

«Физические модели генерации точечных структур на плоскости»

Багров А.М., Чурилов Д.И.

Осень 2025

Содержание

1 Описание программы	2
2 Введение	5
3 Стратегии и физические аналоги	5
3.1 Случайные точки	5
3.2 Треугольник Серпинского	6
3.3 Притяжение: распределение частиц в поле притягивающих центров . . .	7
3.4 Отталкивание: распределение частиц в поле отталкивающих центров . .	9
3.5 Гравитация (барометрическая формула: распределение в поле тяжести) .	12
3.6 Кристаллизация (гексагональная решётка)	14
3.7 Кристаллизация (квадратная решётка)	16
3.8 Модель Изинга	17
3.9 Случайное блуждание	18
3.10 Дерево Пифагора	20
3.11 Снежинка Коха	22
3.12 Папоротник Барнсли	23
3.13 Множество Жюлиа	25
4 Заключение	28

1 Описание программы

Данная программа позволяет строить различные стратегии построения точек на поверхности.

Главное меню выглядит следующим образом:

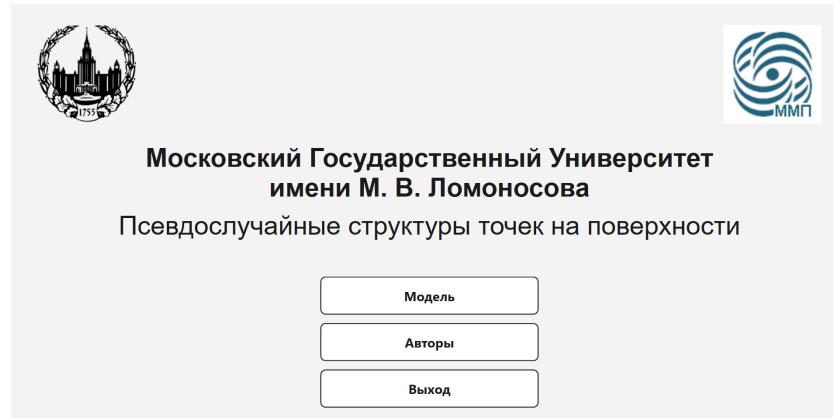


Рис. 1: Главное меню

Нажимаем на **Модель** и видим основной интерфейс:

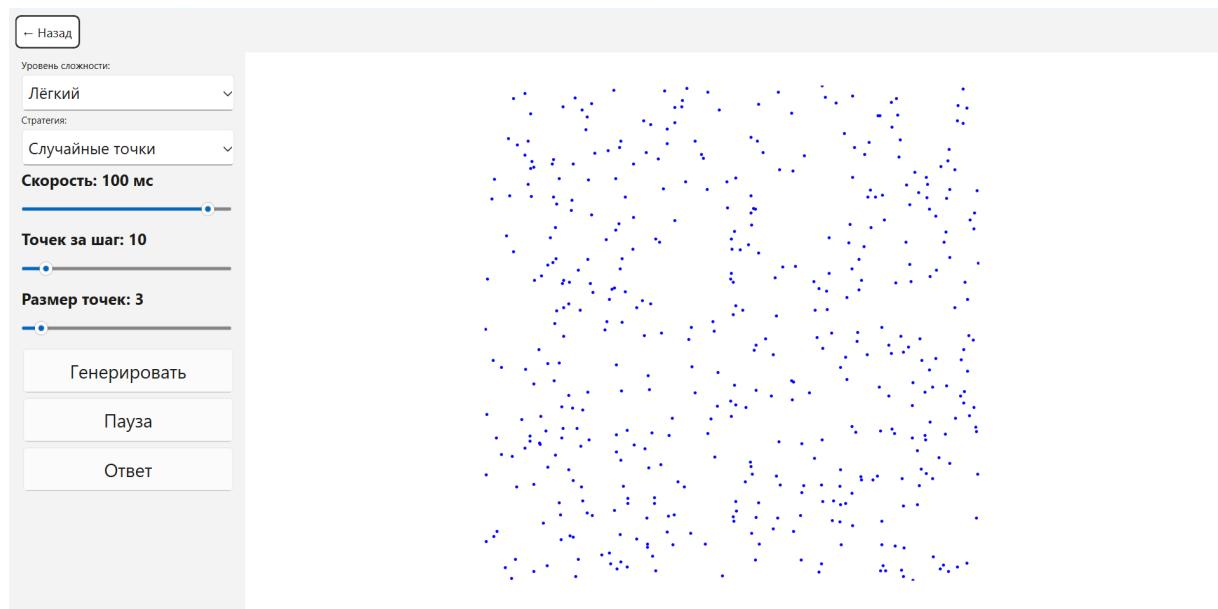


Рис. 2: Меню с моделью

На выбор можно выбрать 3 уровня сложности:

- **Лёгкий** — будет сгенерировано 1000 точек.
- **Средний** — будет сгенерировано 300 точек.
- **Тяжёлый** — будет сгенерировано 100 точек.

Также можно выбрать следующие стратегии: (их описание будет дано ниже)

- Случайная стратегия
- Случайные точки
- Треугольник Серпинского
- Центры притяжение
- Центры отталкивание
- Гравитация
- Гексагональная кристаллическая решетка
- Квадратная кристаллическая решетка
- Модель Изинга
- Случайное блуждание
- Дерево Пифагора
- Снежинка Коха
- Папоротник Барнсли
- Множество Жюлиа

Как видно на Рис.2 пользователь может менять:

- **Скорость анимации:** в пределах 10 - 500 мс.
- **Количество точек за шаг:** в пределах 0 - 100.
- **Размер точек:** в пределах 0 - 30

Чтобы начать игру, пользователь должен нажать на кнопку **Генерировать**. Пользователь может делать паузу в любой момент генерации модели и продолжить генерацию по повторному нажатию кнопки паузы. Также можно узнать правильный ответ, ниже представлены примеры ответов для некоторых стратегий.

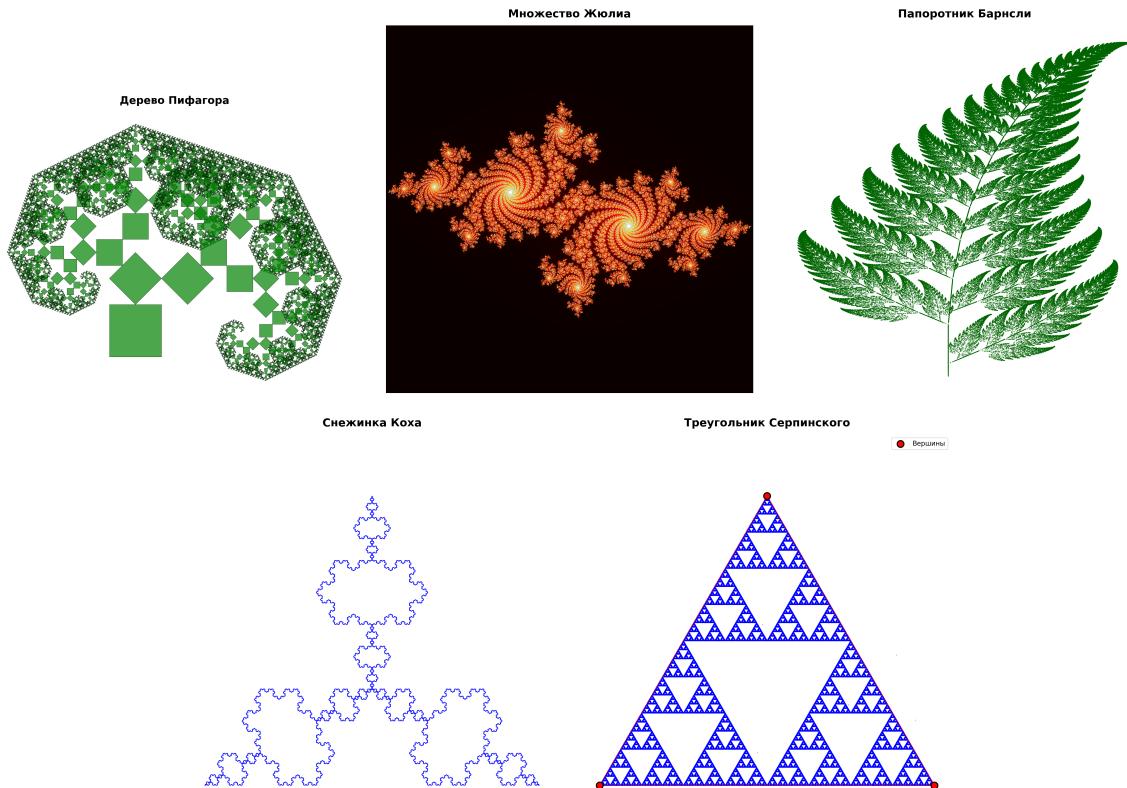


Рис. 3: Примеры стратегий.

