Práctica 1

Medición, incertidumbre y tratamiento de datos

Autor: **Dr. Henry Javier C.**

A. Objetivos

- Definir, identificar, clasificar y estimar los diferentes tipos de errores en mediciones de laboratorio.
- Realizar mediciones y aplicar los conceptos fundamentales de medición y teoría de errores.

B. Fundamentos teóricos

B.1. Medición

La medición es el procedimiento usado para conocer el valor numérico de una magnitud física susceptible de medida. *Medir* es determinar el valor de una magnitud física *comparándola* con un *patrón* llamado *unidad de medida.* Por ejemplo, determinar el ancho de un cuaderno haciendo uso una regla graduada en milímetros.

B.2. Unidad de medida

Una *unidad de medida* es una cantidad estandarizada de una determinada magnitud física, definida y adoptada por convención o por ley. Cualquier valor de una cantidad física puede expresarse como un múltiplo o submúltiplo de la *unidad de medida.*

Una *unidad de medida* toma su valor a partir de un *patrón* o de una composición de otras unidades definidas previamente. Las primeras unidades se conocen como *unidades básicas* o *fundamentales*, mientras que las segundas se llaman *unidades derivadas.*

Por ejemplo, el milímetro (mm), el centímetro (cm) y el kilómetro (km) son unidades derivadas submúltiplos y múltiplo del metro (m) considerado como unidad fundamental.

Si alguien dice que la pizarra mide 2,00, nos estaría dando una información incompleta. Usted se preguntaría: ¿2,00 qué?, ¿2,00 pies?, ¿2,00 brazos? La forma correcta de indicar esta medida sería: 2,00 metros, o su forma abreviada, 2,00 m. Por tanto, es imprescindible que todo valor numérico siempre esté acompañado de la unidad de medida correspondiente.

Un conjunto de unidades de medida en el que ninguna magnitud tenga más de una unidad asociada es denominado sistema de unidades. Existen diferentes sistemas de unidades de medida y siempre es posible pasar de un sistema a otro a través de algunas operaciones aritméticas simples. El sistema de unidades más utilizado es el Sistema Internacional, abreviado SI, y es el que utilizaremos en la mayoría de nuestras mediciones. En el SI, las unidades fundamentales son: el kilogramo (kg), el metro (m) y el segundo (s).

B.3. Tipos de mediciones

1. **Medidas directas**
   La medida, o medición directa, se obtiene comparando *directamente* un instrumento de medida, considerado como patrón, contra la variable a medir. Por ejemplo, si deseamos saber el largo de un libro podríamos comparar la longitud de una regla graduada en milímetros y la longitud del libro. La respuesta sería: $l = 21$ cm.

2. **Medidas indirectas**
   No siempre es posible realizar una medida directa, ya sea porque el instrumento de medida es inapropiado, en escala o precisión, o porque la magnitud a conocer es una combinación de magnitudes fundamentales. Es decir, una medida indirecta es el resultado de una operación matemática de medidas directas. Por ejemplo, el volumen de un cubo puede ser obtenido a partir de la multiplicación de las medidas directas de cada uno de sus lados.

3. **Medidas reproducibles**
   Son aquellas que al efectuar una serie de comparaciones entre una variable y el mismo instrumento de medida, siempre se obtiene un resultado en torno de una valor central. Por ejemplo, al medir muchas veces el lado de un escritorio con una cinta métrica, todas las medidas se encontrarán en un intervalo limitado de valores. Ese intervalo es definido por la *incertidumbre* del instrumento y se relaciona a la *menor división en la escala* o a su *sensibilidad*. Las medidas reproducibles son procedimientos no destructivos que no producen una alteración importante en el sistema físico sujeto a medición.

4. **Medición estadística**
   Se considera una medición estadística al resultado de un conjunto de comparaciones entre la variable a conocer y el instrumento de medida. Muchas veces el resultado de una medición depende de factores externos involuntarios difíciles de eliminar. Estos factores pueden ser ambientales, de escala en el instrumento de medida o la misma forma de medición por parte del experimentador. Como los resultados de las mediciones fluctúan aleatoriamente, se tiene que hacer un tratamiento estadístico para obtener un valor que represente ese conjunto de mediciones. Por ejemplo, es posible determinar el número de personas que leen este libro diariamente. Aunque se obtuvieran resultados diferentes cada día, se puede obtener un valor promedio mensual o anual.

B.4. Precisión y exactitud

La *exactitud* y la *precisión* son, junto con la *incertidumbre*, los conceptos más importantes en la teoría de errores, con significados diferentes y bien definidos. Aunque en el lenguaje cotidiano los términos *exactitud* y *precisión* son usados como sinónimos, en el laboratorio de física deben ser empleados con extremo cuidado. Así pues, una medición puede ser precisa y, al mismo tiempo, inexacta.

Precisión

La *precisión* de una medida se refiere a la *dispersión* del conjunto de valores obtenidos de *mediciones repetidas* de una magnitud. Cuanto menor sea la *dispersión* mayor será la *precisión*. La forma mas común de expresar la *dispersión* de diferentes medidas en torno de un valor central son la *varianza* (σ^2) y la *desviación típica* o *desviación estándar* (σ). Cuanto más estrecha sea la distribución de resultados, menor será la desviación típica de la misma y mayor la *precisión* de la medida. En conclusión, la *precisión* depende únicamente de la distribución de los resultados y no está relacionada con el valor convencionalmente *verdadero* de la medición.

Es importante resaltar que la automatización de diferentes pruebas o técnicas de medición puede producir un aumento de la *precisión*. Esto se debe a que, con dicha automatización, lo que se consigue es una disminución de los errores manuales, mas no hay que confundir *resolución* con *precisión*.

Exactitud

La *exactitud* se refiere a cuán cerca el *valor medido experimental* se encuentra del *valor verdadero* o *valor real*. En términos estadísticos, la *exactitud* está relacionada con el sesgo de una estimación. Cuando se informa la *exactitud* de un resultado se está expresando el *error absoluto*, que es la diferencia entre el valor experimental y el valor verdadero. Una medición será más *exacta* cuanto más pequeño sea el error de la medida.
Considerando mediciones individuales, la más próxima al valor verdadero será la más exacta. Sin embargo, tras una serie de mediciones, la exactitud será la distancia desde el *valor medio* de la distribución hasta el *valor verdadero*, es decir el sesgo o también conocido como *error sistemático*. En conclusión, en una serie de mediciones repetidas, la *exactitud* depende solamente de la posición del resultado o *valor medio* de la distribución de medidas, no jugando papel alguno en ella la *precisión*.

