2019 计蒜之道 初赛 第一场 题解

商汤的AI伴游小精灵

可以发现所需推倒次数等于联通块个数

去掉一个节点会使得联通块个数加上这个点的度数这么多

但是当我们删掉了两个相邻节点则需要减去一

暴力枚举判断即可

复杂度$O(n^2)$

商汤AI园区的n个路口（简单）

在简单版本中，我们仅需要处理一条链上的情况。可用序列上的动态规划解决。

设 $\hat{w}_i$ 为路口 i 与 $i-1$ 相连道路的保留频段 $(1 < i \leq n)$ 。

令 $f_{i,j}$ 为路口 i 的信号频段取 j 的方案数，易得转移方程

$$f_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} [\gcd(j,k) \neq \hat{w}_i] f_{i-1,k}$$

时间复杂度 $O(nm^2)$。

商汤AI园区的n个路口（中等）

首先将链上的版本拓展到树上。以点 1 为树根，设 $G(u)$ 为点 u 到其所有孩子的边的集合。

保持状态定义不变，易得转移方程

$$f_{u,j} = \prod_{(v,w)\in G(u)} \sum_{k=1}^{m} [\gcd(j,k) \neq w] f_{v,k}$$

时间复杂度 $O(nm^2)$。

考虑消去带 $\gcd$ 的项。由 Mobius 反演可得

$$
\begin{aligned}
f_{u,j} &= \prod_{(v,w)\in G(u)} \sum_{k=1}^{m} [\gcd(j,k) \neq w] f_{v,k} \\
&= \prod_{(v,w)\in G(u)} \sum_{k=1}^{m} (1 - [\gcd(j,k) = w]) f_{v,k} \\
&= \prod_{(v,w)\in G(u)} \sum_{k=1}^{m} (1 - \sum_{d} [w \mid j][w \mid k][d \mid \frac{j}{w}][d \mid \frac{k}{w}]\mu(d)) f_{v,k} \\
&= \prod_{(v,w)\in G(u)} (\sum_{k=1}^{m} f_{v,k} - [w \mid j] \sum_{d} [d \mid \frac{j}{w}]\mu(d) \sum_{1\le k\le m \wedge w\mid k} [d \mid \frac{k}{w}] f_{v,k})
\end{aligned}
$$

引入两个简化记号

$$
\begin{aligned}
A_v &= \sum_{k=1}^{m} f_{v,k} \\
B_{v,w,j} &= [w \mid j] \sum_{d} [d \mid \frac{j}{w}]\mu(d) \sum_{1\le k\le m \wedge w\mid k} [d \mid \frac{k}{w}] f_{v,k}
\end{aligned}
$$

此时

$$
f_{u,j} = \prod_{(v,w)\in G(u)} (A_v - B_{v,w,j})
$$

如何加速 $B_{v,w,j}$ 的计算呢？分析式子中变量的依赖关系，不妨令

$$
C_{v,w,d} = \sum_{1\le k\le m \wedge w\mid k} [d \mid \frac{k}{w}] f_{v,k}
$$

则有

$$
B_{v,w,j} = [w \mid j] \sum_{d} [d \mid \frac{j}{w}]\mu(d) C_{v,w,d}
$$

如果预处理所有 1 到 m 的 μ 函数值，则 v, w 确定时计算所有 $B_{v,w,j}$ 的时间复杂度为 $O(\frac{m}{w}\log\frac{m}{w})$。（在 C 的计算过程中，我们先枚举 w 的倍数 d，再枚举 d 的倍数 k。B 的计算过程同理。因此可用调和级数分析。）

至此，总时间复杂度优化至 $O(nm\log m)$。

商汤AI园区的n个路口（困难）

在中等版本的基础上，由于所有 w 不超过 m 且两两不同，因此所有需要计算的（即值不为 0 ）的 $B_{v,w,j}$ 的数量为 $O(m\log^2 m)$。因此不难发现，u 确定时 $f_{u,j}$ 的值大部分是相同的，均为 $\prod_{(v,w)\in G(u)} A_v$。

这启发我们只保存“不大众化”的 $f_{u,j}$，其余位置的值仅保存一份即可。

时间复杂度 $O(m\log^2 m)$，空间复杂度 $O(m\log m)$。