

多体理论的路径积分表述 I: 玻色子的相干态



拉普拉斯算符
数学话题下的优秀答主

苗舰舰等 21 人赞同了该文章

这里准备写一系列文章，总结一下多体理论的路径积分表述。这是第一篇。路径积分表述依赖于玻色子和费米子的相干态。这里总结一下玻色子的相干态的几条重要性质。

第一：相干态为湮灭算符的本征态

定义玻色子的产生和湮灭算符为 \hat{a}, \hat{a}^\dagger ，玻色子的基态为 $|0\rangle$ ，满足 $\hat{a}|0\rangle = 0$ 。算符的对易关系为 $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ 。玻色子的相干态为

$$|\alpha\rangle = e^{\alpha\hat{a}^\dagger}|0\rangle$$

这里， α 为一个复参数。该状态尚未归一化。接下来我要定义一个算符函数，以此得到相干态的更多的性质。

定义算符函数为

$$f(\alpha) = [\hat{a}, e^{\alpha\hat{a}^\dagger}] = \hat{a}e^{\alpha\hat{a}^\dagger} - e^{\alpha\hat{a}^\dagger}\hat{a}$$

求该函数的微分，得到

$$\begin{aligned}\frac{df(\alpha)}{d\alpha} &= \hat{a}\hat{a}^\dagger e^{\alpha\hat{a}^\dagger} - \hat{a}^\dagger e^{\alpha\hat{a}^\dagger}\hat{a} \\ &= (1 + \hat{a}^\dagger\hat{a})e^{\alpha\hat{a}^\dagger} - \hat{a}^\dagger e^{\alpha\hat{a}^\dagger}\hat{a} \\ &= e^{\alpha\hat{a}^\dagger} + \hat{a}^\dagger[\hat{a}, e^{\alpha\hat{a}^\dagger}] \\ &= \hat{a}^\dagger f(\alpha) + e^{\alpha\hat{a}^\dagger}\end{aligned}$$

解微分方程，得到

$$f(\alpha) = \alpha e^{\alpha\hat{a}^\dagger}$$

于是就有对易关系：

$$[\hat{a}, e^{\alpha\hat{a}^\dagger}] = \hat{a}e^{\alpha\hat{a}^\dagger} - e^{\alpha\hat{a}^\dagger}\hat{a} = \alpha e^{\alpha\hat{a}^\dagger}$$

根据这个关系，可以得到

$$\begin{aligned}\hat{a}|\alpha\rangle &= \hat{a}e^{\alpha\hat{a}^\dagger}|0\rangle \\ &= (\alpha e^{\alpha\hat{a}^\dagger} + e^{\alpha\hat{a}^\dagger}\hat{a})|0\rangle \\ &= \alpha|\alpha\rangle\end{aligned}$$

所以相干态是湮灭算符的本征态。

第二：相干态的模

为了求接下来要求本征态的归一化系数。为此，需要计算 $|\alpha\rangle$ 的范数。

可以想办法直接计算相干态的范数如下：

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = \langle 0|e^{\alpha^* \hat{a}} e^{\alpha\hat{a}^\dagger}|0\rangle$$

定义一个函数：

$$f_n(\alpha) = \langle 0|\hat{a}^n e^{\alpha\hat{a}^\dagger}|0\rangle, n \geq 0$$

已知 $f_0(\alpha) = \langle 0|e^{\alpha\hat{a}^\dagger}|0\rangle = 1$

所以只需计算 $f_n(\alpha), n \geq 1$ 。

对函数求微分得到

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\alpha} f_n(\alpha) &= \langle 0|\hat{a}^n \hat{a}^\dagger e^{\alpha\hat{a}^\dagger}|0\rangle \\ &= \langle 0|(\hat{a}^\dagger \hat{a}^n + n\hat{a}^{n-1})e^{\alpha\hat{a}^\dagger}|0\rangle \\ &= n\langle 0|\hat{a}^{n-1} e^{\alpha\hat{a}^\dagger}|0\rangle \\ &= n f_{n-1}(\alpha), n \geq 1\end{aligned}$$

