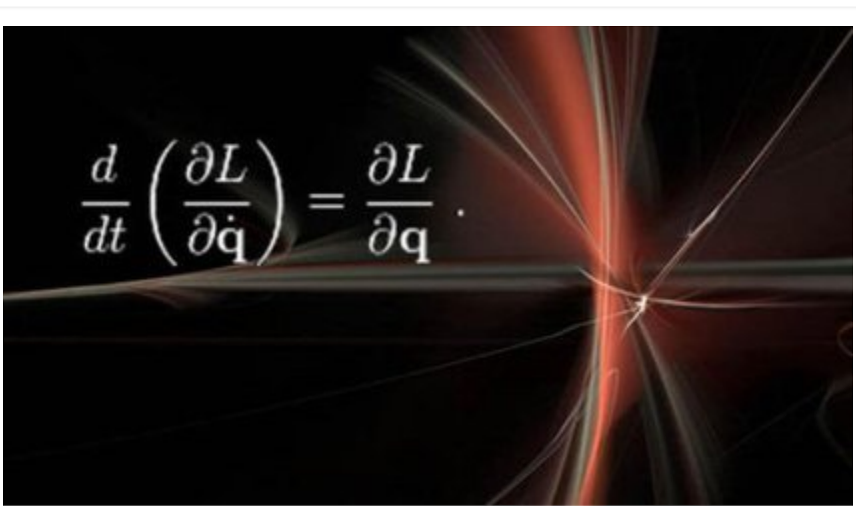


悬链线问题的数值解

拉普拉斯算符
数学话题下的优秀答主

这是我2015年写的一篇笔记，一开始被我放在QQ空间里面，后来放在github上面。现在稍作修改，放在知乎上面，希望能遇到对这个问题有兴趣的同道。

第一节：导论

悬链线，catenary，是一个古老的问题。这个问题当年伽利略曾经考虑过。很碰巧，也很荣幸，我在高中时也跟同学讨论过。问题是这样的，一条柔软的重绳索，两端固定在同一高度，挂在墙上， 请问这条绳索的形状是怎样的。如图所示：

伽利略当年认为这是一条抛物线，我跟我高中同学讨论过这个曲线，我们也猜测这条曲线是抛物线。这个问题在微积分出现之前一直没有答案，后来雅各布·伯努利（就是大名鼎鼎的伯努利家族的数学家之一，他的弟弟约翰·伯努利曾经就最速降线问题挑战过欧洲数学界）曾经就这个问题向欧洲数学界挑战，最终的答案是这条曲线是一条双曲余弦，$y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$. 这个问题用微积分求解并不困难，例如同济《高等数学》里就有这个问题的解答。但是同济高数书里面没说的是，这个问题其实是一个标准的变分问题，就跟最速降线一样。这个问题可以重新表述为，给定 $y(0)=y(a)=0$ ，求解一条曲线 $y=y(x)$ ，使得系统的总能量最小，因为稳定状态一定是系统总能量最低状态。系统的总能量可以写成 $E=\int_0^a \lambda y\sqrt{1+y'^2}dx$ ，其中 λ 为绳索的线密度。这里我们假设 λ 是一个常数。

同样的问题也曾经出现在古典微分几何里面。欧拉曾经考虑过这个问题，给定一条曲线 $y=f(x)$ ，让这条曲线绕着x轴旋转一周，求一条这样的曲线，使得得到的旋转曲面的表面积最小。这个问题同样可以归结为计算一个表面积分 $A=\int_0^a 2\pi y\sqrt{1+y'^2}dx$ 的极小值。很明显，这个问题跟悬链线是等价的，所以这个最小曲线仍然是悬链线。当然这个问题可以用微分几何的语言来处理，就是计算这个曲面的平均曲率，令平均曲率等于零， 得到一个关于 $y=f(x)$ 的微分方程，求解这个微分方程，可以得到同样的结果。而且用变分法里面的欧拉-拉格朗日方程可以得到同样的微分方程。

第二节：铁链

这里我要考虑的问题是一个离散的悬链线问题。我要计算的不是一条连续的均匀的重绳索自然下垂的形状，而是一条铁链的下垂形状。铁链跟绳索显然不一样， 因为铁链是一段一段的，而绳索是连续而均匀的。假设铁链的每一小段之间没有摩擦，那么现在问题同样可以归结为计算铁链在重力场中的极小势能。