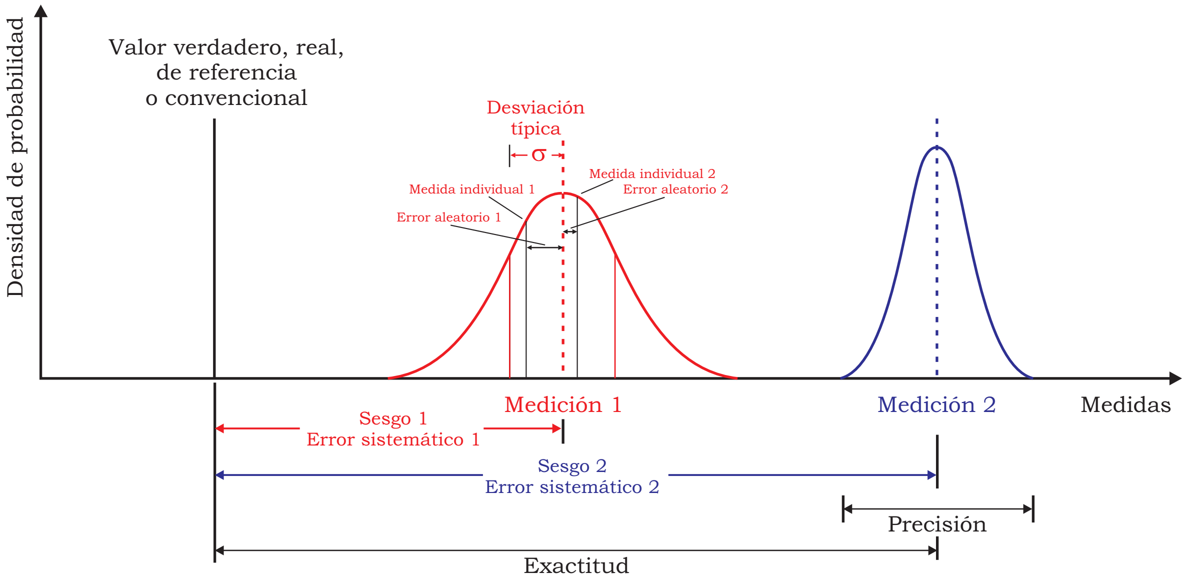

Figura 1.1. La exactitud indica la proximidad de una medición individual o del valor medio de un conjunto de mediciones con respecto al valor verdadero o real, mientras que la precisión indica la dispersión de las mediciones en torno de un valor central.

Ejemplo 1: Disparos al blanco
Los conceptos de precisión y exactitud pueden ser representados de forma gráfica acudiendo a la analogía de los disparos sobre una diana, considerando el centro de dicha diana como el valor verdadero, real o de referencia. La precisión de los disparos tiene que ver con la proximidad de los disparos entre si, mientras que la exactitud se relaciona a la distancia del centro de la concentración de los disparos al centro de la diana.

En la figura 1.2(a), los disparos tienen un alto grado de precisión dado que todos se concentran en un espacio pequeño, y un alto grado de exactitud dado que los disparos se concentran sobre el centro de la diana.

En la figura 1.2(b), el grado de precisión es similar a la de la figura 1.2(a), los disparos están igual de concentrados, mas la exactitud es menor, dado que los disparos se han desviado a la izquierda y arriba, separándose del centro de la diana.

En la figura 1.2(c), la precisión es baja debido a que los disparos están muy dispersos por todo la diana, pero la exactitud es alta ya que los disparos se reparten sobre el centro.

En la figura 1.2(d), la distribución de los disparos por una amplia zona denota la falta de precisión, y la desviación a la izquierda del centro de la diana revela la falta de exactitud.

En conclusión, la precisión y la exactitud tienen propiedades independientes. Obtener alta o baja precisión no implica ni alta ni baja exactitud. Una operación, una información o una medición tiene mejor calidad cuando mayor es su precisión y exactitud.

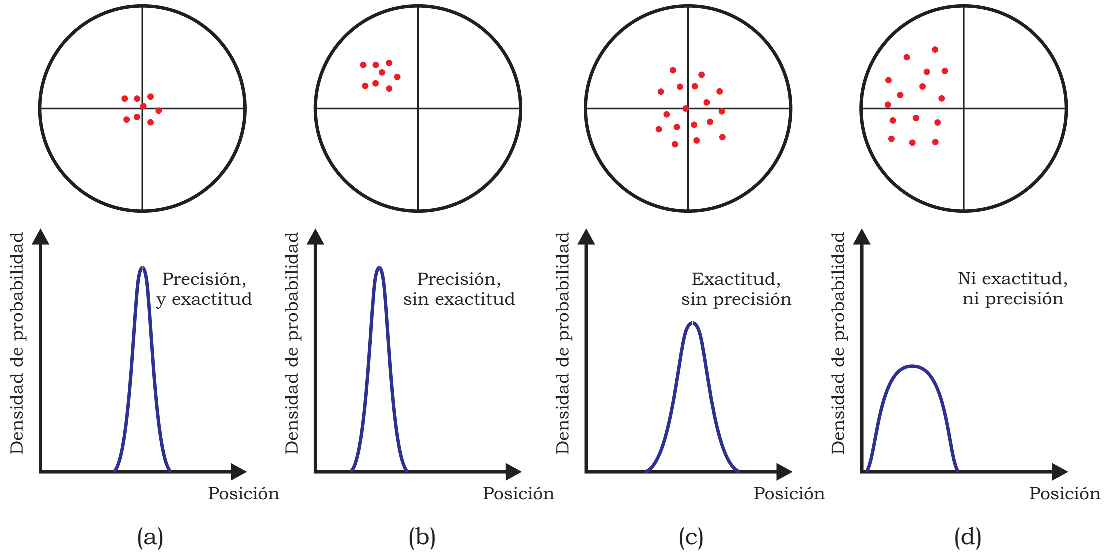

Figura 1.2. Ejemplo de precisión y exactitud. (a) Alta precisión y alta exactitud, (b) Alta precisión y baja exactitud, (c) Baja precisión y alta exactitud, (d) Baja precisión y baja exactitud.

