Алгебра 3 Кузнецов

1 Листок 1. Нётеровы кольца

1. R нёторово. Покажем, что $R[[x]]$ тоже нётерово. Пусть J — идеал в $R[[x]]$. Пусть $\mathfrak{a}(n) = \{a_n \in R\colon \exists p = a_n x^n + a_{n+1}x^{n+1} + \ldots \in J\}$. Ясно, что $\mathfrak{a}(0) \subseteq \mathfrak{a}(1) \subseteq \mathfrak{a}(2) \subseteq \ldots$ — идеалы в R. Поэтому из нётеровости R следует, что при некотором $d \in \mathbb{N}$ имеет место

$$\mathfrak{a}(n) = \mathfrak{a}(d) \ \ \forall n \geq d.$$

   Найдём образующие каждого идеала $\mathfrak{a}(n)$ при $n \leq d$ и выберем соответствующие степенные ряды в $R[[x]]$ для каждой образующей (для $a \in \mathfrak{a}(n)$ выбираем степенной ряд вида $a_n x^n + \ldots$). Вся эта совокупность образующих и порождает идеал J. Если степенной ряд в J начинается со степени меньше d, то вычитаниями приводим его к начинающемуся со степени не меньше d. А для ряда, начинающегося со степени не меньше d, проводим аналог деления с остатком на степенные ряды, соответствующие образующим $\mathfrak{a}(d)$. Только в отличие от деления многочленов этот процесс бесконечный. В результате такого деления получаем представление степенного ряда в виде суммы произведений некоторых степенных рядов на степенные ряды, соответствующие образующим $\mathfrak{a}(d)$.

2. Конечно порождённый модуль над нётеровым кольцом нётеров. Пусть R — нётерово кольцо, M — нётеров модуль над R. Если M не нётеров, то существует бесконечная последовательность $b_1, b_2, \ldots$ элементов M, такая, что ни один из b_k не выражается как линейная комбинация с коэффициентами из R предыдущих b_i. Записывая b_k как линейные комбинации образующих модуля M $a_1, \ldots, a_N$, получаем, что есть бесконечная последовательность векторов из R^N, такая, что ни один из них не является линейной комбинацией предыдущих с коэффициентами из R. Индукцией по N показываем, что это не так.

3. M — нётеров R-модуль. $\mathfrak{a}$ — аннигиляционный идеал в R. Покажем, что $R/\mathfrak{a}$ — нётерово кольцо.

   $R/\mathfrak{a}$ действует на M так, что ни один его элемент кроме нуля не действует на M нулём.

   Можно считать сразу, что R действует на M так, что ни один элемент, кроме нуля, не действует нулём, и показывать, что R — нётерово кольцо.

   Пусть $m_1, \ldots, m_n$ — порождают M над R. Допустим, M не нёторово. Тогда есть идеал I в R, который не конечно порождён.

Выбираем последовательность $i_1, i_2, \ldots, i_k$, такую, что i_{k+1} не содержится в идеале, порождённом $i_1, \ldots, i_k$, для любого k. Рассматриваем векторы в M^n:

$$\begin{pmatrix} i_1 m_1 \\ \vdots \\ i_1 m_n \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} i_k m_1 \\ \vdots \\ i_k m_n \end{pmatrix}, \ldots$$

Лемма 1.1. *Если M — нётеров R-модуль, то в любой последовательности векторов из M^n какой-то вектор будет линейной комбинацией предыдущих. Иначе говоря, M^n — нётеров модуль.*

Эта лемма следует из следующей.

Лемма 1.2. *Если M и N — нётеровы R-модули, то $M \times N$ — нётеров R-модуль.*

Proof. Если это не так, то существует бесконечная последовательность

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}, \ldots$$

в которой каждый элемент не является линейной комбинацией (с коэффициентами из R) предыдущих. Сначала за счёт нётеровости обнулим первую компоненту, затем вторую. $\square$

Применяя лемму к нашей ситуации, получаем при некотором k равенство

$$\begin{pmatrix} i_k m_1 \\ \vdots \\ i_k m_n \end{pmatrix} = r_1 \begin{pmatrix} i_1 m_1 \\ \vdots \\ i_1 m_n \end{pmatrix} + \ldots + r_{k-1} \begin{pmatrix} i_{k-1} m_1 \\ \vdots \\ i_{k-1} m_n \end{pmatrix}.$$

А отсюда получаем, что $i_k - r_1 i_1 - \ldots - r_{k-1} i_{k-1}$ действует нулём на M. Значит, это 0. Противоречие.

