多体理论的路径积分表述 I: 玻色子的相干态

拉普拉斯算符
数学话题下的优秀答主

这里准备写一系列文章，总结一下多体理论的路径积分表述。这是第一篇。路径积分表述依赖于玻色子和费米子的相干态。这里总结一下玻色子的相干态的几条重要性质。

第一：相干态为湮灭算符的本征态

定义玻色子的产生和湮灭算符为 $\hat{a},\hat{a}^\dagger$ ，玻色子的基态为 $|0\rangle$ ，满足 $\hat{a}|0\rangle=0$. 算符的对易关系为 $[\hat{a},\hat{a}^\dagger]=1$. 玻色子的相干态为

$$|\alpha\rangle=e^{\alpha\hat{a}^\dagger}|0\rangle$$

这里， α 为一个复参数。该状态尚未归一化。接下来我要定义一个算符函数，以此得到相干态的更多的性质。

定义算符函数为

$$f(\alpha)=[\hat{a},e^{\alpha\hat{a}^\dagger}]=\hat{a}e^{\alpha\hat{a}^\dagger}-e^{\alpha\hat{a}^\dagger}\hat{a}$$

求该函数的微分，得到

$$\begin{aligned}\frac{df(\alpha)}{d\alpha}&=\hat{a}\hat{a}^\dagger e^{\alpha\hat{a}^\dagger}-\hat{a}^\dagger e^{\alpha\hat{a}^\dagger}\hat{a}\\&=(1+\hat{a}^\dagger\hat{a})e^{\alpha\hat{a}^\dagger}-\hat{a}^\dagger e^{\alpha\hat{a}^\dagger}\hat{a}\\&=e^{\alpha\hat{a}^\dagger}+\hat{a}^\dagger[\hat{a},e^{\alpha\hat{a}^\dagger}]\\&=\hat{a}^\dagger f(\alpha)+e^{\alpha\hat{a}^\dagger}\end{aligned}$$

解微分方程，得到

$$f(\alpha)=\alpha e^{\alpha\hat{a}^\dagger}$$

于是就有对易关系：

$$[\hat{a},e^{\alpha\hat{a}^\dagger}]=\hat{a}e^{\alpha\hat{a}^\dagger}-e^{\alpha\hat{a}^\dagger}\hat{a}=\alpha e^{\alpha\hat{a}^\dagger}$$

根据这个关系，可以得到

$$\begin{aligned}\hat{a}|\alpha\rangle&=\hat{a}e^{\alpha\hat{a}^\dagger}|0\rangle\\&=(\alpha e^{\alpha\hat{a}^\dagger}+e^{\alpha\hat{a}^\dagger}\hat{a})|0\rangle\\&=\alpha|\alpha\rangle\end{aligned}$$

所以相干态是湮灭算符的本征态。

第二：相干态的模

为了求接下来要求本征态的归一化系数。为此，需要计算 $|\alpha\rangle$ 的范数。

可以想办法直接计算相干态的范数如下：

$$\langle\alpha|\alpha\rangle=\langle 0|e^{\alpha^*\hat{a}}e^{\alpha\hat{a}^\dagger}|0\rangle$$

定义一个函数:

$$f_n(\alpha)=\langle 0|\hat{a}^n e^{\alpha\hat{a}^\dagger}|0\rangle,n\geq 0$$

已知 $f_0(\alpha)=\langle 0|e^{\alpha\hat{a}^\dagger}|0\rangle=1$

所以只需计算 $f_n(\alpha),n\geq 1$.

对函数求微分得到

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\alpha}f_n(\alpha)&=\langle 0|\hat{a}^n\hat{a}^\dagger e^{\alpha\hat{a}^\dagger}|0\rangle\\&=\langle 0|(\hat{a}^\dagger\hat{a}^n+n\hat{a}^{n-1})e^{\alpha\hat{a}^\dagger}|0\rangle\\&=n\langle 0|\hat{a}^{n-1}e^{\alpha\hat{a}^\dagger}|0\rangle\\&=nf_{n-1}(\alpha),n\geq 1\end{aligned}$$

其中用到了对易关系

$$\hat{a}^n\hat{a}^\dagger-\hat{a}^\dagger\hat{a}^n=n\hat{a}^{n-1}$$

初始条件为

$$f_n(0)=\langle 0|\hat{a}^n|0\rangle=0,n\geq 1$$

对微分方程做拉普拉斯变换得到

$$p\hat{f}_n(p)-f_n(0)=n\hat{f}_{n-1}(p)$$

对于任意的 $n\geq 1$ ，得到

$$p\hat{f}_n(p)=n\hat{f}_{n-1}(p)$$

递归得到

$$\hat{f}_n(p)=\frac{n!}{p^{n+1}},n\geq 1$$

求拉普拉斯逆变换得到

$$f_n(\alpha)=\alpha^n,n\geq 1$$

另外根据 $f_0(\alpha)=1$ 得到

$$f_n(\alpha)=\langle 0|\hat{a}^n e^{\alpha\hat{a}^\dagger}|0\rangle=\alpha^n,n\geq 0$$