B.5. El error y la incertidumbre

El propósito de una medición es determinar el valor de una magnitud, llamada el *mensurando*, que de acuerdo al vocabulario internacional de metrología, VIM, es el atributo sujeto a medición de un fenómeno, cuerpo o sustancia que puede ser distinguido cualitativamente y determinado cuantitativamente. Cuando el *mensurando* es una magnitud física cuyo valor solo puede ser determinado a partir de *una* medición o *varias* mediciones, la magnitud puede ser llamada de *magnitud física experimental.*

Según la teoría de errores, se admite la existencia de un *valor verdadero* para toda magnitud física experimental. Este *valor verdadero* siempre será una magnitud *desconocida* dado que, por mejores que sean los métodos e instrumentos de medición, el valor obtenido para la magnitud física *siempre* será una aproximación del *valor verdadero*, porque siempre existirán errores de medición. El *mejor valor* de una magnitud se define como el valor más próximo del *valor verdadero*. Este *mejor valor* también puede ser llamado de *valor experimental* de la magnitud.

El error

El error ε es la diferencia entre el *valor experimental* x y el *valor verdadero* x_v, esto es:

$$\varepsilon = x - x_v \tag{1.1}$$

Si tenemos en cuenta que el*valor verdadero* x_v es siempre desconocido, entonces el error ε también es una cantidad desconocida. Sin embargo, en algunos casos es posible conocer el valor de una magnitud exactamente.

Por ejemplo, la velocidad de la luz en el vacío es definida como 299 792 458 m/s. En este caso ya que se conoce el *valor verdadero*, podemos obtener el error ε exactamente.
Cuando no se tiene un *valor verdadero* por definición teórica, podemos usar un *valor experimental confiable* obtenido a través de múltiples medidas muy precisas. Por ejemplo, el mejor valor experimental de la carga eléctrica elemental, e^- es $1,60217733 \times 10^{-19}$ C. Aunque este no sea el *valor verdadero*, un estudiante de laboratorio lo usa como valor verdadero para calcular el error ε con buena aproximación.

Error absoluto y error relativo

El *error absoluto*, $|\varepsilon|$, está definido como el valor absoluto del *error*, ecuación (1.1). El valor de ε puede ser positivo o negativo, mas por lo general se supone $|\varepsilon| \leqslant x$.

El *error relativo*, E, se define como el cociente del *valor absoluto* de ε entre el *valor verdadero* de la magnitud, es decir:

$$E = \frac{|\varepsilon|}{x_v} = \frac{|x - x_v|}{x_v} \tag{1.2}$$

Ejemplo 2: MEDICIÓN DE LA ACELERACIÓN DE LA GRAVEDAD
Suponiendo que el valor aceptado para la aceleración de la gravedad en Arequipa es 9,78 m/s^2, y nosotros, a través de medidas en laboratorio, obtenemos 9,89 m/s^2, el *error absoluto* será:

$$|\varepsilon| = |x - x_v| = |9,89 - 9,78| = 0,11 \text{ m/s}^2$$

Por otro lado, el *error relativo* será:

$$E = \frac{|\varepsilon|}{x_v} = \frac{0,11}{9,78} = 0,0112$$

Si el valor del *error relativo* se multiplica por cien por ciento, obtendremos el *error porcentual* o porcentaje de error, que para el ejemplo sería 1,1 %.
El valor, en porcentaje, dado por el *error porcentual* puede ser interpretado como la *diferencia relativa* del valor experimental frente a su *valor verdadero*.

La incertidumbre

La incertidumbre en un valor experimental es la ESTIMACIÓN de la diferencia entre el *mejor valor* o *valor experimental* y el *valor verdadero* de la magnitud. Es decir indica *cuanto* puede ser el error ε. Evidentemente el *mejor valor* y la *incertidumbre* solo pueden ser obtenidos e interpretados en términos de probabilidades.

Cuando se realiza una medida simple el objetivo del experimentador se resume a: 1) Obtener el *mejor valor* de una magnitud a partir de un conjunto de datos experimentales y 2) ESTIMAR la *incertidumbre* del mejor valor experimental. Esto es, ESTIMAR cuanto el *mejor valor* puede ser diferente del *valor verdadero*.

Intervalos de confianza

El acto de ESTIMAR los errores a partir de un grupo de medidas se basa en la hipótesis de que cuanto más grande sea el número de medidas la distribución de frecuencias de la medida tiende a una distribución determinada.

Si x_v es el *valor verdadero* de una magnitud es posible afirmar que x_v debe estar contenido en el siguiente intervalo:

$$x - \sigma < x_v < x + \sigma \tag{1.3}$$

donde σ es la *incertidumbre padrón* y x es una medida cualquiera. Una vez que el valor de x_v es desconocido, la ecuación anterior se interpreta como la probabilidad, P, de ser correcta, es decir, el *nivel de confianza* de x_v es P.

Si la distribución de errores es conocida, la *incertidumbre padrón*, también conocida como *desviación típica*, *desvío padrón* o *desviación estándar*, puede ser interpretada en términos de intervalos de confianza presentados en la tabla 1.1.

Tabla 1.1: Intervalos de confianza para la incertidumbre padrón σ y las incertidumbres expandidas 2σ y 3σ en el caso de una distribución gaussiana.

	Símbolo	Intervalo de confianza	Confianza
Incertidumbre padrón	σ	$x - \sigma < x_v < x + \sigma$	68,3 %
Incertidumbre expandida 2	2σ	$x - 2\sigma < x_v < x + 2\sigma$	95,4 %
Incertidumbre expandida 3	3σ	$x - 3\sigma < x_v < x + 3\sigma$	99,7 %

Esto se interpreta de la siguiente manera: en el caso de que una medida tenga una variación de σ, esta tendrá una probabilidad de 68,3 % de ser correcta o 31,7 % de que x esté fuera del intervalo de confianza.

B.6. Clasificación de errores

Cuando se realiza una o varias mediciones de una magnitud física ocurren varios tipos de errores en el proceso. Esos diferentes tipos de errores pueden ser clasificados como *errores aleatorios* o *estadísticos* y *errores sistemáticos*.

Si consideramos un grupo de n mediciones idénticas de una magnitud x, cuyos resultados individuales son x_i, los *errores aleatorios* y *sistemáticos* pueden ser definidos como:

Un ERROR ALEATORIO o error estadístico es aquel error que provoca que los resultados x_i se distribuyan de manera aleatoria en torno de un valor verdadero x_v. El valor representativo de esas n mediciones es el *valor medio* $\overline{x}$ que siempre tiende a x_v cuando el número de mediciones se hace muy grande.

Un ERROR SISTEMÁTICO es aquel error tal que los n resultados de x_i son iguales, mas difieren del valor verdadero x_v en una cantidad constante δx.

Errores aleatorios o estadísticos

Los errores aleatorios resultan de las *variaciones aleatorias* en los resultados de la medición, debido a factores que por cualquier motivo no pueden ser controlados.