4. а) Нуль на всех координатных плоскостях. Образующая xyz. Если содержатся члены, которые не содержат одну из переменных, например, z, то $p(x,y) + zq(x,y)$ на плоскости $z = 0$ не тождественный ноль.

   б) Нуль на всех координатных прямых. Координатные прямые:

$$x = y = 0, x = z = 0, y = z = 0.$$

   xy, yz, zx — образующие. Как только есть члены, зависящие только от одной переменной, например $p(x)$, то мы получаем не тождественный ноль на $y = z = 0$.

   в) Нуль на t^2, t^3, t^4. $z - x^2, y^2 - x^3$. Допустим, многочлен обращается в 0 на (t^2, t^3, t^4). Тогда его можно представить в виде

$$(z - x^2)p(x,y) + q(x,y),$$

и при этом $q(x,y)$ обращается в ноль на (t^2,t^3). А это ровно когда $y^2=x^3$. Делим на y^2-x^3, получаем в остатке многочлен степени не выше 1 по y. Это многочлен вида $yr(x)+u(x)$, причём он обращается в 0 когда $y^2=x^3$. Заменяем y на $-y$, и он уже не обращается в 0, если не был нулевым тождественно.

г)

5. а) Кольцо полиномов, инвариантных относительно действия группы диэдра D_n. Положим $z=x+iy$ и будем рассматривать полиномы $p(z,\overline{z})$. Наш полином должен быть инвариантен относительно сопряжения и умножения z на $e^{2\pi i/n}$. Инвариантами должны быть и его однородные компоненты. Из
$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} p(e^{2\pi i}z,\overline{e^{2\pi i}z})=p(z,\overline{z})$$
получаем, что $z^k\overline{z}^l$ не усредняется в 0 только при $k-l$ делящемся на n. Из инвариантности относительно сопряжения получаем, что наш многочлен представляется в виде суммы членов вида $a(z^k\overline{z}^l+z^l\overline{z}^k)$ с $k-l$ делящимся на n. Значит, образующие $z\overline{z}$ и $z^n+\overline{z}^n$.

Есть ли между этими образующими какие-либо соотношения? Допустим, $p(z\overline{z},z^n+\overline{z}^n)=0$. Представим себе p как многочлен h от $z^n+\overline{z}^n$ с коэффициентами-многочленами от $z\overline{z}$. Старший член
$$q_m(z\overline{z})(z^n+\overline{z}^n)^m.$$
Возьмём $z=re^{i\phi}$. Получаем, что многочлен $h(r^{2n})$ имеет бесконечно много корней (вида $2r^n cos(n\phi)$). Значит, этот многочлен нулевой при всех r. А значит, его старший коэффициент нулевой как многочлен от $z\overline{z}$.

б) Кольцо полиномов, инвариантных относительно действия группы вращений правильного n-угольника.

Как и в предыдущем пункте, получаем, что наш многочлен представляется в виде суммы членов вида $az^k\overline{z}^l$ с $k-l$ делящимся на n. Образующие $1, z\overline{z}, z^n, \overline{z}^n$. Соотношение: $(z\overline{z})^n=z^n\overline{z}^n$. Почему нет других соотношений?

6. а) Идеал в $\mathbb{C}[x_1,x_2,x_3]^{\mathbb{S}_3}$, состоящий из функций, обращающихся в 0 при $x_1=x_2$.

Пусть $p(x_1,x_2,x_3)$ принадлежит идеалу. Разделим с остатком p на x_1-x_2 как многочлены от x_1. Получим равенство
$$p(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2)q(x_1,x_2,x_3)+r(x_2,x_3).$$
Получается, $r(x_2,x_3)$ обращается в 0 при $x_1=x_2$. Значит, он тождественно нулевой. Разделим q на x_1-x_2 с остатком. Получим
$$p(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2)^2q_1(x_1,x_2,x_3)+(x_1-x_2)r_1(x_2,x_3).$$
Перестановка x_1 и x_2 не меняет многочлена. Поэтому
$$(x_1-x_2)^2q_1(x_1,x_2,x_3)+(x_1-x_2)r_1(x_2,x_3)=(x_1-x_2)^2q_1(x_2,x_1,x_3)+(x_2-x_1)r_1(x_1,x_3).$$

Переносим члены в другие части, получаем:

$(x_1-x_2)^2(q_1(x_1,x_2,x_3)-q_1(x_2,x_1,x_3)) = (x_2-x_1)(r_1(x_1,x_3)+r_1(x_2,x_3))$.

