HOMEWORK-5

PLC-4330/6330

① Expr -> Values

- $(((\lambda x(\lambda y(+ x y)))10)5)$

  $\Rightarrow((\lambda y(+10 y))5)$

  $\Rightarrow 15$

- $(((\lambda f(\lambda x(f x)))(\lambda y(* y y)))12)$

  $\Rightarrow((\lambda x(f x))(\lambda y(* y y))12)$

  $\Rightarrow(\lambda y(* 12 y))$

  $\Rightarrow 144$

- $((((\lambda f(\lambda x((f x) f)))(\lambda y(\lambda g(g(* y y)))))2)(\lambda a.a))$

  $\Rightarrow((\lambda x((f x) f))(\lambda y(\lambda g(g(* y y))))2)(\lambda a.a))$

  $\Rightarrow(\lambda y(\lambda g(g(* y y)))2)$

  $\Rightarrow(\lambda g(g(* 2 y)))$

  $\Rightarrow 4$

② free variables

→ $t_1 = x$ — free variable

→ $t_2 = (\lambda y \cdot y)$
Bound

→ $t_3 = (\lambda x \cdot (x\,x))$
Bound Bound

→ $t_4 = ((\lambda x \cdot x)\,x)$
Bound free

→ $t_5 = (\lambda x \cdot (\lambda y\,(x\,y)))$
Bound Bound

→ $t_6 = (\lambda x \cdot (x\,y))$
Bound free

→ $t_7 = ((\lambda y \cdot x)\,y)$
free free

→ $t_8 = (((((\lambda x \cdot x)\,z)\,x)\,((\lambda y \cdot (z\,y))\,y))$
Bound free free free Bound free

③ substitution

① $t_1[x := t_2]$

$x[x := (\lambda y \cdot y)]$

free

$= (\lambda y \cdot y)$

② $t_2[y := t_3]$

$= (\lambda y \cdot y)[y := (\lambda x \cdot (x x))]$

Bound

There are no free y variables to substitute t_3 in t_2.

③ $t_4[x := t_3]$

$((\lambda x \cdot x) x)[x := (\lambda x \cdot (x x))]$

Bound free

$= ((\lambda x \cdot x)(\lambda x \cdot (x x)))$

④ $t_8[z := t_2]$

$((((\lambda x \cdot x) z) x)((\lambda y \cdot (z y) y))[z := (\lambda y \cdot y)]$

free free

$(((((\lambda x \cdot x)(\lambda y \cdot y) x)((\lambda y \cdot (\lambda y \cdot (\lambda y \cdot (y y) y) y))$

⑤ $t_6[y := t_5]$

$(\lambda x \cdot (x (y)))[y := (\lambda x \cdot (\lambda y (x y)))]$

$(\lambda x \cdot x (\lambda x \cdot (\lambda y (x y))))$

④ Parantheses

① $\lambda x.xz\ \lambda y.xy$

$(\lambda x.((xz)(\lambda y.(xy))))$

② $(\lambda x.xz)\ \lambda y.w\ \lambda w.wyzx$

$(\lambda x.(xz)(\lambda y.(w(\lambda w.(((wy)z)x)))))$

③ $\lambda x.xy\ \lambda x.yx$

$((\lambda x.(xy)(\lambda y.(yx))))$

⑤ β-reduction

① $(\lambda z.z)(\lambda y.yy)(\lambda x.xa)$

$=(\lambda y.yy)(\lambda x.xa)$

$=((\lambda x.xa)(\lambda x.xa))$

$=((\lambda x.xa)a)$

$=(aa)$

② $(\lambda z.z)(\lambda z.zz)(\lambda z.zy)$

$=(\lambda z.zz)(\lambda z.zy)$

$=((\lambda z.zy)(\lambda z.zy))$

$=((\lambda z.zy)y)$

$=(yy)$

(b) $plus = \lambda m.\lambda n.\lambda s.\lambda z.(ms(nsz))$ ⇒ 5

$2 = \lambda s.\lambda z(s(sz)) = \lambda sz.(s(sz))$

$3 = \lambda s.\lambda z(s(s(sz))) = \lambda sz(s(s(sz)))$

$plus = \lambda m.\lambda n.\lambda s.\lambda z(ms(nsz))$

$= \lambda mnsz(ms(nsz))$

$(\lambda mnsz(ms(nsz)))(\lambda sz.s(s(sz)))(\lambda sz.s(sz))$

$= (\lambda msz.(\lambda sz.s(s(sz)))s(msz))(\lambda sz.s(sz))$

$= (\lambda sz.(\lambda sz.s(s(sz)))s((\lambda sz.s(sz))sz))$

$= (\lambda sz.s(s(s(\lambda sz.s(sz))sz)))$

$= (\lambda sz.s(s(s(\lambda z.s(sz))z)))$

$= (\lambda sz.s(s(s(s(sz)))))$