

Алгебра 3 Кузнецов

1 Листок 1. Нётеровы кольца

1. R нётерово. Покажем, что $R[[x]]$ тоже нётерово. Пусть J — идеал в $R[[x]]$. Пусть $\mathfrak{a}(n) = \{a_n \in R : \exists p = a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \dots \in J\}$. Ясно, что $\mathfrak{a}(0) \subseteq \mathfrak{a}(1) \subseteq \mathfrak{a}(2) \subseteq \dots$ — идеалы в R . Поэтому из нётеровости R следует, что при некотором $d \in \mathbb{N}$ имеет место

$$\mathfrak{a}(n) = \mathfrak{a}(d) \quad \forall n \geq d.$$

Найдём образующие каждого идеала $\mathfrak{a}(n)$ при $n \leq d$ и выберем соответствующие степенные ряды в $R[[x]]$ для каждой образующей (для $a \in \mathfrak{a}(n)$ выбираем степенной ряд вида $a_n x^n + \dots$). Вся эта совокупность образующих и порождает идеал J . Если степенной ряд в J начинается со степени меньше d , то вычитаниями приводим его к начинающемуся со степени не меньше d . А для ряда, начинающегося со степени не меньше d , проводим аналог деления с остатком на степенные ряды, соответствующие образующим $\mathfrak{a}(d)$. Только в отличие от деления многочленов этот процесс бесконечный. В результате такого деления получаем представление степенного ряда в виде суммы произведений некоторых степенных рядов на степенные ряды, соответствующие образующим $\mathfrak{a}(d)$.

2. Конечно порождённый модуль над нётеровым кольцом нётеров. Пусть R — нётерово кольцо, M — нётеров модуль над R . Если M не нётеров, то существует бесконечная последовательность b_1, b_2, \dots элементов M , такая, что ни один из b_k не выражается как линейная комбинация с коэффициентами из R предыдущих b_i . Записывая b_k как линейные комбинации образующих модуля M a_1, \dots, a_N , получаем, что есть бесконечная последовательность векторов из R^N , такая, что ни один из них не является линейной комбинацией предыдущих с коэффициентами из R . Индукцией по N показываем, что это не так.
3. M — нётеров R -модуль. \mathfrak{a} — аннигиляционный идеал в R . Покажем, что R/\mathfrak{a} — нётерово кольцо.

R/\mathfrak{a} действует на M так, что ни один его элемент кроме нуля не действует на M нулём.

Можно считать сразу, что R действует на M так, что ни один элемент, кроме нуля, не действует нулём, и показывать, что R — нётерово кольцо.

Пусть m_1, \dots, m_n — порождают M над R . Допустим, M не нётерово. Тогда есть идеал I в R , который не конечно порождён.

Выбираем последовательность i_1, i_2, \dots, i_k , такую, что i_{k+1} не содержится в идеале, порождённом i_1, \dots, i_k , для любого k . Рассматриваем векторы в M^n :

$$\begin{pmatrix} i_1 m_1 \\ \vdots \\ i_1 m_n \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} i_k m_1 \\ \vdots \\ i_k m_n \end{pmatrix}, \dots$$

Лемма 1.1. Если M — нётеров R -модуль, то в любой последовательности векторов из M^n какой-то вектор будет линейной комбинацией предыдущих. Иначе говоря, M^n — нётеров модуль.

Эта лемма следует из следующей.

Лемма 1.2. Если M и N — нётеровы R -модули, то $M \times N$ — нётеров R -модуль.

Proof. Если это не так, то существует бесконечная последовательность

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}, \dots$$

в которой каждый элемент не является линейной комбинацией (с коэффициентами из R) предыдущих. Сначала за счёт нётеровости обнулیم первую компоненту, затем вторую. \square

Применяя лемму к нашей ситуации, получаем при некотором k равенство

$$\begin{pmatrix} i_k m_1 \\ \vdots \\ i_k m_n \end{pmatrix} = r_1 \begin{pmatrix} i_1 m_1 \\ \vdots \\ i_1 m_n \end{pmatrix} + \dots + r_{k-1} \begin{pmatrix} i_{k-1} m_1 \\ \vdots \\ i_{k-1} m_n \end{pmatrix}.$$

А отсюда получаем, что $i_k - r_1 i_1 - \dots - r_{k-1} i_{k-1}$ действует нулём на M . Значит, это 0. Противоречие.

