一维随机游走的first exit time

拉普拉斯算符
数学话题下的优秀答主

第一节：一维离散随机游走的first exit time

设一个粒子以同样的概率沿着 x 轴向右或者向左移动，粒子每次移动一个固定的步长。粒子从原点 $x=0$ 出发，左右 $x=-L$ 和 $x=R$ 分别有一个吸收壁。一旦粒子撞到任意一个吸收壁，该随机游走过程结束。现在要计算粒子从原点出发经过 n 步后撞到任意一个吸收壁的概率。有了这个概率，我们就可以估计这个随机游走过程大概可以持续多久。这个过程也可以理解为计算粒子从集合 $[-L,R]$ 中首次退出的时间，或者粒子首次击中吸收壁的时间。

记粒子从坐标点 $x=i$ 出发，经过 n 步后首次击中左侧吸收壁的概率为 $p(N_i^{(-L)}=n)$. 同样地，记粒子从坐标点 $x=i$ 出发，经过 n 步后首次击中右侧吸收壁的概率为 $p(N_i^{(R)}=n)$. $R,L>0$. 对任意的 $-L+1\le i\le R-1$ ，我们都有

$$p(N_i^{(-L)}=n)=\frac{1}{2}p(N_{i-1}^{(-L)}=n-1)+\frac{1}{2}p(N_{i+1}^{(-L)}=n-1)$$

$$p(N_i^{(R)}=n)=\frac{1}{2}p(N_{i-1}^{(R)}=n-1)+\frac{1}{2}p(N_{i+1}^{(R)}=n-1)$$

对于上面两个方程，我们有边界条件：

$$p(N_{-L}^{(-L)}=n)=\delta_{n,0},p(N_R^{(-L)}=n)=0$$

$$p(N_{-L}^{(R)}=n)=0,p(N_R^{(R)}=n)=\delta_{n,0}$$

定义两个矩母函数:

$$f_i(s)=\sum_{n=0}^{\infty}p(N_i^{(-L)}=n)e^{-sn}$$

$$g_i(s)=\sum_{n=0}^{\infty}p(N_R^{(R)}=n)e^{-sn}$$

它们分别满足如下的带有边界条件的差分方程：

$$f_i(s)=\frac{1}{2}e^{-s}f_{i-1}(s)+\frac{1}{2}e^{-s}f_{i+1}(s),-L+1\le i\le R-1,f_{-L}(s)=1,f_R(s)=0$$

$$g_i(s)=\frac{1}{2}e^{-s}g_{i-1}(s)+\frac{1}{2}e^{-s}g_{i+1}(s),-L+1\le i\le R-1,g_{-L}(s)=0,g_R(s)=1$$

求解得到

$$f_i(s)=\frac{\lambda_+^{R-i}-\lambda_-^{R-i}}{\lambda_+^{R+L}-\lambda_-^{R+L}},-L\le i\le R$$

$$g_i(s)=\frac{\lambda_+^{i+L}-\lambda_-^{i+L}}{\lambda_+^{R+L}-\lambda_-^{R+L}},-L\le i\le R$$

其中 $\lambda_\pm=e^s\left(1\pm\sqrt{1-e^{-2s}}\right)$.

如果我们只关心粒子从区间 $[-L,R]$ 首次退出的时刻，那么我们就记粒子从 $x=i$ 出发，在第 n 步首次击中任一吸收壁的概率为

$$p(N_i^{(B)}=n)=p(N_i^{(-L)}=n)+p(N_i^{(R)}=n)$$

这个概率的矩母函数为

$$h_i(s)=f_i(s)+g_i(s),-L\le i\le R$$

这里可以计算一个特殊情况：从原点出发的粒子要经过大概多少步才能首次击中对称分布在 $x=\pm R$ 处的吸收壁？为此，我们计算得到吸收概率的矩母函数为

$$h_0(s)=f_0(s)+g_0(s)=\frac{2}{\lambda_+^R+\lambda_-^R},\lambda_\pm=e^s\left(1\pm\sqrt{1-e^{-2s}}\right)$$

