\underline{n}) \\ n \notin S \rightarrow F \vdash \neg A(\underline{n}) \end{gathered}$$

Um conjunto S é **fracamente representável** em F se existe uma formula $A(x)$ da linguagem F tal que para todo número natural n:

$$n \in S \iff F \vdash A(\underline{n})$$

Basicamente temos que um conjunto é fortemente representável se e somente se ele é recursivo e um conjunto é fracamente representável se e somente se ele é recursivamente enumerável.

2.1.3. Mapeamento da Linguagem Formal

O próximo passo a ser entendido é o de pegar uma linguagem de um sistema formal e achar uma função que o mapeie para um determinado número natural. Tal processo pode ser chamado de mapeamento, ou mais formalmente de **Numeração de Gödel**. Como esse mapeamento ocorre não é de tanta relevância para prova, somente é necessário que tal método funciona, isto é, dado uma expressão em uma linguagem formal qualquer podemos transforma-la em uma espécie de código; o contrário também é válido. Tal código, ou *número de Gödel* de uma fórmula A é representada por $\lceil A \rceil$

Propriedades sintáticas, relações e operações são refletidas nesse novo modelo. Por exemplo, $neg(x)$ é a função aritmética que converte o número de Gödel de uma fórmula em sua negação; $neg(\lceil A \rceil) = \lceil \neg A \rceil$. Outra função possível seria $impl(\lceil A \rceil, \lceil B \rceil) = \lceil A \rightarrow B \rceil$.

Como verificar se uma determinada sequência de fórmulas constitui uma prova de uma determinada sentença é decidível (pela definição de Sistema Formal), a relação binária de "x é a prova de uma fórmula y" pode ser fortemente representada no sistema F. Vamos chamar a fórmula que representa essa relação em F como $Prf_F(x, y)$. A propriedade de ser demonstrável em F pode ser definida por $\exists X Prf_F(x, y)$. Abreviando esse *predicado de provabilidade* como $Prov_F(x)$.

2.1.4. Lema da diagonal

Por fim, temos o Lema da diagonalização. Tem-se uma fórmula qualquer A(X) de uma linguagem de F com uma única variável livre. Assim, uma sentença D pode ser mecanicamente construída tal que:

$$F \vdash D \leftrightarrow A(\lceil D \rceil)$$

Novamente, será omitido a prova de tal lema, porém é importante entender o que ele significa. Em muitos lugares ele é chamado de *Lema de auto-referência*. Basicamente, como diz [5]: *"Para qualquer predicado da linguagem, vai haver uma tautologia que estabelece a equivalência entre uma sentença e a sentença da metalinguagem que atribui este predicado à sentença ela mesma"*.

Em outras palavras, pra qualquer fórmula $A(x)$ em F, se tem uma sentença que diz *"Eu tenho propriedade $A(x)$"*

2.2. Finalizando a prova do Primeiro Teorema

Por fim, utilizando o Lema da Diagonalização aplicado no predicado de provabilidade negado $\neg Prov_F(x)$, temos a sentença G_F tal que:

$$F \vdash G_F \leftrightarrow \neg Prov_F(\lceil G_F \rceil).$$

Isso nos diz que: Mesmo dentro de F, que G_F é verdade se e somente se ele não é provável em F. Uma explicação mais detalhada sobre o por que tal sentença pode ser dita é encontrada em [1, Capítulo 2.5]

2.3. Outras provas

Há outras provas para esse teorema; uma delas utiliza outros teoremas como o *"Teorema de Rosser"*. Uma muito interessante, e talvez mais fácil de entender por Cientistas da Computação é utilizando o famoso **Problema da Parada**, discutido em [6].

Imagine que se tem um sistema formal completo F que é poderoso o suficiente para entender máquinas de Turing. Logo, se pode afirmar que utilizando tal sistema F pode-se facilmente resolver o problema da parada. Se tem uma Máquina M e queremos saber se ela para em uma fita vazia. Logo, simplesmente enumera-se todas as possíveis provas de F até encontrar ou uma prova que M para ou que M fica em *loop*. Como F é completo, eventualmente uma resposta seria encontrada. Logo, decide-se o problema da Parada, o que sabemos ser absurdo e conclui-se que F não pode existir.