Сокращаем на $x_1 - x_2$:

$$(x_2 - x_1)(q_1(x_1,x_2,x_3) - q_1(x_2,x_1,x_3)) = r_1(x_1,x_3) + r_1(x_2,x_3).$$

Подставляя $x_1 = x_2$, получаем $r_1 = 0$. Итак,

$$p(x_1,x_2,x_3) = (x_1 - x_2)^2 q_1(x_1,x_2,x_3).$$

Аналогично, p делится на $(x_2-x_3)^2$ и на $(x_1-x_3)^2$. Значит, он делится на $(x_1 - x_2)^2(x_2 - x_3)^2(x_1 - x_3)^2$. Это и есть порождающий элемент идеала.

2 Листок 2. Факториальные кольца

1. в) Пусть $g(x) = f(x+m)$. Тогда g — тоже многочлен с целыми коэффициентами.
$$g\left(\frac{p}{q} - m\right) = f\left(\frac{p}{q}\right) = 0.$$
Значит, $\frac{p-mq}{q}$ — корень g. Кроме того, $g(0) = f(m)$. Из пункта а) получаем нужное.

2. Определитель неприводим. Допустим, мы представили наш определитель как произведение двух скобок. Рассмотрим произвольный элемент матрицы x_{ij}. Рассматривая наши многочлены как многочлены от x_{ij} (с коэффициентами из большего кольца), получаем, что x_{ij} содержится ровно в одной из скобок (иначе у нас будет некоторая большая степень x_{ij}), причём содержится в первой степени. x_{ij} и $x_{i'j}, i \neq i'$ находятся в одной скобке, иначе бы в определитель входило их произведение. Итак, каждый столбец входит целиком в одну скобку. Но так же и каждая строчка. А такого быть не может, ибо тогда все переменные входили бы в одну скобку.

3. а) Надо взять в роли p в критерии Эйзенштейна $x - \alpha \in \mathbb{C}[x]$, где α — некратный корень $x^3 + px + q$. Поскольку $x^3 + px + q$ не имеет вид $(x-u)^3$, то у него есть некратный корень.

   б) Рассматриваем как многочлен от y $xy^3 + (1-x)y + (x^2-1)$ и применяем критерий Эйзенштейна с $x - 1$ в роли p.

   в) Что-то неверное.

4. а) Пусть $h_1, h_2, \ldots, h_k$ — однородные порождающие идеала $\mathfrak{a}$. f - некоторый элемент идеала. $f = g_1h_1 + \ldots + g_kh_k, g_i \in \mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$. Представляя g_i в виде суммы однородных компонент и группируя слагаемые одинаковых степеней, получаем представление f в виде суммы однородных полиномов, лежащих в идеале.

5. Если множеством нулей идеала $\mathfrak{a}$ является начало координат, то по теореме Гильберта о нулях каждый $x_1, \ldots, x_n$ в какой-то степени лежит в идеале. Поэтому там лежат все однородные многочлены достаточно высокой степени.

   В другую сторону: в идеале лежат $x_1^N, \ldots, x_n^N$ при достаточно большом N, а множество их общих нулей — только начало координат. Поскольку идеал не единичный, есть хотя бы один общий ноль. Значит, это начало координат.

3 Листок 3

1. Для $n = 1$ легко (у многочлена от одной переменной не может быть слишком много корней), а дальше индукция. Рассматриваем многочлен как многочлен от x_n, есть набор чисел, при которых его старший коэффициент ненулевой. Подставляем эти числа. Тогда при некотором x_n многочлен ненулевой (случай $n = 1$).

2. a) Имеем

$$f(x, y) = x^2 h\left(\frac{y}{x}\right) = x^2 \left(\frac{y}{x} - \alpha_1\right)\left(\frac{y}{x} - \alpha_2\right).$$

   h — многочлен не выше второй степени.

3.

4. a)

$$\begin{cases} xy = 0, \\ y^3 + y^2 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 0, \\ y^3 + y^2 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 0, \\ y^2(y + 1) = 0; \end{cases}$$

   Имеем два варианта: либо $y = 0$, либо $x = 0, y = -1$. Это и есть неприводимые компоненты. Осталось найти радикал идеала. Это многочлены, зануляющиеся на $y = 0$ и в точке $x = 0, y = -1$. На $y = 0$ зануляются все из идеала (y) и только они, то есть наш многочлен должен делиться на y. В точке $x = 0, y = -1$ зануляются многочлены из идеала $(x, y + 1)$. Наш радикал — это идеал $(xy, y(y + 1))$.

4 Листок 4

5 Листок 5