2 Введение

В работе представлено глубокое теоретическое обоснование различных стратегий генерации точек на поверхности через призму статистической физики. Каждая стратегия анализируется в терминах ключевых концепций статистической механики: энтропии, фазовых переходов, корреляционных функций, флуктуаций и фрактальной размерности. Показано, как простые алгоритмы генерации точек моделируют сложные физические процессы, демонстрируя переход от хаотических состояний к самоорганизованным структурам.

Статистическая физика описывает системы с большим числом степеней свободы через вероятностные распределения микросостояний, где макроскопические величины (энергия, энтропия, корреляционные функции) возникают в результате статистического усреднения. Цель работы — создание и анализ модельных распределений точек, которые наглядно иллюстрируют следующие фундаментальные принципы:

- Энтропия и хаотичность,
- Взаимодействия и локальная корреляция,
- Фазовые переходы и формирование доменов,
- Флуктуации и стохастическая динамика,
- Самоорганизация и масштабная инвариантность.

3 Стратегии и физические аналоги

3.1 Случайные точки

Точки x, y равномерны в квадрате $[0, 1]^2$. Плотность $P(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \text{const}$ на единичной площади. Как будто бросаются горсть песчинок на пол, или монетки, они падают куда попало, без всякого порядка.

Физическая интерпретация

Модель равномерного распределения случайных точек является прямой статистической аналогией идеального газа и системы невзаимодействующих частиц, находящейся в состоянии с максимальной энтропией. В таком состоянии отсутствуют какие-либо пространственные корреляции, а частицы равномерно заполняют доступный объём. Данная модель служит фундаментальным эталоном (полной пространственной случайностью) для анализа любых других распределений. Сравнение с этим эталоном позволяет выявлять и количественно оценивать кластеризацию или регулярность в наблюдаемых точечных паттернах, верифицировать статистические методы и формулировать обоснованные нуль-гипотезы в научных исследованиях.

Алгоритм генерации

1. Для каждой точки независимо генерируются две случайные величины:
2. $x_i = \text{random}(0, 1)$
3. $y_i = \text{random}(0, 1)$
4. Точка добавляется в позиции (x_i, y_i)

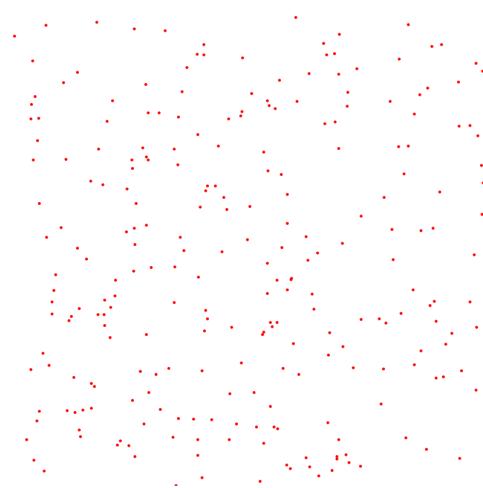


Рис. 4: Визуализация случайного распределения точек на плоскости. Точки демонстрируют отсутствие кластеризации и корреляций.

3.2 Треугольник Серпинского

Фрактальная структура, которая строится итеративным случайным алгоритмом. Берём треугольник, соединяя середины его сторон, убираем центральный маленький треугольник — и повторяем это с оставшимися снова и снова. Получится треугольная структура с дырочками, похожая на снежинку или узор.

Параметры алгоритма

Алгоритм построения характеризуется следующими параметрами: количество итераций $N_{\text{iter}} = 10^4\text{--}10^7$, коэффициент сжатия (обычно $1/2$, но может варьироваться для получения родственных фракталов) и равные вероятности выбора вершин $p_i = 1/3$.

Физическая интерпретация

Классический фрактальный объект с размерностью $D = \ln 3 / \ln 2 \approx 1.585$, что отражает его промежуточную сложность между линией и плоскостью. Структура обладает свойством самоподобия, повторяясь на всех масштабах наблюдения, и, несмотря на компактность области, в которую она вписана, её площадь равна нулю.

Применение

Треугольник Серпинского находит широкое применение в различных областях. В научной визуализации он служит для иллюстрации ключевых концепций фрактальной геометрии и теории хаоса. В прикладных исследованиях эта модель используется для моделирования иерархических и самоподобных природных систем, таких как пористые среды, структуры снежинок или сети рек. В компьютерной графике фрактал выступает в качестве тестового объекта для отладки и оценки производительности алгоритмов визуализации и рендеринга сложных геометрических форм.

Алгоритм генерации

1. Заданы три вершины равностороннего треугольника: $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$
 2. Выбирается произвольная начальная точка $P_0(x_0, y_0)$ совпадающая с одной из вершин
 3. Для каждой текущей точки $P_n(x_n, y_n)$:
 - (a) Случайно выбирается одна из вершин $V_i(x_i, y_i)$ с равной вероятностью
 - (b) Новая точка вычисляется как середина отрезка между P_n и V_i
- Общий вид формулы:

$$P_{n+1}(x_{n+1}, y_{n+1}) = \frac{P_n(x_n, y_n) + V_i(x_i, y_i)}{2}$$

где $P_n(x_n, y_n)$ — координаты точки на n -й итерации, $V_i(x_i, y_i)$ — координаты i -й вершины треугольника ($i = 1, 2, 3$), а $P_{n+1}(x_{n+1}, y_{n+1})$ — координаты точки на следующей, $(n + 1)$ -й итерации.

3.3 Притяжение: распределение частиц в поле притягивающих центров

Рассмотрим систему независимых частиц во внешнем потенциальном поле $U(\mathbf{r})$, создаваемом набором притягивающих в координатах точки $\{\mathbf{r}_k\}$. В каноническом ансамбле (температура T , постоянная Больцмана k_B) плотность вероятности обнаружения частицы в точке \mathbf{r} определяется распределением Больцмана.

Другими словами, есть несколько «магнитов» (центров притяжения). Точки чаще появляются рядом с ними, как железные опилки на листе бумаги над магнитом.

Математическое описание

Потенциал притяжения:

$$U(\mathbf{r}) = - \sum_i g_i \cdot \exp\left(-\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^2}{2R^2}\right) \quad \text{или} \quad U(\mathbf{r}) = - \sum_k \frac{g_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|^2}, \quad (\varepsilon_k > 0)$$

где $\mathbf{r} = (x, y)$ - координата текущей точки, $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i)$ - координаты центров

Треугольник Серпинского

Вершины

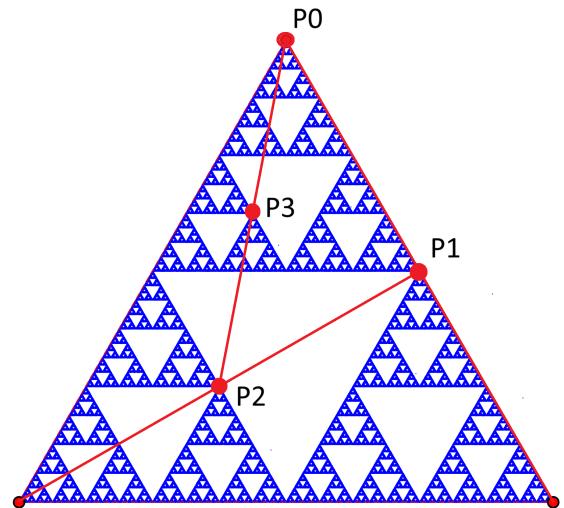


Рис. 5: Визуализация треугольника Серпинского, полученная итеративным случайным алгоритмом (на примере 3-х точек).