4. а) Нуль на всех координатных плоскостях. Образующая xyz . Если содержатся члены, которые не содержат одну из переменных, например, z , то $p(x, y) + zq(x, y)$ на плоскости $z = 0$ не тождественный ноль.

- б) Нуль на всех координатных прямых. Координатные прямые:

$$x = y = 0, x = z = 0, y = z = 0.$$

xy, yz, zx — образующие. Как только есть члены, зависящие только от одной переменной, например $p(x)$, то мы получаем не тождественный ноль на $y = z = 0$.

- в) Нуль на t^2, t^3, t^4 . $z - x^2, y^2 - x^3$. Допустим, многочлен обращается в 0 на (t^2, t^3, t^4) . Тогда его можно представить в виде

$$(z - x^2)p(x, y) + q(x, y),$$

и при этом $q(x, y)$ обращается в ноль на (t^2, t^3) . А это ровно когда $y^2 = x^3$. Делим на $y^2 - x^3$, получаем в остатке многочлен степени не выше 1 по y . Это многочлен вида $yr(x) + u(x)$, причём он обращается в 0 когда $y^2 = x^3$. Заменяем y на $-y$, и он уже не обращается в 0, если не был нулевым тождественно.

г)

5. а) Кольцо полиномов, инвариантных относительно действия группы диэдра D_n . Положим $z = x + iy$ и будем рассматривать полиномы $p(z, \bar{z})$. Наш полином должен быть инвариантен относительно сопряжения и умножения z на $e^{2\pi i/n}$. Инвариантами должны быть и его однородные компоненты. Из

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n p(e^{2\pi i k/n} z, \overline{e^{2\pi i k/n} z}) = p(z, \bar{z})$$

получаем, что $z^k \bar{z}^l$ не усредняется в 0 только при $k - l$ делящемся на n . Из инвариантности относительно сопряжения получаем, что наш многочлен представляется в виде суммы членов вида $a(z^k \bar{z}^l + z^l \bar{z}^k)$ с $k - l$ делящимся на n . Значит, образующие $z\bar{z}$ и $z^n + \bar{z}^n$.

Есть ли между этими образующими какие-либо соотношения? Допустим, $p(z\bar{z}, z^n + \bar{z}^n) = 0$. Представим себе p как многочлен h от $z^n + \bar{z}^n$ с коэффициентами-многочленами от $z\bar{z}$. Старший член

$$q_m(z\bar{z})(z^n + \bar{z}^n)^m.$$

Возьмём $z = re^{i\phi}$. Получаем, что многочлен $h(r^{2n})$ имеет бесконечно много корней (вида $2r^n \cos(n\phi)$). Значит, этот многочлен нулевой при всех r . А значит, его старший коэффициент нулевой как многочлен от $z\bar{z}$.

б) Кольцо полиномов, инвариантных относительно действия группы вращений правильного n -угольника.

Как и в предыдущем пункте, получаем, что наш многочлен представляется в виде суммы членов вида $az^k \bar{z}^l$ с $k - l$ делящимся на n . Образующие $1, z\bar{z}, z^n, \bar{z}^n$. Соотношение: $(z\bar{z})^n = z^n \bar{z}^n$. Почему нет других соотношений?

6. а) Идеал в $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]^{\mathbb{S}_3}$, состоящий из функций, обращающихся в 0 при $x_1 = x_2$.

Пусть $p(x_1, x_2, x_3)$ принадлежит идеалу. Разделим с остатком p на $x_1 - x_2$ как многочлены от x_1 . Получим равенство

$$p(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2)q(x_1, x_2, x_3) + r(x_2, x_3).$$

Получается, $r(x_2, x_3)$ обращается в 0 при $x_1 = x_2$. Значит, он тождественно нулевой. Разделим q на $x_1 - x_2$ с остатком. Получим

$$p(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2)^2 q_1(x_1, x_2, x_3) + (x_1 - x_2) r_1(x_2, x_3).$$

Перестановка x_1 и x_2 не меняет многочлена. Поэтому

$$(x_1 - x_2)^2 q_1(x_1, x_2, x_3) + (x_1 - x_2) r_1(x_2, x_3) = (x_1 - x_2)^2 q_1(x_2, x_1, x_3) + (x_2 - x_1) r_1(x_1, x_3).$$