Por ejemplo, cuando se mide la masa de un objeto pequeño con una balanza digital, las corrientes de aire o vibraciones pueden introducir un *error aleatorio* en los resultados. En este caso, estos y otros posibles errores aleatorios pueden ser reducidos colocando la balanza en un lugar aislado de las corrientes de aire y sobre una mesa a prueba de vibraciones. La mayoría de estos errores son inevitables pero pueden ser reducidos repitiendo la medición varias veces y tomando un promedio.

Errores sistemáticos

Son los errores provenientes de los instrumentos de medida, ya sea en la limitaciones físicas del propio instrumento o en la manera como son utilizados por el experimentador. Estos errores se repiten constantemente cada vez que se utiliza el instrumento de medida. Por ejemplo, puede ser causa de error el hecho de que las divisiones en una regla graduada no sean perfectamente iguales o que el cero de una balanza de brazo no esté bien ajustado.
Los errores sistemáticos suelen ser pequeños, aunque siempre nos queda el error dado por la sensibilidad del instrumento de medida. Para identificar un error sistemático se debe tener en cuenta los siguientes factores:

1. Instrumento de medida deficiente o con mala calibración.
2. Deterioro del material utilizado.
3. El incumplimiento de las consideraciones teóricas básicas.
4. Algunos malos hábitos o forma peculiar de realizar las observaciones.

Los errores sistemáticos pueden ser subclasificados en errores sistemáticos instrumentales, teóricos, ambientales y de observación.

1. **Error sistemático instrumental**
   Es un error que resulta de la calibración del instrumento de medición. Se debe tener en cuenta que la calibración puede ser afectada por factores como temperatura y desgaste. Por ejemplo, una cinta métrica presenta error sistemático porque depende de la calidad de la regla, no solamente de su calibración, mas también del material con la que fue construida.
2. **Error sistemático teórico**
   Es el error que resulta del uso de fórmulas teóricas aproximadas o del uso de valores aproximados de las constantes físicas involucradas en el cálculo de la magnitud final. Por ejemplo, cuando se realiza una medición de la aceleración de la gravedad, g, mediante un experimento de caída libre, la ecuación utilizada para el cálculo, $g = \frac{2h}{t^2}$, no considera la resistencia del aire ni la forma y ni las dimensiones del objeto que cae. Por lo tanto, el modelo teórico nos proporciona apenas una buena aproximación del valor verdadero y cuyo resultado está sujeto a un error sistemático.
3. **Error sistemático ambiental**
   Factores como temperatura ambiental, presión atmosférica, humedad relativa, aceleración de la gravedad, campo magnético terrestre, ondas de radio de alta frecuencia pueden inducir errores en la medición. Por ejemplo, si deseamos medir el campo magnético producido por una bobina, el instrumento de medida indicará el campo magnético de la bobina mas el campo magnético terrestre y es necesario tomarlo en cuenta para su posterior sustracción en los cálculos.
4. **Error sistemático de observación**
   Los errores de observación aparecen en una medición debido a las limitaciones de la percepción u observación del experimentador. Un error muy común en reglas graduadas, termómetros de mercurio o cualquier instrumento provisto de alguna escala, suele ser el paralaje. Este error surge cuando el experimentador no hace la lectura a un ángulo recto con la línea de la escala. El llamado error cero es propio de instrumentos de medida deteriorados o con escala ilegible debido a su constante uso. En el caso de la regla graduada, la posición del cero no siempre es muy clara, por lo que es recomendable utilizar partes intermedias de la regla para tener medidas confiables.

Incertidumbre tipo A e incertidumbre tipo B

La diferencia entre errores aleatorios y errores sistemáticos es bastante sutil. Un error sistemático puede transformarse en aleatorio y viceversa. Por ejemplo, la calibración de un instrumento muy preciso se realiza a una temperatura de 20 ℃. Cuando se utiliza este instrumento a una temperatura diferente de 20 ℃ es posible que exista un error en la medida debido a la calibración, este error es sistemático. Ahora bien, si la temperatura varía aleatoriamente durante la toma de datos, ese error de calibración puede ser considerado error aleatorio. Este tipo de error no se encuadra en las definiciones anteriores. Para eliminar esa ambigüedad, las incertidumbres se clasifican como incertidumbre tipo A e incertidumbre tipo B.

Incertidumbre tipo A o también conocida como incertidumbre estadística se le asocia a errores aleatorios y es evaluada por método estadísticos.

Incertidumbre tipo B es la incertidumbre proveniente de errores sistemáticos y es evaluada por cualquier otro método que no sea estadístico.

B.7. Cifras significativas

Para obtener el mejor valor experimental de una magnitud física podemos realizar una única medida o varias medidas con un mismo instrumento. En cualquier caso, al final de este proceso se tiene que expresar un único resultado de forma apropiada con el número correcto de *cifras significativas.*
No se debe confundir *cifras significativas* y *cifras decimales* ya que son dos conceptos totalmente distintos. En la tabla 1.2 son presentados algunos ejemplos de esta diferencia.

Tabla 1.2: Ejemplos de resultados con diferente número de cifras significativas y cifras decimales.

Magnitud	N° de cifras significativas	N° de cifras decimales
$L = 2,345$ cm	4	3
$R = 2,1$ mm	2	1
$F = 400$ N	3	0
$a = 0,0021$ m/s^2	2	4
$v = 2,00$ m/s	3	2

Para obtener el número correcto de *cifras significativas* en una medición se debe tener en cuenta la menor escala del instrumento de medida. Como regla general, se tiene que el número correcto de *cifras significativas* en una medida se compone del número de cifras hasta la menor escala del instrumento más un dígito estimado considerado como dudoso.

Como ejemplo usaremos la medida del diámetro, d, de una moneda de cinco nuevos soles. Esta medida será hecha usando dos tipos de reglas; la primera graduada en centímetros (cm) y la segunda graduada en milímetros (mm) (figura 1.3).

En la medición 1 el resultado es $d = 2,5$ cm. Para este valor tenemos certeza que el primer dígito de la medición es 2. Ya el segundo dígito, 5, es una estimativa y puede considerarse como dudoso. Este dígito también puede ser 4 o 6, dependiendo del experimentador.

En la medición 2 el resultado es $d = 2,45$ cm. Considerando que la regla tiene mayor precisión que en la medición 1, podemos afirmar que la medida está entre 2,4 cm y 2,5 cm. Es decir, los dos primeros dígitos son confiables, y el último dígito, 5, es un dígito estimado que debe ser considerado en el resultado porque es significativo.