притяжения, $g > 0$ - величина притяжения к этому центру, а R - радиус влияния центра (для гауссова потенциала).

Распределение Больцмана:

$$P(\mathbf{r}) = \exp(-\beta U(\mathbf{r})), \quad \beta = \frac{1}{k_B T},$$

где k_B - постоянная Больцмана, а T - абсолютная температура системы.

Алгоритм генерации

1. Задать позиции центров притяжения $\{\mathbf{r}_i\}$ и их параметры (g_i, R)
2. Вычислить потенциал $U(\mathbf{r})$ в точке \mathbf{r}
3. Вычислить плотность вероятности $P(\mathbf{r}) \propto \exp(-\beta U(\mathbf{r}))$
4. Сгенерировать точку в позиции \mathbf{r} с вероятностью, пропорциональной $P(\mathbf{r})$
5. Повторить для требуемого количества точек

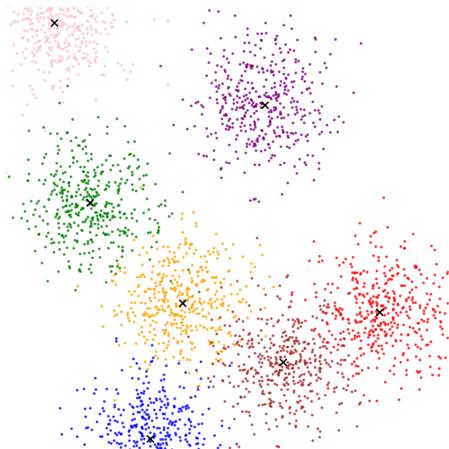


Рис. 6: Визуализация распределения частиц вокруг центров притяжения.

Физические интерпритация и замечания

- При **высоких температурах** ($k_B T \gg \varepsilon_i$) распределение приближается к равномерному, поскольку точки слабо чувствуют потенциал притяжения и доминируют тепловые флуктуации.
- При **низких температурах** ($k_B T \ll \varepsilon_i$) наблюдается сильная кластеризация вокруг центров притяжения: точки концентрируются в минимумах потенциала, образуя плотные скопления. Распределение Больцмана позволяет моделировать поведение невзаимодействующих частиц во внешнем потенциальном поле притягивающих центров. Ключевым условием является малая плотность частиц, что обеспечивает справедливость приближения их независимости.

Свойства системы существенно зависят от её размерности: в двумерном случае кластеризация выражена сильнее, чем в трёхмерном.

Основным физическим следствием модели является образование плотных кластеров вокруг центров притяжения, где плотность частиц экспоненциально возрастает в минимумах потенциала. Поведение системы определяется конкуренцией между тепловыми флуктуациями, стремящимися размыть распределение, и силами притяжения, ведущими к конденсации частиц.

При определённых условиях эта конкуренция может приводить к фазовому переходу при изменении температуры, аналогичному переходу газ-жидкость в физических системах.

Применение

Данная модель находит применение в широком спектре научных и инженерных задач. В физике она используется для моделирования систем во внешних силовых полях, таких как заряженные частицы в электростатическом потенциале или звёзды в гравитационном поле галактики. В химии и материаловедении она служит основой для изучения процессов кластеризации и агрегации, например, при формировании наночастиц или росте тонких плёнок.

Особую ценность модель представляет для исследования коллоидных систем и полимерных растворов, где эффективные взаимодействия часто описываются притягивающими потенциалами. В прикладной математике и информатике аналогичные распределения используются в задачах оптимального размещения объектов, покрытия территорий и проектирования сенсорных сетей, где требуется максимизировать охват области при ограниченных ресурсах.

3.4 Отталкивание: распределение частиц в поле отталкивающих центров

Рассмотрим систему частиц в каноническом ансамбле при наличии внешнего отталкивающего потенциала $U(\mathbf{r}) \geq 0$. Плотность распределения частиц определяется распределением Больцмана, где точки стремятся избегать областей с высоким потенциалом, создавая эффект исключённого объёма.

Математическое описание

Плотность распределения:

$$P(\mathbf{r}) = \exp(-\beta U(\mathbf{r})), \quad \beta = \frac{1}{k_B T},$$

Здесь k_B — постоянная Больцмана, а T — абсолютная температура системы.

Потенциал отталкивания:

$$U(\mathbf{r}) = \sum_k \frac{\varepsilon_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|^2}, \quad \varepsilon_k > 0 \quad \text{или} \quad U(\mathbf{r}) = \sum_i u(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|), \quad u(d) = \varepsilon \left(\frac{\sigma}{d} \right)^{12}$$

где $\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_k = (x, y)$ - координаты уже существующих точек и центров отталкивания, $\varepsilon, \varepsilon_k$ - энергетический масштаб отталкивания, σ - характерный размер (эффективный диаметр исключённого объёма), а $d = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|$ - расстояние между текущей пробной точкой и i -й существующей частицей.

Алгоритм генерации (метод Монте-Карло)

- Предложить случайную точку \mathbf{r} в области $[0, 1]^2$
- Вычислить суммарный потенциал отталкивания от всех существующих точек:

$$U(\mathbf{r}) = \sum_i \varepsilon \left(\frac{\sigma}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \right)^{12}$$

- Принять точку с вероятностью:

$$P = \exp \left(-\frac{U(\mathbf{r})}{k_B T} \right)$$

если эта величина оказывается больше некоторого порогового значения.

- Если точка принята, добавить её в множество; если нет, повторить с новой случайной точкой

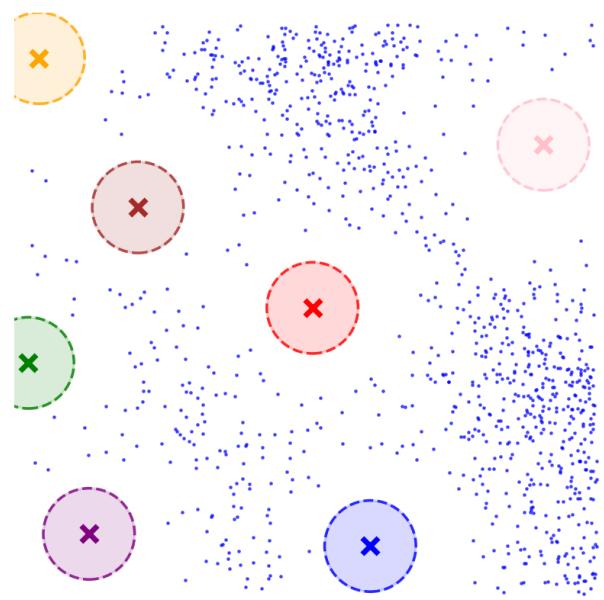


Рис. 7: Визуализация распределения точек, полученного методом Монте-Карло с потенциалом отталкивания.

Физическая интерпретация и замечания

Данная модель описывает систему взаимодействующих частиц с короткодействующим отталкиванием, что приводит к формированию областей пониженной плотности вокруг центров отталкивания — эффект исключённого объёма. Это проявляется в сильном уменьшении плотности $\rho(\mathbf{r})$ в непосредственной близости от существующих частиц.

Температура T играет ключевую роль в поведении системы:

- При **высоких температурах** ($k_B T \gg \varepsilon$) тепловые флуктуации преобладают над межчастичным взаимодействием, и распределение приближается к равномерному.
- При **низких температурах** ($k_B T \ll \varepsilon$) отталкивание становится доминирующим, формируя чёткие зоны исключения и способствуя образованию регулярных, квазикристаллических структур.

Степенной потенциал $U \propto r^{-12}$, используемый в модели, соответствует части, отвечающей за отталкивание классического потенциала Леннарда-Джонса, что физически интерпретируется как взаимодействие твёрдых сфер. Однако при высокой плотности частиц приближение независимых частиц становится недостаточным, и требуется учёт многочастичных корреляций через парные или более высокие корреляционные функции.

