多个绝对值相加求最小值问题

河南省焦作市武陟一中　(454950)　张六军

在平时练习与做题中经常要遇到两个绝对值或者多个绝对值相加求最小值问题，形如：$|a|+|b|\geqslant|a+b|$，$|a|+|b|+|c|\geqslant|a+b+c|$ 等问题，当然也可以从两个、三个扩展到多个绝对值相加，这样的形式在取等号时要求 a、b 同号（两个相加时），或者 a、b、c 同号（三个相加时），也可以按照如此方法扩展到多个相加取等号时情况．下面先看两个绝对值相加时的情况：$|x+2|+|x-3|=|x+2|+|3-x|\geqslant|x+2+3-x|=5$，取等号时要求：

$$(\text{Ⅰ})\begin{cases}x+2\geqslant0\\3-x\geqslant0\end{cases}\text{或}(\text{Ⅱ})\begin{cases}x+2\leqslant0\\3-x\leqslant0\end{cases}$$

解(Ⅰ)得：$-2\leqslant x\leqslant3$，解(Ⅱ)得：$x\in\varnothing$，综合(Ⅰ)、(Ⅱ)得：$-2\leqslant x\leqslant3$ 时 $|x+2|+|x-3|$ 取得最小值5.

再看一个由两个扩展到三个的例子：$|x+2|+|x-3|+|x-3|$，显然不能直接用公式 $|a|+|b|+|c|\geqslant|a+b+c|$，因为在本例子 $|x+2|+|x-3|+|x-3|$ 中，后面形式"$|a+b+c|$"不能凑配为常数，要想凑配为常数左边必须是偶数个绝对值相加的形式．

例子继续延伸：$|x+2|+|x+2|+|x-3|+|x-3|+|x-3|+|x-3|=|x+2|+|x+2|+|x-3|+|3-x|+|3-x|+|3-x|\geqslant=|x+2+x+2+x-3+3-x+3-x+3-x|=10$

取等号时要求：

$$(\text{Ⅰ})\begin{cases}x+2\geqslant0\\x-3\geqslant0\\3-x\geqslant0\end{cases}\text{或}(\text{Ⅱ})\begin{cases}x+2\leqslant0\\3-x\leqslant0\\3-x\leqslant0\end{cases}$$

解(Ⅰ)得：$x=3$，解(Ⅱ)得：$x\in\varnothing$，综合(Ⅰ)、(Ⅱ)得：$x=3$ 时，$|x+2|+|x+2|+|x-3|+|x-3|+|x-3|+|x-3|$ 取得最小值10.

因此是奇数个绝对值相加时，可以变奇数个绝对值为偶数个绝对值相加，例如：$|x+2|+|x-3|+|x-3|=\frac{1}{2}(|x+2|+|x+2|+|x-3|+|x-3|+|x-3|+|x-3|)\geqslant5$，$x=3$ 时，$|x+2|+|x-3|+|x-3|$ 取得最小值5.

例12　(1) 已知 $f(x)$ 是 x 的函数，且 $f(x)$ 不恒等于零．若对于任意的实数 a 和 b，恒有 $f(a+b)+f(a-b)=2[f(a)+f(b)]$，试判断函数 $f(x)$ 的奇偶性．

(2) 已知函数 $f(x)(x\in R$，且 $x\neq0)$，对于任意非零实数 x_1、x_2 都有 $f(x_1\cdot x_2)=f(x_1)+f(x_2)$，且 $f(x)$ 不恒为零．试判断函数 $f(x)$ 的奇偶性．

解析：(1) 取 $b=0$，得 $2f(a)=2[f(a)+f(0)]$，

$\therefore f(0)=0$；

再取 $a=0,b=x$，得 $f(x)+f(-x)=2[f(0)+f(x)]$，

$\therefore f(-x)=f(x)(x\in\mathbf{R})$ 成立，

$\therefore f(x)$ 是偶函数．

(2) 联想：$\because$ 当 $x\in\boldsymbol{R}$ 且 $x\neq0$ 时，则 $\lg|x_1\cdot x_2|=\lg|x_1|+\lg|x_2|$，$\therefore f(x)=\lg|x|$．

$\because f(\pm1)=0$（这是解题的关键）．

在所给函数方程中，令 $x_1=-1,x_2=1$，得 $f(-1)=f(-1)+f(1)$，$\therefore f(1)=0$．

又令 $x_1=x_2=-1$，得 $f(1)=f(-1)+f(-1)$，$\therefore f(-1)=0$．

再令 $x_1=x,x_2=-1$，得 $f(-x)=f(x)+f(-1)$，$\therefore f(-x)=f(x)$，

$\because f(x)$ 为非零函数，$\therefore f(x)$ 是偶函数．

10　抽象函数奇偶性的判断

有些函数的解析式不明确，但给出了 $f(x)$、$f(y)$ 之间的关系式，解题时先要借助于关系式求出特殊值，然后探讨 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 之间的关系．

例13　若函数 $y=f(x)$ 定义域为 $\boldsymbol{R}$，且对任意的 $x,y\in R$，$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$ 恒成立，且 $f(0)\neq0$，判断 $f(x)$ 的奇偶性．

解析：$\because f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$ 对任意的 x,y 恒成立，令 $x=y=0$，得 $2f(0)=2f^2(0)$．

