

Институт математики Национальной академии наук Украины

УДК 519.21

На правах рукописи

Кузнецов Василий Алексеевич

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СТОХАСТИЧЕСКИХ ПОТОКОВ

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности
01.01.05 – теория вероятностей и математическая статистика

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор А.А.Дороговцев

Киев – 2017

Оглавление

Введение	1
1 Вращение гауссовских векторных полей	16
1.1 Особые точки векторных полей	16
1.2 Распределение особых точек случайных полей	21
1.3 Вращение случайного поля вдоль кривой	27
1.4 Дисперсия индекса вращения изотропного однородного гауссов- ского векторного поля	32
2 Инварианты Васильева для кос, составленных из семимар- тингалов	52
2.1 Инварианты Васильева для гладких кос	53
2.2 Инварианты Васильева для негладких кос	57
2.3 Инварианты Васильева для семимартингалов	63
3 Вращение частиц в броуновских потоках	68
3.1 Предварительные сведения о броуновских потоках	69
3.2 Аналог закона Спицера для угла обхода в броуновском потоке .	73
3.3 Совместное асимптотическое распределение углов обхода в бро- уновском потоке	82
4 Большие уклонения для угла обхода	113
4.1 Слабый принцип больших уклонений для угла обхода	115
4.2 Принцип больших уклонений для цилиндрических множеств . .	120
4.3 Отсутствие полного принципа больших уклонений для угла об- хода	124
Выводы	131
Список использованной литературы	132

Введение

Актуальность работы. Важную роль в теории динамических систем играет понятие фазового потока, порождённого векторным полем (см., в частности, монографии Ж. Палис, В. Димелу [1], В. Арнольда и Б. Хесина [2]). Исследование стохастических динамических систем приводит к близкому понятию стохастического потока, представляющего собой семейство согласованных случайных отображений. Важным примером стохастического потока является поток решений стохастического дифференциального уравнения, см. монографию Х. Кунита [3].

В связи с задачами статистической физики в теории случайных процессов началось исследование систем взаимодействующих частиц. Одними из первых работ по данной тематике были работы Ф. Спицера и Р. Добрушина [4], [5]. В работе Т. Харриса [6] стохастические потоки возникли как слабые пределы процессов случайного перемешивания в \mathbb{R}^d .

Развитие теории стохастических потоков было отчасти стимулировано исследованиями турбулентного течения жидкости. Применение аппарата теории вероятностей в изучении этих вопросов было начато в работе А. Колмогорова [7], в которой было предложено описывать поля скорости, давления, температуры и т.д. в потоке жидкости как случайные поля. Многие теоретические результаты теории турбулентности получаются с помощью анализа упрощённых моделей [8]. Одной из таких упрощённых моделей является ансамбль скоростей Крайчнана, получающийся с помощью перемасштабирования из скоростей в турбулентном потоке. Ансамбль Крайчнана хорошо описывает поведение жидкости на больших интервалах времени и применяется для исследования многочастичных движений [8]. В математической литературе понятию ансамбля Крайчнана соответствует броуновский стохастический поток. Наиболее простой моделью турбулентности является изотропная турбулентность, в которой распределение скоростей жидкости инвариантно относительно параллельных переносов, поворотов и отражений. Перемасштабированные турбулентные потоки приводят к понятию изотропных броуновских потоков, которые изучались в работах Ле Жана [9], П. Баксендаля [10],

К. Зирбея и В. Войчинского [11], [12]. Согласно [8], основной задачей теории турбулентности является объяснение явления перемежаемости. Это явление, характеризующее тем, что основной вклад в среднее значение случайного поля вносят редкие области с высокой интенсивностью, обсуждается в обзоре Я. Зельдовича и С. Молчанова [13]. В этой работе стохастические потоки возникают как модель случайной среды.

В связи с задачами магнитной гидродинамики в книге [2] рассматривалась задача о минимизации энергии векторного поля в области под действием диффеоморфизмов, сохраняющих объём. Согласно [2], спиральность $H(\xi)$ векторного поля ξ ограничивает снизу его энергию $E(\xi)$:

$$E(\xi) \geq C|H(\xi)|$$

для некоторой постоянной C , зависящей от области M . В [2] показано, что спиральность характеризует зацепление траекторий фазового потока векторного поля. Так, для почти всех пар точек $x_1, x_2 \in M$ имеет место соотношение

$$\lim_{T_1, T_2 \rightarrow \infty} \frac{lk_\xi(T_1, T_2)}{T_1 T_2} = H(\xi),$$

где $lk_\xi(T_1, T_2)$ — число зацепления отрезков траекторий на интервалах времени $[0, T_1]$ и $[0, T_2]$ фазового потока поля ξ . Следовательно, появляется возможность делать заключение о физических характеристиках системы (таких, как энергия) через её топологические свойства (такие, как зацепление траекторий фазового потока). В связи с этим представляет интерес исследование коэффициента зацепления траекторий в стохастических потоках.

Двухточечные движения в броуновских стохастических потоках изучались, в частности, в работах Ле Жана [9], П. Баксендаля [10], К. Зирбея и В. Войчинского [11], [12]. Характер этих двухточечных движений зависит от показателей Ляпунова исследуемого потока. Одной из характеристик двухточечных движений являются взаимные углы обхода частиц. Некоторые результаты об углах обхода в стохастических потоках получены Зирбелем в [12]. Углы обхода траекторий двумерных случайных процессов исследовались также вне контекста стохастических потоков. Такие исследования проводились начиная с работы Ф. Спичера [14]. Исследовались также углы обхода на поверхностях [15]. Работы Ж. Франки [16], [17] посвящены асимптотическому поведению вращения трёхмерного броуновского движения вокруг узлов.

Многочастичное движение и, более общо, дисперсия массы, переносимой броуновским потоком, рассматривались в работах К. Зирбея [18], К. Зирбея и Е. Цинлара [19]. Эти вопросы связаны с моделированием турбулентной

диффузии, т.е. пассивного движения частиц (например, частичек примеси) в жидкости под действием турбулентного потока. Подобные задачи рассматривались в монографии А. Мони́на и И. Ягло́ма [20], а также в работе Г. Кестена и Г. Папаниколау [21]. Характерной чертой турбулентного течения является хаотическое перемешивание, приводящее к тому, что даже малая капля примеси быстро деформируется потоком и через некоторое время оказывается распределённой по большому объёму жидкости. Для исследования аналогичных свойств в броуновском потоке несколькими авторами рассматривалась эволюция области под действием потока. В работах М. Кранстона и Ле Жана [22], Г. Димитрова и М. Шойцова [23] изучалось изменение главных кривизн гиперповерхности и эволюция объёма под действием изотропного броуновского потока.

Изучение многочастичного движения в потоке жидкости может быть использовано для выяснения свойств потока на основе наблюдаемых траекторий помещённых в жидкость частиц. Так, метод пассивных маркеров применяется при исследовании океанических течений [24]. В работе Жан-Люка Тиффо [25] предложены оценки энтропии потока на основании анализа кос, порождённых траекториями маркеров. Эти работы мотивируют исследование свойств кос, образованных траекториями в стохастическом потоке.

Рассмотренные результаты относятся, в основном, к исследованиям гладких стохастических потоков. В то же время, начиная с работ М. Дарлинга, Р. Арратья [26], [27], активно исследовались и негладкие потоки, в частности, потоки со склеиванием. В работе А. Дороговцева [28] получено представление Кларка, в статье А. Дороговцева и Е. Остапенко [29] получен принцип больших уклонений для потока Арратья. В работе А. Дороговцева, А. Гнедина и Н. Вовчанского [30] получена асимптотика размера кластеров в потоке Арратья при $t \rightarrow 0$. Потоки со склеиванием, в которых скорость диффузии зависит от массы частиц, изучались в работах В. Конаровского [31].

Обобщением потока Арратья является класс одномерных потоков Харриса. Такие потоки изучались, начиная с работы Т. Харриса [32], где были приведены условия их принадлежности к одному из классов: гладкие потоки либо потоки со склеиванием, в которых образом \mathbb{R} в любой момент времени $t > 0$ является счётное множество без предельных точек.

Важный класс вопросов относится к приближению потока Арратья с помощью гладких потоков. Так, часто негладкие стохастические потоки возникают как пределы гладких потоков. Соответствующие результаты для сходимости к потоку Арратья были получены, в частности, в работах А. До-

роговцева [33], Т. Маловичко [34]. В связи с этими результатами возникает также вопрос о скорости аппроксимации потока Арратья допредельными потоками. В работе А. Дороговцева и В. Фомичёва [35] были получены оценки на отклонение потока Харриса от потока Арратья. В работе И. Нищенко [36] построен класс дискретных аппроксимаций потока Арратья. Такие аппроксимации могут обладать свойствами, отсутствующими в предельном потоке. Так, например, в потоке Арратья частички сохраняют порядок, а в дискретных приближениях этого потока они могут проводить некоторое время в обратном порядке. В статье Е. Глиняной [37] получены оценки на скорость убывания к нулю времени, которое две частички допредельного потока проводят в обратном порядке.

В работах А. Пилипенко [38], [39] и др. изучались стохастические потоки с отражением. Таким потокам посвящена монография [40].

В работах А. Дороговцева и П. Котеленца [41], [42], [43] исследовались стохастические потоки со взаимодействием. Движение отдельной частицы в таких потоках зависит и от движения всей совокупности частиц. Этому типу потоков посвящена монография А. Дороговцева [44]. В работе Т. Маловичко [45] был получен аналог теоремы Гирсанова для стохастических потоков со взаимодействием.

Приведённые результаты мотивируют исследование геометрических характеристик траекторий в броуновских стохастических потоках, а также смежных вопросов стохастической геометрии: геометрических характеристик случайных полей, углов обхода двумерных случайных процессов. В данной работе рассматривалось поведение углов обхода частиц в стохастическом потоке, исследовались инварианты кос, порождённых траекториями стохастических потоков. В связи с тем, что свойства случайного поля, управляющего броуновским стохастическим потоком, определяют поведение этого потока, рассматривались задачи о числе вращений двумерного случайного поля вдоль плоского контура. Исследовалась возможность получения принципа больших уклонений для угла обхода броуновского движения вокруг начала координат.

Связь работы с научными программами, планами, темами. Работа выполнена в Институте математики НАН Украины в отделе теории случайных процессов в рамках госбюджетной темы “Анализ сложных систем”, государственный регистрационный номер 0111U001002. Также часть работы выполнена в рамках общего научного проекта НАН Украины и РФФИ “Геометрические аспекты теории бесконечномерных динамических систем”, государственный регистрационный номер 0114U002965.

Цель и задачи исследования. Цель исследования состоит в изучении геометрических свойств случайных полей и стохастических потоков. Эта цель включает в себя следующие задачи:

- исследование индекса вращения случайного поля вдоль кривой;
- исследование взаимных углов обхода частиц в броуновских стохастических потоках;
- исследование кос, порождённых траекториями случайных процессов.

Объект и предмет исследования. Объектом исследования диссертационной работы являются двумерные случайные векторные поля, броуновские стохастические потоки. Предметом исследования являются геометрические характеристики случайных объектов: углы обхода траекторий случайных процессов, вращение случайного поля, инварианты Васильева случайных кос.

Методы исследования. В работе используются методы теории вероятностей, теории случайных процессов, стохастического анализа, топологии.

