路径积分法推导泊松过程

拉普拉斯算符
数学话题下的优秀答主

本文分为两部分。第一部分我先推导一个对任意的时间平稳独立增量随机过程都成立的方程。这个方程本质上是对随机过程中所有可能发生的状态求和，所以可以认为是路径积分法。然后我通过引入一个条件来求解这个方程。通过引入这个条件，我可以得到泊松过程。本文的思路跟前面这篇文章(泊松过程的一些总结)的思路很像，都是先推导出一个普适的方程，然后将这个方程应用到某个特例上。

第一节：一个普适的积分方程

对于一个任意的计数过程，我们记时间区间 $[t_1,t_2], t_2\geq t_1\geq 0$ 内事件发生次数为 n 的概率为 $p([t_1,t_2]_n)$. 假设事件发生过程是一个时间平稳独立增量过程，也就是满足以下条件：

1. $p([t_1,t_2]_n)=f_n(t_2-t_1)$ ，意味着在时间区间 $[t_1,t_2], t_2\geq t_1\geq 0$ 内事件发生 n 次的概率只依赖于发生次数 n 和时间段的长度 t_2-t_1 .

2. $p([0,t]_n,[t,t+s]_m)=p([0,t]_n)p([t,t+s]_m), t,s\geq 0, m,n\geq 0$ ，意味着不重合的时间段内事件发生次数是相互独立的。

为了得到时间区间 $[0,t]$ 内事件发生 n 次的概率，我引入这样一个程序：

1. 随机选取一个时刻 $\tau\in(0,t)$ 将时间区间切割为两个区间，分别为 $[0,\tau],[\tau,t]$.
2. 要求区间 $[0,\tau]$ 内事件发生 k 次，区间 $[\tau,t]$ 内事件发生 $n-k$ 次，其中 $k=0,1,2,\ldots,n.$
3. 遍历所有可能的 τ,k .

每次切割都会牵涉到三个事件，这三个事件是相互独立的，分别为:

$$A=[0,\tau]\text{区间内事件发生}k\text{次}$$
$$B=[\tau,t]\text{区间内事件发生}n-k\text{次}$$
$$C=\text{我们将切割点选择在时刻}\tau$$

根据前面的假设，我们记 $p(A)=p([0,\tau]_k)=f_k(\tau)$ ，$p(B)=p([\tau,t]_{n-k})=f_{n-k}(t-\tau)$. 然而，由于事件 C 的测度为零，所以 $p(C)=0$. 为了避免这个问题，我先把时间区间 $[0,t]$ 切割为 N 段，每个时间段长度为 $\Delta t=\frac{t}{N}$. 于是前面的切割程序变为:

1. 随机选择一个指标 $i=\{1,2,\ldots,N-1\}$ ，将区间 $[0,t]$ 切割为两部分 $[0,i\Delta t],[i\Delta t,t]$ ，这个事件发生的概率为 $p=\frac{1}{N-1}\approx\frac{\Delta t}{t}$
2. 要求区间 $[0,i\Delta t]$ 内事件发生 k 次，区间 $[i\Delta,t]$ 内事件发生 $n-k$ 次。这个事件发生的概率为 $p=p([0,i\Delta t]_k)p([i\Delta t,t]_{n-k})$
3. 遍历所有可能的 i,k

给定 i,k ，我们就得到一个复合事件，记作 $U_i^k=[0,i\Delta t]_k\cap[i\Delta t,t]_{n-k}\cap\{\text{指标选择在}i\}$. 复合事件中每一个事件都独立，所以有

$$p(U_i^k)=p([0,i\Delta t]_k)p([i\Delta t,t]_{n-k})p(i)$$

对于不同的 i,k ，该复合事件互斥。所以我们有

$$\begin{aligned}p([0,t]_n)&=\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{k=0}^{n}p([0,i\Delta t]_k)p([i\Delta t,t]_{n-k})\frac{1}{N-1}\\&\approx\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{k=0}^{n}p([0,i\Delta t]_k)p([i\Delta t,t]_{n-k})\frac{\Delta t}{t}\end{aligned}$$