Динамика системы к равновесному состоянию может описываться уравнением Фоккера-Планка:

$$\partial_t \rho = D \nabla \cdot (\nabla \rho + \beta \rho \nabla U),$$

где D — коэффициент диффузии [$\text{м}^2/\text{с}$], а $\beta = 1/(k_B T)$. Первое слагаемое отвечает за диффузию, второе — за дрейф частиц в поле потенциала $U(\mathbf{r})$.

Основными следствиями такого взаимодействия являются минимизация перекрытия (стерический эффект), равномерное заполнение доступного пространства и, при сильном отталкивании, спонтанное образование регулярных структур. Модель применяется для описания упаковки коллоидных частиц, распределения молекул в пересыщенных растворах и в задачах оптимального размещения объектов.

Применение

Данная модель находит применение в химии и науке о материалах, она используется для моделирования коллоидных систем и суспензий, где эффективное отталкивание между частицами определяет их устойчивость, реологические свойства и структуру формирующихся агрегатов.

В биологии и биофизике аналогичные принципы применяются для моделирования клеточных мембран (взаимодействие липидов и белков) и других биологических структур, где стерическое отталкивание играет решающую роль в самоорганизации.

В прикладных задачах оптимизации модель используется для размещения объектов на ограниченной площади (например, антенн, датчиков или точек обслуживания) с минимальным взаимным влиянием, а также для эффективного распределения ресурсов в логистике и городском планировании.

Особенности реализации

В реализации алгоритма выделяются две ключевые составляющие.

Детерминированная часть отвечает за расчёт суммарного потенциала отталкивания $U(\mathbf{r})$ от всех существующих точек в заданной позиции.

Стохастическая часть реализует выбор случайной пробной позиции и её вероятностное принятие согласно распределению Больцмана.

Важным аспектом является **регуляризация потенциала** на малых расстояниях, необходимая для избежания численных сингулярностей, которые возникают, например, в потенциалах типа r^{-12} при $r \rightarrow 0$. Это обеспечивает устойчивость вычислений.

С точки зрения вычислительной сложности, наивная реализация алгоритма требует $O(N)$ операций для расчёта потенциала при добавлении каждой новой точки, что делает его трудоёмким для генерации больших наборов данных ($N \sim 10^5$ и более).

3.5 Гравитация (барометрическая формула: распределение в поле тяжести)

Рассмотрим распределение частиц в гравитационном поле в условиях термодинамического равновесия. Данная модель описывает поведение идеального газа в поле тяжести и является классическим примером применения распределения Больцмана. Как шарики в лотерейном барабане (лототроне) — под действием «тяжести» они скатываются вниз. Чем выше — тем шариков меньше.

Математическое описание

Общее распределение Больцмана:

$$P(\mathbf{r}) \propto \exp\left(-\frac{U(\mathbf{r})}{k_B T}\right)$$

где k_B — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура, а $U(\mathbf{r})$ — потенциальная энергия частицы в точке \mathbf{r} . Для однородного гравитационного поля, направленного вдоль оси y , потенциал равен

Потенциал гравитационного поля:

$$U(y) = mgy$$

где m — масса частицы, а g — ускорение свободного падения.

Барометрическая формула:

Подстановка этого потенциала приводит к барометрической (гидростатической) формуле для плотности частиц $P(y)$ на высоте y :

$$P(y) = P_0 \exp\left(-\frac{mgy}{k_B T}\right)$$

в которой P_0 обозначает плотность частиц на нулевой высоте ($y = 0$).

Вывод из уравнения гидростатического равновесия:

$$\frac{dP}{dy} = -\rho g, \quad P = \frac{\rho k_B T}{m}$$

где давление P связано с плотностью ρ уравнением состояния идеального газа $P = \frac{\rho k_B T}{m}$. После подстановки получается дифференциальное уравнение

$$\frac{d\rho}{dy} = -\frac{mg}{k_B T} \rho,$$

решением которого является экспоненциальный закон $\rho(y) = \rho_0 \exp(-mgy/(k_B T))$.

Обозначения и параметры:

- **Характерная высота:**

$$H = \frac{k_B T}{mg}$$

- **Шкала высот:** расстояние, на котором плотность уменьшается в e раз

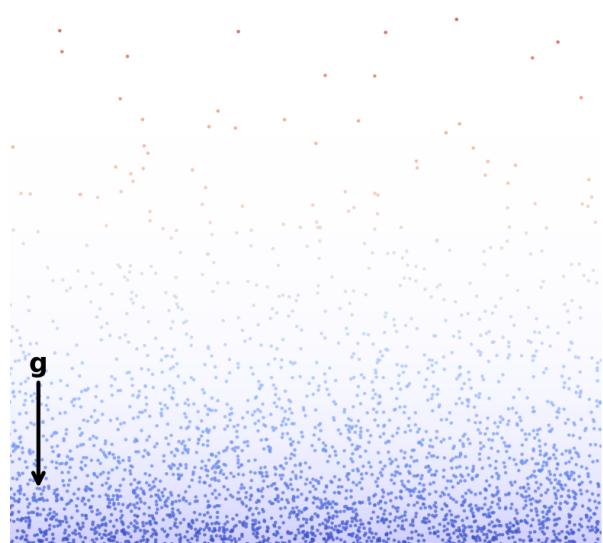
- **Безразмерная высота:** $\tilde{y} = \frac{y}{H}$

Алгоритм генерации точек

1. **Генерация координаты x :** равномерное распределение в пределах области

$$x \sim U(0, L_x)$$

Гравитация ($T=0.15$)



2. **Генерация координаты y :** согласно распределению Больцмана

- Вычислить функцию распределения: $F(y) = 1 - \exp\left(-\frac{y}{H}\right)$
- Сгенерировать равномерную случайную величину $u \sim U(0, 1)$
- Вычислить $y = -H \ln(1 - u)$

3. Добавить точку с координатами (x, y)

Рис. 8: Визуализация распределения Больцмана для частиц в гравитационном поле.

- При **высоких температурах** ($T \gg mgH/k_B$) распределение становится почти равномерным по высоте, поскольку характерная высота H велика и тепловая энергия $k_B T$ существенно преобладает над гравитационной потенциальной энергией.
- При **низких температурах** ($T \ll mgH/k_B$) наблюдается сильная концентрация частиц у основания ($y = 0$). Характерная высота H мала, и гравитационная энергия доминирует, эффективно прижимая частицы к нижней границе.

Физическая интерпретация

Физической основой распределения является конкуренция между тепловой $k_B T$ и потенциальной mgy энергиями. Установившееся равновесное состояние соответствует минимуму свободной энергии системы $F = U - TS$, что отражает фундаментальный

компромисс между стремлением к минимуму внутренней энергии U (частицы опускаются вниз) и максимуму энтропии S (стремление к равномерному распределению по всему доступному объёму).

Эта модель описывает ряд важных физических явлений: экспоненциальное убывание плотности атмосферы Земли с высотой (барометрическая формула), установление седиментационного равновесия в коллоидных суспензиях и полимерных растворах, распределение частиц в поле центробежных сил (центрифугирование), а также формирование профилей плотности и давления в атмосферах планет и звёзд.

Применение

Распределение Больцмана для частиц в гравитационном поле находит разнообразное применение в физике и смежных областях. Оно является базовой моделью для описания вертикального распределения плотности в атмосферах планет и исследования атмосферных явлений, связанных с изменением давления и температуры с высотой.

В химии и материаловедении эта формула используется для анализа седиментационного равновесия в коллоидных системах, позволяя определять размеры и массы частиц по их пространственному распределению. Кроме того, распределение служит эталонным примером для калибровки и верификации методов статистической физики и компьютерного моделирования.

В современной экспериментальной физике аналогичные принципы лежат в основе моделирования термического равновесия частиц в искусственных потенциальных ямах, создаваемых оптическими пинцетами, магнитными или ионными ловушками. Модель также применяется для изучения фазовых равновесий и явлений стратификации в гравитационном поле, таких как расслоение жидкостей или формирование многослойных структур.