对这个矩母函数求逆变换就可以得到概率分布。计算过于繁琐，略过。

求微分得到粒子被吸收前运动的步数的期望值为

$$\mathbb{E}\left(N_0^{(B)}\right)=-\frac{d}{ds}h_0(s)\Big|_{s=0}=R^2$$

第二节：一维布朗运动的first exit time

如果要计算的是一维布朗运动的首次击中吸收壁的时间，那么我们要将前面的差分方程转变为微分方程。为此，可以将随机游走做近似，令每一步的步长趋近于零，同时每走一步需要的时间也趋近于零，取恰当的极限，就可以得到一维布朗运动的首次击中时刻的概率密度函数。仍然将两个吸收壁放在坐标原点的两侧，分别位于 $x=-L,x=R,R>0,L>0$. 在 $t=0$ 时刻粒子从坐标点 x 出发做等概率左右随机游走，每次的游走步长为 Δ，每走一步需要的时间为 δt . 记粒子从 $x\in[-L,R]$ 出发， 在时刻 t 首先击中左侧吸收壁的概率为 $p(T_x^{(-L)}=t)$ ， 在时刻 t 首先击中右侧吸收壁的概率为 $p(T_x^{(R)}=t)$. 这两个概率满足如下的递归关系：

$$p(T_x^{(-L)}=t)=\frac{1}{2}p(T_{x-\Delta}^{(-L)}=t-\delta t)+\frac{1}{2}p(T_{x+\Delta}^{(-L)}=t-\delta t);p(T_L^{(-L)}=t)=\delta(t),p(T_R^{(-L)}=t)=0$$

$$p(T_x^{(R)}=t)=\frac{1}{2}p(T_{x-\Delta}^{(R)}=t-\delta t)+\frac{1}{2}p(T_{x+\Delta}^{(R)}=t-\delta t);p(T_L^{(R)}=t)=0,p(T_R^{(R)}=t)=\delta(t)$$

记概率 $p(T_x^{(-L)}=t)$ 和 $p(T_x^{(R)}=t)$ 的矩母函数分别为

$$f(s,x)=\int_0^{\infty}p(T_x^{(-L)}=t)e^{-st}dt$$

$$g(s,x)=\int_0^{\infty}p(T_x^{(R)}=t)e^{-st}dt$$

它们分别满足如下的方程：

$$f(s,x)=\frac{1}{2}e^{-s\delta t}f(s,x-\Delta)+\frac{1}{2}e^{-s\delta t}f(s,x+\Delta);f(s,x=-L)=1,f(s,x=R)=0$$

$$g(s,x)=\frac{1}{2}e^{-s\delta t}g(s,x-\Delta)+\frac{1}{2}e^{-s\delta t}g(s,x+\Delta);g(s,x=-L)=0,g(s,x=R)=1$$

方程两边做泰勒级数展开，消掉最低阶近似，忽略高阶无穷小，得到带有边界条件的二阶微分方程：

$$\frac{1}{2}\Delta^2\frac{\partial^2 f(s,x)}{\partial x^2}=s\delta tf(s,x);f(s,x=-L)=1,f(s,x=R)=0$$

$$\frac{1}{2}\Delta^2\frac{\partial^2 g_(s,x)}{\partial x^2}=s\delta tg(s,x);g(s,x=-L)=0,g(s,x=R)=1$$

求解这个边值问题， 得到

$$f(s,x)=\frac{e^{\lambda(R-x)}-e^{-\lambda(R-x)}}{e^{\lambda(R+L)}-e^{-\lambda(R+L)}},x\in[-L,R],\lambda=\frac{\sqrt{2s\delta t}}{\Delta}$$

$$g(s,x)=\frac{e^{-\lambda(L+x)}-e^{\lambda(L+x)}}{e^{-\lambda(R+L)}-e^{\lambda(R+L)}},x\in[-L,R],\lambda=\frac{\sqrt{2s\delta t}}{\Delta}$$

定义粒子从 $x\in[-L,R]$ 出发，经过时间 t 首次击中左侧壁或者右侧壁的概率为

$$p(T_x^{(B)}=t)=p(T_x^{(-L)}=t)+p(T_x^{(R)}=t)$$

该概率分布的矩母函数为

$$h(s,x)=f(s,x)+g(s,x)$$

为了得到粒子从 $x=0$ 出发，经过时间 t 后击中对称分布在 $x=\pm R$ 的吸收壁的概率密度，我们首先计算该分布的矩母函数为：

$$h(s,0)=\frac{2}{e^{\lambda R}+e^{-\lambda R}},\lambda=\frac{\sqrt{2s\delta t}}{\Delta}$$