Научная новизна полученных результатов. Основные результаты, которые определяют научную новизну работы, таковы:

- получено выражение для первого и второго момента индекса вращения случайного поля на плоскости вдоль замкнутой кривой в терминах условной плотности двухточечных распределений поля;
- для изотропного гауссовского случайного поля первый и второй моменты индекса вращения найдены в терминах ковариационной функции компонент поля;
- установлено представление инвариантов Васильева для кос, порождённых непрерывными семимартингалами относительно общей фильтрации, в виде кратных интегралов Стратоновича;
- получено совместное асимптотическое распределение взаимных углов обхода частиц в броуновском стохастическом потоке при $t \rightarrow \infty$;
- получен слабый принцип больших уклонений для угла обхода двумерного броуновского движения вокруг начала координат, установлено отсутствие полного принципа больших уклонений.

Практическая значимость полученных результатов. Диссертационная работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут иметь дальнейшее применение в различных разделах теории случайных процессов и стохастической геометрии.

Личный вклад соискателя. Постановка задач, выбор направлений и методов исследования и общее руководство работой принадлежит научному руководителю соискателя доктору физ.-мат. наук, профессору А. А. Дороговцеву. Все результаты, представленные в диссертационной работе, получены автором самостоятельно.

Апробация результатов диссертации. Результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях и научных семинарах:

- Всеукраинской научной конференции "Современные проблемы теории вероятностей и математического анализа" (Ворохта, Украина, 25 февраля – 3 марта 2013 г.);
- 20 Международной молодёжной конференции молодых учёных "Ломоносов-2013" (Москва, 8-13 апреля 2013 г.);
- 11 Международной Вильнюсской конференции по теории вероятностей и математической статистике (Вильнюс, Литва, 30 июня - 4 июля 2014 г.);
- научной конференции памяти Ю. В. Линника "Analytical methods in number theory, probability theory and mathematical statistics" (Санкт-Петербург, 14-18 сентября 2015 г.);
- международной конференции "Stochastic processes in abstract spaces" (Киев, 14-16 октября 2015 г.);
- научном семинаре "Исчисление Маллявена и его приложения" Института математики НАН Украины под руководством доктора физ.-мат. наук, профессора А. А. Дороговцева;
- научном семинаре отдела топологии Института математики НАН Украины;
- научном семинаре "Статистические проблемы для случайных процессов и полей" при кафедре математического анализа и теории вероятностей НТУУ "КПИ".

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в пяти статьях.

1. Kuznetsov V. A. The variance of the number of windings of the random field along the planar curve // Theory of Stochastic Processes. — 2012. — **18(34)**, 2. — Pp. 33–53.
2. Кузнецов В. А. Интегральные инварианты Концевича для случайных траекторий // Укр. мат. журн. — 2015. — **67**, 1. — С. 57–67.
3. Kuznetsov V. A. The discussion of the large-deviation principle for the winding angle of the Brownian trajectory around the origin // Theory of Stochastic Processes. — 2015. — **20(36)**, 2. — Pp. 63–84.
4. Кузнецов В. А. Взаимные углы обхода частиц в броуновских стохастических потоках со старшим показателем Ляпунова, равным нулю // Укр. мат. журн. — 2016. — **68**, 9. — С. 1197–1228.
5. Кузнецов В. А. Предельное распределение взаимных углов обхода частиц в броуновских стохастических потоках со старшим показателем Ляпунова, равным нулю // Докл. НАН Украины. — 2016. — 9. — С. 14–22.

Структура и объём работы. Диссертационная работа состоит из введения, четырёх глав и выводов, а также списка использованных источников. Основной текст диссертации занимает 131 страницу, список литературы содержит 68 наименований.

Основное содержание диссертации

В первой главе диссертационной работы рассматриваются геометрические свойства случайных полей на плоскости. В §1.1 обсуждаются особые точки векторных полей. Приводится определение индекса особой точки, теорема Пуанкаре об индексе.

В §1.2 обсуждается распределение особых точек случайных полей. Мы приводим теорему из [46], позволяющую находить математическое ожидание количества точек t случайного векторного поля f , таких, что $f(t) = u$, лежащих внутри данной области и удовлетворяющих некоторому дополнительному условию. Эта теорема является базовой для дальнейших рассмотрений в главе 1.

Утверждение 1.2.1 ([46], стр. 267). Пусть $T \subset \mathbb{R}^N$ — компактное множество, такое, что граница ∂T имеет конечную меру Хаусдорфа H_{N-1} , $B \subseteq \mathbb{R}^k$ — открыто, а ∂B имеет размерность Хаусдорфа $K - 1$. Пусть

$f = (f_1, \dots, f_N)$ и $g = (g_1, \dots, g_K)$ — N -параметрические случайные поля на T со значениями в \mathbb{R}^N и \mathbb{R}^K . Обозначим

$$\nabla f(t) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial t_j} \right)_{i,j=1,\dots,N}.$$

Предположим, что выполняются следующие условия:

а) Все компоненты случайных полей $f, \nabla f, g$ непрерывны на T с вероятностью 1 и имеют ограниченные вторые моменты на T ;

б) Для всех $t \in T$ маргинальные плотности $p_t(x)$ вектора $f(t)$ непрерывны при $x = u$;

в) Условные плотности распределения $p_t(x \mid \nabla f(t), g(t))$ поля $f(t)$ при условии $g(t)$ и $\nabla f(t)$ ограничены и непрерывны при $x = u$, равномерно по $t \in T$;

г) Условные плотности распределения $\hat{p}_t(z \mid f(t) = x)$ детерминанта $\det \nabla f(t)$ при условии $f(t) = x$ непрерывны для z и x в окрестностях 0, u , соответственно, равномерно по $t \in T$;

д) Условные плотности распределения $\tilde{p}_t(z \mid f(t) = x)$ поля $g(t)$ при условии $f(t) = x$ непрерывны для всех z и для x в окрестности u , равномерно по $t \in T$;

е) Выполнено следующее ограничение на моменты:

$$\sup_{t \in T} \max_{1 \leq i, j \leq N} \mathbb{E} \left(\left| \frac{\partial f_i}{\partial t_j}(t) \right|^N \right) < \infty;$$

ж) Модули непрерывности относительно евклидовой нормы каждой из компонент $f, \nabla f$ и g удовлетворяют

$$\mathbb{P}(\omega(\eta) > \varepsilon) = o(\eta^N)$$

при $\eta \downarrow 0$ для каждого $\varepsilon > 0$.

Тогда, если N_u обозначает количество точек множества T , для которых $f(t) = u \in \mathbb{R}^n$ и $g(t) \in B \subseteq \mathbb{R}^k$, то имеет место равенство

$$\mathbb{E} N_u = \int_T \mathbb{E} (|\det \nabla f(t)| \mathbb{1}_B(g(t)) \mid f(t) = u) p_t(u) dt.$$

В §1.3 утверждение 1.2.1 применяется для нахождения математического ожидания и дисперсии количества вращений случайного поля вдоль плоской кривой Γ . Доказана следующая теорема, являющаяся аналогом формулы Райса для математического ожидания количества пересечений уровня снизу вверх случайным полем.

Теорема 1.3.1. Пусть $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ — Пусть $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ — случайное векторное поле на \mathbb{R}^2 , и пусть Γ — фиксированная кусочно-гладкая простая (т.е. не имеющая самопересечений) замкнутая кривая в \mathbb{R}^2 , ограничивающая некоторую область T . Предположим, что при любых $t_1, t_2 \in T, t_1 \neq t_2$ существует совместная плотность распределения $f(t_1), \nabla f(t_1), f(t_2), \nabla f(t_2)$. Пусть

$$\tilde{T} = \{(t^1, t^2) \in T^2 : t^1 \neq t^2\}, T_2^\delta = \{(t^1, t^2) \in T^2 : \|t^1 - t^2\| \geq \delta\}, \delta > 0,$$

а также выполнены условия а)-д):

а) $f, \frac{\partial f_i}{\partial t_j}$ — непрерывны на T с вероятностью 1 и имеют ограниченные моменты порядка 4 на T ;

б) для всех $t \in T$ плотность распределения $p_{f(t)}(x)$ случайного вектора $f(t)$ непрерывна в точке $x = 0$;

б') для всех $\tilde{t} = (t^1, t^2) \in \tilde{T}$ плотность распределения $p_{\tilde{f}(\tilde{t})}(x_1, x_2)$ случайного вектора $\tilde{f}(\tilde{t}) = (f(t^1), f(t^2))$ непрерывна в точке $(x_1, x_2) = (0, 0)$;

в) для всех $t \in T$ условная плотность распределения $p_t(x \mid \nabla f(t))$ случайного вектора $f(t)$ при условии $\nabla f(t)$ существует, ограничена и является непрерывной в точке $x = 0$, равномерно по $t \in T$;

в') для всех $\tilde{t} = (t^1, t^2) \in \tilde{T}$ условная плотность распределения $p_{\tilde{t}}(\tilde{x} \mid \nabla \tilde{f}(\tilde{t}))$ случайного вектора $\tilde{f}(\tilde{t})$ при условии $\nabla \tilde{f}(\tilde{t})$ существует, ограничена и непрерывна в $\tilde{x} = (0, 0)$, равномерно по $(t^1, t^2) \in T_2^\delta$ при каждом $\delta > 0$;

г) для всех $t \in T$ условная плотность распределения $p_t(z \mid f(t) = x)$ случайной матрицы $\nabla f(t)$ при условии $f(t) = x$ непрерывна по z и x , равномерно по $t \in T$;

г') для всех $\tilde{t} = (t^1, t^2) \in \tilde{T}$ условная плотность распределения $p_{\tilde{t}}(z \mid \tilde{f}(\tilde{t}) = \tilde{x})$ случайной матрицы $\nabla \tilde{f}(\tilde{t})$ при условии $\tilde{f}(\tilde{t}) = \tilde{x}$ непрерывна по z и \tilde{x} , равномерно по $(t^1, t^2) \in T_2^\delta$ при каждом $\delta > 0$;

д) при каждом $\varepsilon > 0$ модуль непрерывности на T каждой компоненты $f, \nabla f$ удовлетворяет асимптотическому соотношению $\mathbb{P}(\omega(\eta) > \varepsilon) = o(\eta^4)$ при $\eta \downarrow 0$.

Пусть $\text{ind}_\Gamma f$ — индекс кривой Γ относительно поля f . Тогда выполнено следующее соотношение:

$$\mathbb{E}(\text{ind}_\Gamma f) = \int_T \mathbb{E}(\det \nabla f(t) \mid f(t) = 0) p_t(0) dt,$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\text{ind}_\Gamma f)^2 &= \int_{T^2} \mathbb{E}(\det \nabla f(t^1) \det \nabla f(t^2) \mid f(t^1) = f(t^2) = 0) p_{(t^1, t^2)}(0) dt^1 dt^2 + \\ &\quad + \int_T \mathbb{E}(|\det \nabla f(t)| \mid f(t) = 0) p_t(0) dt,\end{aligned}$$

где $p_t(0)$ — плотность распределения $f(t)$ в точке 0, а $p_{(t^1, t^2)}(0)$ — плотность распределения поля $\tilde{f}(t^1, t^2) = (f(t^1), f(t^2))$ в точке 0.

В §1.4 теорема 1.3.1 применяется к частному случаю двумерного гауссовского центрированного случайного векторного поля с ковариационной функцией компонент

$$b_{kl}(z) = \delta_{kl} b_N(\|z\|).$$

Это случайное поле является простейшим примером однородного изотропного гауссовского поля.