3.6 Кристаллизация (гексагональная решётка)

Моделирование упорядоченной структуры с гексагональной (треугольной) симметрией - решётки, обеспечивающей наиболее плотную упаковку точек на плоскости. В отличие от идеальных пчелиных сот, где ячейки - это пустоты между точками, в данной модели **точки сами располагаются в узлах гексагональной решётки**, формируя регулярную треугольную сетку. Такой паттерн возникает, например, при самоорганизации частиц, взаимодействующих посредством короткодействующего отталкивания с мягким притяжением на средних расстояниях.

Ключевым достоинством представленной реализации является учёт температурных эффектов. При ненулевой температуре T тепловые флуктуации вносят в решётку незначительные отклонения от идеальной периодичности - появляются точечные дефекты, локальные смещения узлов и временные разрывы в дальнем порядке. Это делает модель физически более адекватной по сравнению с идеальной решёткой, так

как позволяет изучать влияние температуры на стабильность двумерного кристалла, механизмы зарождения дефектов и переход от упорядоченного состояния к разупорядоченному при нагревании.

Алгоритм генерации точек

Базисные векторы:

$$\mathbf{a}_1 = (1, 0), \quad \mathbf{a}_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

Узлы решётки:

$$\mathbf{r} = n_1 \mathbf{a}_1 + n_2 \mathbf{a}_2, \quad n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$$

где $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ - базисные векторы решётки, определяющие элементарную ячейку, \mathbf{r} - радиус-вектор узла решётки, n_1, n_2 - целочисленные индексы, нумерующие узлы решётки, z - координационное число (количество ближайших соседей).

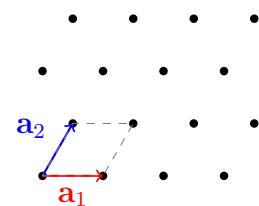


Рис. 9: Визуализация гексагональной решётки с базисными векторами.

Характеристики

- Координационное число: $z = 6$
- Плотность упаковки: ≈ 0.9069 (максимальная в 2D)
- Симметрия: три оси симметрии: второго, третьего и шестого порядка $P6_3/mmc$
- Параметр решётки: $a = |\mathbf{a}_1| = |\mathbf{a}_2| = 1$ (в безразмерных единицах)

Физическая интерпретация

Двумерная гексагональная решётка является энергетически выгодной конфигурацией для многих систем взаимодействующих частиц, достигая минимума потенциальной энергии при заданной плотности. Эта структура характеризуется наличием дальнего порядка и строгой периодичности. Обладает симметрией относительно трансляций, определяемых базисными векторами, а также вращений на углы, кратные 60° . Все узлы решётки топологически эквивалентны, а расстояние до ближайших соседей постоянно и равно a .

Применение

Гексагональная решётка служит моделью для описания широкого спектра природных и искусственных систем. Она является структурной основой графена, борофена и других двумерных материалов, определяя их уникальные электронные свойства. В природе такая упаковка наблюдается в пчелиных сотах, базальтовых колоннах и некоторых биологических мембранах. В химии и материаловедении гексагональная симметрия

характерна для определённых классов молекулярных кристаллов и коллоидных систем. Наконец, эта модель выступает в качестве ключевой тестовой системы в теории фазовых переходов, в частности, при изучении плавления двумерных кристаллов и явления корреляционного беспорядка.

3.7 Кристаллизация (квадратная решётка)

Моделирование идеальной кристаллической решётки с квадратной симметрией — простейшей периодической структуры в двумерном пространстве. Как клетчатый лист — точки стоят строго по линиям и столбцам, образуя сетку.

Алгоритм генерации точек

Базисные векторы:

$$\mathbf{a}_1 = (1, 0), \quad \mathbf{a}_2 = (0, 1)$$

Узлы решётки:

$$\mathbf{r} = (n_1, n_2), \quad n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$$

где $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ - базисные векторы решётки (единичные ортогональные векторы), \mathbf{r} - радиус-вектор узла решётки, n_1, n_2 - целочисленные индексы, нумерующие узлы решётки.

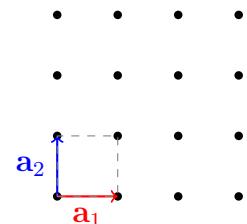


Рис. 10: Визуализация квадратной решётки с базисными векторами.

Характеристики

- **Координационное число:** $z = 4$ (в 2D)
- **Плотность упаковки:** ≈ 0.785
- **Симметрия:** две оси четвертого порядка и одна второго ($P4mm$)
- **Расстояние до ближайших соседей:** $a = 1$

Физическая интерпретация

Квадратная решётка представляет собой простейшую двумерную периодическую структуру, обладающую высокой степенью симметрии. Её характеризует регулярное ортогональное расположение узлов по строкам и столбцам, формирующее чёткую периодичность. Каждый узел связан с четырьмя ближайшими соседями, расположенными по горизонтали и вертикали. Такая конфигурация часто является энергетически выгодной для систем с изотропным короткодействующим отталкиванием и определёнными типами притяжения, обеспечивая простую и эффективную упаковку частиц.

Применение

Данная модель служит фундаментальной идеализацией для описания ряда физических систем. В трёхмерном случае она соответствует простой кубической кристаллической решётке. Модель применяется для упрощённого описания ионных кристаллов и простых металлов на начальном этапе изучения. В вычислительных методах квадратная сетка является основой для построения регулярных конечно-разностных сеток в задачах численного моделирования. Кроме того, квадратная решётка широко используется в теоретических исследованиях как базовая модель в статистической механике и теории фазовых переходов, таких как модель Изинга.

3.8 Модель Изинга

Классическая модель статистической физики для описания ферромагнетизма и фазовых переходов. Моделирует систему спинов на квадратной решётке с взаимодействием между ближайшими соседями. Представьте аудиторию, где каждый студент за своей партой может либо поднять руку (+1), либо опустить руку (-1). Каждый студент смотрит на своих ближайших соседей (спереди, сзади, слева, справа). Если большинство соседей подняли руки — студент тоже хочет поднять руку. Если большинство опустили руки — студент опускает руку. Но иногда появляется «температура» — чем жарче в аудитории, тем больше студенты действуют как им вздумается, не глядя на соседей.

Математическое описание

Гамильтониан:

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j$$

где $s_i \in \{-1, +1\}$ - спины на узлах решётки, $J > 0$ - константа обменного взаимодействия, $\langle i,j \rangle$ - суммирование по ближайшим соседям, k_B - постоянная Больцмана, T — температура системы

Алгоритм генерации состояний

- $T \ll T_c$: Упорядоченное состояние, когда все закрашено одним цветом (ферромагнитная фаза)
- $T \approx T_c$: Критическая область (флуктуации всех масштабов)
- $T \gg T_c$: Неупорядоченное состояние, мелкие пятна (парамагнитная фаза)

Для квадратной решётки в 2D:

$$T_c = \frac{2J}{k_B \ln(1 + \sqrt{2})} \approx 2.269 \frac{J}{k_B}$$

1. Случайно выбрать спин s_i
2. Вычислить изменение энергии ΔH при переворачивании спина
3. Принять переворот с вероятностью $P = \min(1, \exp(-\Delta H/(k_B T)))$

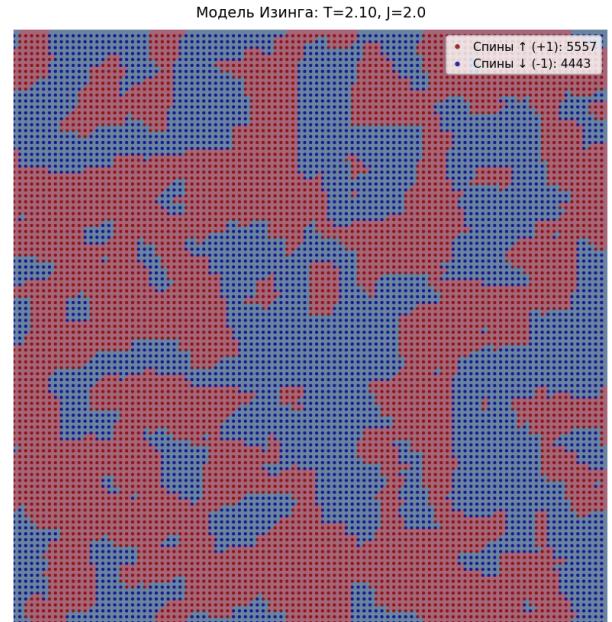


Рис. 11: Визуализация конфигураций спинов в модели Изинга при различных температурах.