$\because f(0)\neq0$，

$\therefore f(0)=1$；再令 $x=0$，得 $f(y)+f(-y)=2f(0)\cdot f(y)$，即 $f(-y)=f(y)$，

$\therefore f(x)$ 是偶函数．

根据上面总结出的规律可以处理下面两个例题：

例 1 某地街道呈现东—西、南—北向的网格状，相邻街距都为 1. 两街道相交的点称为格点. 若以互相垂直的两条街道为轴建立直角坐标系，现有下述格点，$(-2,2)$，$(3,1)$，$(3,4)$，$(-2,3)$，$(4,5)$ 为报刊零售点. 请确定一个格点________为发行站，使 5 个零售点沿街道到发行站之间路程的和最短（2009 高考上海卷文史类第 14 题）

解：设格点 (x,y) 行站，则 5 个零售点到发行站之间的路程之和为：

$S = |x+2|+|x-3|+|x-3|+|x+2|+|x-4|+|y-2|+|y-1|+|y-3|+|y-4|+|y-5|$

$\because |x+2|+|x-3|+|x-3|+|x+2|+|x-4|$
$= (|x+2|+|x+2|+|x+2|+|x+2|+|x-3|+|x-3|+|x-3|+|x-3|+|x-4|+|x-4|)/2$
$= (|x+2|+|x+2|+|x+2|+|x+2|+|x-3|+|3-x|+|3-x|+|3-x|+|4-x|+|4-x|)/2$
$\geqslant (|x+2+x+2+x+2+x+2+x-3+3-x+3-x+3-x+4-x+4-x|)/2$
$= \dfrac{22}{2} = 11$，取等号时要求：

$$(\text{I})\begin{cases}x+2\geqslant 0\\ x-3\geqslant 0\\ 3-x\geqslant 0\\ 4-x\geqslant 0\end{cases} \text{或}(\text{II})\begin{cases}x+2\leqslant 0\\ x-3\leqslant 0\\ 3-x\leqslant 0\\ 4-x\leqslant 0\end{cases}$$

解（Ⅰ）得：$x=3$，解（Ⅱ）得：$x\in\varnothing$，综合（Ⅰ）、（Ⅱ）得：$x=3$ 时，$|x+2|+|x-3|+|x-3|+|x+2|+|x-4|$ 取得最小值 11.

同理可得 $y=3$ 时，$|y-2|+|y-1|+|y-3|+|y-4|+|y-5|$ 取得最小值 6.

例 2 函数 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{19}|x-n|$ 的最小值为（　　）（2006 年高考全国卷二理科 12 题）

$A.190$　　$B.171$　　$C.90$　　$D.45$

解：$f(x)\sum\limits_{n=1}^{19}|x-n| = |x-1|+|x-2|+|x-3|\cdots+|x-19|$

是奇数个绝对值相加，变奇数个绝对值为偶数个绝对值相加：$|x-1|+|x-2|+|x-3|\cdots+|x-19|$

$= (|x-1|+|x-1|+|x-2|+|x-2|+\cdots+|x-10|+|10-x|+\cdots+|x-19|+|x-19|)/2 = (|x-1|+|x-1)+|x-2|+|x-2|+\cdots+|x-10|+|10-x|+\cdots+|19-x|+|19-x|)/2 \geqslant (|x-1+x-1+x-2+x-2+\cdots+x-10+10-x+\cdots+19-x+19-x)/2$

$= 180/2 = 90$

取等号时要求：

$$(\text{I})\begin{cases}x-1\geqslant 0\\ x-2\geqslant 0\\ \cdots\cdots\\ x-10\geqslant 0\\ 10-x\geqslant 0\\ \cdots\cdots\\ 19-x\geqslant 0\end{cases} \text{或}(\text{II})\begin{cases}x-1\leqslant 0\\ x-2\leqslant 0\\ \cdots\cdots\\ x-10\leqslant 0\\ 10-x\leqslant 0\\ \cdots\cdots\\ 19-x\leqslant 0\end{cases}$$

解（Ⅰ）得：$x=10$，解（Ⅱ）得：$x\in\varnothing$，综合（Ⅰ）、（Ⅱ）得：$x=10$ 时，$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{19}|x-n|$ 取得最小值 90. 所以本题选择 C.

例 3 设 $f(x)=|x-p|+|x-15|+|x-p-15|$，其中 $0<p<15$. 试求在区间 $p\leqslant x\leqslant 15$ 上 $f(x)$ 的最小值.

解：$|x-p|+|x-15|+|x-p-15|$

$= (|x-p|+|x-p|+|x-15|+|x-15|+|x-p-15|+|x-p-15|)/2$

$= (|x-p|+|x-p|+|x-15|+|15-x|+|15+p-x|+|15+p-x|)/2$

$\geqslant (x-p+x-p+x-15+15-x+p+15-x+p+15-x)/2$

$= 30/2 = 15$

取等号时要求：

$$(\text{I})\begin{cases}x-p\geqslant 0\\ x-15\geqslant 0\\ 15-x\geqslant 0\\ p+15-x\geqslant 0\end{cases} \text{或} (\text{II})\begin{cases}x-p\leqslant 0\\ x-15\leqslant 0\\ 15-x\leqslant 0\\ p+15-x\leqslant 0\end{cases}$$

解（Ⅰ）得：$x=15$，解（Ⅱ）得：$x\in\varnothing$，综合（Ⅰ）、（Ⅱ）得：$x=15$ 时，$f(x)$ 取得最小值 15.

练习 1 求 $f(x)=|x-1|+|x-2|+|x-3|+|x-4|$ 的最小值.（答案：4）

练习 2 求 $f(x)=|x-1|+|x-2|+|x-3|$ 的最小值.（答案：2）

练习 3 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{15}|x-n|$ 的最小值.（答案：56）