其中用到了对易关系

$$\hat{a}^n \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a}^n = n\hat{a}^{n-1}$$

初始条件为

$$f_n(0) = \langle 0|\hat{a}^n|0\rangle = 0, n \geq 1$$

对微分方程做拉普拉斯变换得到

$$p\hat{f}_n(p) - f_n(0) = n\hat{f}_{n-1}(p)$$

对于任意的 $n \geq 1$ ，得到

$$p\hat{f}_n(p) = n\hat{f}_{n-1}(p)$$

递归得到

$$\hat{f}_n(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}, n \geq 1$$

求拉普拉斯逆变换得到

$$f_n(\alpha) = \alpha^n, n \geq 1$$

另外根据 $f_0(\alpha) = 1$ 得到

$$f_n(\alpha) = \langle 0|\hat{a}^n e^{\alpha\hat{a}^\dagger}|0\rangle = \alpha^n, n \geq 0$$

所以有

$$\begin{aligned}\langle\alpha|\alpha\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha^*)^n}{n!} \langle 0|\hat{a}^n e^{\alpha\hat{a}^\dagger}|0\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \\ &= e^{|\alpha|^2}\end{aligned}$$

第三：相干态的完备性

相干态可以展开为

$$|\alpha\rangle = e^{\alpha\hat{a}^\dagger}|0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle$$

定义 $|n\rangle = c_n (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle$ ，其中 c_n 为归一化系数。为了得到归一化常数，需要计算

$$\langle 0|\hat{a}^n (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle$$

根据对易关系

$$\begin{aligned}\hat{a}(\hat{a}^\dagger)^n - (\hat{a}^\dagger)^n \hat{a} &= n(\hat{a}^\dagger)^{n-1} \\ \hat{a}^n \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a}^n &= n\hat{a}^{n-1}\end{aligned},$$

得到

$$\begin{aligned}\langle 0|\hat{a}^n (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle &= \langle 0|\hat{a}\hat{a}^{n-1} \hat{a}^\dagger (\hat{a}^\dagger)^{n-1} |0\rangle \\ &= \langle 0|\hat{a} \left(\hat{a}^\dagger \hat{a}^{n-1} + (n-1)\hat{a}^{n-2} \right) (\hat{a}^\dagger)^{n-1} |0\rangle \\ &= n\langle 0|\hat{a}^{n-1} (\hat{a}^\dagger)^{n-1} |0\rangle\end{aligned}$$

反复迭代得到

$$\begin{aligned}\langle 0|\hat{a}^n (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle &= n\langle 0|\hat{a}^{n-1} (\hat{a}^\dagger)^{n-1} |0\rangle \\ &= \dots \\ &= n! \langle 0|\hat{a}\hat{a}^\dagger |0\rangle \\ &= n!\end{aligned}$$

所以

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^\dagger)^{n+1} |0\rangle$$

定理： $\langle m|n\rangle = \delta_{mn}$

证明：定义 $A_{m,n} = \langle 0|\hat{a}^m (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle$ 。如果 $m = n$ ，那么 $A_{n,n} = n!$ 。如果 $m \neq n$ ，那么不失一般性，可以假设 $n > m$ 。得到一个递归关系：

$$A_{m,n} = mA_{m-1,n-1} = \dots = m!A_{1,n-m+1} = m!A_{0,n-m}$$

因为 $n - m > 0$ ，所以 $A_{m,n} = m!A_{0,n-m} = 0$ 。

所以就有 $A_{m,n} = m!\delta_{m,n}$

于是最终得到 $\langle m|n\rangle = \delta_{mn}$ 。证明完毕。

所以相干态可以展开为

$$|\alpha\rangle = e^{\alpha\hat{a}^\dagger}|0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

定理：相干态满足完备性条件 $\int \frac{d\alpha^* \wedge d\alpha}{2\pi i} e^{-\alpha\alpha^*} |\alpha\rangle \langle \alpha^*| = \mathbb{I}$