Переносим члены в другие части, получаем:

$$(x_1 - x_2)^2(q_1(x_1, x_2, x_3) - q_1(x_2, x_1, x_3)) = (x_2 - x_1)(r_1(x_1, x_3) + r_1(x_2, x_3)).$$

Сокращаем на $x_1 - x_2$:

$$(x_2 - x_1)(q_1(x_1, x_2, x_3) - q_1(x_2, x_1, x_3)) = r_1(x_1, x_3) + r_1(x_2, x_3).$$

Подставляя $x_1 = x_2$, получаем $r_1 = 0$. Итак,

$$p(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2)^2 q_1(x_1, x_2, x_3).$$

Аналогично, p делится на $(x_2 - x_3)^2$ и на $(x_1 - x_3)^2$. Значит, он делится на $(x_1 - x_2)^2(x_2 - x_3)^2(x_1 - x_3)^2$. Это и есть порождающий элемент идеала.

2 Листок 2. Факториальные кольца

1. в) Пусть $g(x) = f(x + m)$. Тогда g — тоже многочлен с целыми коэффициентами.

$$g\left(\frac{p}{q} - m\right) = f\left(\frac{p}{q}\right) = 0.$$

Значит, $\frac{p-mq}{q}$ — корень g . Кроме того, $g(0) = f(m)$. Из пункта а) получаем нужное.

2. Определитель неприводим. Допустим, мы представили наш определитель как произведение двух скобок. Рассмотрим произвольный элемент матрицы x_{ij} . Рассматривая наши многочлены как многочлены от x_{ij} (с коэффициентами из большего кольца), получаем, что x_{ij} содержится ровно в одной из скобок (иначе у нас будет некоторая большая степень x_{ij}), причём содержится в первой степени. x_{ij} и $x_{i'j}, i \neq i'$ находятся в одной скобке, иначе бы в определитель входило их произведение. Итак, каждый столбец входит целиком в одну скобку. Но так же и каждая строчка. А такого быть не может, ибо тогда все переменные входили бы в одну скобку.
3. а) Надо взять в роли p в критерии Эйзенштейна $x - \alpha \in \mathbb{C}[x]$, где α — некратный корень $x^3 + px + q$. Поскольку $x^3 + px + q$ не имеет вид $(x - u)^3$, то у него есть некратный корень.
 б) Рассматриваем как многочлен от y $xy^3 + (1 - x)y + (x^2 - 1)$ и применяем критерий Эйзенштейна с $x - 1$ в роли p .
 в) Что-то неверное.
4. а) Пусть h_1, h_2, \dots, h_k — однородные порождающие идеала \mathfrak{a} . f — некоторый элемент идеала. $f = g_1 h_1 + \dots + g_k h_k, g_i \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$. Представляя g_i в виде суммы однородных компонент и группируя слагаемые одинаковых степеней, получаем представление f в виде суммы однородных полиномов, лежащих в идеале.

5. Если множеством нулей идеала \mathfrak{a} является начало координат, то по теореме Гильберта о нулях каждый x_1, \dots, x_n в какой-то степени лежит в идеале. Поэтому там лежат все однородные многочлены достаточно высокой степени.

В другую сторону: в идеале лежат x_1^N, \dots, x_n^N при достаточно большом N , а множество их общих нулей — только начало координат. Поскольку идеал не единичный, есть хотя бы один общий ноль. Значит, это начало координат.

3 Листок 3

1. Для $n = 1$ легко (у многочлена от одной переменной не может быть слишком много корней), а дальше индукция. Рассматриваем многочлен как многочлен от x_n , есть набор чисел, при которых его старший коэффициент ненулевой. Подставляем эти числа. Тогда при некотором x_n многочлен ненулевой (случай $n = 1$).

2. а) Имеем

$$f(x, y) = x^2 h\left(\frac{y}{x}\right) = x^2 \left(\frac{y}{x} - \alpha_1\right) \left(\frac{y}{x} - \alpha_2\right).$$

h — многочлен не выше второй степени.

- 3.

4. а)

$$\begin{cases} xy = 0, \\ y^3 + y^2 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 0, \\ y^3 + y^2 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 0, \\ y^2(y + 1) = 0; \end{cases}$$

Имеем два варианта: либо $y = 0$, либо $x = 0, y = -1$. Это и есть неприводимые компоненты. Осталось найти радикал идеала...

4 Листок 4

5 Листок 5