Теорема 1.4.1. Пусть f — центрированное гауссовское изотропное векторное поле на \mathbb{R}^2 с ковариационной функцией компонент $b_{ij}(z) = \delta_{ij} b_N(\|z\|)$, где $b_N : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ имеет вид

$$b_N(r) = \int_0^\infty J_1(r\alpha) \Phi(d\alpha) + \int_0^\infty \frac{J_1(r\alpha)}{r\alpha} \Phi(d\alpha) = \int_0^\infty J_0(r\alpha) \Phi(d\alpha),$$

Φ — конечная мера на $[0, \infty)$ с конечным четвёртым моментом, и $\Phi \neq c\delta_0$, то есть Φ не сосредоточена в точке $\{0\}$, и выполнено условие

$$b_N(r) < b_N(0), r > 0.$$

Тогда дисперсия количества вращений f вдоль замкнутой кусочно-гладкой кривой Γ , которая ограничивает открытую область T , равна

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\text{ind}_\Gamma f)^2 &= \\ &= \int_{T^2} \frac{2}{\|t^1 - t^2\|} \left\{ \frac{b_N(\|t^1 - t^2\|) b'_N(\|t^1 - t^2\|)^3}{b_N(0)^2 - b_N(\|t^1 - t^2\|)^2} + \right. \\ &\quad \left. + b'_N(\|t^1 - t^2\|) b''_N(\|t^1 - t^2\|) \right\} p_{(t^1, t^2)}(0) dt^1 dt^2 - b''_N(0) p(0) S(T),\end{aligned}$$

где $S(T)$ — площадь T .

Здесь

$$p_{(t^1, t^2)}(0) = \frac{1}{(2\pi)^2 (b_N(0)^2 - b_N(\|t^1 - t^2\|)^2)},$$

и $p_t(0) = p(0) \equiv \frac{1}{2\pi b_N(0)^2}$ для любого $t \in T$.

Вторая глава диссертации посвящена инвариантам Васильева для случайных кос. В §2.1 приведены основные факты об инвариантах Васильева для гладких кос и определены интегралы Концевича для кос [47].

В §2.2 обсуждаются инварианты Васильева непрерывных кос, не обязательно являющихся гладкими или кусочно-гладкими. Так, траектории непрерывных семимартингалов в типичном случае не являются гладкими, и для них формулы Концевича нельзя применять непосредственно. Для определения значения инварианта Васильева на непрерывной косе мы применяем приближение этой косы с помощью вписанных ломаных.

Теорема 2.2.1. *Любой инвариант Васильева для непрерывной косы Z является пределом соответствующих инвариантов для последовательности вписанных в неё кос Z^{τ_k} , если мелкости разбиений τ_k стремятся к 0.*

Для оценки интеграла Концевича для вписанной ломаной поступаем следующим образом. Рассмотрим косу Z , образованную непрерывными кривыми

$$Z_k(t), t \in [0, T], k = 1, \dots, n,$$

и последовательность разбиений $\tau = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_p = T\}$ интервала $[0, T]$ с $|\tau| \rightarrow 0$. Пусть $L(t)$ — некоторый инвариант порядка m для косы $Z(s)$, $0 \leq s \leq t$, образованной кривыми $Z_k(s)$, $0 \leq s \leq t$, $\lambda = \lambda_{kl}$ для некоторых $k \neq l$. Рассмотрим вписанные в кривые Z_k ломаные Z_k^τ с вершинами $Z_k(t_0), \dots, Z_k(t_p)$, и пусть Z_τ — коса, образованная этими ломаными. Обозначим через $L_\tau(t)$ значение исследуемого инварианта на косе $Z_\tau(s)$, $0 \leq s \leq t$, и пусть $\lambda_\tau(t)$ — соответствующая $\lambda(t)$ функция для этой ломаной. Заметим, что λ_τ является кусочно-гладкой функцией. В этой ситуации имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.2.2. *Если при каждом k суммы $\sum_{i=0}^{p-1} |Z_k(t_{i+1}) - Z_k(t_i)|^2$ ограничены по τ , то имеет место сходимость*

$$\sum_{i=0}^{p-1} \frac{L(t_i) + L(t_{i+1})}{2} (\lambda(t_{i+1}) - \lambda(t_i)) - \int_0^T L_\tau(t) d\lambda_\tau(t) \xrightarrow{|\tau| \rightarrow 0} 0. \quad (1)$$

Этот результат применяется в следующем разделе для нахождения интегрального представления инвариантов Васильева кос, составленных из непрерывных семимартингалов.

В §2.4 мы получаем основной результат об инвариантах Васильева для случайных кос.

Теорема 2.3.1. Для непрерывных семимартингалов $Z_k(t), t \in [0, T], k = 1, \dots, n$ относительно общей фильтрации $(\mathfrak{F}_t), t \in [0, T]$, таких, что с вероятностью 1

$$\forall t \in [0, T] \quad \forall k \neq l \quad Z_k(t) \neq Z_l(t),$$

интегралы Концевича вычисляются как соответствующие кратные интегралы Стратоновича.

Пример. Примером инварианта второго порядка является следующий инвариант для гладкой косы из трёх нитей

$(Z_1(t), Z_2(t), Z_3(t)), t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} \Psi_{123} = & \frac{1}{2} \int_0^T (\lambda_{12}(s) d\lambda_{13}(s) - \lambda_{13}(s) d\lambda_{12}(s)) + \frac{1}{2} \int_0^T (\lambda_{13}(s) d\lambda_{23}(s) - \lambda_{23}(s) d\lambda_{13}(s)) + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^T (\lambda_{23}(s) d\lambda_{12}(s) - \lambda_{12}(s) d\lambda_{23}(s)), \end{aligned}$$

где $\lambda_{kl}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^t \frac{dZ_k(t') - dZ_l(t')}{Z_k(t') - Z_l(t')}$. Для кос из непрерывных семимартингалов этот инвариант теперь записывается в виде

$$\begin{aligned} \Psi_{123} = & \frac{1}{2} \int_0^T (\lambda_{12}(s) \circ d\lambda_{13}(s) - \lambda_{13}(s) \circ d\lambda_{12}(s)) + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^T (\lambda_{13}(s) \circ d\lambda_{23}(s) - \lambda_{23}(s) \circ d\lambda_{13}(s)) + \frac{1}{2} \int_0^T (\lambda_{23}(s) \circ d\lambda_{12}(s) - \lambda_{12}(s) \circ d\lambda_{23}(s)). \end{aligned}$$

Третья глава диссертации посвящена поведению наиболее простых инвариантов Васильева — углов обхода — для кос, образованных траекториями частиц в броуновских потоках.

В §3.1 приводятся необходимые сведения о броуновских потоках. В §3.2 мы получаем аналог закона Спизера для броуновских потоков. Пусть F — броуновский стохастический поток, $a, b \in \mathbb{R}^2, a \neq b$. Рассмотрим траектории потока $F_t(a), F_t(b)$, выходящие из точек a и b . Отождествляя \mathbb{R}^2 и \mathbb{C} , можно написать

$$F_t(b) - F_t(a) = R_{ab}(t) e^{i\Phi_{ab}(t)} \frac{F_0(b) - F_0(a)}{\|F_0(b) - F_0(a)\|},$$

где $R_{ab}(t) = \|F_t(b) - F_t(a)\|$, $\Phi_{ab}(t)$ — непрерывная версия угла обхода траектории $F(b)$ вокруг $F(a)$.

Теорема 3.2.1. Пусть F — однородный изотропный броуновский стохастический поток, задаваемый стохастическим дифференциальным уравнением в смысле Х. Кунита [3]:

$$dF_t(x) = U(F_t(x), dt),$$

$x \in \mathbb{R}^2, t \geq 0$, где $U = U(x, t)$ — центрированное гауссовское случайное векторное поле,

$$\mathbb{E} U_k(x, t) U_l(y, s) = b_{kl}(x - y) t \wedge s,$$

а матрица b имеет вид $b(z) = (b_{kl}(z)) = (\delta_{kl} b_L(\|z\|)), 1 \leq k, l \leq 2, b_L: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ — некоторая функция, удовлетворяющая условиям

- $b_0 = b_L(0) = 1$;
- $b_L(r) < 1$ при $r > 0$;
- $b_L \in C^{(4)}([0, +\infty))$;
- $b_L(r) \rightarrow 0 (r \rightarrow \infty)$;
- $\int_0^\infty r |b'_L(r)| dr < \infty$;
- $\int_0^\infty r |b'_L(r) - r b''_L(r)| dr < \infty$;
- $b_L(r) = 1 - \frac{1}{2} \beta_L r^2 + O(r^4), r \rightarrow 0+,$ для некоторого $\beta_L > 0$.

Тогда имеет место соотношение

$$\frac{\Phi_{ab}(t)}{\frac{1}{2} \ln t} \xrightarrow{d} \xi,$$

где ξ — случайная величина, имеющая стандартное распределение Коши.

Однако, этот результат ещё не определяет совместного асимптотического поведения углов обхода частиц друг вокруг друга. Этому вопросу посвящён §3.3, где получена следующая теорема.

Теорема 3.3.1. Пусть F — броуновский стохастический поток, удовлетворяющий условиям теоремы 3.2.1. Пусть $F_t(x_1), \dots, F_t(x_n)$ — траектории потока F , выходящие из попарно различных точек плоскости x_1, \dots, x_n .

Тогда для углов обхода $\Phi_{kl}(t)$ траектории $F_t(x_k)$ вокруг траектории $F_t(x_l)$ справедливо асимптотическое соотношение

$$\left(\frac{2}{\ln t} \Phi_{kl}(t), 1 \leq k < l \leq n \right) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{d} (\xi_{kl}, 1 \leq k < l \leq n).$$

Здесь $\xi_{kl}, 1 \leq k < l \leq n$ — независимые в совокупности случайные величины, имеющие стандартное распределение Коши.

В четвёртой главе диссертации исследуется возможность получения принципа больших уклонений для угла обхода двумерного броуновского движения $(W_t, t \geq 0)$ с $W(0) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ вокруг начала координат. В §4.1 показано выполнение слабого принципа больших уклонений для угла обхода. Определим случайные элементы Φ_ε со значениями в $C([0, 1])$. Поставим в соответствие каждой непрерывной функции $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, 0 \leq t \leq 1$, удовлетворяющей условию $f(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f(t) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ для всех $t \in [0, 1]$, функцию $\Phi(f) \in C([0, 1])$, являющуюся непрерывной ветвью угла обхода f вокруг начала координат. Итак, мы ввели отображение

$$\Phi: \left\{ f \in C([0, 1], \mathbb{R}^2) \mid f(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \forall t \in [0, 1] f(t) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow C([0, 1]).$$

Пусть w — двумерный винеровский процесс, выходящий из точки $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Пусть w_ε — процесс вида $w_\varepsilon(t) = w(\varepsilon t), t \in [0, 1]$ для $\varepsilon > 0$. Теперь мы можем рассмотреть семейство случайных элементов $\Phi_\varepsilon = \Phi(w_\varepsilon)$ со значениями $C([0, 1])$. Пусть $I(x)$ — функция скорости для двумерного броуновского движения, выходящего из точки $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, т.е.

$$I(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_0^1 \|x'(s)\|^2 ds, & x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \infty, & x(0) \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Теорема 4.1.1. Для случайных элементов $\Phi_\varepsilon \in C([0, 1])$ выполнен слабый принцип больших уклонений с функцией скорости $J(\phi) = I(\overline{\Phi^{-1}(\phi)})$.

В §4.2 мы показываем выполнение оценок принципа больших уклонений на классе цилиндрических множеств.

Теорема 4.2.1. Пусть $B \subseteq \mathbb{R}^m$ — замкнутое множество, $0 < t_1 < \dots < t_m \leq 1$,

$$A = \{\phi \in C([0, 1]): (\phi(t_1), \dots, \phi(t_m)) \in B\}.$$

Тогда выполнена следующая оценка:

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln P(\Phi_\varepsilon \in A) \leq -J(A).$$

В §4.3 мы показываем, что полный принцип больших уклонений не выполнен для совокупности случайных элементов Φ_ε .