3. O Segundo Teorema da Incompletude

"Para todo sistema consistente F com um certo conjunto aritmético elementar, a consistência de F ***não*** *pode ser provada no próprio F."*

Novamente é necessário notar que o Teorema é sobre provas formais ou derivabilidade. Ele não impede que uma afirmação do tipo *"T é consistente"* dentro de um Sistema Formal seja aceita como verdade por argumentos conclusivos ou uma prova que é aceita por matemáticos.

Nomeando a consistência do sistema como $cons(F)$, e formalizando a prova da primeira parte do primeiro teorema dentro de F, sendo G_F a sentença de Gödel para F temos que:

$$F \vdash cons(F) \rightarrow G_F$$

Se $cons(F)$ fosse provável em F, G_F também seria. Porém essa afirmação seria contraditória em relação ao primeiro teorema da incompletude, ou seja, $cons(F)$ não pode ser provável em F. Formalizando tal afirmação vinculada ao segundo teorema da incompletude, temos que:

Assumindo que F é um sistema formal consistente que contenha aritmética elementar, então:

$$F \nvdash cons(F) \text{ [1].}$$

A prova do segundo teorema da incompletude é obtida através da formalização da prova do primeiro teorema dentro do sistema F. Isso faz o segundo teorema mais forte do que o primeiro, pois o primeiro teorema não expressa diretamente a consistência do sistema.

4. Efeitos dos Teoremas da Incompletude

4.1. Alguns trabalhos inspirados

Além de provar o teorema de Gödel, a trajetória para tal prova trouxe diversos resultados para a indecidibilidade através das ferramentas utilizadas. Por exemplo, uma teoria é dita decidível se os teoremas nela contidas são provadas decidíveis. Caso contrário, é indecidível. Também é possível afirmar que se uma teoria é completa, ela é decidível. Porém também existem teorias incompletas que são decidíveis, ou seja, uma teoria ser incompleta abre a possibilidade da mesma ser indecidível. Por outro lado, se a teoria for completa, ela certamente será decidível. Esses resultados obtidos na área da indecidibilidade foram obtidos por Church por volta de 1936.

Além dos já citados trabalhos que foram inspirados pelos teoremas da incompletude, outro que foi baseado nas fórmulas utilizadas por Gödel em seus teoremas foi o de Martin Hugo Löb, que constatou que se uma fórmula F for demonstrável, então certamente F é verdadeiro. Formalmente expresso:

$$\text{se } PA \vdash (prov(\#P) \rightarrow P), \text{ então } PA \vdash P$$

Sendo PA a aritmética Peano ou axiomas de Peano que são um conjunto de axiomas para os números naturais, e a função $prov()$ é de provável. E finalmente, $\#P$ simboliza o número de Gödel P, onde números de Gödel representam um símbolo ou fórmula de alguma linguagem formal, na qual tal número é um natural [7], também já citado na seção sobre Mapeamento da Linguagem Formal. O teorema de Löb pode ser facilmente provado por consequencia do segundo teorema da incompletude de Gödel, assim como o segundo teorema pode ser derivado como consequencia do teorema de Löb.

4.2. Efeitos causados em diversas áreas

O teorema de Gödel foi certamente impactante no mundo científico, porém não foi totalmente inesperado, pelo menos não todos os seus fenômenos. Como por exemplo, na área da teoria de conjuntos, alguns desses fenômenos ligados à incompletude já eram estudados por Paul Bernays e Alfred Tarski em 1928. Assim como a possibilidade da matemática e a lógica não serem completamente decidíveis, considerado por Von Neumann na mesma época.

Embora muito bem estruturados em seu desenvolvimento, os resultados obtidos por Gödel não foram completamente aceitos pela comunidade científica. Por serem bastante complexos, os métodos utilizados tiveram bastante desentendimento por alguns membros, trazendo assim uma boa dose de resistência pelos mesmos. Por outro lado, uma boa parcela da comunidade principalmente de matemáticos e lógicos rapidamente compreenderam os resultados assim como sua relevância para a área, como o já citado Jon Von Neumann que estava presente quando os resultados foram anunciados em Vienna e Paul Bernays que demonstrou interesse nos resultados após sofrer com uma certa dificuldade em entender os resultados.