假设一根铁链长度为 L ， 由 N 个小段刚杆组成，每段刚杆的长度都是 Δ ， 现在要计算这条铁链在自由悬挂时的形状。根据假设， $L=N\Delta$ ， 其中 Δ 是每一段刚杆的长度。铁链悬挂在A点和B点，A点坐标为 $A(0,0)$, B点坐标为 $B(a,0)$, $0<a<L$. 于是铁链可以用 $N+1$ 个点的坐标来描述。因为铁链共有 N 段，所以铁链共有 $N+1$ 个端点，记作 $p_0=A,p_1,p_2,\ldots,p_N=B$. 记一段刚杆 $p_{i-1}p_i, i=1,2,\ldots,N$ 与横轴的夹角为 θ_i ， 于是每一段刚杆可以用矢量表示为:

$$
\begin{aligned}
&\overrightarrow{Op_0}=\overrightarrow{OA}=(0,0)\\
&\overrightarrow{p_0p_1}=\Delta(\cos\theta_1,\sin\theta_1)\\
&\cdots\\
&\overrightarrow{p_{i-1}p_i}=\Delta(\cos\theta_i,\sin\theta_i)\\
&\cdots\\
&\overrightarrow{p_{N-1}p_N}=\Delta(\cos\theta_N,\sin\theta_N)\\
&\overrightarrow{Op_N}=\overrightarrow{OB}=(a,0)
\end{aligned}
$$

由此可以得到第 i 个端点的坐标为

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{p_0p_i}&=\sum_{j=1}^{i}\overrightarrow{p_{j-1}p_j}\\
&=\sum_{j=1}^{i}\Delta(\cos\theta_j,\sin\theta_j)\\
&=\Delta(\sum_{j=1}^{i}\cos\theta_j,\sum_{j=1}^{i}\sin\theta_j), i=0,1,2,\ldots,N
\end{aligned}
$$

因为铁链的两端已经固定在 $A(0,0)$ 和 $B(a,0)$ 两点，所以有限制条件

$$
\sum_{j=1}^{N}\cos\theta_j=\frac{a}{\Delta}<N
$$
$$
\sum_{j=1}^{N}\sin\theta_j=0
$$

然后计算每一小段的势能为(y_{i-1} 为刚杆左端的纵坐标， y_i 为刚杆右端的纵坐标，假设刚杆的质量均匀分布，可以用刚杆中心处的势能代替刚杆的总势能， λ 为刚杆的线密度， g 为重力加速度)

$$
\begin{aligned}
E_i&=\lambda\Delta g\frac{1}{2}(y_{i-1}+y_i)\\
&=\frac{1}{2}\lambda\Delta g\Big(\Delta\sum_{j=1}^{i-1}\sin\theta_j+\Delta\sum_{j=1}^{i}\sin\theta_j\Big)\\
&=\lambda\Delta^2 g\Big(\frac{1}{2}\sin\theta_i+\sum_{j=1}^{i-1}\sin\theta_j\Big), i=1,2,\ldots,N
\end{aligned}
$$

求和得到铁链的总势能为

$$
\begin{aligned}
E&=\sum_{i=1}^{N}E_i\\
&=\sum_{i=1}^{N}\lambda\Delta^2 g\Big(\frac{1}{2}\sin\theta_i+\sum_{j=1}^{i-1}\sin\theta_j\Big)\\
&=\lambda\Delta^2 g\Big(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sin\theta_i+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{i-1}\sin\theta_j\Big)
\end{aligned}
$$

已经知道铁链的两端固定，所以我们有两个约束条件。于是这个能量极小值问题就转化为求解约束情况下的多元函数的极小值，引入拉格朗日乘子 ϵ_1,ϵ_2 ， 得到

$$
E=\lambda\Delta^2 g\Big(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sin\theta_i+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{i-1}\sin\theta_j\Big)+\epsilon_1\Big(\sum_{i=1}^{N}\cos\theta_i-\frac{a}{\Delta}\Big)+\epsilon_2\sum_{i=1}^{N}\sin\theta_i
$$

这是一个以 $\theta_i, i=1,2,\ldots,N$ 为变量的受约束的多元函数的极值问题。该函数取得极值的必要条件是 $\nabla_{\theta_i}E=0$. 对变量求偏微分，令偏微分等于零，得到

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial\theta_k}&=\lambda\Delta^2 g\Big(\frac{1}{2}\cos\theta_k+\sum_{i=k+1}^{N}\cos\theta_k\Big)-\epsilon_1\sin\theta_k+\epsilon_2\cos\theta_k\\
&=\Big((1/2+N-k)\lambda\Delta^2 g+\epsilon_2\Big)\cos\theta_k-\epsilon_2\sin\theta_k\\
&=0, k=1,2,\ldots,N
\end{aligned}
$$

于是得到平衡态的角度为

$$
\begin{aligned}
\tan\theta_k&=\frac{(1/2+N-k)\lambda\Delta^2 g+\epsilon_2}{\epsilon_1}\\
&=(1/2+N-k)\alpha+\beta, k=1,2,\ldots,N
\end{aligned}
$$