Теорема 4.3.1. Принцип больших уклонений не может быть выполнен для семейства (Φ_ε) ни с какой функцией скорости \tilde{I} .

Глава 1

Вращение гауссовских векторных полей

В данной работе исследуются геометрические свойства стохастических потоков. Некоторые стохастические потоки появляются как потоки решений стохастических дифференциальных уравнений, управляемых гауссовским случайным векторным полем. Геометрические свойства таких потоков определяются свойствами соответствующего векторного поля. Важной характеристикой векторного поля является характер его особых точек, в частности, индексы особых точек. Таким образом, возникает задача описания распределения индексов особых точек случайного поля, которой посвящена настоящая глава. В разделе 1.1 обсуждаются особые точки векторных полей. Приведено определение индекса особой точки и теорема Пуанкаре о представлении вращения двумерного векторного поля вдоль кривой в виде суммы индексов его особых точек. В разделе 1.2 обсуждается теорема из [46], позволяющая находить математическое ожидание количества точек случайного поля, удовлетворяющих некоторым условиям. Эта теорема применяется в разделе 1.3 для нахождения математического ожидания и дисперсии индекса вращения случайного поля относительно заданной плоской кривой. В разделе 1.4 мы применяем полученный общий результат к случаю однородного изотропного гауссовского векторного поля и получаем явные выражения для дисперсии индекса вращения такого поля вдоль кривой.

1.1. Особые точки векторных полей

Основным объектом исследования настоящей работы являются стохастические потоки.

Определение 1.1.1. [3] *Стохастическим потоком в пространстве \mathbb{R}^d на-*

зывается семейство случайных отображений

$$\phi_{s,t} = \phi_{s,t}(\omega) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, 0 \leq s \leq t,$$

удовлетворяющих следующим свойствам:

1. при каждом $s \geq 0$ $\phi_{s,s} = Id$, то есть отображение $\phi_{s,s}$ является тождественным;
2. При любых $s < t < u$ выполняется соотношение

$$\phi_{t,u} \circ \phi_{s,t} = \phi_{s,u}$$

с вероятностью 1.

Замечание 1.1.1. Под случайным отображением $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ понимается измеримое отображение из Ω в пространство функций

$$\mathfrak{C} = \{f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d\},$$

снабжённое цилиндрической σ -алгеброй. Цилиндрическая σ -алгебра в пространстве \mathfrak{C} порождена множествами вида

$$\{f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \mid (f(x_1), \dots, f(x_k)) \in B\},$$

где $B \subseteq \mathbb{R}^{kd}$ — борелевское множество, x_1, \dots, x_k — точки из \mathbb{R}^d .

Важный класс стохастических потоков получается из решений стохастических дифференциальных уравнений с мартингалом, зависящим от пространственного параметра (в терминологии Н. Kunita [3]) в правой части.

Определение 1.1.2. [3] Пусть $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ — непрерывная справа фильтрация на вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{F}, P) . Пусть $U(x, t), 0 \leq t \leq T$ — семейство непрерывных локальных мартингалов относительно \mathcal{F}_t , заиндексированных параметром $x \in \mathbb{R}^d$. Будем называть семейство $\{U(x, \cdot)\}$ мартингалом с пространственным параметром.

Решение стохастического дифференциального уравнения вида

$$\begin{cases} dx(u, t) = U(x(u, t), dt), \\ x(u, 0) = u, u \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \quad (1.1)$$

мартингал с пространственным параметром u . Решением (1.1) называется непрерывный процесс x со значениям в \mathbb{R}^d , согласованный с (\mathcal{U}_t) , такой, что

$$x(u, t) = u + \int_0^t U(x(u, s), ds), 0 \leq t \leq T. \quad (1.2)$$

Интеграл в (1.2) понимается в смысле Н. Кунита [3]. В нашей работе рассматривается в основном ситуация, когда U — гауссовское случайное поле с ковариацией

$$\text{cov}(U(u, t), U(v, s)) = b(u - v)(t \wedge s).$$

Свойства поля F определяют свойства потока x . Интерес представляет связь между геометрическими свойствами F и геометрией потока x . В случае детерминированных дифференциальных уравнений вида

$$dx(t) = v(x(t))dt,$$

где v — векторное поле на \mathbb{R}^d , такие вопросы подробно исследовались в работах Красносельского [48]. При характеристизации векторного поля важную роль играют особые точки, в которых поле обращается в 0. Так, поведение траекторий фазового потока векторного поля в окрестности неособой точки описывается тривиально, в то время как их поведение в окрестности особой точки может быть очень сложным [1].

Вопросы, связанные с поведением траекторий фазовых потоков векторных полей, возникают в качественной теории дифференциальных уравнений, а также в различных физических задачах, в частности, в гидродинамике. Например, в работе [2] рассматривается бездивергентное векторное поле ξ , заданное в некоторой области $M \subseteq \mathbb{R}^3$ с гладкой границей и касательное к границе M . Для каждой пары точек $x_1, x_2 \in M$ и двух моментов времени $T_1, T_2 > 0$ можно определить коэффициент зацепления траекторий $g^s x_1, 0 \leq s \leq T_1$ и $g^t x_2, 0 \leq t \leq T_2$. Обозначим этот коэффициент зацепления $lk_\xi(x_1, x_2; T_1, T_2)$. В [2] показано, что предел $\lambda_\xi(x_1, x_2) = \lim_{T_1, T_2 \rightarrow \infty} \frac{lk_\xi(x_1, x_2; T_1, T_2)}{T_1 T_2}$ существует для почти всех пар точек $x_1, x_2 \in M$. Более того, этот предел для почти всех пар точек совпадает с определённой геометрической характеристикой поля ξ , а именно, спиральностью. Спиральностью поля ξ называется величина $H(\xi) = \int_M (A, \xi) dV$, где A — такое векторное поле в M , что $\xi = \text{rot } A$ (A называется векторным потенциалом поля ξ ; несмотря на то, что он определён неоднозначно, можно проверить, что $H(\xi)$ не зависит от выбора A , см. [2]).

Замечание 1.1.2. Мы опустили некоторые технические детали. Так, коэффициент зацепления определён лишь для замкнутых траекторий. Соответственно, наши траектории $g^s x, 0 \leq s \leq T$, следует “замкнуть”, соединив точки x и $g^T x$ некоторой кривой. Возникающие при этом технические вопросы рассмотрены в [2].

Замечание 1.1.3. В частности, предел $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{lk_{\xi}(x_1, x_2; T, T)}{T^2}$ также совпадает со спиральностью. Ясно, что число $lk_{\xi}(x_1, x_2; T, T)$ отличается от количества обходов траекторий фазового потока поля ξ не более, чем на постоянную величину. Поэтому аналогичный предел для количества обходов $N_{12}(t)$ траектории частицы, вышедшей из точки x_1 , вокруг траектории частицы, вышедшей из точки x_2 , к моменту времени T , то есть $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{N_{12}(T)}{T^2}$, существует и совпадает со спиральностью поля ξ .

Упомянутые результаты применяются в работе [2] для оценок энергии $E(\xi) = \int |\xi|^2 dV$ поля ξ . Так, энергия связана со спиральностью неравенством $E(\xi) \geq \frac{1}{M} C |H(\xi)|$, где постоянная C зависит от области M . Оценки энергии бездивергентного поля через его геометрические характеристики оказываются важными для математического исследования эффекта магнитного динамо, отвечающего за возникновение магнитного поля звёзд и планет.

Таким образом, важную роль для изучения геометрии фазовых потоков играют свойства соответствующих векторных полей. Одной из геометрических характеристик векторного поля является его вращение вдоль кривой.

Определение 1.1.3. [48] Пусть непрерывное векторное поле Φ задано на некоторой непрерывной кривой $\Gamma = \{(x(t), y(t)) \mid t \in [a, b]\}$. Пусть вектор-функция $\Phi(t) = \Phi(x(t), y(t))$ непрерывна и не обращается в 0 на $[a, b]$. Для каждого $t \in [a, b]$ определим угол между $\Phi(t)$ и $\Phi(a)$, отсчитанный от $\Phi(a)$ против часовой стрелки. Этот угол является многозначной функцией t . Через $\theta(t)$ обозначим непрерывную ветвь этой функции, обращающуюся в 0 при $t = a$, и назовём её угловой функцией поля Φ на кривой Γ . Приращение угловой функции $\theta(t)$ на всём отрезке $[a, b]$, выраженное в единицах полного оборота, то есть величину $\gamma(\Phi, \Gamma) = \frac{1}{2\pi}(\theta(b) - \theta(a)) = \frac{1}{2\pi}\theta(b)$, назовём вращением поля Φ на кривой Γ .

Определение 1.1.4. [48] Пусть на замкнутой кривой Γ задано непрерывное векторное поле Φ без нулевых векторов. Разобьём Γ точками M_1 и M_3 на части: $M_1 M_2 M_3$ и $M_3 M_4 M_1$, и каждую из этих частей будем считать ориентированной в соответствии с положительным направлением обхода замкнутой кривой Γ . Количество вращений поля Φ на Γ назовём суммой вращений Φ на кривых $M_1 M_2 M_3$ и $M_3 M_4 M_1$.

Теперь можно дать определение вращения поля на границе многосвязной области.

Определение 1.1.5. [48] Пусть в области Ω_0 , ограниченной кривой Γ_0 , лежат не имеющие общих точек замкнутые кривые $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$, ограничивающие области $\Omega_1, \dots, \Omega_k$. Будем считать, что области $\Omega_1, \dots, \Omega_k$ не имеют общих точек. Рассмотрим область Ω , состоящую из всех точек, внутренних относительно Γ_0 и внешних относительно всех кривых $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$. Каждой из кривых $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ припишем направление обхода, при котором область Ω остаётся слева. Через Γ будем обозначать всю границу области Ω — объединение кривых $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_k$.

Пусть на Γ задано непрерывное векторное поле Φ без нулевых векторов. Вращение этого поля на каждой кривой $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ обозначим $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_k$. Вращение $\text{ind}_\Gamma \Phi$ поля Φ на границе Γ области Ω , или индекс Γ относительно Φ , определяется равенством

$$\text{ind}_\Gamma \Phi = \gamma_0 - \sum_{j=1}^k \gamma_j.$$

Имеет место следующая теорема о вращении поля на границе области.

Теорема 1.1.1. [48] Пусть непрерывное векторное поле Φ в замкнутой области $\bar{\Omega}$ не имеет нулевых векторов. Тогда вращение $\text{ind}_\Gamma \Phi$ поля Φ на границе Γ области Ω равно нулю.

Определение 1.1.6. [48] Пусть M_0 — изолированная особая точка векторного поля Φ . Поле Φ на каждой окружности достаточно малого радиуса с центром в изолированной особой точке M_0 не имеет нулевых векторов. Количество вращений этого поля на любой такой окружности назовём индексом особой точки M_0 .

Вращение непрерывного векторного поля вдоль кривой, ограничивающей некоторую область, представляется в виде суммы индексов особых точек этого поля, лежащих в области. Точнее говоря, имеет место следующий результат (теорема Пуанкаре о векторном поле).

Утверждение 1.1.1. [48] Пусть Γ — двумерная гладкая замкнутая кривая. Пусть векторное поле Φ на замкнутой области $\bar{\Omega}$ с границей Γ имеет конечное число особых точек, лежащих внутри Γ . Тогда сумма индексов этих особых точек равна вращению поля Φ вдоль Γ .

