随机过程笔记I: 两个停时期望

拉普拉斯算符
数学话题下的优秀答主

定义：给定一列独立同分布的随机数字 $X_k, k=1,2,3,\ldots$ ，定义

$$N_t = \max\{n : S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \leq t\}$$

问题是如何计算 N_t 的期望值。

根据定义，我们知道 $N_t \geq n \equiv S_n \leq t$. 所以就有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[N_t] &= \sum_{n=1}^{\infty} nP(N_t = n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n\Big(P(N_t \geq n) - P(N_t \geq n+1)\Big) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(N_t \geq n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \leq t)\end{aligned}$$

根据定义， $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ 为 n 个独立同分布随机变量的和。为了计算概率 $P(S_n \leq t)$ ，我们需要知道随机变量 S_n 服从什么样的分布。因为 S_n 是 n 个独立同分布随机变量的和，所以它的概率密度为 X_k 概率密度的 n 重卷积，它的特征函数是 X_k 的特征函数的 n 次方。记 X_k 的概率密度函数为 $f(x)$ ，它的特征函数为

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx$$

那么 S_n 的特征函数为 $\hat{f}(\omega)^n$ ，它的概率密度函数为

$$f_{S_n}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)^n e^{-i\omega x} d\omega$$

通过概率密度函数，我们可以计算这个概率：

$$\begin{aligned}P(S_n \leq t) &= \int_{-\infty}^{t} dx f_{S_n}(x) \\ &= \int_{-\infty}^{t} dx \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \hat{f}(\omega)^n e^{-i\omega x} d\omega\end{aligned}$$

有了这个概率，我们就可以计算 N_t 的期望值为：

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[N_t] &= \sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \leq t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{t} dx \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \hat{f}(\omega)^n e^{-i\omega x} d\omega\end{aligned}$$

如果 $|\hat{f}(\omega)| < 1$ 恒成立，那么我们可以将求和放进积分号里面，得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}(\omega)^n = \frac{\hat{f}(\omega)}{1-\hat{f}(\omega)}$$

但是我们知道， $\hat{f}(\omega = 0) = 1$. 所以至少存在存在一个 ω ，使得求和得到的结果出现奇异性。因此，我们不能将求和与积分贸然交换次序。

为了计算 $\mathbb{E}[N_t]$ ，我们只需要知道 $\hat{f}(\omega)$.

下面计算两个例子。

例子1： $X_k, k=1,2,\ldots$ **服从指数分布**

此时，每一个随机变量 X_k 的概率密度函数都是

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}, \lambda > 0$$

它的特征函数为

$$\hat{f}(\omega) = \frac{\lambda}{\lambda - i\omega}$$

期望值 $\mathbb{E}[N_t]$ 为

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[N_t] &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{t} dx \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega x} \left(\frac{\lambda}{\lambda - i\omega}\right)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{0}^{t} dx \frac{e^{-\lambda x} \lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{0}^{\lambda t} dx \frac{e^{-x} x^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \lambda t\end{aligned}$$

其中用到了积分（用留数法就可以很容易算出来，细节略过）：

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega x} \left(\frac{\lambda}{\lambda - i\omega}\right)^n = \frac{e^{-\lambda x} \lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} \theta(x)$$

例子2： $X_k, k=1,2,3,\ldots$ **服从均匀分布** $U(0,1)$

此时变量 X_k 的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} 1, x \in (0,1) \\ 0, otherwise \end{cases}$$

它的特征函数为

$$\hat{f}(\omega) = \int_{0}^{1} e^{i\omega x} dx = \frac{e^{i\omega} - 1}{i\omega}$$

代入 N_t 的期望值公式中得到

$$\mathbb{E}[N_t] = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{t} dx \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega x} \left(\frac{e^{i\omega} - 1}{i\omega}\right)^n$$

这里需要首先计算积分

$$I(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega x} \left(\frac{e^{i\omega} - 1}{i\omega}\right)^n, n \in \mathbb{Z}^+$$

为了计算这个积分，首先计算它的拉普拉斯变换：

$$\begin{aligned}\hat{I}(p) &= \int_{0}^{\infty} I(x) e^{-px} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{p + i\omega} \left(\frac{e^{i\omega} - 1}{i\omega}\right)^n d\omega \\ &= \left(\frac{1 - e^{-p}}{p}\right)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{(-1)^k e^{-pk}}{p^n}\end{aligned}$$

上面的式子里面，从第二行到第三行也用到了留数法。做拉普拉斯逆变换得到

$$I(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k \frac{\theta(x-k)(x-k)^{n-1}}{(n-1)!}$$

于是得到停时的期望值为

$$\mathbb{E}[N_t] = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{0}^{t} I(x) dx$$

如果规定积分上限 $t \in [0,1]$ ，那么上面的积分就可以简化为

$$\begin{aligned}\int_{0}^{t} I(x) dx &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{(-1)^k}{(n-1)!} \int_{0}^{t} \theta(x-k)(x-k)^{n-1} dx \\ &= \frac{t^n}{n!}\end{aligned}$$

此时，停时的期望值为

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[N_t] &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{0}^{t} I(x) dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \\ &= e^t - 1\end{aligned}$$

从这里也可以很容易看出来，如果让 n 个均匀分布在 $(0,1)$ 上的随机数相加直到它们的和大于一，那么我们需要的随机数的平均个数为 e .

编辑于 2020-03-04