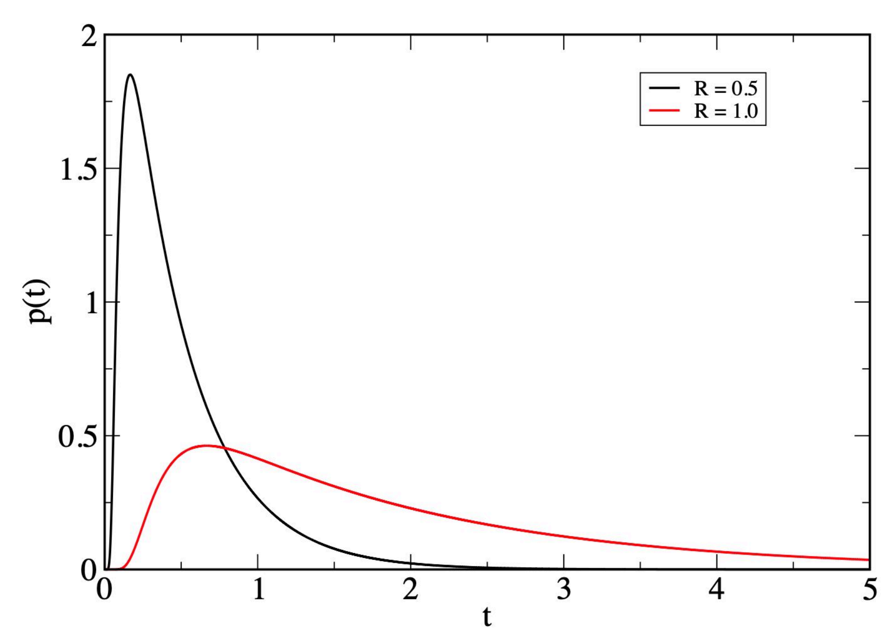
由此得到击中时间的期望值为

$$\mathbb{E}(T)=-h'(0)=\frac{R^2}{\Delta^2}\delta t$$

对矩母函数 $h(s,0)$ 求拉普拉斯逆变换，得到击中时间的概率密度函数为

$$p(t)=\frac{\frac{R}{\Delta}\sqrt{2\delta t}}{\sqrt{\pi}t^{3/2}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)e^{-\frac{(2n+1)^2R^2\delta t}{2\Delta^2 t}}$$

概率密度函数图像如图所示：



编辑于 2020-06-06

11 条评论

BOLI XU 2020-09-22
谢谢分享！有个问题，边界条件 f(s,R)=0 是不是仅当s>0时成立？还想问一下，关于两个吸收壁的Ito process，您有没有见过什么推荐的参考资料？
1

随机面条 2020-06-06
独立随机变量的和确实可以看成某种离散版本的布朗运动，连续化之后，钟开莱的结果也许确实可以给出离时的分布，在他的记号中 S_n^* 是离散变量之和的最大值。
赞

随机面条 2020-06-06
谢谢李博士分享~ 搜了一下发现这个分布还是 钟开莱 第一个写出来的。
赞

拉普拉斯算符 (作者) 回复 随机面条 2020-06-06
哪个分布？可不可以给我分享一下文献检索结果？谢谢
赞 推荐 删除

随机面条 回复 拉普拉斯算符 (作者) 2020-06-06
您文章最后的那个 离时 的分布。我在 Davar Khoshnevisan 的 Propbability 第197页找到这个分布的累积分布形式，根据书中给出的引用，Kai Lai Chung 在 1947 年 的文章 ON THE MAXIMUM PARTIAL SUM OF INDEPENDENT RANDOM VARIABLES 里写出了这个分布（在 Lemma 3中）。
赞

展开其他 3 条回复

随机面条 2020-06-05
布朗运动的exit time概率分布好像有个特别简单的表达式？好像是用余误差函数表示的
赞

拉普拉斯算符 (作者) 回复 随机面条 2020-06-06
那个应该是一维布朗运动首次击中点x的概率，这里计算的是首次击中边界。
赞 推荐 删除

随机面条 回复 拉普拉斯算符 (作者) 2020-06-06
哦对，是 hitting time
赞