泊松过程的一些总结

拉普拉斯算符
数学话题下的优秀答主

第一节：定义

泊松过程是一个取值离散的连续时间随机过程。泊松过程用来描述一段时间内事件的发生次数，因此又是一个计数过程。记依赖于时间的随机变量为 N_t，该变量用来描述从时刻0到时刻 t，某个事件的发生次数. 根据定义，泊松过程应该满足这样的条件:

I: $N_0=0$，意味事件计数从零时刻开始

II: $N_{t+\tau}\geq N_t,\forall t,\tau>0$，意味着该计数过程随着时间是单调递增的

III: $P(N_t=n,N_{t+\tau}-N_t=m)=P(N_t=n)P(N_{t+\tau}-N_t=m)$，意味着该过程是一个独立增量过程，也就是 t 时刻后的增量与之前的历史无关。

IV: $P(N_{t+\tau}-N_t=n)=p_n(\tau),\forall t\geq 0,\tau>0$，意味着这个过程是一个平稳随机过程。一个时间段 τ 内事件发生的次数只依赖于该时间段的长度（也可以依赖于系统参数），但是与该时间段在时间轴上的位置无关。

V: $P(N_t=n)=\frac{\lambda^n t^n}{n!}e^{-\lambda t},\lambda>0$

其中前面四个条件是任意一个平稳独立增量的计数过程都应该满足的，第五条仅限于泊松过程。泊松过程可以有很多个等价的定义，下面给出几个等价定义。

第二节：泊松过程的另一个等价定义

泊松过程还可以用这个定义来代替。这个定义给出了泊松过程的一个直观解释。定义为，如果一个独立增量的平稳随机计数过程满足下面的条件:

I: $P(N_h=1)=\lambda h+o(h)$，该条件意味着在很短的一个时间段内，事件出现一次的概率正比于该时间段的长度。

II: $P(N_h\geq 2)=o(h)$，该条件意味着在很短的一个时间段内，事件发生超过一次的概率趋近于零。

那么，根据这两个条件，加上独立增量和平稳性这两个条件，就可以证明该随机过程是一个泊松过程。证明过程参看 Sheldon Ross 的 *Stochastic Processes* 一书的第二章。浙大的《概率论与数理统计》一书中也有证明。这里不再赘述。

第三节：从积分方程的角度来推导泊松过程

这里，我要使用积分方程来重新推导泊松过程。使用这个方法，我们可以从一个更加高屋建瓴的角度来研究泊松过程，而且可以引入平稳独立增量随机过程的生成元这个概念。首先我们有一个恒等式： $N_t=N_{t-\tau}+N_t-N_{t-\tau},0\leq\tau\leq t$. 限制这个计数过程是一个平稳的独立增量过程。因此有

$$P(N_{t-\tau}=n,N_t-N_{t-\tau}=m)=P(N_{t-\tau}=n)P(N_t-N_{t-\tau}=m)$$

也就是随机变量 $N_{t-\tau}$ 与随机变量 $N_t-N_{t-\tau}$ 相互独立。而且因为限制该过程是一个平稳随机过程，所以随机变量 $N_t-N_{t-\tau}$ 等价于 N_τ . 于是我们有这个关系：

$$N_t=N_{t-\tau}+N_\tau$$

因为这是一个计数过程，所以随机变量的取值只能为非负数。可以假设变量 N_t 的概率密度函数为 $f_t(x),x\geq 0$，那么根据上面的关系，我们有一个关于概率密度的积分方程为

$$f_t(x)=\int_0^x f_{t-\tau}(\xi)f_\tau(x-\xi)d\xi$$

根据计数过程的定义， $P(N_{t=0}=0)=1$，所以 $f_{t=0}(x)=\delta(x)$. 对上面的积分方程做拉普拉斯变换，得到

$$\hat f_t(p)=\hat f_{t-\tau}(p)\hat f_\tau(p)$$

上面的式子可以看作是以 t,τ 为变量，以 p 为参数的函数方程。记 $g(t;p)=\hat f_t(p)$，于是函数方程为

$$g(t;p)=g(t-\tau;p)g(\tau;p),\forall t>0,0\leq\tau\leq t\quad .$$

令 $\tau=0$，得到

$$g(t;p)=g(t;p)g(0;p)$$

该式子的非平庸解为

$$g(0;p)=1$$

函数方程两边同时对 τ 求微分，得到

$$0=-g'(t-\tau;p)g(\tau;p)+g(t-\tau;p)g'(\tau;p),\forall t>0,0\leq\tau\leq t$$

令 $\tau=0$，代入 $g(0;p)=1$，得到

$$\frac{dg(t;p)}{dt}=g(t;p)g'(0;p)$$

解方程得到

$$g(t;p)=c(p)e^{g'(0;p)t}$$

因为 $g(0;p)=1$，所以 $c(p)=1$. 于是概率密度的拉普拉斯变换为

$$\hat f_t(p)=g(t;p)=e^{g'(0;p)t}$$

这是一个指数映射，跟李代数到李群的映射完全一致。所以可以将 $g'(0;p)$ 称作该随机过程的生成元， 在这个意义下， $\hat f_t(p)$ 构成了一个以时间坐标 t 为参数的单参数李群。如果我们能找到 $g'(0;p)$ 的表达式，我们就可以找到概率密度的拉普拉斯变换， 从而得到概率密度。问题是如何得到 $g'(0;p)$ ？