Тем самым, изучение распределения количества вращений случайного векторного поля вдоль кривой Γ может быть сведено к рассмотрению распределения суммы индексов особых точек этого поля, лежащих внутри Γ .

Для подсчёта индексов особых точек мы будем использовать следующий результат, который обобщает утверждение о том, что для линейного векторного поля $\Phi_0(x, y) = (a_1x + b_1y, a_2x + b_2y)$ индекс γ нулевой особой точки определяется равенством $\gamma = \text{sign} \Delta$, где $\Delta = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$.

Утверждение 1.1.2. [48] Пусть $\phi(x_0, y_0) = \psi(x_0, y_0) = 0$ и пусть в точке (x_0, y_0) функции $\phi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ дифференцируемы. Если

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} \phi'_x(x_0, y_0) & \phi'_y(x_0, y_0) \\ \psi'_x(x_0, y_0) & \psi'_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \neq 0,$$

то особая точка (x_0, y_0) поля Φ , $\Phi(x, y) = (\phi(x, y), \psi(x, y))$, изолирована, и её индекс γ определяется равенством

$$\gamma = \text{sign} \det \begin{pmatrix} \phi'_x(x_0, y_0) & \phi'_y(x_0, y_0) \\ \psi'_x(x_0, y_0) & \psi'_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

1.2. Распределение особых точек случайных полей

Напомним, что процессом Орнштейна-Уленбека называется решение стохастического дифференциального уравнения

$$dX_t = -\mu X_t dt + \sigma dw_t,$$

где $\mu > 0$ и $\sigma > 0$ — некоторые параметры [49], $X(0)$ не зависит от w . В случае $\mu = \frac{1}{2}, \sigma = 1$, если $X(0)$ имеет стандартное нормальное распределение, X является стационарным процессом с $\mathbb{E}X(t) = 0, \text{cov}(X(t), X(s)) = e^{-|t-s|}$.

Пример 1.2.1. Пусть ξ_1, ξ_2 — независимые случайные процессы Орнштейна-Уленбека на \mathbb{R} , заданные уравнениями

$$d\xi_k(t) = -\frac{1}{2}\xi_k(t)dt + dw_k(t), \quad \xi_k(0) = \eta_k, \quad k = 1, 2,$$

где w_1, w_2 — независимые броуновские движения, η_1, η_2 — независимые между собой и от w_1, w_2 стандартные гауссовские случайные величины. Рассмотрим гауссовское случайное поле $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, заданное равенством

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} \xi_1(x) \\ \xi_2(y) \end{pmatrix}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Найдём вероятность того, что внутри квадрата $[0, T] \times [0, T]$ нет ни одной особой точки поля f . Воспользуемся приёмом из статьи [50] (см. утверждение 8 указанной работы).

Заметим, что случайные процессы $\xi_1(t), \xi_2(t), t \in (-\infty, +\infty)$ независимы и совпадают по распределению с процессом Y_t , заданным равенством

$$Y_t = \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)/2} dW_s,$$

где W — винеровский процесс на $(-\infty, +\infty)$, $W(0) = 0$. Имеем

$$\begin{aligned} P(\exists t \in [0, T]: Y_s = 0) &= P\left(\exists t \in [0, T]: \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)/2} dW_s = 0\right) = \\ &= P\left(\exists t \in [0, T]: \int_{-\infty}^t e^{s/2} dW_s = 0\right) = P(\exists s \in [1, e^T]: B(s) = 0). \end{aligned}$$

Здесь через B мы обозначили броуновское движение, такое, что

$$\int_{-\infty}^t e^{s/2} dW_s = B\left(\int_{-\infty}^t e^s ds\right) = B(e^t).$$

Рассмотрим броуновское движение w , $w(0) = x$. Пусть

$$w_1(s) = x - w(s), s \geq 0.$$

Тогда w_1 — броуновское движение, выходящее из точки 0. Вероятность того, что w достигнет 0 на $[0, S]$, равна

$$\begin{aligned} P(\exists s \in [0, S]: w_s = 0) &= P(\exists s \in [0, S]: x - w_s = x) = \\ &= P(\exists s \in [0, S]: w_1(s) = x) = P(\sup_{[0, S]} w_1(s) \geq x) = 2\Psi\left(\frac{x}{\sqrt{S}}\right), \end{aligned}$$

где $\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-u^2/2} du$. Поэтому искомая вероятность для нашего распределения находится усреднением по распределению $B(1)$:

$$P(\exists s \in [1, e^T]: B(s) = 0) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi\left(\frac{x}{\sqrt{e^T - 1}}\right) e^{-x^2/2} dx$$

Итак,

$$P(\forall s \in [0, T]: Y_s \neq 0) = 1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi\left(\frac{x}{\sqrt{e^T - 1}}\right) e^{-x^2/2} dx.$$

Таким образом, учитывая независимость ξ_1 и ξ_2 , имеем

$$\begin{aligned} P(\forall x, y \in [0, T]^2: f(x, y) \neq 0) &= P(\forall x, y \in [0, T]^2: \xi_1(x) \neq 0, \xi_2(y) \neq 0) = \\ &= P(\forall x \in [0, T]: \xi_1(x) \neq 0) P(\forall y \in [0, T]: \xi_2(y) \neq 0) = \\ &= (P(\forall s \in [0, T]: Y_s \neq 0))^2 = \left(1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi\left(\frac{x}{\sqrt{e^T - 1}}\right) e^{-x^2/2} dx\right)^2. \end{aligned}$$

Вопросы, связанные с распределением особых точек векторного поля, могут быть изучены с помощью аппарата, развитого в [46]. В этой книге получена следующая теорема, позволяющая находить математическое ожидание числа точек, в которых случайное векторное поле принимает значения из некоторого множества $B \subseteq \mathbb{R}^k$.

Утверждение 1.2.1 ([46], стр. 267). Пусть $T \subset \mathbb{R}^N$ — компактное множество, такое, что граница ∂T имеет конечную меру Хаусдорфа H_{N-1} , $B \subseteq \mathbb{R}^k$ — открыто, а ∂B имеет размерность Хаусдорфа $K - 1$. Пусть $f = (f_1, \dots, f_N)$ и $g = (g_1, \dots, g_K)$ — N -параметрические случайные поля на T со значениями в \mathbb{R}^N и \mathbb{R}^K . Обозначим

$$\nabla f(t) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial t_j} \right)_{i,j=1,\dots,N}.$$

Предположим, что выполняются следующие условия:

- а) Все компоненты случайных полей $f, \nabla f, g$ непрерывны на T с вероятностью 1 и имеют ограниченные вторые моменты на T ;
- б) Для всех $t \in T$ маргинальные плотности $p_t(x)$ вектора $f(t)$ непрерывны при $x = u$;
- в) Условные плотности распределения $p_t(x \mid \nabla f(t), g(t))$ поля $f(t)$ при условии $g(t)$ и $\nabla f(t)$ ограничены и непрерывны при $x = u$, равномерно по $t \in T$;
- г) Условные плотности распределения $\hat{p}_t(z \mid f(t) = x)$ детерминанта $\det \nabla f(t)$ при условии $f(t) = x$ непрерывны для z и x в окрестностях 0, и, соответственно, равномерно по $t \in T$;

д) Условные плотности распределения $\tilde{p}_t(z \mid f(t) = x)$ поля $g(t)$ при условии $f(t) = x$ непрерывны для всех z и для x в окрестности u , равномерно по $t \in T$;

е) Выполнено следующее ограничение на моменты:

$$\sup_{t \in T} \max_{1 \leq i, j \leq N} \mathbb{E} \left(\left| \frac{\partial f_i}{\partial t_j}(t) \right|^N \right) < \infty;$$

ж) Модули непрерывности относительно евклидовой нормы каждой из компонент f , ∇f и g удовлетворяют

$$\mathbb{P}(\omega(\eta) > \varepsilon) = o(\eta^N)$$

при $\eta \downarrow 0$ для каждого $\varepsilon > 0$.

Тогда, если N_u обозначает количество точек множества T , для которых $f(t) = u \in \mathbb{R}^n$ и $g(t) \in B \subseteq \mathbb{R}^k$, то имеет место равенство

$$\mathbb{E} N_u = \int_T \mathbb{E} (|\det \nabla f(t)| \mathbb{1}_B(g(t)) \mid f(t) = u) p_t(u) dt.$$

Замечание 1.2.1. Мы будем применять утверждение 1.2.1 для множеств T, B с гладкой или кусочно-гладкой границей, и условия на меру и размерность Хаусдорфа границ ∂T и ∂B будут выполняться автоматически.

В дальнейшем мы применим утверждение 1.2.1 для случая $g(t) = \nabla f(t)$. Однако, доказательство этого результата в [46] использует существование совместной плотности распределения случайных величин $f(t)$, $\det \nabla f(t)$, $g(t)$, которое не выполнено в нашей ситуации. Но это доказательство можно провести и для случая $g(t) = \nabla f(t)$. Все выкладки в [46] остаются практически без изменений. Таким образом, имеет место следующая лемма.

Лемма 1.2.1. Утверждение 1.2.1 остаётся справедливым, если $g(t) = \nabla f(t)$, и существует совместная плотность распределения $f(t)$ и $\nabla f(t)$.

Доказательство. В [46] используются следующие обозначения:

- $\delta_\varepsilon : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ — функция, определённая равенством $\delta_\varepsilon = C_\varepsilon^{-1} \mathbb{1}_{B_\varepsilon}$, где C_ε — объём шара $B_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^N : \|x\| \leq \varepsilon\}$;
- $N^\varepsilon(T) = \int_T \delta_\varepsilon(f(t)) \mathbb{1}_B(g(t)) |\det \nabla f(t)| dt$;
- $p_t(x, \nabla y)$ — совместная плотность распределения $f(t)$ и $\nabla f(t)$;

- $p_t(\nabla y)$ — плотность распределения $\nabla f(t)$;
- $p_t(x)$ — плотность распределения $f(t)$;
- $p_t(x|\nabla y)$ — плотность распределения $f(t)$ при данном $\nabla f(t)$;
- $p_t(x, \nabla y, v)$ — совместная плотность распределения $f(t), \nabla f(t), g(t)$.

Доказательство утверждения 1.2.1 в [46] проводится следующим образом. Вначале доказывается детерминированное утверждение (теорема 11.2.3), а именно, для детерминированных векторных полей f, g при условиях

- $f, \nabla f, g$ непрерывны;
- не существует точек $t \in T$, таких, что $f(t) = u, g(t) \in \partial B$;
- не существует точек $t \in T$, таких, что $f(t) = u, \det \nabla f(t) = 0$;
- не существует точек $t \in \partial T$, таких, что $f(t) = u$,

показано, что выполнено соотношение

$$N_u(f, g; T, B) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_T \delta_\varepsilon(f(t) - u) \mathbb{1}_B(g(t)) |\det \nabla f(t)| dt.$$

В леммах 11.2.10, 11.2.11 из [46] показано, что при предположениях теоремы 1.2.1 эти условия выполнены с вероятностью 1. Эти рассуждения остаются верными в нашем случае $g(t) = \nabla f(t)$.

