一个概率问题的详细解答

拉普拉斯算符
数学话题下的优秀答主

这里有一个概率问题：

给定三个独立随机变量 X,Y,Z ，它们服从 $U(0,1)$ 分布。求概率 $P(X+Y+Z<1)$.

可以将这个问题做个推广：给定 $n\geq 1$ 的独立随机变量 $X_1,X_2,X_3,\ldots,X_n$ ，每一个变量都服从 $U(0,1)$ 分布，请问它们的和 $\sum_{k=1}^{n}X_i$ 小于1的概率。得到这个概率后，令 $n=3$ 就可以得到问题中所要求的概率。

为了得到这个概率 $P\Big(\sum_{k=1}^{n}X_i<1\Big)$ ，我们要首先计算随机变量 $Z_n=\sum_{k=1}^{n}X_i$ 所服从的概率分布，有了这个概率分布之后就可以计算 Z_n 小于1的概率。为此，需要用这样一个定理：

> *如果两个随机变量 X,Y 相互独立，并且它们的概率密度函数分别为 $f_X(x),f_Y(y)$ ，令 $Z=X+Y$ ，则 Z 的概率密度函数为*
> $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx$.

很显然，上面是一个傅里叶卷积。对两边同时做傅里叶变换，得到

$$\hat{f}_Z(\omega)=\hat{f}_X(\omega)\hat{f}_Y(\omega)$$

可以很容易将这个结论推广到任意多个独立随机变量，因此 $Z_n=\sum_{k=1}^{n}X_i$ 的概率密度函数的傅里叶变换，或者叫它的特征函数，为

$$\hat{f}_{Z_n}(\omega)=\Big(f_X(\omega)\Big)^n$$

已知 $X\sim U(0,1)$ ，则很容易得到它的特征函数为

$$\hat{f}_X(\omega)=\int_0^1 e^{i\omega x}dx=\frac{e^{i\omega}-1}{i\omega}$$

因此， $\hat{f}_{Z_n}(\omega)=\left(\frac{e^{i\omega}-1}{i\omega}\right)^n$

对这个函数做傅里叶逆变换可以得到 Z_n 的概率密度函数为

$$f_{Z_n}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{e^{i\omega}-1}{i\omega}\right)^n e^{-i\omega x}d\omega$$

根据这个概率密度函数可以得到这样的一个概率：

$$P\Big(\sum_{k=1}^{n}X_i<1\Big)=\int_{-\infty}^{1}dxf_{Z_n}(x)=\int_0^1 dxf_{Z_n}(x)$$

很显然， $P(Z_n\geq 0)=1$ ，所以在对概率密度函数求积分的时候，我们可以直接忽略掉对负数的那部分积分。

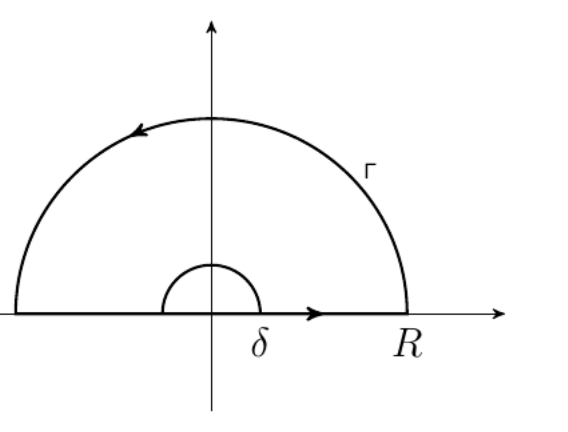
如果对 x,ω 的积分可以交换次序，则上面的积分可以重新写做

$$\begin{aligned}\int_0^1 f_{Z_n}(x)dx&=\int_0^1 dx\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{e^{i\omega}-1}{i\omega}\right)^n e^{-i\omega x}d\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{e^{i\omega}-1}{i\omega}\right)^n\frac{1-e^{-i\omega}}{i\omega}d\omega\end{aligned}$$

