随机过程笔记III: 一维随机游走的首次击中时(hitting time)

拉普拉斯算符
数学话题下的优秀答主

第一节：导论

之前我计算过一维随机游走的exit time，以及一维随机游走的首次返回概率。在计算一维随机游走的exit time的时候，我计算的是从原点出发做随机游走的粒子首次击中位于原点两侧的吸收壁的概率(zhuanlan.zhihu.com/p/14...)。因为这里两个吸收壁分别位于原点两边，所以这时随机游走的范围是有限的。在计算首次返回概率的时候，我假设粒子可以在一维无限数轴上做随机游走，计算的是粒子经过一定步数后首次返回出发点的概率分布(zhuanlan.zhihu.com/p/11...)。这里没有吸收壁，所以随机游走的范围是无限的。在现在这篇文章中，我要计算的是从原点出发做对称随机游走的粒子经过一定步数后首次击中位于正实轴上某点的概率，因此，这里随机游走的范围是半无限的。

第二节：一维随机游走首次击中时的概率分布

问题：

一个粒子从原点出发沿着一维数轴做对称随机游走，即粒子每次移动的位移 X 服从这样的分布： $P(X=1)=P(X=-1)=\frac{1}{2}$. 在坐标点 $x=\nu,\nu\in\mathbb{Z}^+$ 处有一个吸收壁，一旦粒子撞到吸收壁，随机游走结束。问如何计算该粒子首次击中吸收壁时游走步数的概率分布。

为了求解这个问题，记从原点出发的粒子首次击中靶点 $x=\nu\geq 1$ 时所走的步数为 N_ν . 我们要计算的是这个概率： $P(N_\nu=n)$. 因为粒子至少要走 ν 步才有可能首次击中 ν 点，所以我们有 $P(N_\nu=n)=0,\forall n<\nu.$ 因为随机游走是一个Markov过程，所以首次击中时的概率分布满足这样的递归公式：

$$P(N_\nu=n)=\frac{1}{2}P(N_{\nu-1}=n-1)+\frac{1}{2}P(N_{\nu+1}=n-1),\nu\geq 1$$

为了求解这个方程，定义概率分布的 z 变换为:

$$f_\nu(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}P(N_\nu=n)z^n$$

通过这个变换，我们可以将概率分布满足的方程转换为

$$f_\nu(z)=\frac{1}{2}zf_{\nu-1}(z)+\frac{1}{2}zf_{\nu+1}(z),\nu\geq 1$$

这是一个二阶差分方程，为了方便求解，我们将它重新写作：

$$f_{\nu+1}(z)=\frac{2}{z}f_\nu(z)-f_{\nu-1}(z),\nu\geq 1$$

写成矩阵形式为

$$\begin{pmatrix}f_\nu(z)\\f_{\nu+1}(z)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&\frac{2}{z}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_{\nu-1}(z)\\f_\nu(z)\end{pmatrix},\nu\geq 1$$

记系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&\frac{2}{z}\end{pmatrix}$ ，定义向量 $\boldsymbol{X}_\nu=\begin{pmatrix}f_\nu(z)\\f_{\nu+1}(z)\end{pmatrix}$ ，于是我们得到了一个形式紧凑的向量方程为

$$\boldsymbol{X}_\nu=A\boldsymbol{X}_{\nu-1},\nu\geq 1\ .$$

它的解为

$$\boldsymbol{X}_\nu=A^\nu\boldsymbol{X}_0,\nu\geq 1\ .$$

为了求出它的具体表达式，我们需要计算系数矩阵的特征值。系数矩阵的特征值为

$$\lambda_\pm=\frac{1}{z}\pm\sqrt{\frac{1}{z^2}-1}$$

它们所对应的两个特征向量分别为

$$|\lambda_+\rangle=\begin{pmatrix}1\\\lambda_+\end{pmatrix}$$
$$|\lambda_-\rangle=\begin{pmatrix}1\\\lambda_-\end{pmatrix}$$