Далее, в [46] показано выполнение верхней оценки (теорема 11.2.6), а именно,

$$\mathbb{E} N_u(f, g; T, B) \leq \int_T dt \int_B dv \int_{\mathbb{R}^{N^2}} |\det \nabla y| p_t(u, \nabla y, v) d\nabla y.$$

В нашем случае $g(t) = \nabla f(t)$ это утверждение должно быть сформулировано таким образом:

$$\mathbb{E} N_u(f, g; T, B) \leq \int_T dt \int_B |\det \nabla y| p_t(u, \nabla y) d\nabla y.$$

Основным моментом доказательства теоремы 11.2.6 в [46] являются следующие вычисления на стр. 272 (доказательство проводится для случая $u = 0$):

$$\begin{aligned}\mathbb{E}N^\varepsilon(T) &= \int_T dt \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N^2} \times B} \delta_\varepsilon(x) |\det \nabla y| p_t(x, \nabla y, v) dx d\nabla y dv = \\ &= \int_T dt \int_{\mathbb{R}^{N^2} \times B} |\det \nabla y| p_t(\nabla y, v) d\nabla y dv \times \int_{\mathbb{R}^N} \delta_\varepsilon(x) p_t(x \mid \nabla y, v) dx,\end{aligned}$$

после чего с помощью леммы Фату и теоремы Лебега об ограниченной сходимости делается вывод

$$\mathbb{E}N_0 \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{E}N^\varepsilon(T) = \int_T dt \int_B dv \int_{\mathbb{R}^{N^2}} |\det \nabla y| p_t(0, \nabla y, v) d\nabla y.$$

В нашем случае эти вычисления следует записывать таким образом:

$$\begin{aligned}N_\varepsilon(T) &= \int_T \int_{\mathbb{R}^N \times B} \delta_\varepsilon(x) |\det \nabla y| p_t(x, \nabla y) dx d\nabla y = \\ &= \int_T dt \int_B |\det \nabla y| p_t(\nabla y) d\nabla y \times \int_{\mathbb{R}^N} \delta_\varepsilon(x) p_t(x \mid \nabla y) dx,\end{aligned}$$

после чего с помощью леммы Фату и теоремы Лебега об ограниченной сходимости имеем

$$\mathbb{E}N_0 \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{E}N^\varepsilon(T) = \int_T dt \int_B |\det \nabla y| p_t(0, \nabla y) d\nabla y.$$

Далее в [46] получена верхняя оценка (теорема 11.2.7):

$$\mathbb{E}N_u(f, g; T, B) \geq \int_T dt \int_B dv \int_{\mathbb{R}^{N^2}} |\det \nabla y| p_t(u, \nabla y, v) d\nabla y.$$

В нашем случае, аналогичное утверждение выглядит так:

$$\mathbb{E}N_u(f, g; T, B) \geq \int_T dt \int_B |\det \nabla y| p_t(u, \nabla y) d\nabla y.$$

Доказательство в [46] проводится с помощью кусочно-линейной аппроксимации поля f и оценки числа нулей аппроксимирующего процесса. Все рассуждения при этом сохраняются в нашем случае. \square

1.3. Вращение случайного поля вдоль кривой

Пусть Γ — непрерывная кривая на плоскости. Для двумерного векторного поля $v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, непрерывного на Γ и не обращающегося на ней в нуль, определено количество вращений вдоль Γ [48]. Следовательно, можно рассматривать вопрос о распределении количества вращений вдоль кривой Γ непрерывного с вероятностью 1 случайного векторного поля на плоскости. Следующий результат, получающийся с помощью применения утверждения 1.2.1, даёт выражение для математического ожидания и дисперсии вращения случайного поля вдоль Γ .

Теорема 1.3.1. Пусть $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ — Пусть $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ — случайное векторное поле на \mathbb{R}^2 , и пусть Γ — фиксированная кусочно-гладкая простая (т.е. не имеющая самопересечений) замкнутая кривая в \mathbb{R}^2 , ограничивающая некоторую область T . Предположим, что при любых $t_1, t_2 \in T, t_1 \neq t_2$ существует совместная плотность распределения $f(t_1), \nabla f(t_1), f(t_2), \nabla f(t_2)$. Пусть

$$\tilde{T} = \{(t^1, t^2) \in T^2 : t^1 \neq t^2\}, T_2^\delta = \{(t^1, t^2) \in T^2 : \|t^1 - t^2\| \geq \delta\}, \delta > 0,$$

а также выполнены условия а)-д):

а) $f, \frac{\partial f_i}{\partial t_j}$ — непрерывны на T с вероятностью 1 и имеют ограниченные моменты порядка 4 на T ;

б) для всех $t \in T$ плотность распределения $p_{f(t)}(x)$ случайного вектора $f(t)$ непрерывна в точке $x = 0$;

б') для всех $\tilde{t} = (t^1, t^2) \in \tilde{T}$ плотность распределения $p_{\tilde{f}(\tilde{t})}(x_1, x_2)$ случайного вектора $\tilde{f}(\tilde{t}) = (f(t^1), f(t^2))$ непрерывна в точке $(x_1, x_2) = (0, 0)$;

в) для всех $t \in T$ условная плотность распределения $p_t(x \mid \nabla f(t))$ случайного вектора $f(t)$ при условии $\nabla f(t)$ существует, ограничена и является непрерывной в точке $x = 0$, равномерно по $t \in T$;

в') для всех $\tilde{t} = (t^1, t^2) \in \tilde{T}$ условная плотность распределения $p_{\tilde{t}}(\tilde{x} \mid \nabla \tilde{f}(\tilde{t}))$ случайного вектора $\tilde{f}(\tilde{t})$ при условии $\nabla \tilde{f}(\tilde{t})$ существует, ограничена и непрерывна в $\tilde{x} = (0, 0)$, равномерно по $(t^1, t^2) \in T_2^\delta$ при каждом $\delta > 0$;

г) для всех $t \in T$ условная плотность распределения $p_t(z \mid f(t) = x)$ случайной матрицы $\nabla f(t)$ при условии $f(t) = x$ непрерывна по z и x , равномерно по $t \in T$;

г') для всех $\tilde{t} = (t^1, t^2) \in \tilde{T}$ условная плотность распределения $p_{\tilde{t}}(z \mid \tilde{f}(\tilde{t}) = \tilde{x})$ случайной матрицы $\nabla \tilde{f}(\tilde{t})$ при условии $\tilde{f}(\tilde{t}) = \tilde{x}$ непрерывна по z и \tilde{x} , равномерно по $(t^1, t^2) \in T_2^\delta$ при каждом $\delta > 0$;

д) при каждом $\varepsilon > 0$ модуль непрерывности на T каждой компоненты f , ∇f удовлетворяет асимптотическому соотношению $\mathbb{P}(\omega(\eta) > \varepsilon) = o(\eta^4)$ при $\eta \downarrow 0$.

Пусть $\text{ind}_\Gamma f$ — индекс кривой Γ относительно поля f . Тогда выполнено следующее соотношение:

$$\mathbb{E}(\text{ind}_\Gamma f) = \int_T \mathbb{E}(\det \nabla f(t) \mid f(t) = 0) p_t(0) dt,$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\text{ind}_\Gamma f)^2 &= \int_{T^2} \mathbb{E}(\det \nabla f(t^1) \det \nabla f(t^2) \mid f(t^1) = f(t^2) = 0) p_{(t^1, t^2)}(0) dt^1 dt^2 + \\ &\quad + \int_T \mathbb{E}(|\det \nabla f(t)| \mid f(t) = 0) p_t(0) dt, \end{aligned}$$

где $p_t(0)$ — плотность распределения $f(t)$ в точке 0, а $p_{(t^1, t^2)}(0)$ — плотность распределения поля $\tilde{f}(t^1, t^2) = (f(t^1), f(t^2))$ в точке 0.

Пример 1.3.1. Примером поля, удовлетворяющего условиям теоремы, является следующее случайное поле f :

$$f(u) = \begin{pmatrix} f_1(u) \\ f_2(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{\mathbb{R}^2} \phi(u+v) W_1(dv) \\ \int_{\mathbb{R}^2} \phi(u+v) W_2(dv) \end{pmatrix},$$

где $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ — неотрицательная функция со свойством $\int_{\mathbb{R}^2} \phi^2(u) du = 1$,

W_1 и W_2 — два независимых белых шума на \mathbb{R}^2 . Дальнейшее обсуждение этого примера проводится в разделе 1.4.

Доказательство теоремы 1.3.1

Пусть N_+ — количество особых точек f внутри T (т.е. точек $t \in T$, в которых $f(t) = 0$) с индексом 1, N_- — количество особых точек внутри T с индексом -1 :

$$N_+ = |\{t \in T : f(t) = 0, \text{ind}_t f = 1\}|, N_- = |\{t \in T : f(t) = 0, \text{ind}_t f = -1\}|.$$

Известно, что с вероятностью 1 у поля f нет особых точек с $\det \nabla f(t) = 0$ (лемма 11.2.12 из [46]).

Итак, с вероятностью 1:

$$N_+ = |\{t \in T \mid f(t) = 0, \det \nabla f(t) > 0\}|,$$

$$N_- = |\{t \in T \mid f(t) = 0, \det \nabla f(t) < 0\}|,$$

и

$$\text{ind}_\Gamma f = N_+ - N_-.$$

Определим векторные поля \tilde{f}, \tilde{g} на $\tilde{T} = \{(t^1, t^2) \in T^2 : t^1 \neq t^2\}$ равенствами

$$\tilde{f}(\tilde{t}) = (f(t^1), f(t^2)), \tilde{g}(\tilde{t}) = (\nabla f(t^1), \nabla f(t^2)),$$

где $\tilde{t} = (t^1, t^2) \in \tilde{T}$. Определим также векторное поле g на T равенством

$$g(t) = \nabla f(t), t \in T.$$

Пусть

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \cong \mathbb{R}^4 : ad - bc > 0 \right\},$$

$$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \cong \mathbb{R}^4 : ad - bc < 0 \right\}.$$

Наше доказательство аналогично доказательству теоремы 11.5.1 в [46]. Фиксируем $\delta > 0$ и пару (s_1, s_2) , где $s_i \in \{1, -1\}$, после чего применим утверждение 1.2.1 к $\tilde{f}, \tilde{g}, T_2^\delta, B = \prod_{i=1}^2 B_{s_i}$. Условия этого утверждения тривиально проверяются в нашем случае. Мы получаем

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} |\{(t^1, t^2) \in T_2^\delta : f(t^i) = 0, g(t^i) \in B_{s_i}, i = 1, 2\}| = \\ &= \mathbb{E} \left| \left\{ \tilde{t} \in T_2^\delta : \tilde{f}(\tilde{t}) = 0, \tilde{g}(\tilde{t}) \in \prod_{i=1}^2 B_{s_i} \right\} \right| = \\ &= \int_{T_2^\delta} \mathbb{E} \left(|\det \nabla \tilde{f}(\tilde{t})| \mathbb{1}_{\prod_{i=1}^2 B_{s_i}}(\tilde{g}(\tilde{t})) \mid \tilde{f}(\tilde{t}) = 0 \right) p_{\tilde{t}}(0) d\tilde{t} = \\ &= \int_{T_2^\delta} \mathbb{E} \left(|\det \nabla \tilde{f}(\tilde{t})| \prod_{i=1}^2 \mathbb{1}_{\text{sign det } \nabla f(t^i) = s_i} \mid \tilde{f}(\tilde{t}) = 0 \right) p_{\tilde{t}}(0) d\tilde{t} = \\ &= s_1 s_2 \int_{T_2^\delta} \mathbb{E} \left(\prod_{i=1}^2 \det \nabla f(t^i) \mathbb{1}_{\text{sign det } \nabla f(t^i) = s_i} \mid \tilde{f}(\tilde{t}) = 0 \right) p_{\tilde{t}}(0) d\tilde{t}. \end{aligned}$$

При $\delta \rightarrow 0$ имеем с вероятностью 1

$$\begin{aligned} & \left| \left\{ (t^1, t^2) \in T_2^\delta : f(t^i) = 0, g(t^i) \in B_{s_i}, i = 1, 2 \right\} \right| \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \\ & \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \left| \left\{ (t^1, t^2) \in \tilde{T} : f(t^i) = 0, g(t^i) \in B_{s_i}, i = 1, 2 \right\} \right|, \end{aligned}$$