Применение

Модель Изинга на квадратной решётке является одной из центральных моделей статистической физики, прежде всего, для изучения фазовых переходов и критических явлений. Она точно решена в двумерном случае и демонстрирует спонтанное нарушение симметрии и критические экспоненты, что позволило установить универсальность поведения систем вблизи точки фазового перехода.

Модель служит основой для описания ферромагнетизма в реальных магнитных материалах, где спины соответствуют элементарным магнитным моментам. В более широком смысле она используется для исследования любых кооперативных явлений и процессов упорядочения в конденсированных средах, включая модели бинарных сплавов, адсорбцию на поверхности и даже некоторые аспекты поведения социальных систем и нейронных сетей.

3.9 Случайное блуждание

Моделирование броуновского движения частицы - фундаментального процесса в статистической физике, описывающего случайное движение частицы под воздействием тепловых флуктуаций.

Математическое описание

Итерационный процесс:

$$x_{n+1} = x_n + \delta x, \quad y_{n+1} = y_n + \delta y$$

где (x_n, y_n) - координаты частицы на шаге n , (x_0, y_0) - начальная позиция частицы, $\delta x, \delta y$ - случайные смещения по осям, t - время (пропорционально числу шагов n).

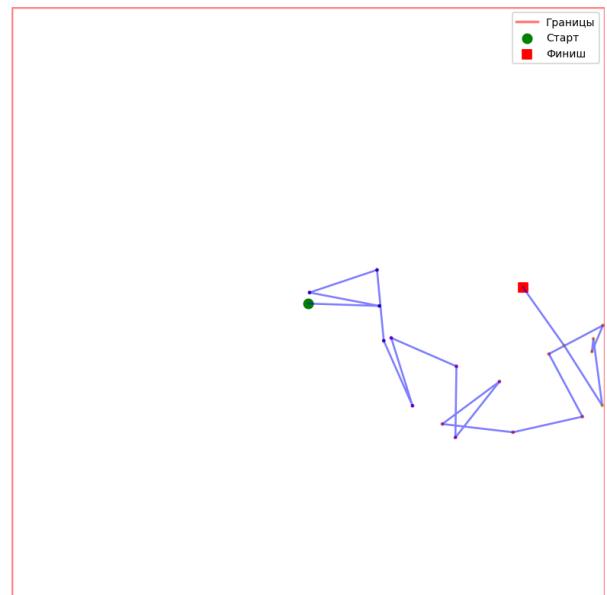


Рис. 12: Визуализация случайного блуждания частицы на плоскости.

Характеристики процесса

Движение моделируется как изотропное случайное блуждание с шагами фиксированной длины ℓ . На каждом шаге частица перемещается на расстояние ℓ в случайном направлении, задаваемом углом θ , равномерно распределённым на интервале $[0, 2\pi]$:

$$\delta x = \ell \cos \theta, \quad \delta y = \ell \sin \theta.$$

Процесс является марковским - следующее положение зависит только от текущих координат, но не от предыстории. Среднее смещение за шаг равно нулю: $\langle \delta x \rangle = \langle \delta y \rangle = 0$, а дисперсия каждого из смещений за время Δt составляет

$$\langle \delta x^2 \rangle = \langle \delta y^2 \rangle = \frac{\ell^2}{2}.$$

Если интерпретировать шаг как результат диффузии за малый промежуток времени, можно связать длину шага ℓ с коэффициентом диффузии D : при большом числе шагов выполняется соотношение $\langle r^2(t) \rangle = 4Dt$, где $\langle r^2 \rangle$ - среднеквадратичное удаление от начала.

Физическая интерпретация

Модель случайного блуждания является фундаментальной для описания диффузионных процессов и броуновского движения микрочастиц в среде. Она демонстрирует прямую связь между стохастическими микроскопическими событиями (например, столкновениями с молекулами среды) и возникающим макроскопическим явлением

диффузии. Ключевой характеристикой процесса является линейный рост среднеквадратичного смещения со временем: $\langle r^2(t) \rangle = \langle x^2(t) + y^2(t) \rangle \sim t$, что является отличительным признаком нормальной (фурье-евской) диффузии. Коэффициент диффузии D , определяемый свойствами среды и частицы, задаёт скорость «расплывания» ансамбля частиц или ширину распределения для одиночной траектории.

Применение

Модель имеет исключительно широкое применение. Она используется для количественного описания диффузии примесей в твёрдых телах и жидкостях, распространения загрязнений в атмосфере и океане. Случайное блуждание лежит в основе теории броуновского движения, сыгравшей ключевую роль в подтверждении молекулярно-кинетической теории. В математике она является базовым объектом изучения в теории вероятностей и стохастических процессов. В более сложных вариантах модель применяется для моделирования движения траекторий частиц в турбулентных потоках, смесей полимеров и даже для описания поискового поведения животных.

3.10 Дерево Пифагора

Рекурсивное построение квадратов на сторонах прямоугольных треугольников, создающее фрактальную структуру, напоминающую ветвящееся дерево.

Математическое описание

Размеры дочерних квадратов:

Построение начинается с квадрата со стороной s_0 . На его верхней стороне строится прямоугольный треугольник, угол при основании которого обозначим через θ . На катетах этого треугольника возводятся два дочерних квадрата, стороны которых вычисляются по правилу:

$$s_n^{(1)} = s_{n-1} \cos \theta, \quad s_n^{(2)} = s_{n-1} \sin \theta$$

где s_{n-1} - размер родительского квадрата, а $s_n^{(1)}$ и $s_n^{(2)}$ - размеры квадратов на уровне n . Процесс повторяется рекурсивно для каждого нового квадрата до заданной глубины рекурсии `depth`.

В каноническом варианте используется равнобедренный прямоугольный треугольник с углами $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ ($\theta = 45^\circ$), что приводит к одинаковым размерам дочерних квадратов: $s_n^{(1)} = s_n^{(2)} = s_{n-1}/\sqrt{2}$. Однако алгоритм допускает варьирование угла θ , что меняет пропорции ветвления и общую форму дерева.

Для визуализации точечной структуры алгоритм сначала детерминированно строит полное дерево до заданной глубины, а затем случайным образом выбирает вершины квадратов из всех уровней рекурсии. При этом точки в «кроне» дерева (на верхних уровнях) оказываются более многочисленными, так как количество квадратов растёт экспоненциально с глубиной. Выбор стороны для построения следующих квадратов

всегда осуществляется на верхней стороне текущего квадрата, что гарантирует направленный рост дерева вверх.

Алгоритм генерации

1. Начать с базового квадрата стороны s_0
2. На верхней стороне построить прямоугольный треугольник
3. На катетах треугольника построить два квадрата меньшего размера
4. Рекурсивно повторить для новых квадратов

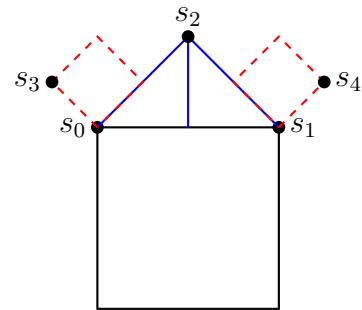


Рис. 13: Первые три уровня построения дерева Пифагора: базовый квадрат (чёрный), треугольник (синий) и первые два дочерних квадрата (красный пунктир). Точки s_0-s_4 показывают последовательность генерации вершин.

Физическая интерпретация

Дерево Пифагора представляет собой геометрический фрактал, конструируемый путём рекурсивного добавления прямоугольных треугольников и квадратов. В каноническом случае с равнобедренным прямоугольным треугольником (углы $45^\circ, 90^\circ$) каждый следующий уровень вносит изменение масштаба с коэффициентом $1/\sqrt{2}$, а ветви отклоняются на углы $\pm 45^\circ$, что порождает визуальное сходство с бифуркацией деревьев. Несмотря на детерминированный процесс построения, итоговая структура обладает свойством самоподобия — её части при увеличении масштаба выглядят подобными целому. Размерность такого фрактала составляет $D \approx 1.5$, занимая промежуточное положение между линией и плоскостью, что типично для ветвящихся структур.