记变换矩阵 $U=\begin{pmatrix}1&1\\\lambda_+&\lambda_-\end{pmatrix}$ ，因此系数矩阵可以写做

$$A=U\begin{pmatrix}\lambda_+&0\\0&\lambda_-\end{pmatrix}U^{-1}$$

最后可以得到

$$\begin{aligned}f_\nu(z)&=(1\quad 0)\begin{pmatrix}f_\nu(z)\\f_{\nu+1}(z)\end{pmatrix}\\&=(1\quad 0)U\begin{pmatrix}\lambda_+^\nu&0\\0&\lambda_-^\nu\end{pmatrix}U^{-1}\begin{pmatrix}f_0(z)\\f_1(z)\end{pmatrix},\nu\geq 1\end{aligned}$$

根据定义，我们很容易得到一个初始值为

$$f_0(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}P(N_0=n)z^n=1$$

为了计算另一个初始值 $f_1(z)$ ，我们需要一些技巧。记粒子从原点出发经过 n 步首次击中点 $x=1$ 的概率为 $P(N_1=n)$. 为了计算这个概率，我们考察这样的一个过程：粒子从点 $x=1$ 出发，经过 $2m$ 步首次返回点 $x=1$. 根据这里的结果，

李恩志：随机过程笔记II：一维随机游走的首次返回概率
zhuanlan.zhihu.com

我们已经知道了这个首次返回的概率为

$$P(\text{粒子从}x=1\text{出发，经过}2m\text{步首次返回}x=1)=\frac{1}{2m-1}C_{2m}^m\left(\frac{1}{2}\right)^{2m},m\geq 1$$

我们可以从另外一个角度来考察这个首次返回过程：第一种情况，在第一步，粒子以 $1/2$ 的概率走到 $x=0$ 处，然后经过 $2m-1$ 步首次击中点 $x=1$ ；第二种情况，在第一步，粒子以 $1/2$ 的概率走到 $x=2$ 处，然后经过 $2m-1$ 步首次击中 $x=1$. 第一种情况就是我们要计算的，第二种情况可以等价地转换为粒子从原点出发，经过 $2m-1$ 步，首次击中 $x=-1$. 根据反射原理，第二种情况发生的概率等于第一种情况的概率。因此，我们得到一个结论：

$$P(\text{粒子从}x=1\text{出发，经过}2m\text{步首次返回}x=1)=P(N_1=2m-1)$$

由此，我们得到粒子从原点出发，经过 $2m-1$ 步首次击中点 $x=1$ 概率为 $P(N_1=2m-1)=\frac{1}{2m-1}C_{2m}^m\left(\frac{1}{2}\right)^{2m},m\geq 1$. 这里只有当步数为奇数的时候，粒子才有可能会首次击中 $x=1$ 点，这个很容易理解。因此，我们可以得到

$$\begin{aligned}f_1(z)&=\sum_{m=1}^{\infty}P(N_1=2m-1)z^{2m-1}\\&=\frac{1}{z}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2m-1}C_{2m}^m\left(\frac{1}{2}\right)^{2m}z^{2m}\\&=\frac{1}{z}-\sqrt{\frac{1}{z^2}-1},|z|<1\end{aligned}$$