Assim como inúmeras teorias e teoremas científicos, o teorema de Gödel foi alvo de muitos debates envolvendo sua veracidade ao decorrer da década de 1930. E apenas no final da década, no segundo volume de um trabalho desenvolvido e publicado por Bernays e Hilbert e intitulado "*Die Grundlagen der Mathematik*", foi demonstrada a prova definitiva e amplamente detalhada do segundo teorema da incompletude. Com essa prova de Bernays e Hilbert, diversos opositores das conclusões de Gödel desapareceram.

Além dos efeitos causados nas áreas da matemática e lógica, a filosofia também foi afetada pelo teorema de Gödel. Na área da filosofia da matemática, alguns acreditam que o teorema da incompletude refuta o Logicismo. Tal área da filosofia da matemática acredita nas formulações lógicas como sendo suficientes por si mesmas, assim como a possibilidade de que toda a matemática seja redutível à lógica.

Ainda na área da filosofia, o teorema da incompletude causou algumas conclusões precipitadas por parte da comunidade. Essas conclusões certamente baseadas em desentendimentos do teorema afirmam que podem provar a existência de algum Deus ou suportam certos tipos de misticismo. Esses desentendimentos podem ser devido ao Platonismo, que suporta a existência de objetos matemáticos abstratos que são independentes de pensamento, ações e práticas humanas.

Um último, porém não menos importante efeito causado pelo teorema, é na área da física. Durante décadas físicos teóricos buscam uma teoria que possibilita explicar todas as interações e forças do universo, trabalho iniciado (e idealizado) pelo físico Albert Einstein. Como Gödel provou a impossibilidade de existir um conjunto de regras capaz de explicar tudo e a si mesmo, sem necessitar de componentes externos, tal "teoria de tudo" da física seria impossível.

5. Conclusão

Neste trabalho foram apresentados os dois teoremas provados por Kurt Gödel na década de 30, assim como um breve contexto sobre a situação dos campos da matemática e lógica na época. Também para detalhar os teoremas, foram apresentadas de forma resumida as provas e as ferramentas utilizadas para chegar nas respostas, juntamente com os efeitos causados pelas mesmas nas áreas já citadas e na filosofia da matemática.

Para concluir, devemos mais uma vez enfatizar a importância dessas provas para as áreas da lógica e matemática, os teoremas da incompletude de Gödel mudaram plenamente o rumo na qual essas ciências estavam tomando na época. Os conceitos descritos e provados transformaram o modo de muitos pesquisadores olharem para seus campos de estudo, além de inspirar muitos outros a alcançarem as provas de mais teoremas baseados em suas fórmulas complexas. Tais fórmulas que muitas vezes foram mal interpretadas pelos menos engenhosos e perspicazes, e que também fizeram alguns dos mais convencidos desistirem da ideia de uma matemática totalmente unificada e completa.

6. Considerações finais

Uma grande parte desse texto foi retirado da explicação dos Teoremas da Incompletude de Gödel da Enciclopédia de Filosofia de Stanford [1], por ter se mostrado um guia bastante completo, e algumas sessões foram traduzidas e simplificadas pelos autores desse artigo.

References

[1] P. Raatikainen, Gödel's incompleteness theorems, in: E. N. Zalta (Ed.), The Stanford Encyclopedia of Philosophy, spring 2015 Edition, 2015.

[2] L. Henkin, A generalization of the concept of —omega-consistency, The Journal of Symbolic Logic 19 (3) (1954) 183–196.
URL http://www.jstor.org/stable/2268617

[3] M. (http://math.stackexchange.com/users/25554/mjd), Understanding omega-consistent and omega-incomplete theory, Mathematics Stack Exchange, uRL:http://math.stackexchange.com/q/821806 (version: 2014-06-05). arXiv:http://math.stackexchange.com/q/821806.
URL `http://math.stackexchange.com/q/821806`

[4] G. S. Boolos, R. C. Jeffrey, Computability and Logic, Cambridge University Press, 1989.

[5] G. A. Cardoso, Repercussões contemporâneas do paradoxo do mentiroso: Tarski e kripke.

[6] S. Aaronson, Rosser's theorem via turing machines.
URL `http://www.scottaaronson.com/blog/?p=710`

[7] V. V. D. Silva, Teorema fundamental da aritmética e números de gödel aplicado à criptografia, 2006.
URL `http://www.inf.furb.br/seminco/2006/artigos/25041.pdf`