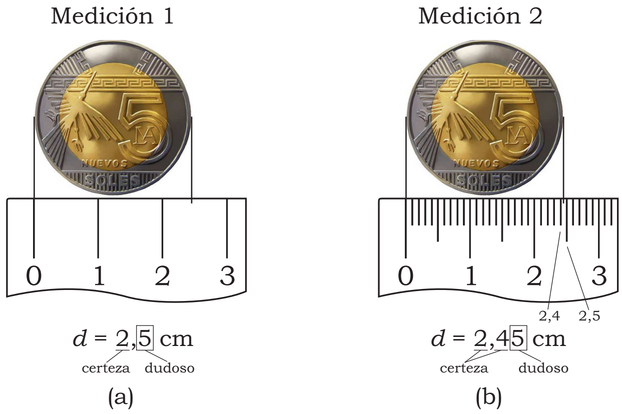

Figura 1.3. Medida del diámetro de una moneda. a) La primera medida se hace con una regla graduada en centímetros (cm). b) La segunda medida se hace con una regla graduada en milímetros (mm).

El número de cifras significativas que se deben presentar en un resultado experimental es determinado por la incertidumbre o error del resultado. Las reglas prácticas para las cifras significativas y formas de presentar un resultado con su incertidumbre se presentan en esta sección. El valor de una magnitud experimental obtenido a partir de cálculos o mediciones puede ser un número en forma decimal, con muchas cifras. Por ejemplo:

$$\underbrace{0,0000000000}_{\text{no significativas}}\underbrace{XY\ldots ZW}_{\text{significativas}}$$

Una cifra significativa de un número es aquella cifra que individualmente transmite alguna información, o tiene significado, cuando el número es escrito de forma decimal. El número de cifras significativas es igual al número de dígitos contenidos en el resultado de una medición que están a la izquierda del primer dígito afectado por el error, incluyendo este dígito.

Ejemplo 3:
En una medición de longitud con una regla graduada en mm, podríamos obtener la medida: $l = (37,0 \pm 0,5)$ mm, que tiene tres cifras significativas.

El primer dígito es el más significativo, y el último dígito es el menos significativo y es donde se presenta la incertidumbre. El número de cifras significativas en el resultado de una medición es determinado por la incertidumbre. En una medida de longitud no es correcto expresar el resultado como: $l = (37,321 \pm 1)$ mm, ya que si tenemos incertidumbre del orden de 1 mm, mal podemos asegurar el valor de las décimas, centésimas y milésimas del milímetro.

Es una práctica común expresar las incertidumbres con una sola cifra significativa, y solo en casos excepcionales y cuando existe fundamento para ello, se pueden usar más cifras. Los ceros a la izquierda de la primera cifra diferente de cero no son significativos. Cada cero a la izquierda no tiene ningún significado cuando es considerado individualmente. El único significado del conjunto de ceros es indicar la *coma decimal*, ya que si colocamos el número en notación científica estos ceros pueden desaparecer.

Ejemplo 4:
La medida $0,0075$ m tiene 2 cifras significativas. Los ceros a la izquierda solo son marcadores. Se puede escribir esta medida en notación científica para mostrar con mayor claridad el número de cifras significativas: $7,5 \times 10^{-3}$ m.

Ejemplo 5:
La medida $10,0$ m tiene 3 cifras significativas. La coma decimal nos da información sobre la fiabilidad de la medición.

Ejemplo 6:
La medida: 1500 m es ambigua, se puede usar:

$1,5 \times 10^3$ m para 2 cifras significativas.

$1,50 \times 10^3$ m para 3 cifras significativas.

$1,500 \times 10^3$ m para 4 cifras significativas.

B.6.1. Cifras significativas en suma y resta

Cuando se suman o restan diferentes cantidades, el resultado debe tener la cantidad de decimales que contenga la menos precisa.

Ejemplo 7:
Imagine que usted midió el largo de una antena con dos instrumentos de escalas diferentes. Si queremos calcular la longitud total de la antena necesitamos sumar estas dos medidas: 35,2 cm y 48,375 cm. El resultado tiene que ser expresado de la siguiente forma: $35,2$ cm $+ 48,375$ cm $=$ **83,6** cm.

B.6.2. Cifras significativas en multiplicación y división

Si multiplicamos o dividimos varios valores producto de diferentes mediciones, la respuesta debe tener el mismo número de cifras significativas que la cantidad menos precisa.

Ejemplo 8:
Para calcular el área de una hoja de papel se mide el largo de la hoja: 10,3 cm; y el ancho: 8,6 cm. El área se obtiene de la multiplicación de ambas y es igual a 88,58 cm^2. Observe que el largo de la hoja tiene *tres cifras* y el ancho posee *dos cifras* significativas; por tanto, el resultado debe ser expresado con dos cifras significativas: 89 cm^2.

B.8. Redondeo de cifras significativas

Un valor obtenido por medio de una medición debe contener la mayor información posible. El valor de la medida debe tener la misma precisión que la incertidumbre. Cuando los números necesitan ser redondeados para expresar correctamente nuestro resultado, debemos considerar lo siguiente:

- Fracciones de $0,000\ldots$ a $0,499\ldots$ son simplemente eliminadas. Redondeo hacia abajo.
- Fracciones de $0,500\ldots$ a $0,999\ldots$ son eliminadas, pero la cifra a ser redondeada aumenta en 1. Redondeo hacia arriba.
- Si la fracción a ser eliminada es exactamente $0,50000\ldots$ entonces la cifra a ser redondeada aumentaría en 1 solamente si el número antes del 5 es impar.

En las tablas 1.3 y 1.4 son mostradas las diversas formas de presentar los resultados de las mediciones experimentales en laboratorio.

Tabla 1.3: Ejemplos de presentación de resultados.

Magnitud	Formas inadecuadas	Formas adecuadas
Masa	$m = (25,8251 \pm 0,068)$ kg	$m = (25,83 \pm 0,07)$ kg
Área	$A = (356,257 \pm 4,897)$ m^2	$A = (356 \pm 5)$ m^2
Tiempo	$t = (12 \pm 0,52)$ s	$t = (12,0 \pm 0,5)$ s

Tabla 1.4: Ejemplos de redondeo de cifras significativas.

$2,\underline{43}$	$\Rightarrow$	$2,4$	$5,\underline{6500}$	$\Rightarrow$	$5,6$
$3,6\underline{88}$	$\Rightarrow$	$3,69$	$5,\underline{7500}$	$\Rightarrow$	$5,8$
$5,\underline{6499}$	$\Rightarrow$	$5,6$	$9,\underline{475}$	$\Rightarrow$	$9,48$
$5,\underline{6501}$	$\Rightarrow$	$5,7$	$3,\underline{325}$	$\Rightarrow$	$3,32$

B.9. Incertidumbre de una medida (σ_x)

La incertidumbre es la inexactitud de una medida. La incertidumbre en una medición depende de la escala de medida empleada, y tiene un límite.