当 $N\to\infty$ 时，上面的方程变为

$$f_n(t)=\frac{1}{t}\sum_{k=0}^{n}\int_0^t f_k(\tau)f_{n-k}(t-\tau)d\tau, n\geq 0$$

做拉普拉斯变换得到

$$-\frac{d}{dp}\hat{f}_n(p)=\sum_{k=0}^{n}\hat{f}_{n-k}(p)\hat{f}_k(p)$$

迄今为止，这个方法对所有的时间平稳独立增量随机计数过程都成立。为了求解上面的这个方程，我需要引入新的假设。不同的假设可以得到不同的计数过程。

第二节：泊松过程的推导

假设对于所有的概率 $f_n(t)$ ，我们都有

$$\int_0^\infty f_n(t)\mu dt=1, \mu>0$$

这个假设等价于，对于所有的 $\hat{f}_n(p)$ ，我们都有 $\hat{f}_n(0)=\frac{1}{\mu}$ ，其中 $\hat{f}_n(p)=\int_0^\infty f_n(t)e^{-pt}dt$ 为概率函数的拉普拉斯变换。这个要求的含义在附录里面有详细叙述。有了这个假设， 我就可以逐步求解上面的积分方程了。

当 $n=0$ 时，我们有

$$\begin{gathered}-\frac{d}{dp}\hat{f}_0(p)=\hat{f}_0^2(p),\\\hat{f}_0(0)=\frac{1}{\mu}\end{gathered}$$

求解得到

$$\hat{f}_0(p)=\frac{1}{p+\mu}$$

当 $n=1$ 时，我们有

$$\begin{aligned}-\frac{d}{dp}\hat{f}_1(p)&=\hat{f}_0(p)\hat{f}_1(p)+\hat{f}_1(p)\hat{f}_0(p)\\&=\frac{2}{p+\mu}\hat{f}_1(p)\end{aligned}$$

根据条件 $\hat{f}_1(0)=\frac{1}{\mu}$ ，我们可以得到

$$\hat{f}_1(p)=\frac{\mu}{(p+\mu)^2}$$

当 $n=2$ 时，我们有

$$-\frac{d}{dp}\hat{f}_2(p)=2\hat{f}_0(p)\hat{f}_2(p)+\hat{f}_1^2(p)$$

代入 $\hat{f}_0,\hat{f}_1,\hat{f}_2(0)$ 可以得到

$$\hat{f}_2(p)=\frac{\mu^2}{(p+\mu)^3}$$

可以用数学归纳法求解积分方程如下.

已知 $\hat{f}_0,\hat{f}_1,\hat{f}_2$ ，为了计算 $\hat{f}_n(p), n\geq 3$ ，假设

$$\hat{f}_k(p)=\frac{\mu^k}{(p+\mu)^{k+1}}$$

对于任意的 $k=0,1,2,\ldots,n-1$ 都成立。那么当 n 为偶数的时候，我们有

$$\begin{aligned}-\frac{d}{dp}\hat{f}_n(p)&=2\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1}\hat{f}_k(p)\hat{f}_{n-k}(p)+\hat{f}_{\frac{n}{2}}^2(p)\\&=2\hat{f}_0(p)\hat{f}_n(p)+2\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}\hat{f}_k(p)\hat{f}_{n-k}(p)+\hat{f}_{\frac{n}{2}}^2(p)\\&=2\hat{f}_0(p)\hat{f}_n(p)+(n-1)\frac{\mu^n}{(p+\mu)^{n+2}}\end{aligned}$$

当 n 为奇数的时候，我们有

$$\begin{aligned}-\frac{d}{dp}\hat{f}_n(p)&=2\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}\hat{f}_k(p)\hat{f}_{n-k}(p)\\&=2\hat{f}_0(p)\hat{f}_n(p)+2\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\hat{f}_k(p)\hat{f}_{n-k}(p)\\&=2\hat{f}_0(p)\hat{f}_n(p)+(n-1)\frac{\mu^n}{(p+\mu)^{n+2}}\end{aligned}$$