Применение

Фрактал находит применение в первую очередь как яркий и наглядный объект для визуализации абстрактных математических концепций — самоподобия, рекурсии и фрактальной размерности. Он служит классическим примером при обучении рекурсивным алгоритмам в программировании и компьютерной графике. В естественных науках дерево Пифагора используется в качестве упрощённой модели для описания древовидных структур в природе, таких как форма русла рек, рисунок молнии, система кровеносных сосудов или архитектоника корневой системы растений. Кроме того, его эстетичная геометрия часто используется в цифровом искусстве и дизайне.

3.11 Снежинка Коха

Рекурсивный фрактал, получаемый итерационным делением отрезков. Классический пример самоподобной кривой с бесконечным периметром и конечной площадью. Берём отрезок, ставим посередине треугольный «зуб», повторяем для всех отрезков — и так много раз.

Математическое описание

Длина кривой:

$$L_n = L_0 \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

Количество сегментов:

$$N_n = 3 \cdot 4^n$$

где L_0 — начальная длина стороны треугольника, L_n — общая длина кривой после n итераций, N_n — количество сегментов после n итераций, n — номер итерации (уровень рекурсии), D — фрактальная размерность

Алгоритм генерации точек:

1. Начать с равностороннего треугольника
2. Каждый отрезок разделить на три равные части
3. Средний сегмент заменить двумя сторонами равностороннего треугольника
4. Удалить основание добавленного треугольника
5. Повторить рекурсивно для всех новых отрезков

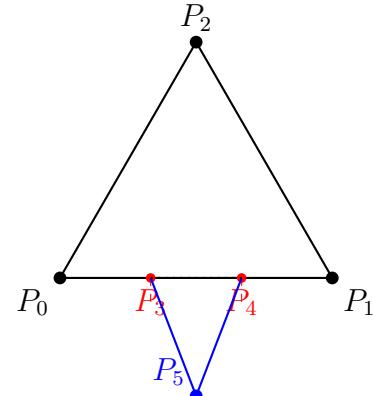


Рис. 14: Первые шаги построения снежинки Коха: исходный треугольник (чёрный), деление стороны на три части (красные точки P_3, P_4), добавление нового треугольника (синий, вершина P_5). Пунктирная линия показывает удаляемое основание.

Физическая интерпретация

Снежинка Коха является классическим детерминированным фракталом, который демонстрирует парадоксальные геометрические свойства, промежуточные между размерностью линии и плоскости. Её фрактальная (хаусдорфова) размерность составляет $D = \ln 4 / \ln 3 \approx 1.2619$, что количественно отражает увеличение сложности и «изрезанности» кривой по сравнению с гладкой линией ($D = 1$). Ключевая особенность фрактала — несоответствие между его конечной площадью, ограниченной замкнутой

кривой, и бесконечно растущим периметром при увеличении числа итераций. Это свойство является прямым следствием самоподобия: любая часть кривой при увеличении масштаба имеет структуру, аналогичную целому. Построение ведётся рекурсивно, и уже на глубине $n \sim 7$ число элементарных сегментов становится чрезвычайно большим.

Применение

Снежинка Коха служит основной иллюстрацией концепций фрактальной геометрии. Она используется для моделирования объектов в природе, обладающих высокой степенью изрезанности и самоподобия на разных масштабах, — например, реальных снежинок, контуров береговых линий, горных хребтов или границ пористых материалов. Фрактал является наглядным учебным примером для демонстрации математических парадоксов, таких как объект с бесконечным периметром и конечной площадью. Он также широко применяется в компьютерной графике для генерации сложных текстур и ландшафтов, а в образовательных целях — для изучения рекурсивных алгоритмов и теории хаоса.

3.12 Папоротник Барнсли

Система итерированных функций, создающая детализированную фрактальную структуру, напоминающую натуральный папоротник. Аттрактор системы аффинных преобразований. Есть 4 простых правила-преобразования (сжать, повернуть, сдвинуть), которые случайно применяются к точке много-много раз.

Математическая постановка Набор из $N = 4$ аффинных преобразований $f_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$:

$$f_i(\mathbf{x}) = A_i \mathbf{x} + \mathbf{t}_i$$

Аттрактор F удовлетворяет уравнению:

$$F = \bigcup_{i=1}^4 f_i(F)$$

- $f_1: [x, y] \rightarrow [0, 0.16y]$ (вероятность 0.01) — сжатие в стебель
- $f_2: [x, y] \rightarrow [0.85x + 0.04y, -0.04x + 0.85y + 1.6]$ (вероятность 0.85) — основная часть
- $f_3: [x, y] \rightarrow [0.20x - 0.26y, 0.23x + 0.22y + 1.6]$ (вероятность 0.07) — левая ветвь
- $f_4: [x, y] \rightarrow [-0.15x + 0.28y, 0.26x + 0.24y + 0.44]$ (вероятность 0.07) — правая ветвь

Описание переменных:

- $\mathbf{x} = (x, y)$ — текущие координаты точки
- A_i — матрицы линейных преобразований
- \mathbf{t}_i — векторы сдвига

- p_i — вероятности выбора преобразований ($\sum p_i = 1$)
- N_{iter} — общее число итераций
- $N_{\text{burn-in}}$ — число начальных итераций до сохранения точек

Алгоритм генерации точек:

1. Задать начальную точку $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$
2. Для $n = 0$ до $N_{\text{iter}} - 1$:
 - (a) Выбрать индекс i с вероятностью p_i
 - (b) Применить преобразование: $\mathbf{x}_{n+1} = f_i(\mathbf{x}_n)$
 - (c) Если $n > N_{\text{burn-in}}$, сохранить точку \mathbf{x}_{n+1}

$p_1 = 0.01$ (стебель)

$p_2 = p_3 = 0.07$ (листья)

$p_4 = 0.85$ (основной рост)

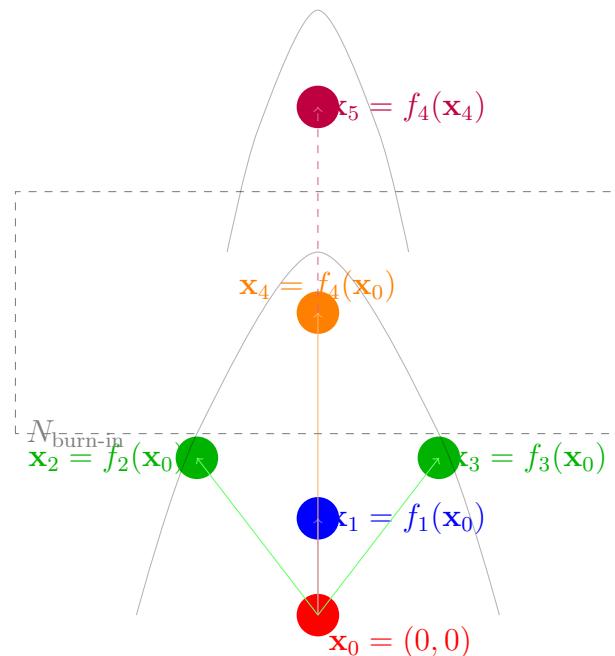


Рис. 15: Первые шаги генерации папоротника Барнсли: начальная точка \mathbf{x}_0 и первые преобразования с разными вероятностями. Стрелки показывают переходы между точками, пунктиром отмечена область отжига $N_{\text{burn-in}}$.

Физическая интерпретация

Папоротник Барнсли является одним из наиболее известных фракталов, построенных с помощью системы итерируемых функций (СИФ). Его структура демонстрирует статистическое самоподобие: при достаточном количестве точек (10^5 – 10^7) итеративный случайный алгоритм генерирует детерминированный аттрактор, форма которого с высокой точностью воспроизводит сложную иерархическую структуру настоящего папоротника. Это достигается благодаря тому, что применяемые аффинные преобразования являются строго сжимающими (контрактивными), что гарантирует сходимость

стохастического процесса к устойчивой геометрической форме. Первые несколько сотен итераций ($N_{\text{burn-in}} = 20\text{--}500$) необходимы для выхода траектории на аттрактор, после чего структура стабилизируется.