Para expresar la medida de una magnitud x necesariamente debe estar compuesta por tres elementos: magnitud, $\overline{x}$, incertidumbre σ_x y unidad, de la siguiente forma:

$$x = (\bar{x} \pm \sigma_x)\text{unidad}$$

La ausencia de alguna de ellas limita la información proporcionada.

En una *medida directa* la incertidumbre o error se define como la *mitad de la mínima división* en la escala del instrumento. Por tanto, el acto de medir una magnitud física significa que vamos a determinar un intervalo de valores dentro del cual es razonable que se encuentre el *valor real* (Figura 1.4).

Ejemplo 9:
Al medir el largo de una mesa con una cinta métrica común, donde la menor división en la escala es de 1 mm, tenemos que el largo de la mesa es $l = (130,20 \pm 0,05)$ cm, lo que significa que la medida del largo real de la mesa debe encontrarse entre 130,15 y 130,25 cm.

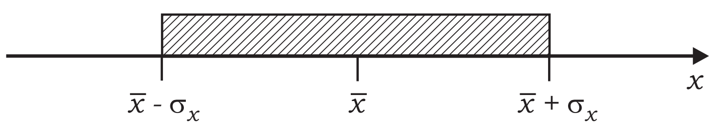

Figura 1.4. Representación gráfica de la región de incertidumbre de una medida donde el *valor real* de x puede encontrarse en el interior.

B.10. Cálculo de errores

Valor promedio de una magnitud ($\overline{x}$)

Dado un conjunto de n medidas de una misma magnitud cuyos resultados fueron:

$$x_1, x_2, x_3 \ldots x_{n-1}, x_n$$

El *valor promedio*, ($\overline{x}$), de los n resultados es dado por:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1} + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \tag{1.4}$$

El *valor promedio verdadero* se define como el valor promedio obtenido cuando se realiza *infinitas* mediciones. Para fines prácticos, realizar *infinitas* mediciones es imposible. Por lo tanto, para un número finito, n, de mediciones, el *valor promedio* nos da la *mejor estimativa* del valor promedio verdadero. Es decir: el valor promedio verdadero es la mejor representación de una magnitud sometida a medición.

Desviación estándar experimental (s)

Para un conjunto de n mediciones, la *desviación estándar experimental*, s, es un parámetro que caracteriza cuán dispersos están los valores obtenidos. Esto significa que si los resultados fuesen bastante próximos unos con otros, la *desviación estándar experimental* será pequeña. Si por el contrario los valores fuesen dispersos, s, será grande.
La *desviación estándar experimental* puede ser calculada por:

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \overline{x})^2}{n-1}} \tag{1.5}$$

Desviación estándar del promedio (σ_m)

Considerando que el *valor promedio* es la mejor estimativa del *valor verdadero*, la *desviación estándar del promedio*, σ_m, es un parámetro que indica la calidad de la estimativa del valor promedio. Es decir σ_m indica que tanto el *valor promedio* se acerca al *valor verdadero*. Cualitativamente, valores *pequeños* de σ_m están asociados a buenas estimativas del *valor promedio verdadero*.
Para calcular σ_m utilizaremos la siguiente expresión:

$$\sigma_m = \frac{s}{\sqrt{n}} \tag{1.6}$$

Intervalos de confianza

Si hacemos $infinitas$ medidas de una misma magnitud no obtendríamos el mismo resultado en todas ellas. Siempre existe una *dispersión* de valores que ocurre debido a errores aleatorios que no podemos controlar.
En este caso, siendo $\overline{x}$, el valor promedio encontrado, es posible verificar que aproximadamente 68,27 % de los resultados estarían en el intervalo:

$$\overline{x} \pm s \tag{1.7}$$

También es posible afirmar que el 50 % de los resultados se encuentran en el intervalo:

$$\overline{x} \pm 0,674\ s \tag{1.8}$$

De este modo, si multiplicamos la *desviación estándar experimental*, s, por un cierto valor k, el intervalo:

$$\overline{x} \pm k\ s \tag{1.9}$$

contendría algún porcentaje de los resultados obtenidos. Ese porcentaje se llama Nivel de Confianza y el intervalo asociado a ese porcentaje se llama Intervalo de Confianza.
Para el caso hipotético de tener infinitas medidas, los intervalos de confianza asociados a un nivel de confianza determinado son presentados en la tabla 1.5.

Tabla 1.5: Intervalos de confianza para el caso de un número *infinito* de medidas.

Nivel de confianza	Intervalo de confianza
50,00 %	$\pm 0,674\ \sigma$
68,27 %	$\pm\sigma$
80,00 %	$\pm 1,282\ \sigma$
90,00 %	$\pm 1,645\ \sigma$
95,45 %	$\pm 2\ \sigma$
99,00 %	$\pm 2,576\ \sigma$
90,73 %	$\pm 3\ \sigma$

En la práctica nunca podremos hacer infinitas medidas. Siempre se realizará un número *finito* de mediciones, entonces para este caso el intervalo de confianza asociado al nivel de confianza depende del número de observaciones. Esta dependencia se resume en la tabla 1.6.

Tabla 1.6: Intervalos de confianza para un numero *finito* de medidas.

Número de medidas	Nivel de confianza		
	50 %	90 %	95 %
2	$\pm 1,00\ \sigma$	$\pm 6,31\ \sigma$	$\pm 12,71\ \sigma$
3	$\pm 0,82\ \sigma$	$\pm 2,92\ \sigma$	$\pm 4,30\ \sigma$
4	$\pm 0,77\ \sigma$	$\pm 2,35\ \sigma$	$\pm 3,18\ \sigma$
5	$\pm 0,74\ \sigma$	$\pm 2,13\ \sigma$	$\pm 2,78\ \sigma$
6	$\pm 0,73\ \sigma$	$\pm 2,02\ \sigma$	$\pm 2,54\ \sigma$
7	$\pm 0,72\ \sigma$	$\pm 1,94\ \sigma$	$\pm 2,45\ \sigma$
8	$\pm 0,71\ \sigma$	$\pm 1,90\ \sigma$	$\pm 2,37\ \sigma$
9	$\pm 0,71\ \sigma$	$\pm 1,86\ \sigma$	$\pm 2,31\ \sigma$
10	$\pm 0,70\ \sigma$	$\pm 1,83\ \sigma$	$\pm 2,26\ \sigma$
11	$\pm 0,70\ \sigma$	$\pm 1,81\ \sigma$	$\pm 2,23\ \sigma$
16	$\pm 0,69\ \sigma$	$\pm 1,75\ \sigma$	$\pm 2,13\ \sigma$

Incertidumbre final (σ_f)

Hasta este punto aún no hemos descrito cómo debe ser presentado el valor de una magnitud sometida a medición. Si bien sabemos que esa magnitud puede ser representada por el valor promedio de un grupo de medidas, también debemos ser capaces de informar la *calidad* de esta estimativa con relación al *valor verdadero*. Es decir siempre debemos informar la incertidumbre asociada al promedio encontrado.