所以对于任意的 $n\geq 3$ ，我们都有

$$-\frac{d}{dp}\hat{f}_n(p)=2\hat{f}_0(p)\hat{f}_n(p)+(n-1)\frac{\mu^n}{(p+\mu)^{n+2}}$$

两边同时乘以 $(p+\mu)^2$ ，得到

$$\frac{d}{dp}\Big((p+\mu)^2\hat{f}_n(p)\Big)=-(n-1)\frac{\mu^n}{(p+\mu)^n}$$

积分得到

$$\hat{f}_n(p)=\frac{\mu^n}{(p+\mu)^{n-1}}\frac{1}{(p+\mu)^2}+\frac{c}{(p+\mu)^2}$$

根据初始条件 $\hat{f}_n(0)=\frac{1}{\mu}$ ，得到

$$\hat{f}_n(p)=\frac{\mu^n}{(p+\mu)^{n+1}}$$

因此，根据数学归纳法原理，我们求出了对于任意的 n 的概率函数的拉普拉斯变换。对上式求拉普拉斯逆变换，得到

$$\begin{aligned}f_n(t)&=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{\mu^n}{(p+\mu)^{n+1}}e^{pt}dp\\&=\frac{1}{2\pi i}\oint_{p=-\mu+\delta e^{i\theta}}\frac{\mu^n}{(\delta e^{i\theta})^{n+1}}e^{-\mu t}e^{t\delta e^{i\theta}}\delta e^{i\theta}id\theta\\&=\frac{1}{2\pi i}\mu^n e^{-\mu t}\oint\frac{t^n(\delta e^{i\theta})^n}{(\delta e^{i\theta})^n n!}id\theta\\&=\frac{(\mu t)^n e^{-\mu t}}{n!}\end{aligned}$$

这正是参数为 μ 的泊松过程。

附录

这里我要讨论一下为什么要求 $\hat{f}_n(0)=\frac{1}{\mu}$ 意味着该过程是泊松过程。

对于一个独立增量平稳随机级数过程， $f_n(t)$ 表示在时间段 t 内发生事件 n 次的概率。如果 n 个事件已经发生了，那么我们称这个过程结束了。一个过程持续时间 t 的概率为 $f_n(t)$. 考察过程的结束时间。过程的结束发生在时刻 t 的概率为零，因为时刻 t 的测度为零。因此，我们应该考察过程结束发生在微小时间段 $[t,t+\Delta t]$ 的概率。对于平稳独立增量过程，该概率为

$$p=f_{n-1}(t)f_1(\Delta t)$$

表示到时刻 t 为止，事件发生了 $n-1$ 次；然后在微小时间段 $[t,t+\Delta t]$ 内，事件又发生了一次，过程结束。因为经过无穷长的时间，过程一定会结束，而且对不同的时刻 t ，所有的概率事件互斥，因此有

$$\sum_t f_{n-1}(t)f_1(\Delta t)=1$$

下面引入泊松假设。假设在微小时间段内，事件发生一次的概率为 $\mu\Delta t$ ，发生 0 次的概率为 $1-\mu\Delta t$ ，那么就有 $f_1(\Delta t)=\mu\Delta t$. 因此，上面的求和可以转化为积分：

$$\int_0^\infty f_{n-1}(t)\mu dt=1$$

该方程对任意的 $n\geq 1$ 都成立。所以就有对任意的 $n\geq 1$ ， $\hat{f}_n(0)=\frac{1}{\mu}$. 时间区间内 $[0,t]$ 事件发生 0 次表示等待的时间超过了时间 t . $\frac{1}{\mu}$ 表示等待的平均时间。为了完成证明，我们再假设对所有的事件，平均等待时间都是 $\frac{1}{\mu}$. 这些正是泊松过程的假设。

编辑于 2020-09-14

概率论 随机过程 积分方程