我们发现， $f_1(z)=\lambda_-$. 这个并不是巧合。

将以上结果代入到差分方程的解中，得到

$$f_\nu(z)=f_1(z)^\nu=\left(\frac{1}{z}-\sqrt{\frac{1}{z^2}-1}\right)^\nu$$

我们的结果表明，粒子首次击中 $x=\nu\geq 1$ 点的概率生成函数就是粒子首次击中 $x=1$ 的概率生成函数的 ν 次幂。这个也不是巧合。根据定义，

$$f_\nu(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}P(N_\nu=n)z^n$$

所以为了计算概率 $P(N_\nu=n)$ ，我们需要将函数 $f_\nu(z)$ 做泰勒级数展开，然后寻找对应的幂的系数。这个过程过于繁琐，略过。

第三节：从一维随机游走到一维布朗运动

我们已经得到了做一维对称随机游走的粒子首次击中靶点的概率分布，这里我们要讨论一下上一节的结果和一维布朗运动的关系。为了可以从随机游走过渡到布朗运动，我们需要给随机游走赋予时间和长度的量纲。令随机游走的移动步长为 Δ ，每次移动所需要的时间为 δt . 根据爱因斯坦的结果，我们知道，如果我们同时令 $\Delta\to 0,\delta t\to 0$ ，与此同时保持 $\frac{\Delta^2}{\delta t}$ 为一个常数，那么随机游走可以过渡到参数为 $\frac{\Delta^2}{\delta t}$ 的布朗运动，也就是在任意时刻 t ，粒子所在的位置 X_t 是一个平均值为0，方差为 $\frac{\Delta^2}{\delta t}t$ 的正态随机变量，而且 X_t 还应该有独立平稳增量。根据布朗运动的结果，我们知道，如果令 T_a 表示布朗粒子首次击中点 $x=a,a>0$ 的时刻，那么首次击中时 T_a 的分布函数为

$$F_a(t)=P(T_a\leq t)=\frac{2}{\sqrt{2\pi c^2t}}\int_a^\infty e^{-\frac{x^2}{2c^2t}}dx$$

其中定义了参数 $c=\frac{\Delta}{\sqrt{\delta t}}$.

对 $F_a(t)$ 做拉普拉斯变换，得到

$$\hat{F}_a(s)=2\int_a^\infty dx\frac{1}{\sqrt{2c^2s}}e^{-x\frac{\sqrt{2s}}{c}}=\frac{e^{-\frac{a}{c}\sqrt{2s}}}{s}$$

首次击中时 T_a 的概率密度函数为

$$f_a(t)=\frac{d}{dt}F_a(t)$$

它的拉普拉斯变换为

$$\hat{f}_a(s)=s\hat{F}_a(s)=e^{-\frac{a}{c}\sqrt{2s}}$$

我这里要从随机游走出发得到同样的结果。仍然定义 T_a 为从原点出发的粒子首次击中 $x=a,a>0$ 的时刻。根据随机游走的性质，我们可以得到 T_a 的概率密度函数应该满足这样的递归方程：

$$P(T_a=t)=\frac{1}{2}P(T_{a-\Delta}=t-\delta t)+\frac{1}{2}P(T_{a+\Delta}=t-\delta t)$$

对方程两边做拉普拉斯变换得到

$$g(a,s)=\frac{1}{2}e^{-s\delta t}g(a-\Delta,s)+\frac{1}{2}e^{-s\delta t}g(a+\Delta,s)$$

其中定义了函数

$$g(a,s)=\int_0^\infty e^{-st}P(T_a=t)dt$$

为了求解方程 $g(a,s)=\frac{1}{2}e^{-s\delta t}\Big(g(a-\Delta,s)+g(a+\Delta,s)\Big)$ ，我们对方程右边做关于 $\delta t,\Delta$ 的泰勒级数展开，并且令 $\Delta^2=c^2\delta t$. 消掉零阶项和高阶项后，上面的方程转化为

$$\frac{\partial^2}{\partial a^2}g(a,s)=\frac{2s}{c^2}g(a,s)$$

求解得到

$$g(a,s)=Ae^{\sqrt{\frac{2s}{c^2}}a}+Be^{-\sqrt{\frac{2s}{c^2}}a}$$

我们需要通过边界条件来确定未知系数 A,B . 显然，对于任意有限的 t ，当 $a\to\infty$ 的时候， $P(T_a=t)\to 0$ ，这就意味着 $g(a=\infty,s)<\infty$ ，所以就有 $A=0$. 为了确定系数 B ，我们注意到当 $a\to 0^+$ ，概率 $P(T_a=t)=\delta(t)$. 也就是