其中，

$$
\alpha=\frac{\lambda\Delta^2 g}{\epsilon_1},\beta=\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}
$$

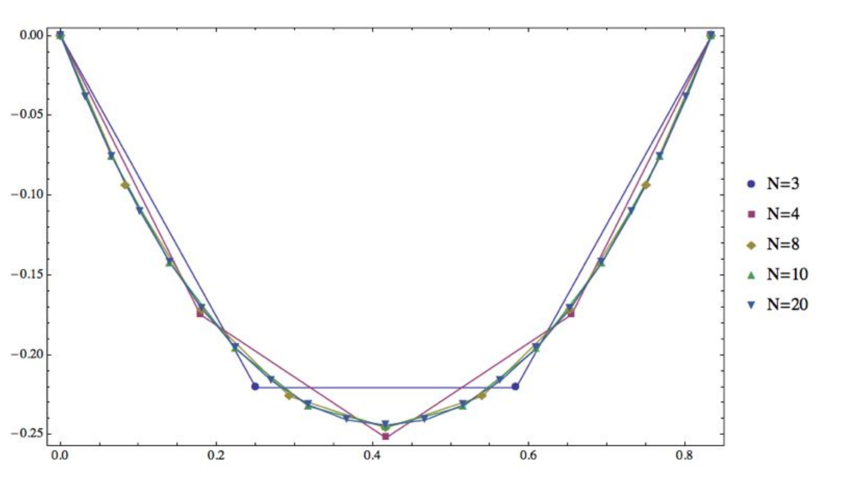
代入约束条件，得到

$$
\begin{aligned}
f(\alpha,\beta)&=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{1+\Big((1/2+N-k)\alpha+\beta\Big)^2}}-\frac{a}{\Delta}=0\\
g(\alpha,\beta)&=\sum_{k=1}^{N}\frac{(1/2+N-k)\alpha+\beta}{\sqrt{1+\Big((1/2+N-k)\alpha+\beta\Big)^2}}=0
\end{aligned}
$$

要求解这个方程，我们需要借助于牛顿迭代法，也就是

$$
\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}&\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\\\frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial x}&\frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial y}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}f(x_0,y_0)\\g(x_0,y_0)\end{pmatrix}
$$

求出 α,β 就可以得到所有的 $\theta_k=\arctan\Big((1/2+N-k)\alpha+\beta\Big)$ ， 进而求出所有的刚杆端点坐标，从而得到铁链的平衡态构型。对于不同的 N ，得到曲线如图所示：



第三节：铁链与绳索的比较

我们期待，当铁链有无穷多段的时候，铁链的平衡态构型应该和绳索的是一样的。仍然假设绳索被固定在两端 $A(0,0),B(a,0)$ ， 绳索的长度为 $L, L>a$. 用变分法很容易算出绳索的解析式为

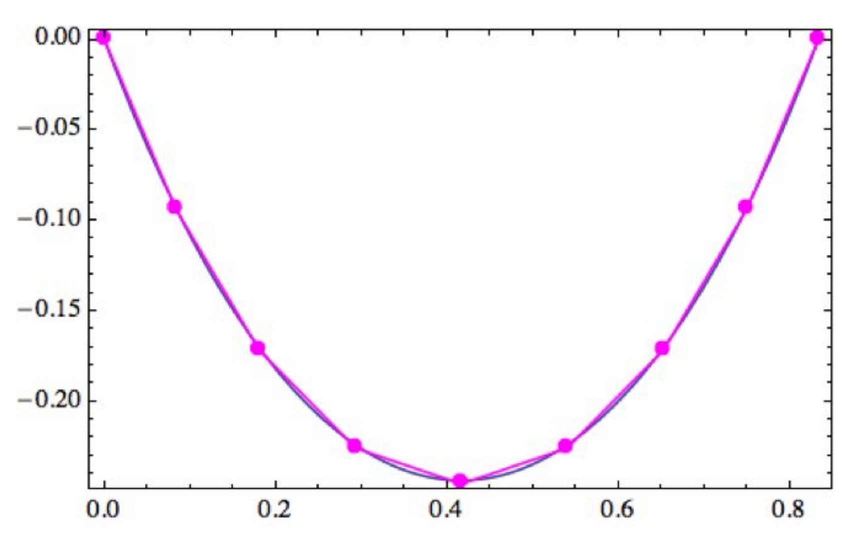
$$
y=c\cosh\frac{x-\frac{a}{2}}{c}-c\cosh\frac{a}{2c}
$$