根据拉普拉斯变换的定义，

$$\hat f_t(p)=\int_0^\infty f_t(x)e^{-px}dx$$

那么

$$g'(0;p)=\left.\frac{d\hat f_t(p)}{dt}\right|_{t=0}=\int_0^\infty\left.\frac{d}{dt}f_t(x)\right|_{t=0}e^{-px}dx$$

所以我们需要计算在 $t=0$ 附近概率密度随时间的变化率。为了计算这个量，我需要引入新的假设。假设当 $h\to 0$ 时，

$$\begin{gathered}P(N_h=0)=1-\lambda h\\ P(N_h=1)=\lambda h\\ P(N_h\geq 2)=0\end{gathered}$$

于是在时刻 $t=0$ 附近，

$$f_t(x)=(1-\lambda t)\delta(x)+\lambda t\delta(x-1)$$

对时间求微分为

$$\left.\frac{d}{dt}f_t(x)\right|_{t=0}=-\lambda\delta(x)+\lambda\delta(x-1)=\lambda\Big(-\delta(x)+\delta(x-1)\Big)$$

对该式子做拉普拉斯变换得到

$$g'(0;p)=\lambda(-1+e^{-p})$$

所以任意时刻概率密度的拉普拉斯变换为

$$\hat f_t(p)=e^{\lambda t(-1+e^{-p})}$$

对这个函数做拉普拉斯变换的反演就可以得到任意时刻的概率密度函数了。现在我要做拉普拉斯变换的反演。

第四节：拉普拉斯变换的反演

拉普拉斯变换的定义为

$$\hat f(p)=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt,p=s+i\omega,s>0$$

可以将这个式子重新写作一种等价形式为

$$\hat f(p)=\int_{-\infty}^\infty\theta(t)f(t)e^{-st}e^{-i\omega t}dt,\quad\theta(t)=\begin{cases}0 & t\leq 0\\ 1 & t\geq 0\end{cases}$$

所以 $\hat f(p)=\hat f(s+i\omega)$ 可以看做是函数 $\theta(t)f(t)e^{-st}$ 的傅里叶变换。我们知道如何对傅里叶求逆变换，所以

$$\theta(t)f(t)e^{-st}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty\hat f(s+i\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

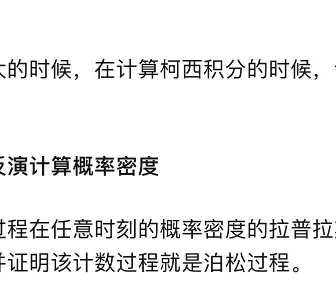
其中， $p=s+i\omega$，因此，$i\omega=p-s$. 因为这里是对 ω 求积分，所以可以将 s 视为常数。所以就有 $dp=id\omega$.

$$\theta(t)f(t)e^{-st}=\frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty}\hat f(p)e^{pt-st}dp$$

两边消掉 e^{-st}，可以得到

$$\theta(t)f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty}\hat f(p)e^{pt}dp$$

此时的积分路径为在复平面上，沿着一条实部大于零的平行于虚轴的直线求积分。在虚轴的左侧将该直线补全为一个大半圆，得到一条新的积分路径如图所示：



[redacted]

可以证明，当大圆半径为无穷大的时候，在计算柯西积分的时候，该积分路径等价于原来的积分路径。

第五节：通过拉普拉斯变换的反演计算概率密度

在第三节已经算出了一个计数过程在任意时刻的概率密度的拉普拉斯变换，现在要做的是计算该变换的反演，求出概率密度，并证明该计数过程就是泊松过程。

任意时刻概率密度为

$$\theta(x)f_t(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty}e^{\lambda t(e^{-p}-1)}e^{px}dp$$

选取上一节所示的积分围道，该积分化为

$$\theta(x)f_t(x)=\frac{1}{2\pi i}\oint e^{\lambda t(e^{-p}-1)}e^{px}dp$$

为了计算这个围道积分，我需要找出 $e^{\lambda t(e^{-p}-1)}e^{px}$ 所有的极点。根据极点的定义，该函数的极点都在 $\mathrm{Re}(p)=-\infty$. 极点在无穷远处的围道积分我之前没做过。以后再写。

第六节：与泊松分布的拉普拉斯变换的比较

已知泊松分布的概率密度函数为

$$f(x)=\sum_{n=0}^\infty\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\delta(x-n)$$

该函数的拉普拉斯变换为

$$\hat f(p)=\sum_{n=0}^\infty\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}e^{-pn}=e^{\lambda(e^{-p}-1)}$$

与第三节的结果比较，可以知道第三节的结果就是参数为 λt 的泊松分布的拉普拉斯变换。

第七节：总结

这里证明了，对任意一个平稳独立增量的随机过程，如果仅仅限制了 $N_t=N_\tau+N_{t-\tau}$，那么得到的结果未必是泊松随机过程。该随机过程的分布函数依赖于概率密度函数在 $t=0$ 时刻对时间的微分 $\left.\frac{df_t(x)}{dt}\right|_{t=0}$. 该函数的拉普拉斯变换可以称作是随机过程的生成元。如果要求短时间内事件发生的次数只能为0或者1，而且取1的概率正比于该时间段的长度，那么该随机过程就成为了泊松过程。可以对短时间内事件发生的次数做不同的限制，于是就可以得到不同的生成元，然后得到不同的计数过程。生成元方法适用于任意一个独立增量平稳随机过程。

编辑于 2018-01-30

随机过程 泊松分布 概率论