и эта сходимость монотонна. Поэтому

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left| \left\{ (t^1, t^2) \in T_2^\delta : f(t^i) = 0, g(t^i) \in B_{s_i}, i = 1, 2 \right\} \right| \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \\ & \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \mathbb{E} \left| \left\{ (t^1, t^2) \in \tilde{T} : f(t^i) = 0, g(t^i) \in B_{s_i}, i = 1, 2 \right\} \right|. \end{aligned}$$

С другой стороны, имеем в силу монотонной сходимости:

$$\begin{aligned} & \int_{T_2^\delta} \mathbb{E} \left(\left| \det \nabla \tilde{f}(\tilde{t}) \right| \prod_{i=1}^2 \mathbb{1}_{\text{sign det } \nabla f(t^i)=s_i, i=1,2} \mid \tilde{f}(\tilde{t}) = 0 \right) p_{\tilde{t}}(0) d\tilde{t} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \\ & \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \int_{T^2} \mathbb{E} \left\{ \left| \det \nabla \tilde{f}(\tilde{t}) \right| \prod_{i=1}^2 \mathbb{1}_{\text{sign det } \nabla f(t^i)=s_i} \mid \tilde{f}(\tilde{t}) = 0 \right\} p_{\tilde{t}}(0) d\tilde{t}. \end{aligned}$$

Следовательно, переходя к пределу при $\delta \rightarrow 0$, получаем

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left| \left\{ (t^1, t^2) \in \tilde{T} : f(t^i) = 0, g(t^i) \in B_{s_i}, i = 1, 2 \right\} \right| = \\ & = s_1 s_2 \int_{T^2} \mathbb{E} \left(\prod_{i=1}^2 \det \nabla f(t^i) \mathbb{1}_{\text{sign det } \nabla f(t^i)=s_i} \mid \tilde{f}(\tilde{t}) = 0 \right) p_{\tilde{t}}(0) d\tilde{t}, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & s_1 s_2 \mathbb{E} \left| \left\{ (t^1, t^2) \in \tilde{T} : f(t^i) = 0, g(t^i) \in B_{s_i} \right\} \right| = \\ & = \int_{\tilde{T}} \mathbb{E} \left(\prod_{i=1}^2 \det \nabla f(t^i) \mathbb{1}_{\text{sign det } \nabla f(t^i)=s_i} \mid \tilde{f}(\tilde{t}) = 0 \right) p_{\tilde{t}}(0) d\tilde{t}. \end{aligned}$$

Теперь, проводя суммирование по всем 4 таким последовательностям (s_1, s_2) с $s_i = \pm 1$, мы получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{s_1, s_2: s_i = \pm 1} s_1 s_2 \mathbb{E} \left| \left\{ (t^1, t^2) \in \tilde{T} : f(t^i) = 0, g(t^i) \in B_{s_i} \right\} \right| = \\ & = \sum_{s_1, s_2: s_i = \pm 1} \int_{\tilde{T}} \mathbb{E} \left(\prod_{i=1}^2 (\det \nabla f(t^i) \mathbb{1}_{\text{sign det } \nabla f(t^i)=s_i}) \mid \tilde{f}(\tilde{t}) = 0 \right) p_{\tilde{t}}(0) d\tilde{t}. \end{aligned}$$

Слева имеем

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \sum_{s_1, s_2: s_i = \pm 1} s_1 s_2 \left| \left\{ (t^1, t^2) \in \tilde{T} : f(t^i) = 0, \text{sign det } \nabla f(t^i) = s_i \right\} \right| = \\ & = \mathbb{E} \left((N_+(N_+ - 1) + N_-(N_- - 1) - 2N_+N_-) \right) = \mathbb{E}(N_+ - N_-)^2 - \mathbb{E}(N_+ + N_-). \end{aligned}$$

Справа получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{s_1, s_2: s_i = \pm 1} \int_{\tilde{T}} \mathbb{E} \left(\prod_{i=1}^2 (\det \nabla f(t^i) \mathbb{1}_{\text{sign det } \nabla f(t^i) = s_i}) \mid \tilde{f}(\tilde{t}) = 0 \right) p_{\tilde{t}}(0) d\tilde{t} = \\ & = \int_{\tilde{T}} \mathbb{E} \left(\prod_{i=1}^2 \det \nabla f(t^i) \mid \tilde{f}(\tilde{t}) = 0 \right) p_{\tilde{t}}(0) d\tilde{t}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(N_+ - N_-)^2 - \mathbb{E}(N_+ + N_-) = \\ & = \int_{\tilde{T}} \mathbb{E} \left(\prod_{i=1}^2 \det \nabla f(t^i) \mid \tilde{f}(\tilde{t}) = 0 \right) p_{\tilde{t}}(0) d\tilde{t}. \quad (1.3) \end{aligned}$$

Аналогичное применение утверждения 1.2.1 к полям f, g на T даёт

$$\begin{aligned} \mathbb{E}N_+ &= \int_T \mathbb{E} (|\det \nabla f(t)| \mathbb{1}_{\det \nabla f(t) > 0} \mid f(t) = 0) p_t(0) dt, \\ \mathbb{E}N_- &= \int_T \mathbb{E} (|\det \nabla f(t)| \mathbb{1}_{\det \nabla f(t) < 0} \mid f(t) = 0) p_t(0) dt, \\ \mathbb{E}(N_+ + N_-) &= \int_T \mathbb{E} (|\det \nabla f(t)| \mid f(t) = 0) p_t(0) dt. \end{aligned}$$

Итак, получаем, используя утверждение 1.1.2:

$$\mathbb{E}(\text{ind}_\Gamma f) = \mathbb{E}(N_+ - N_-) = \int_T \mathbb{E} (|\det \nabla f(t)| \mid f(t) = 0) p_t(0) dt.$$

и

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(\text{ind}_\Gamma f)^2 = \mathbb{E}(N_+ - N_-)^2 = \\ & = \int_{\tilde{T}} \mathbb{E} \left(\prod_{i=1}^2 \det \nabla f(t^i) \mid \tilde{f}(\tilde{t}) = 0 \right) p_{\tilde{t}}(0) d\tilde{t} + \int_T \mathbb{E} (|\det \nabla f(t)| \mid f(t) = 0) p_t(0) dt. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

1.4. Дисперсия индекса вращения изотропного однородного гауссовского векторного поля

Общая формула для математического ожидания и дисперсии количества вращений случайного поля вдоль кривой, полученная в разделе 1.3, может быть применена в частном случае однородного изотропного векторного поля.

Понятие однородного изотропного случайного поля возникло в связи с рассмотрением наиболее простой модели турбулентности — однородной изотропной турбулентности (см. [20]). В этой модели распределение поля скоростей жидкости инвариантно относительно параллельных переносов, поворотов и отражений.

Определение 1.4.1. [12] Пусть $U = \{U(x) \mid x \in \mathbb{R}^2\}$ — векторнозначное случайное поле на \mathbb{R}^2 . Для любого преобразования $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ обозначим через UT случайное поле, определённое равенством $UT(x) = U(T(x))$. Поле U называется однородным, если поле UT имеет то же распределение, что и U , для любого параллельного переноса $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, то есть для любого преобразования вида $T(x) = T_z(x) = x + z$, где $z \in \mathbb{R}^2$ — постоянный вектор. Поле U называется инвариантным относительно поворотов, если случайное поле $GU(G^T x)$, $x \in \mathbb{R}^2$ имеет то же распределение, что U , для всех матриц поворотов $G = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$. Однородное случайное поле, инвариантное относительно поворотов, называется поляризованным. Если поляризованное векторное поле также является инвариантным относительно отражений, то оно называется изотропным.

Следуя статье [12], опишем некоторые свойства таких полей. Из свойств однородности и изотропности случайного векторного поля можно вывести, что ковариационная матрица такого поля имеет специальный вид, описываемый следующим результатом.

Утверждение 1.4.1. [12] Матричнозначная функция b является ковариационной матрицей компонент некоторого однородного изотропного векторного поля f , если и только если она имеет вид

$$b_{kl}(z) = \delta_{kl}b_N(\|z\|) + \frac{z^k z^l}{\|z\|^2}(b_L(\|z\|) - b_N(\|z\|)), \|z\| > 0,$$

$$b(0) = b_N(0)I,$$

для некоторых функций b_N, b_L вида

$$b_L(r) = \int_0^\infty J_1'(r\alpha) \Phi_P(d\alpha) + \int_0^\infty \frac{J_1(r\alpha)}{r\alpha} \Phi_S(d\alpha),$$

$$b_N(r) = \int_0^\infty \frac{J_1(r\alpha)}{r\alpha} \Phi_P(d\alpha) + \int_0^\infty J_1'(r\alpha) \Phi_S(d\alpha),$$

где Φ_P, Φ_S — некоторые конечные меры на $[0, \infty)$.

Если Φ_P и Φ_S имеют конечные четвёртые моменты, то функции b_L, b_N являются 4 раза непрерывно дифференцируемыми, и

$$b_L(r) = b_0 - \frac{1}{2}\beta_L r^2 + O(r^4), r \rightarrow 0,$$

$$b_N(r) = b_0 - \frac{1}{2}\beta_N r^2 + O(r^4), r \rightarrow 0,$$

где

$$\beta_L = \frac{3}{8} \int_0^\infty \alpha^2 \Phi_P(d\alpha) + \frac{1}{8} \int_0^\infty \alpha^2 \Phi_S(d\alpha)$$

и

$$\beta_N = \frac{1}{8} \int_0^\infty \alpha^2 \Phi_P(d\alpha) + \frac{3}{8} \int_0^\infty \alpha^2 \Phi_S(d\alpha).$$

Замечание 1.4.1. Мы обозначаем через $J_n(x)$ функцию Бесселя порядка n , являющуюся решением уравнения

$$x^2 J_n''(x) + x J_n'(x) + (x^2 - n^2) J_n(x) = 0.$$

Мы будем использовать некоторые свойства этих функций, имеющиеся, например, в [51], гл. 11 “Функции Бесселя”. На с. 415 из [51] приведены следующие равенства:

$$J_0'(x) = -J_1(x),$$

(формула (11.13)),

$$J_0(x) + J_2(x) = \frac{2}{x} J_1(x)$$

(формула (11.10) при $n = 1$),

$$J_0(x) - J_2(x) = 2J_1'(x).$$

(формула (11.12) при $n = 1$). Из последних двух формул следует

$$J_0(x) = J'_1(x) + \frac{J_1(x)}{x}.$$

На с. 424, 425 из [51] приведены также следующие формулы:

$$J_0(br) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ibr \sin \theta} d\theta.$$

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

Итак, рассмотрим однородное изотропное двумерное гауссовское векторное поле. Для упрощения вычислений будет рассмотрен только случай $b_L(r) \equiv b_N(r)$, или, в терминах утверждения 1.4.1, $\Phi_P = \Phi_S$. Таким образом, ковариационная функция компонент такого поля имеет вид

$$b_{ij}(z) = \delta_{ij} b_N(\|z\|), z \in \mathbb{R}^2.$$

Вышеупомянутое поле

$$f(u) = \begin{pmatrix} f_1(u) \\ f_2(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{\mathbb{R}^2} \phi(u+v) W_1(dv) \\ \int_{\mathbb{R}^2} \phi(u+v) W_2(dv) \end{pmatrix}, \quad \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$$

является примером такого поля.