因为绳索是不可伸长的，所以有限制条件

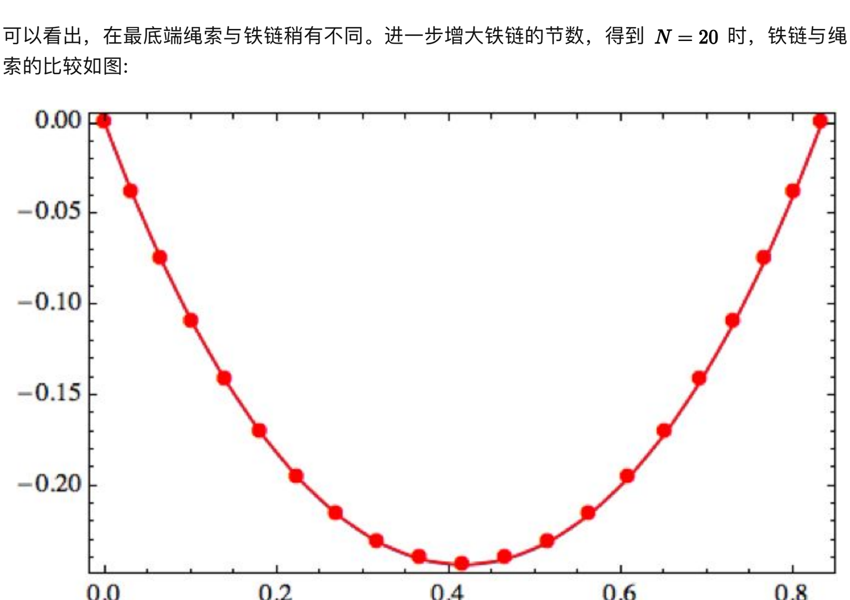
$$
2c\sinh\frac{a}{2c}=L
$$

当 $L=1,a=5/6$ 时，算出来 $c=0.3913.$

当 $N=8$ 时，绳索与铁链的比较如图.



可以看出，在最底端绳索与铁链稍有不同。进一步增大铁链的节数，得到 $N=20$ 时，铁链与绳索的比较如图:



这时铁链与绳索的平衡态构型已经几乎没有区别了。

第四节：数值程序

我写了一个 Python 程序实现这个数值计算，地址为:

PrimerLi/catenary

第五节：附录

A. 最小旋转曲面的微分几何表述

假设我们把一条原本在 $x-y$ 坐标平面上的曲线 $y=f(x)$ 绕着横轴旋转一周，得到一张曲面 $\boldsymbol{r}=\Big(x,f(x)\cos\theta,f(x)\sin\theta\Big)$. 因为已经选取了正交曲线坐标，所以曲面的第一和第二基本形式简化为:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I}&=Edx^2+Gd\theta^2\\
\mathrm{II}&=Ldx^2+Nd\theta^2
\end{aligned}
$$

这里， $E=1+f'(x)^2, G=f(x)^2, L=-\frac{f''(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}}, N=\frac{f(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}}$. 平均曲率为

$\kappa=\frac{L}{E}+\frac{N}{G}=\frac{1+f'(x)^2-f(x)f''(x)}{f(x)(1+f'^2)^{3/2}}$.因为我们要得到一个极小曲面，所以我们令平均曲率为零，得到一个微分方程为：

$1+f'(x)^2=f(x)f''(x)$.

解得

$$
f(x)=\frac{e^{k(x-x_0)}+e^{-k(x-x_0)}}{2k}=\frac{1}{k}\cosh k(x-x_0)
$$

这表明，最小旋转曲面由悬链线旋转生成。

B. 最小旋转曲面的变分法表述

已知旋转曲面的面积积分正比于 $I=\int_0^a f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}dx$. 根据欧拉-拉格朗日方程，使得这个积分取得极值的函数必须满足这个微分方程，

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial f'}-\frac{\partial L}{\partial f}&=0,\\
L&=f\sqrt{1+f'^2}
\end{aligned}
$$

化简后得到微分方程， $1+f'(x)^2=f(x)f''(x)$. 所以用欧拉-拉格朗日方程算面积积分极小值与令平均曲率为零得到的结果是一样的。

因为面积积分函数里面不显含自变量 x , 所以我们可以用雅克比首次积分来解决这个问题。已知，

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\Big(f'\frac{\partial L}{\partial f'}-L\Big)\\
&=f''\frac{\partial L}{\partial f'}+f'\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial f'}-\frac{dL}{dx}\\
&=f''\frac{\partial L}{\partial f'}+f'\frac{\partial L}{\partial f}-\frac{dL}{dx}=0
\end{aligned}
$$

所以, $f'\frac{\partial L}{\partial f'}-L=c$. 化简后得到 $kf=\sqrt{1+f'^2}$. 积分得到双曲余弦函数。

编辑于 2018-11-18

力学 变分法 微分几何