Podemos pensar que la incertidumbre puede ser estimada por la *desviación estándar del promedio*, σ_m, mas debemos recordar que el cálculo de σ_m considera solamente la contribución de errores aleatorios, y no considera errores sistemáticos. Entonces adicionalmente a σ_m, existe una *incertidumbre residual*, σ_r, que hasta ahora no fue considerada.

La incertidumbre residual, σ_r, en el caso de instrumentos de medida de laboratorio, normalmente viene dado por el fabricante, registrado en el propio instrumento o en el manual de usuario. Mas cuando no es indicada, podemos adoptar el criterio de que esa *incertidumbre residual* es la *Mitad de la menor división de la escala.*

Asi, el resultado de un conjunto de mediciones será presentado siguiendo el formato:

$$x = \overline{x} \pm \sigma_f \tag{1.10}$$

donde (σ_f) es la incertidumbre final dada por:

$$\sigma_f = \sqrt{(\sigma_m)^2 + (\sigma_r)^2} \tag{1.11}$$

B.11. Propagación de incertidumbres

Si después de un proceso de medición tenemos las siguientes magnitudes x, y, z ... (medidas directas), donde:

$$x = \overline{x} \pm \sigma_x$$
$$y = \overline{y} \pm \sigma_y$$
$$z = \overline{z} \pm \sigma_z$$

Y se desea calcular la incertidumbre final con una cierta magnitud w (medida indirecta) como una función de x, y, z ..., etc, es decir:

$$w = \overline{w} \pm \sigma_w$$

donde:

$$w = f(x, y, z, \dots) \tag{1.12}$$

Debido a que se trata de magnitudes con incertidumbre, tenemos que seguir algunas reglas para obtener σ_z correctamente.

En el caso de una *suma*, por ejemplo: $w = x + y + z$ se tiene en principio:

$$\overline{w} = \overline{x} + \overline{y} + \overline{z}$$

Ya el cálculo de σ_w es más complicado. El proceso general para el cálculo de la incertidumbre se llama *propagación de incertidumbre* y utiliza una ecuación con derivadas parciales.

A continuación mostraremos los resultados de uso común en el laboratorio.

1. **Suma/Resta:** $w = x + y$ ó $w = x - y$
   El resultado será: $\overline{w} = \overline{x} + \overline{y}$ ó $\overline{z} = \overline{x} - \overline{y}$
   con incertidumbre: $\sigma_w = \sqrt{(\sigma_x)^2 + (\sigma_y)^2}$

2. **Multiplicación/División:** $x = x \cdot y$ y $z = \dfrac{x}{y}$
   El resultado será: $\overline{w} = \overline{x} \cdot \overline{y}$ ó $\overline{w} = \dfrac{\overline{x}}{\overline{y}}$
   con incertidumbre: $\dfrac{\sigma_w}{\overline{w}} = \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x}{\overline{x}}\right)^2 + \left(\dfrac{\sigma_y}{\overline{y}}\right)^2}$

En la tabla 1.7 se resume las fórmulas de propagación de incertidumbres de uso común.

Tabla 1.7: Ejemplos de fórmulas de propagación de incertidumbres. Los valores p, q, m, a y b son constantes.

Fórmula	Cálculo de la incertidumbre
$w = x \pm y$	$(\sigma_w)^2 = (\sigma_x)^2 + (\sigma_y)^2$
$w = xy$ $w = \dfrac{x}{y}$	$\left(\dfrac{\sigma_w}{\overline{w}}\right)^2 = \left(\dfrac{\sigma_x}{\overline{x}}\right)^2 + \left(\dfrac{\sigma_y}{\overline{y}}\right)^2$
$w = x^p y^q$	$\left(\dfrac{\sigma_w}{w}\right)^2 = \left(p\dfrac{\sigma_x}{\overline{x}}\right)^2 + \left(q\dfrac{\sigma_y}{\overline{y}}\right)^2$
$w = x^m$	$\sigma_w = \lvert m\overline{x}^{m-1}\rvert\sigma_x$
$w = ax$	$\sigma_w = \lvert a\rvert\sigma_x$
$w = ax + b$	$\sigma_w = \lvert a\rvert\sigma_x$
$w = \sin x$	$\sigma_w = \lvert\cos\overline{x}\rvert\sigma_x$ (σ_x en radianes)

B.12. Ejemplo de aplicación: *Medida de la aceleración de la gravedad g*

El movimiento armónico simple, MAS, de un péndulo simple, puede ser empleado para calcular el valor de la aceleración de la gravedad en el laboratorio de Física. Bajo ciertas condiciones experimentales el periodo T de un péndulo está dado por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{1.13}$$

En el laboratorio realizamos cinco medidas de la longitud L y ocho medidas para el periodo T. En las medidas de longitud fue empleada una cinta métrica con menor division de milímetro que equivale a 0,1 cm o 0,001 m. Los valores obtenidos de L son presentados en la segunda columna de la tabla 1.8.

Tabla 1.8: Medidas de la longitud L de un péndulo simple.

N°	L_i (cm)	$(L_i - \overline{L})$ (cm)	$(L_i - \overline{L})^2$ (cm)^2
1	300,9	0,52	0,2704
2	300,5	0,12	0,0144
3	300,4	0,02	0,0004
4	300,1	-0,28	0,0784
5	300,0	-0,38	0,1444

El valor promedio de L es calculado con:

$$\overline{L} = \frac{300,4 + 300,5 + 300,4 + 300,4 + 300,3}{5} = 300,38 \text{ cm}$$

La desviación estándar, s, de las cinco medidas es:

$$s = \sqrt{\frac{\sum (L_i - \overline{L})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{0,508}{5-1}} = 0,127 \text{ cm} \tag{1.14}$$

La desviación estándar del promedio, $\sigma_{\overline{L}}$, es dado por:

$$\sigma_{\overline{L}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = 0,05679 \text{ cm}$$

Si queremos que nuestro resultado tenga un *nivel de confianza de 90 %*, según la tabla 1.6, el resultado anterior debe ser multiplicado por el factor 2,13.

$$\sigma_{\overline{L}} = 0,12097 \text{ cm}$$

El redondeo lo haremos al final.