将这个积分求出来就得到概率了。但是这个积分并不容易求，因为分子中既有 $e^{i\omega}$ ，又有 $e^{-i\omega}$. 如果用留数方法计算，则积分围道很难画。所以，我需要用另外一个方法计算概率。为此，我先计算出一个更加普遍的结果，即先计算出概率密度函数 $f_{Z_n}(x)$. 如果知道了这个函数，那么就可以通过对它求积分得到概率。直接算这个函数也很不容易，同样是因为分子里面既有 $e^{i\omega}$ ，又有 $e^{-i\omega x}$. 但是我可以对这个函数做拉普拉斯变换，得到

$$\begin{aligned}I(p)&=\int_0^{\infty}e^{-px}f_{Z_n}(x)dx\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}e^{-px}dx\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{e^{i\omega}-1}{i\omega}\right)^n e^{-i\omega x}d\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{e^{i\omega}-1}{i\omega}\right)^n\frac{1}{p+i\omega}d\omega\end{aligned}$$

这里假设了可以交换 x,ω 的积分次序。经过拉普拉斯变换，可以将积分问题简化，因为这时得到的积分在分子上只有 $e^{i\omega}$ ，因此我们可以很方便地选择这样的一个积分围道：



现在，考虑在这样的一个复变积分，积分围道 γ 如上图所示：

$$\frac{1}{2\pi}\oint_{\gamma}\left(\frac{e^{iz}-1}{iz}\right)^n\frac{1}{p+iz}dz$$

很显然，在上半圆上的积分为零，这是因为

$$\begin{aligned}&\lim_{R\to\infty}\left|\frac{1}{2\pi}\int_{z=Re^{i\theta},\theta\in[0,\pi]}\left(\frac{e^{iz}-1}{iz}\right)^n\frac{1}{p+iz}dz\right|\\&\leq\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{z=Re^{i\theta},\theta\in[0,\pi]}\frac{|Re^{iR(\cos\theta+i\sin\theta)}-1|^n}{R^n}\frac{R}{|p+iRe^{i\theta}|}d\theta\\&=0,\forall n\geq 1\end{aligned}$$

于是围道积分就只剩下了沿着横轴的那部分， 为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\oint_{\gamma}\left(\frac{e^{iz}-1}{iz}\right)^n\frac{1}{p+iz}dz\\=&\frac{1}{2\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{e^{i\omega}-1}{i\omega}\right)^n\frac{1}{p+i\omega}d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{z=\delta e^{i\theta}}\left(\frac{e^{iz}-1}{iz}\right)^n\frac{1}{p+iz}dz\end{aligned}$$

积分围道里面只有一个奇点为 $z=ip$ ，围道上有一个可去奇点 $z=0$ ，这个点需要特殊处理。根据柯西积分公式，左边的积分等于

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\oint\left(\frac{e^{iz}-1}{iz}\right)^n\frac{1}{p+iz}dz\\=&\frac{1}{2\pi}\oint_{z=ip+\delta e^{i\theta}}\left(\frac{e^{iz}-1}{iz}\right)^n\frac{1}{p+iz}dz\\=&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1-e^{-p}}{p}\right)^n\frac{1}{i\delta e^{i\theta}}\delta e^{i\theta}id\theta\\=&\left(\frac{1-e^{-p}}{p}\right)^n\end{aligned}$$

右边的第一个积分为柯西主值积分，第二个积分为

$$\frac{1}{2\pi}\int_{z=\delta e^{i\theta}}\left(\frac{e^{iz}-1}{iz}\right)^n\frac{1}{p+iz}dz=\begin{cases}0, & \forall p>0\\-\frac{1}{2}, & \text{if } p=0\end{cases}$$

所以最后得到概率密度函数 $f_{Z_n}(x)$ 的拉普拉斯变换为

$$I(p)=\left(\frac{1-e^{-p}}{p}\right)^n$$

为了得到概率密度函数，我还需要做拉普拉斯逆变换。为此， 可以将右边的式子展开得到

$$I(p)=\left(\frac{1-e^{-p}}{p}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\frac{(-1)^k e^{-pk}}{p^n}$$

