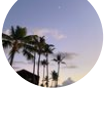


随机过程笔记I: 两个停时期望



拉普拉斯算符
数学话题下的优秀答主

Triborg 等 19 人赞同了该文章

定义：给定一列独立同分布的随机数字 $X_k, k = 1, 2, 3, \dots$ ，定义

$$N_t = \max\{n : S_n = \sum_{k=1}^n X_k \leq t\}$$

问题是如何计算 N_t 的期望值。

根据定义，我们知道 $N_t \geq n \equiv S_n \leq t$ 。所以就有

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[N_t] &= \sum_{n=1}^{\infty} nP(N_t = n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n\left(P(N_t \geq n) - P(N_t \geq n+1)\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(N_t \geq n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \leq t) \end{aligned}$$

根据定义， $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ 为 n 个独立同分布随机变量的和。为了计算概率 $P(S_n \leq t)$ ，我们需

要知道随机变量 S_n 服从什么样的分布。因为 S_n 是 n 个独立同分布随机变量的和，所以它的概率密度为 X_k 概率密度的 n 重卷积，它的特征函数是 X_k 的特征函数的 n 次方。记 X_k 的概率密度函数为 $f(x)$ ，它的特征函数为

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\omega x} dx$$

那么 S_n 的特征函数为 $\hat{f}(\omega)^n$ ，它的概率密度函数为

$$f_{S_n}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)^n e^{-i\omega x} d\omega$$

通过概率密度函数，我们可以计算这个概率：

$$\begin{aligned} P(S_n \leq t) &= \int_{-\infty}^t dx f_{S_n}(x) \\ &= \int_{-\infty}^t dx \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \hat{f}(\omega)^n e^{-i\omega x} d\omega \end{aligned}$$

有了这个概率，我们就可以计算 N_t 的期望值为：

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[N_t] &= \sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \leq t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^t dx \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \hat{f}(\omega)^n e^{-i\omega x} d\omega \end{aligned}$$

如果 $|\hat{f}(\omega)| < 1$ 恒成立，那么我们可以将求和放进积分号里面，得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}(\omega)^n = \frac{\hat{f}(\omega)}{1 - \hat{f}(\omega)}$$

但是我们知道， $\hat{f}(\omega = 0) = 1$ 。所以至少存在存在一个 ω ，使得求和得到的结果出现奇异性。因此，我们不能将求和与积分贸然交换次序。

为了计算 $\mathbb{E}[N_t]$ ，我们只需要知道 $\hat{f}(\omega)$ 。

下面计算两个例子。

例子1: $X_k, k = 1, 2, \dots$ 服从指数分布

此时，每一个随机变量 X_k 的概率密度函数都是

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \lambda > 0$$

它的特征函数为

$$\hat{f}(\omega) = \frac{\lambda}{\lambda - i\omega}$$

期望值 $\mathbb{E}[N_t]$ 为

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[N_t] &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^t dx \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega x} \left(\frac{\lambda}{\lambda - i\omega}\right)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t dx \frac{e^{-\lambda x} \lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\lambda t} dx \frac{e^{-x} x^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \lambda t \end{aligned}$$

其中用到了积分（用留数法就可以很容易算出来，细节略过）：

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega x} \left(\frac{\lambda}{\lambda - i\omega}\right)^n = \frac{e^{-\lambda x} \lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} \theta(x)$$

例子2: $X_k, k = 1, 2, 3, \dots$ 服从均匀分布 $U(0, 1)$

此时变量 X_k 的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, 1) \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

它的特征函数为

$$\hat{f}(\omega) = \int_0^1 e^{i\omega x} dx = \frac{e^{i\omega} - 1}{i\omega}$$

代入 N_t 的期望值公式中得到

$$\mathbb{E}[N_t] = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^t dx \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega x} \left(\frac{e^{i\omega} - 1}{i\omega}\right)^n$$

这里需要首先计算积分

$$I(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega x} \left(\frac{e^{i\omega} - 1}{i\omega}\right)^n, n \in \mathbb{Z}^+$$

为了计算这个积分，首先计算它的拉普拉斯变换：

$$\begin{aligned} \hat{I}(p) &= \int_0^{\infty} I(x) e^{-px} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{p + i\omega} \left(\frac{e^{i\omega} - 1}{i\omega}\right)^n d\omega \\ &= \left(\frac{1 - e^{-p}}{p}\right)^n \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{(-1)^k e^{-pk}}{p^n} \end{aligned}$$

上面的式子里面，从第二行到第三行也用到了留数法。做拉普拉斯逆变换得到

$$I(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k \frac{\theta(x-k)(x-k)^{n-1}}{(n-1)!}$$

于是得到停时的期望值为

$$\mathbb{E}[N_t] = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t I(x) dx$$

如果规定积分上限 $t \in [0, 1]$ ，那么上面的积分就可以简化为

$$\begin{aligned} \int_0^t I(x) dx &= \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{(-1)^k}{(n-1)!} \int_0^t \theta(x-k)(x-k)^{n-1} dx \\ &= \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

此时，停时的期望值为

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[N_t] &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t I(x) dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \\ &= e^t - 1 \end{aligned}$$

从这里也可以很容易看出来，如果让 n 个均匀分布在 $(0, 1)$ 上的随机数相加直到它们的和大于1，那么我们需要的随机数的平均个数为 e 。

编辑于 2020-03-04

开启赞赏

赞赏开启后，读者将可以付费支持你的创作。

概率论

随机过程

高等数学

文章被以下专栏收录



随机过程学习笔记

推荐阅读

概率论复习：重要概念和公式

以下摘录适用于经济学本科层级、和互联网数据分析的概率论核心概念和公式。参考教材是本科经济专业计量经济学课上的教材，詹姆斯·斯托克、马克·沃森所著的《计量经济学》第三版。一、...

鱼不卡



如何深刻理解gamma分布？指数随机变量的总和

jinzh...

发表于数据科学...

大数定理

Motivation: 学而时习之，不亦乐乎。1. 切比雪夫（Chebyshev）不等式定理1 对任意随机变量 X ,若它的方差 DX 存在，则对任意 $\epsilon > 0$ 有 $P(|X - EX| \geq \epsilon) \leq \frac{DX}{\epsilon^2}$...

杨萧

5个常见分布的最大似然估计

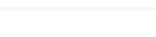
1.两点分布 概率函数是 $P(X=x) = p^x (1-p)^{1-x}$, $x=0,1$. 最大似然估计： $\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$. 2.指数...

Roc Y...

发表于数林初探

还没有评论

写下你的评论...



赞同 19

添加评论

分享

喜欢

收藏

设置