证明：

$$\begin{aligned}|\alpha\rangle \langle \alpha^*| &= \sum_{mn} \frac{\alpha^n (\alpha^*)^m}{\sqrt{n!} \sqrt{m!}} |n\rangle \langle m| \\ &= \int \frac{d\alpha^* \wedge d\alpha}{2\pi i} e^{-\alpha^* \alpha} \alpha^n (\alpha^*)^m \\ &= \int \frac{2i r dr d\theta}{2\pi i} e^{-r^2} r^{m+n} e^{i\theta(n-m)} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\theta e^{i\theta(n-m)} \int_0^\infty r dr e^{-r^2} r^{m+n} \\ &= \delta_{mn} \Gamma((m+n)/2 + 1) \\ &= \delta_{mn} n!\end{aligned}$$

所以有

$$\begin{aligned}&\int \frac{d\alpha^* d\alpha}{2\pi i} e^{-\alpha\alpha^*} |\alpha\rangle \langle \alpha^*| \\ &= \int \frac{d\alpha^* d\alpha}{2\pi i} e^{-\alpha\alpha^*} \sum_{m,n} \frac{\alpha^n (\alpha^*)^m}{\sqrt{m!} \sqrt{n!}} |n\rangle \langle m| \\ &= \sum_{m,n} \frac{n!\delta_{mn}}{\sqrt{n!} \sqrt{m!}} |n\rangle \langle m| \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| \\ &= \mathbb{I}\end{aligned}$$

证明完毕。

两个相干态 $|\alpha\rangle, |\beta\rangle$ 的内积为

$$\begin{aligned}\langle \beta^*|\alpha\rangle &= \sum_{mn} \frac{\alpha^n (\beta^*)^m}{\sqrt{m!} \sqrt{n!}} \langle m|n\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha\beta^*)^n}{n!} \\ &= e^{\alpha\beta^*}\end{aligned}$$

所以相干态彼此不正交。

编辑于 2018-11-27

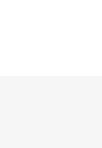
开启赞赏

赞赏开启后，读者将可以付费支持你的创作。

物理学

量子物理

文章被以下专栏收录



量子力学与路径积分

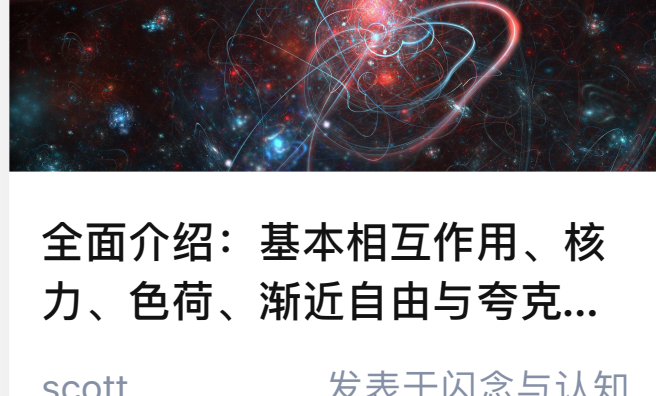
推荐阅读



希格斯机制与希格斯粒子 (一)

奶牛小雪球

发表于雪球物理



全面介绍：基本相互作用、核力、色荷、渐近自由与夸克...

scott...

发表于闪念与认知

波函数的塌缩

波函数塌缩是一个错误的概念。塌缩如果存在是一个物理过程，应该可以用数学描述，至今没有一个物理学家可以给出一个塌缩的数学公式。所有只是很像波塌缩了，到底波在干什么，大家都不清楚，...

互能流

Schrodinger
Three
Dimensional

Chapter 6—三维空间中的量子力学

Young...

发表于量子力学导...

2 条评论

切换为时间排序

写下你的评论...



叫我小殊吧

2018-11-23

第一，就没有人关注这些吗

1



撒了浓墨又重彩 回复 叫我小殊吧

2020-11-17

有啊有啊

赞

赞同 21

2 条评论

分享

喜欢

收藏

设置