Ahora debemos incluir la contribución de la *incertidumbre residual*, σ_r, del instrumento de medida, que para nuestro caso será la mitad de la menor escala, es decir *medio milímetro* o 0,05 cm. Por lo tanto la incertidumbre final será:

$$\sigma_L = \sqrt{(\sigma_{\overline{L}})^2 + (\sigma_r)^2} = 0,1309 \text{ cm}$$

Para presentar el resultado final redondeamos los resultados llevando en cuenta el número de cifras significativas de nuestras medidas originales.

$$L = (300,4 \pm 0,1) \text{ cm}$$

La conversión de esta cantidad a metros se hace usando la equivalencia de centímetros $= 10^{-2}$

$$L = (300,4 \pm 0,1) \times 10^{-2} \text{ m}$$

Este resultado está próximo al valor real con un nivel de confianza del 90 %.

Ahora los resultados de la medida del periodo T de las oscilaciones del péndulo se obtuvieron de la siguiente manera: Como son oscilaciones pequeñas, se optó por tomar el tiempo t_i de diez oscilaciones, tal que para obtener el periodo T_i se deberá dividir $T_i = \frac{t_i}{10}$. Este proceso fue repetido ocho veces usando un cronómetro digital de precisión 0,1 s. Los resultados son mostrados en la tercera columna de la tabla 1.9.

El valor promedio de las 8 medidas de T_i es:

$$\overline{T} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i = \frac{28,11}{8} = 3,51375 \text{ s} \tag{1.15}$$

La desviación estándar, s, del conjunto de 8 medidas es:

$$s = \sqrt{\frac{\sum (T_i - \overline{T})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{0,028388}{8-1}} = 0,00406 \text{ s} \tag{1.16}$$

La incertidumbre es expresada por la desviación estándar del promedio, $\sigma_{\bar{T}}$:

$$\sigma_{\bar{T}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{0,00406}{\sqrt{8}} = 0,00143 \text{ s} \tag{1.17}$$

Tabla 1.9: Medidas de tiempo para calcular el periodo de un péndulo simple.

N°	t_i (s)	T_i (s)	$(T_i - \overline{T})$ (s)	$(T_i - \overline{T})^2$ $(s)^2$
1	35,1	3,51	-0,00375	0,00001
2	35,7	3,57	0,05625	0,00316
3	35,0	3,50	-0,01375	0,00019
4	36,2	3,62	0,10625	0,01129
5	35,2	3,52	0,00625	0,00004
6	34,0	3,40	-0,11375	0,01294
7	34,9	3,49	-0,02375	0,00056
8	35,0	3,50	-0,01375	0,00019

Para un nivel de confianza de 90 % el resultado se multiplica por 1,90 según la tabla 1.6.

$$\sigma_{\bar{T}} = 0,00272 \text{ s}$$

Incluyendo la incertidumbre relativa del cronometro 0,05 s, y haciendo el redondeo apropiado, el resultado final del periodo T es expresado de la siguiente forma:

$$T = (3,51 \pm 0,05) \text{ s} \tag{1.18}$$

Ahora, para calcular la aceleración de la gravedad g, usaremos los valores obtenidos de L y T. Despejando g en la ecuación (1.13), vemos que:

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}$$

Asi el valor promedio de g será:

$$\overline{g} = \frac{4\pi^2 \overline{L}}{\overline{T}^2} = 9,626 \text{ m/s}$$

Calculando el error de g con la fórmula general $w = x^p y^q$ mostrada en la tabla 1.7, obtenemos σ_g.

$$\frac{\sigma_g}{\overline{g}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_L}{\overline{L}}\right)^2 + 4\left(\frac{\sigma_T}{\overline{T}}\right)^2} \tag{1.19}$$

$$\frac{\sigma_g}{9,626} = \sqrt{\left(\frac{0,1}{300,4}\right)^2 + 4\left(\frac{0,05}{3,51}\right)^2} \tag{1.20}$$

Finalmente, haciendo los redondeos respectivos, el resultado final de g será:

$$g = (9,63 \pm 0,27) \text{ m/s}^2$$

Comparación y evaluación

El valor de g en el laboratorio de Física es conocido con precisión y su valor es:

$$g = 9,78 \text{ m/s}^2$$

Este valor puede ser considerado como *valor bibliográfico* o *valor teórico*, y será usado para verificar la validez de nuestra experiencia.
Para evaluar la compatibilidad de nuestro resultado frente a un valor de referencia o bibliográfico utilizamos un gráfico de región de incertidumbre. En este gráfico el valor experimental es expandido desde un valor mínimo hasta un máximo. En el interior de este gráfico ubicamos el valor bibliográfico (figura 1.5).

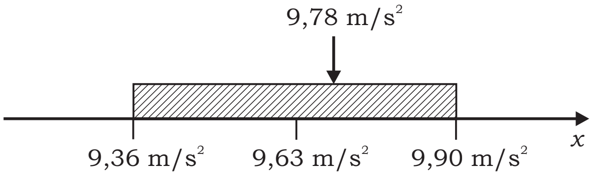

Figura 1.5. Región de incertidumbre del valor experimental de g. El valor bibliográfico es ubicado en el interior de la región sombreada.

Como el valor bibliográfico se ubica dentro de la región sombreada, se concluye que el valor experimental es correcto con 90 % de confianza. Caso contrario, si el valor bibliográfico se ubicara fuera de la región sombreada, será necesario revisar todo el experimento, ya que puede existir algún error que esté influenciando nuestros resultados.

Otra forma de comparar el valor experimental frente al valor bibliográfico o teórico, es usando la fórmula de desviación porcentual relativa del valor experimental V_E respecto del valor teórico V_T. Conocido también como *error porcentual relativo* se tiene:

$$C\,\% = \left| \frac{V_T - V_E}{V_T} \right| \times 100\,\% \tag{1.21}$$

En nuestro caso:

$$C\,\% = \left| \frac{9,78 - 9,63}{9,78} \right| \times 100\,\% = 1,53\,\% \tag{1.22}$$

Este resultado debe ser redondeado a solo una cifra significativa:

$$C\,\% = 2\,\%$$

Lo que significa que el valor experimental obtenido tiene un desvío de 2 % en relación al valor bibliográfico.