Применение

Фрактал имеет как теоретическое, так и практическое значение. Он служит ключевым примером в теории систем итерируемых функций, демонстрируя возможность генерации сложных биоморфных форм из простых правил. Папоротник Барнсли активно используется в компьютерной графике для реалистичного моделирования растений, деревьев и других природных объектов. Принципы, лежащие в основе его построения, применяются в алгоритмах сжатия изображений с фрактальным кодированием. Кроме того, он является популярным образовательным инструментом для изучения стохастических алгоритмов, теории хаоса и связи между случайностью и детерминированной структурой.

Псевдокод

```
x = x0
for n in range(N_iter):
    i = random_choice(p)
    x = A[i] @ x + t[i]
    if n > burn_in:
        save_point(x)
```

3.13 Множество Жюлиа

Динамика комплексных итераций, определяющая фрактальные множества на комплексной плоскости. Множество Жюлиа состоит из точек, которые не убегают на бесконечность при итерациях квадратичного отображения. Берём произвольную (или равномерно распределённую) точку на плоскости, применяем к ней простое правило (возводим в квадрат и прибавляем число), смотрим — убежит она далеко или останется «в круге».

Математическое описание Итерационное отображение:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

Критерий ухода:

$$|z_n| > R_{\text{esc}} \quad (\text{обычно } R_{\text{esc}} = 2)$$

Описание переменных:

- z_0 — начальная точка в комплексной плоскости
- z_n — значение после n итераций

- c — фиксированный комплексный параметр (например, $c = -0.7 + 0.27015i$)
- R_{esc} — радиус ухода (escape radius)

Классификация точек

- Точка z_0 принадлежит множеству Жюлиа, если последовательность $\{z_n\}$ ограничена
- Точка убегает на бесконечность, если $|z_n| > R_{\text{esc}}$ для некоторого n
- Время ухода n_{esc} используется для окраски пикселей

Псевдокод

```

for pixel in grid:
    z = complex(x,y)
    for n in range(max_iter):
        z = z*z + c
        if abs(z) > R_esc:
            color = colormap(n)
            break
    else:
        color = interior_color

```

Физическая интерпретация

Множество Жюлиа представляет собой фрактал на комплексной плоскости, являющийся границей между точками, орбиты которых при итерации квадратичного отображения $f_c(z) = z^2 + c$ стремятся к бесконечности, и точками с ограниченными орбитами. Эта граница обладает бесконечной сложностью и детализацией, демонстрируя самоподобие на различных масштабах — характерный признак фракタルных объектов. В непосредственной близости от множества динамика системы является крайне чувствительной к начальным условиям (хаотической), что выражается в сложной и ветвящейся структуре границы. Форма множества Жюлиа кардинально меняется в зависимости от значения комплексного параметра c , порождая как связные, так и канторовы (пылевидные) множества.

Алгоритм генерации точек:

1. Независимо выбирается случайная начальная точка z_0 в заданной области комплексной плоскости (например, в квадрате $[-2, 2] \times [-2, 2]$).
2. Итерируется отображение $z_{n+1} = z_n^2 + c$ до тех пор, пока либо $|z_n| > R_{\text{esc}}$, либо число итераций n превышает `max_iter`.
3. Если для всех $n \leq \text{max_iter}$ выполняется $|z_n| \leq R_{\text{esc}}$, точка z_0 считается принадлежащей множеству Жюлиа и сохраняется.
4. Процесс повторяется с новой независимой случайной точкой до получения требуемого количества точек множества.

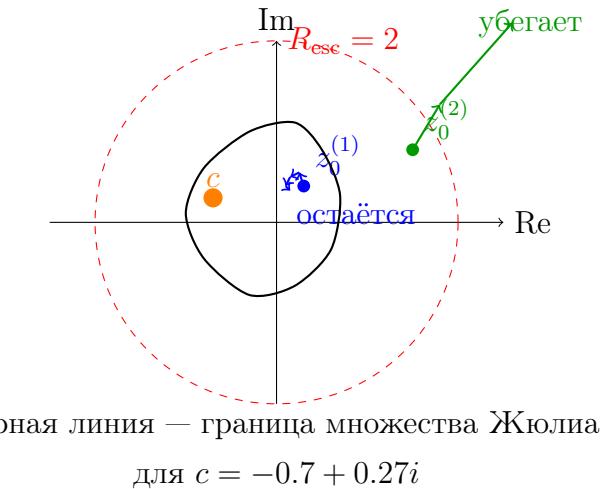


Рис. 16: Визуализация алгоритма для множества Жюлиа. Синяя точка остаётся внутри радиуса R_{esc} , зелёная — убегает.

Параметры:

- $c = -0.7 + 0.27i$ (пример для связного множества)
- $R_{\text{esc}} = 2$ (радиус убегания)
- $\text{max_iter} = 50\text{--}200$

Применение

Множество Жюлиа является одним из основных объектов изучения в теории комплексной динамики и хаоса, позволяя исследовать свойства итерируемых отображений. Благодаря своей визуальной сложности и эстетической привлекательности, оно широко используется в компьютерной графике и алгоритмическом искусстве для генерации абстрактных изображений и текстур. Множество также служит важным образовательным инструментом для демонстрации фундаментальных концепций нелинейной динамики, фрактальной геометрии и хаотического поведения в детерминированных системах.

4 Заключение

Все стратегии демонстрируют связь между микрохаотическими правилами генерации точек и макроскопическими характеристиками системы. Программа позволяет наблюдать переход от хаоса к упорядочению, иллюстрируя ключевые концепции статистической физики: энтропию, взаимодействие, флуктуации, фазовые переходы и самоорганизацию.

Все рассмотренные модели генерации точек — от полного хаоса равномерного распределения до идеального порядка кристаллических решёток — демонстрируют удивительный парадокс: строгие математические правила могут порождать как хаотические, так и предельно упорядоченные структуры.

Эта двойственная природа заставляет задуматься о самой сути случайности и закономерности. Здесь уместно вспомнить проницательное наблюдение Гилберта Кита Честертона из рассказа «Лицо на мишени»:

«Как-то в уединенном уголке сада он нашел заброшенную мишень и не мог отказать себе в удовольствии тайком пострелять, как некоторые тайком пьют. Вам показалось, что пробоины разбросаны как попало; они разбросаны, но отнюдь не случайно. Между ними нет двух одинаковых расстояний, все точки нанесены как раз там, куда он метил. Ничто не требует такой математической точности, как шарж. [...] поставить точку как раз там, где вы хотите, — нелегкая задача, даже если вы рисуете пером, а бумага лежит перед вами. И это чудо, если точки нанесены из ружья. Человек, способный творить такие чудеса, всегда будет стремиться к ним — хотя бы тайно.»

Эта цитата поразительно точно описывает суть нашего исследования. То, что кажется случайным, на деле может быть проявлением высшего порядка — будь то: Детерминированный хаос фракталов, где простые правила рождают бесконечную сложность. Самоорганизация в модели Изинга, где из локальных взаимодействий возникает глобальный порядок. Статистическая закономерность распределения Больцмана, связывающая микроскопический хаос с макроскопической упорядоченностью. Каждая стратегия генерации точек — это свой способ «поставить точку именно там, где хочешь», будь то: Случайное распределение (как «отпустить контроль»). Фрактальные алгоритмы (следование простым, но точным правилам). Физические модели (подчинение законам природы).

Таким образом, граница между случаем и закономерным оказывается иллюзорной. Математика даёт нам язык, на котором и хаос, и порядок говорят одинаково ясно — нужно лишь уметь услышать их диалог. Как герой Честертона, «тайком стреляющий» в заброшенную мишень, мы через компьютерное моделирование прикасаемся к этому чуду — способности творить сложность из простоты, находить порядок в хаосе и видеть закономерность там, где другим видится лишь случайность.