所以有

$$\begin{aligned}\langle\alpha|\alpha\rangle&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha^*)^n}{n!}\langle 0|\hat{a}^n e^{\alpha\hat{a}^\dagger}|0\rangle\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\alpha|^{2n}}{n!}\\&=e^{|\alpha|^2}\end{aligned}$$

第三：相干态的完备性

相干态可以展开为

$$|\alpha\rangle=e^{\alpha\hat{a}^\dagger}|0\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle$$

定义 $|n\rangle=c_n(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle$,其中 c_n 为归一化系数。为了得到归一化常数，需要计算

$$\langle 0|\hat{a}^n(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle$$

根据对易关系

$$\begin{aligned}&\hat{a}(\hat{a}^\dagger)^n-(\hat{a}^\dagger)^n\hat{a}=n(\hat{a}^\dagger)^{n-1}\\&\hat{a}^n\hat{a}^\dagger-\hat{a}^\dagger\hat{a}^n=n\hat{a}^{n-1}\end{aligned},$$

得到

$$\begin{aligned}&\langle 0|\hat{a}^n(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle\\=&\langle 0|\hat{a}\hat{a}^{n-1}\hat{a}^\dagger(\hat{a}^\dagger)^{n-1}|0\rangle\\=&\langle 0|\hat{a}\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}^{n-1}+(n-1)\hat{a}^{n-2}\right)(\hat{a}^\dagger)^{n-1}|0\rangle\\=&n\langle 0|\hat{a}^{n-1}(\hat{a}^\dagger)^{n-1}|0\rangle\end{aligned}$$

反复迭代得到

$$\begin{aligned}&\langle 0|\hat{a}^n(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle\\=&n\langle 0|\hat{a}^{n-1}(\hat{a}^\dagger)^{n-1}|0\rangle\\=&\ldots\\=&n!\langle 0|\hat{a}\hat{a}^\dagger|0\rangle\\=&n!\end{aligned}$$

所以

$$|n\rangle=\frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^{n+1}|0\rangle$$

定理： $\langle m|n\rangle=\delta_{mn}$

证明：定义 $A_{m,n}=\langle 0|\hat{a}^m(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle$ *. 如果* $m=n$ *，那么* $A_{n,n}=n!$ *. 如果* $m\neq n$ *，那么不失一般性，可以假设* $n>m$ *. 得到一个递归关系：*

$$A_{m,n}=mA_{m-1,n-1}=\ldots=m!A_{1,n-m+1}=m!A_{0,n-m}$$

因为 $n-m>0$ *, 所以* $A_{m,n}=m!A_{0,n-m}=0$ *.*

所以就有 $A_{m,n}=m!\delta_{m,n}$

于是最终得到 $\langle m|n\rangle=\delta_{mn}$ *. 证明完毕。*

所以相干态可以展开为

$$|\alpha\rangle=e^{\alpha\hat{a}^\dagger}|0\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle$$

定理：相干态满足完备性条件 $\int\frac{d\alpha^*\wedge d\alpha}{2\pi i}e^{-\alpha\alpha^*}|\alpha\rangle\langle\alpha^*|=\mathbb{I}$

证明：

$$|\alpha\rangle\langle\alpha^*|=\sum_{mn}\frac{\alpha^n(\alpha^*)^m}{\sqrt{n!}\sqrt{m!}}|n\rangle\langle m|$$

$$\begin{aligned}&\int\frac{d\alpha^*\wedge d\alpha}{2\pi i}e^{-\alpha^*\alpha}\alpha^n(\alpha^*)^m\\=&\int\frac{2irdrd\theta}{2\pi i}e^{-r^2}r^{m+n}e^{i\theta(n-m)}\\=&\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}d\theta e^{i\theta(n-m)}\int_0^{\infty}rdre^{-r^2}r^{m+n}\\=&\delta_{mn}\Gamma((m+n)/2+1)\\=&\delta_{mn}n!\end{aligned}$$

所以有

$$\begin{aligned}&\int\frac{d\alpha^*d\alpha}{2\pi i}e^{-\alpha\alpha^*}|\alpha\rangle\langle\alpha^*|\\=&\int\frac{d\alpha^*d\alpha}{2\pi i}e^{-\alpha\alpha^*}\sum_{m,n}\frac{\alpha^n(\alpha^*)^m}{\sqrt{m!}\sqrt{n!}}|n\rangle\langle m|\\=&\sum_{m,n}\frac{n!\delta_{mn}}{\sqrt{n!}\sqrt{m!}}|n\rangle\langle m|\\=&\sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle\langle n|\\=&\mathbb{I}\end{aligned}$$

证明完毕。

两个相干态 $|\alpha\rangle,|\beta\rangle$ 的内积为

$$\begin{aligned}\langle\beta^*|\alpha\rangle&=\sum_{mn}\frac{\alpha^n(\beta^*)^m}{\sqrt{m!}\sqrt{n!}}\langle m|n\rangle\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha\beta^*)^n}{n!}\\&=e^{\alpha\beta^*}\end{aligned}$$

所以相干态彼此不正交。

编辑于 2018-11-27