已知拉普拉斯变换的平移性质为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}f(t-t_0)\theta(t-t_0)&=\int_0^{\infty}f(t-t_0)\theta(t-t_0)e^{-pt}dt\\&=\int_{t_0}^{\infty}f(t-t_0)e^{-pt}dt\\&=e^{-pt_0}\mathcal{L}f(t)\end{aligned}$$

所以就有

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-pk}}{p^n}\right)=\theta(x-k)\frac{(x-k)^{n-1}}{(n-1)!}$$

因此，概率密度函数 $f_{Z_n}(x)$ 为

$$\begin{aligned}f_{Z_n}(x)&=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-1)^k\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-pk}}{p^n}\right)\\&=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-1)^k\theta(x-k)\frac{(x-k)^{n-1}}{(n-1)!}\end{aligned}$$

对这个概率密度函数求积分得到

$$\begin{aligned}P(Z_n<1)&=\int_0^1 f_{Z_n}(x)dx\\&=\int_0^1 dx\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-1)^k\theta(x-k)\frac{(x-k)^{n-1}}{(n-1)!}\\&=\int_0^1 dx\theta(x)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\\&=\frac{1}{n!}\end{aligned}$$

所以原来问题中的概率为

$$P(X+Y+Z<1)=\frac{1}{6}$$

计算完毕。

这里我不仅计算出了概率，还得到了概率密度函数。可以用这Python程序生成所得到的概率密度函数，Python程序如下：

```python
import numpy as np
import math

def step(x):
    if x > 0:
        return 1.0
    return 0.0

def summand(x, n, k):
    if k%2 == 0:
        sign = 1
    else:
        sign = -1
    return sign * n * step(x-k) * pow(x - k, n-1)/(math.factorial(k) * math.facto

def f(n, x):
    s = 0
    for k in range(n+1):
        s += summand(x, n, k)
    return s

def get_curve(n):
    delta = 0.01
    lower = 0
    upper = float(n)
    N = int((upper - lower)/delta)
    x = [0] * N
    y = [0] * N
    for i in range(N):
        x[i] = lower + delta * i
        y[i] = f(n, x[i])
    writer = open("pdf_" + str(n) + ".txt", "w")
    for i in range(len(x)):
        writer.write(str(x[i]) + "  " + str(y[i]) + "\n")
    writer.close()

def main():
    for i in range(1, 11):
        get_curve(i)
    return 0

if __name__ == "__main__":
    import sys
    sys.exit(main())
```

对于不同的 n ，所得到的 $Z_n=\sum_{k=1}^{n}X_k, \text{for i.i.d } X_k\sim U(0,1)$ 的概率密度函数如下图所示：

图中给出了对于 $n=1,2,3,4,10$ 所得到的概率密度函数。可以看出，随着 n 的增大， 概率分布越来越分散，概率密度函数越来越光滑，而且趋近于正态分布。这是中心极限定理所保证的。

最后还要证明一下这个积分 $\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}e^{-px}dx\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{e^{i\omega}-1}{i\omega}\right)^n e^{-i\omega x}d\omega$ 的确可以交换积分次序。二重积分是否可以交换次序取决于Fubini定理，该定理说如果被积函数在积分区域上绝对可积，则可以交换积分次序。我这里的被积函数为

$$g(x,\omega)=\left(\frac{e^{i\omega}-1}{i\omega}\right)^n e^{-i\omega x}e^{-px}$$

它的绝对值为

$$|g(x,\omega)|=e^{-px}\frac{|e^{i\omega}-1|^n}{|\omega|^n}=e^{-px}\left|\frac{\sin\frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}\right|^n$$

当 $n>1$ 的时候，被积函数绝对可积，但是当 $n=1$ 的时候，被积函数不是绝对可积，所以使用拉普拉斯变换的方法计算概率密度函数的时候，需要限制 $n>1$. 但是如果 $n=1$ ，则此时我们已经知道 $Z_1=X_1$ 的概率密度函数，所以这个限制对这个问题而言，并不会造成任何困难。

这里的证明并不严格，因为这里将Fubini定理直接用到了反常积分上。真正严格的证明还是留给数学家吧。

编辑于刚刚