$$\lim_{a\to 0^+}g(a,s)=1$$

因此，我们得到

$$g(a,s)=e^{-\sqrt{\frac{2s}{c^2}}a}$$

这个结果和布朗运动的结果完全一样。因此，我们就从随机游走过渡到了布朗运动。

事实上，我们不用再求解一次微分方程，而是直接从第二节差分方程的结果就可以得到布朗运动的结果。为了计算概率密度函数 $P(T_a=t)$ 的拉普拉斯变换，我们将时间和空间离散化，得到

$$\begin{aligned}g(a,s)&=\int_0^\infty P(T_a=t)e^{-st}dt\\&\approx\sum_{n=0}^{\infty}P(T_{\nu\Delta}=n\delta t)e^{-sn\delta t}\delta t\\&=\sum_{n=0}^{\infty}P(N_\nu=n)e^{-s\delta tn}\\&=\left(e^{s\delta t}-\sqrt{e^{2s\delta t}-1}\right)^{\frac{a}{\Delta}}\end{aligned}$$

令 $\Delta=c\sqrt{\delta t}$ ，对上面的式子求极限得到

$$\begin{aligned}g(a,s)&=\lim_{\delta t\to 0}\left(e^{s\delta t}-\sqrt{e^{2s\delta t}-1}\right)^{\frac{a}{c\sqrt{\delta t}}}\\&=\exp\left(\lim_{\delta t\to 0}\frac{a}{c\sqrt{\delta t}}\log\left(1-\sqrt{2s\delta t}\right)\right)\\&=e^{-\frac{\sqrt{2s}}{c}a}\end{aligned}$$

这正是布朗运动的结果。

附录：一维布朗运动首次击中时的概率分布

这里，我将教科书里面计算一维布朗运动首次击中时概率分布的结果附上。我参考的是Sheldon Ross 的 *Stochastic Processes*, second edition.

教科书里面是这样计算一维布朗运动首次击中时的概率分布的。首先定义 T_a 为一维布朗粒子从原点出发首次击中靶点 $x=a,a>0$ 的时刻。考察概率 $P(X_t\geq a)$ ，它表示粒子在时刻 t 落在靶点 $x=a$ 右侧的概率。根据贝叶斯公式，该概率可以这样计算：

$$P(X_t\geq a)=P(T_a\leq t)P(X_t\geq a|T_a\leq t)+P(T_a\geq t)P(X_t\geq a|T_a\geq t)$$

右边式子的第一项表示在 t 时刻粒子已经击中了靶点 $x=a$ ，并且在时刻 t 粒子落在靶点右侧的概率；右边式子的第二项表示在时刻 t 粒子尚未击中靶点，并且在时刻 t 粒子落在靶点右侧的概率。如果在时刻 t ，粒子已经击中了靶点，那么根据布朗运动的无记忆性和对称性，我们知道，此时粒子有相同的概率落在靶点的左侧或者右侧。反之，如果在时刻 t 粒子尚未击中靶点，那么因为粒子是从靶点左侧出发的，而且 T_a 表示的又是粒子首次击中靶点的时刻，又根据布朗运动的连续性，我们知道一维布朗粒子不可能跳过靶点直接落在靶点的右侧。因此，第二种情况不可能发生。于是就有

$$P(X_t\geq a)=\frac{1}{2}P(T_a\leq t)$$

这就给出了首次击中时的概率分布函数为

$$P(T_a\leq t)=2P(X_t\geq a)=\frac{2}{\sqrt{2\pi c^2t}}\int_a^\infty e^{-\frac{x^2}{2c^2t}}dx$$

其中 $c>0$ 为布朗运动的参数。对时间 t 做拉普拉斯变换就可以得到第三节的结果。

编辑于 2020-08-24