Теорема 1.4.1. Пусть f — центрированное гауссовское изотропное векторное поле на \mathbb{R}^2 с ковариационной функцией компонент $b_{ij}(z) = \delta_{ij} b_N(\|z\|)$, где $b_N : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ имеет вид

$$b_N(r) = \int_0^\infty J'_1(r\alpha) \Phi(d\alpha) + \int_0^\infty \frac{J_1(r\alpha)}{r\alpha} \Phi(d\alpha) = \int_0^\infty J_0(r\alpha) \Phi(d\alpha),$$

Φ — конечная мера на $[0, \infty)$ с конечным четвёртым моментом, и $\Phi \neq c\delta_0$, то есть Φ не сосредоточена в точке $\{0\}$, и выполнено условие

$$b_N(r) < b_N(0), r > 0.$$

Тогда дисперсия количества вращений f вдоль замкнутой кусочно-гладкой кривой Γ , которая ограничивает открытую область T , равна

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\text{ind}_\Gamma f)^2 &= \\ &= \int_{T^2} \frac{2}{\|t^1 - t^2\|} \left\{ \frac{b_N(\|t^1 - t^2\|)b'_N(\|t^1 - t^2\|)^3}{b_N(0)^2 - b_N(\|t^1 - t^2\|)^2} + \right. \\ &\quad \left. + b'_N(\|t^1 - t^2\|)b''_N(\|t^1 - t^2\|) \right\} p_{(t^1, t^2)}(0) dt^1 dt^2 - b''_N(0)p(0)S(T),\end{aligned}$$

где $S(T)$ — площадь T .

Здесь

$$p_{(t^1, t^2)}(0) = \frac{1}{(2\pi)^2(b_N(0)^2 - b_N(\|t^1 - t^2\|)^2)},$$

и $p_t(0) = p(0) \equiv \frac{1}{2\pi b_N(0)^2}$ для любого $t \in T$.

Замечание 1.4.2. Легко видеть, что для любого однородного гауссовского векторного поля f и кривой Γ , удовлетворяющей условиям теоремы 1.3.1: $\mathbb{E}(\text{ind}_\Gamma f) = 0$. Для этого достаточно показать, что

$$\mathbb{E}(\det \nabla f(t) \mid f(t) = 0) = 0.$$

Положим $K_{ij}(t, s) = K_{ij}(s - t) = \mathbb{E}(f_i(t)f_j(s))$. Имеем

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\det \nabla f(t) \mid f(t) = 0) &= \mathbb{E}\left(\frac{\partial f_1}{\partial t_1}(t)\frac{\partial f_2}{\partial t_2}(t) - \frac{\partial f_1}{\partial t_2}(t)\frac{\partial f_2}{\partial t_1}(t)\right) = \\ &= -\frac{\partial K_{12}}{\partial t_1 \partial t_2}(0) + \frac{\partial K_{12}}{\partial t_2 \partial t_1}(0) = 0.\end{aligned}$$

Замечание 1.4.3. Можно показать, что вышеупомянутое поле

$$f(u) = \begin{pmatrix} f_1(u) \\ f_2(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{\mathbb{R}^2} \phi(u+v)W_1(dv) \\ \int_{\mathbb{R}^2} \phi(u+v)W_2(dv) \end{pmatrix},$$

где $\phi(x) = h(\|x\|)$, $x \in \mathbb{R}^2$, удовлетворяет условиям теоремы 1.4.1. Действительно, для преобразования Фурье

$$\hat{b}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} b(z)e^{-ikz} dz$$

функции

$$b(z) = b_N(\|z\|) = \int_{\mathbb{R}^2} \phi(u) \phi(u+z) du$$

получаем

$$\hat{b}(k) = \frac{1}{2\pi} \hat{\phi}(k)^2.$$

Поскольку $\phi(\cdot) \in S(\mathbb{R}^2)$, получаем также $\hat{\phi}(\cdot) \in S(\mathbb{R}^2)$, где $S(\mathbb{R}^2)$ обозначает пространство Шварца. Ясно, что $\hat{\phi}(k)$ зависит лишь от $\|k\|$, поскольку $\phi(x) = h(\|x\|)$. Следовательно, то же самое верно для $\hat{b}(k)$, то есть $\hat{b}(k) = a(\|k\|)$. Итак, используя интегрирование в полярных координатах и свойства функций Бесселя (см. замечание 1.4.1), получаем

$$b_N(\|z\|) = b(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \hat{b}(k) e^{ikz} dk = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} a(\|k\|) e^{ikz} dk = \int_0^\infty \alpha a(\alpha) J_0(\alpha \|z\|) d\alpha.$$

Следовательно, функция $b_N(r)$ имеет требуемый вид

$$b_N(r) = \int_0^\infty J_0(r\alpha) \Phi(d\alpha),$$

и все моменты меры $\Phi(d\alpha) = \alpha a(\alpha) d\alpha$ конечны, поскольку $a(\alpha)$ является быстро убывающей при $\alpha \rightarrow \infty$.

Доказательство теоремы 1.4.1

Сначала проверим, что наше поле удовлетворяет условиям теоремы 1.3.1. Проверим условие е) на модуль непрерывности поля и его производных. В нашем случае можно утверждать даже больше: для любого $\varepsilon > 0$ и для любого $N > 0$ модуль непрерывности каждой компоненты f , ∇f удовлетворяет соотношению $\mathbb{P}(\omega(\eta) > \varepsilon) = o(\eta^N)$ при $\eta \downarrow 0$. Чтобы это доказать, нам понадобится следующее утверждение.

Утверждение 1.4.2. Пусть h — центрированное гауссовское случайное векторное поле на замкнутой области $T \subset \mathbb{R}^2$, такое, что его ковариационная функция $K(t, s) = \mathbb{E}f(t)f(s)$ дважды непрерывно дифференцируема на $T \times T$. Тогда поле h имеет непрерывную модификацию, и его модуль непрерывности $\omega(\eta)$ удовлетворяет условию

$$\mathbb{P}(\omega(\eta) > \varepsilon) = o(\eta^N), \eta \downarrow 0$$

для каждого $\varepsilon > 0$ и каждого $N > 0$.

Доказательство. Это утверждение фактически доказано на стр. 268 книги [46]. Доказательство основано на применении неравенства Бореля-Цирельсона (теорема 2.1.1 из [46]) к полю H на $T \times T$, определённого равенством $H(s, t) = h(t) - h(s)$. \square

Легко видеть, что при наших предположениях ковариационные функции всех полей $\frac{\partial f_i}{\partial t_j}$ дважды непрерывно дифференцируемы на $T \times T$ (поскольку функция $b_N - 4$ раза непрерывно дифференцируема); итак, мы можем применить наше утверждение 1.4.2 к ним. Следовательно, мы получаем, что рассматриваемые поля действительно являются непрерывными с вероятностью 1, и их модули непрерывности удовлетворяют условиям теоремы 1.3.1.

Для совместно гауссовских случайных величин из теоремы о нормальной корреляции следует, что все условные распределения являются гауссовскими. Поэтому, чтобы проверить выполнение других условий нашей теоремы, мы должны показать невырожденность ковариационной матрицы рассматриваемых случайных величин. Это является утверждением следующего утверждения, доказательство которого включает утверждения 1.4.4—1.4.10.

Утверждение 1.4.3. *В предположениях теоремы 1.4.1, для любых 2 точек $t^1 \neq t^2$ совместное распределение гауссовских случайных величин*

$$f_i(t^j), \frac{\partial f_k}{\partial t_m^l}(t^l), i, j, k, l, m = 1, 2,$$

является невырожденным.

В нашем случае, для любых двух точек $t^1 \neq t^2$ случайные векторы

$$\left(f_1(t^j), \frac{\partial f_1}{\partial t_m^l}(t^l), j, l, m = 1, 2 \right) \text{ и } \left(f_2(t^j), \frac{\partial f_2}{\partial t_m^l}(t^l), j, l, m = 1, 2 \right)$$

являются независимыми и одинаково распределёнными. Поэтому, достаточно проверить, что ковариационная матрица случайных величин

$$f_1(t^j), \frac{\partial f_1}{\partial t_m^l}(t^l), j, l, m = 1, 2$$

является невырожденной. Эту проверку можно выполнить, явно вычислив ковариационную матрицу этих случайных величин. Действительно, имеем следующие вспомогательные утверждения. Некоторые доказательства опускаем, поскольку они содержат лишь стандартные технические расчёты.

Утверждение 1.4.4. *Ковариационная матрица случайных величин*

$$f_1(t^j), \frac{\partial f_1}{\partial t_m^l}(t^l), j, l, m = 1, 2$$

равна

$$\begin{pmatrix} b_N(0) & b_N(r) & 0 & \frac{\partial b_N(r)}{\partial r} & 0 & 0 \\ b_N(r) & b_N(0) & -\frac{\partial b_N(r)}{\partial r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\partial b_N(r)}{\partial r} & \beta_N & -\frac{\partial^2 b_N(r)}{\partial r^2} & 0 & 0 \\ \frac{\partial b_N(r)}{\partial r} & 0 & -\frac{\partial^2 b_N(r)}{\partial r^2} & \beta_N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_N & -\frac{\partial b_N(r)}{\partial r}/r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial b_N(r)}{\partial r}/r & \beta_N \end{pmatrix},$$

где $r = \|t^1 - t^2\|$.

Утверждение 1.4.5. *Определитель ковариационной матрицы случайных величин*

$$f_1(t^j), \frac{\partial f_1}{\partial t_m^l}(t^l), j, l, m = 1, 2$$

равен

$$\begin{aligned} & (\beta_N b_N(0) - b'_N(r)^2 + b_N(r)b''_N(r) + \beta_N b_N(r) + b_N(0)b''_N(r)) \times \\ & \times (\beta_N b_N(0) - b'_N(r)^2 + b_N(r)b''_N(r) - \beta_N b_N(r) - b_N(0)b''_N(r)) \times \\ & \times (\beta_N r - b'_N(r))(\beta_N r + b'_N(r)) = \\ & = ((\beta_N b_N(0) - b'_N(r)^2 + b_N(r)b''_N(r))^2 - (\beta_N b_N(r) - b_N(0)b''_N(r))^2) \times \\ & \times ((\beta_N r)^2 - b'_N(r)^2), \end{aligned}$$

где $r = \|t^1 - t^2\|$.

Утверждение 1.4.6. *При любом $x > 0$ имеем*

$$|J'_1(x)| < \frac{1}{2}, |J_1(x)| < \frac{x}{2}.$$

Доказательство. Докажем сначала неравенство $|J'_1(x)| < \frac{1}{2}$. Согласно утверждению 1.4.1, существует изотропное случайное поле $\xi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ с ковариационной функцией компонент

$$\text{cov}(\xi^k(z_1), \xi^l(z_2)) = \delta_{kl} b_N(\|z\|) + \frac{z^k z^l}{\|z\|^2} (b_L(\|z\|) - b_N(\|z\|)), \|x - y\| > 0,$$

где $z = z_1 - z_2$,

$$\text{cov}(\xi^k(x), \xi^l(x)) = b_N(0) \delta_{kl},$$

для которого функции b_L, b_N имеют вид

$$b_L(r) = J_1'(r), b_N(r) = \frac{J_1(r)}{r}.$$

Рассматривая x -компоненту этого поля на оси $y = 0$, получаем скалярное однородное случайное поле $\xi^1(x)$ на прямой с ковариационной функцией

$$\text{cov}(\xi^1(x_1), \xi^1(x_2)) = b_L(|x_1 - x_2|) = J_1'(|x_1 - x_2|).$$

Отсюда сразу следует неотрицательная определённость функции $J_1'(|x|)$, и, следовательно, неравенство

$$|J_1'(x)| \leq J_1'(0) = \frac{1}{2}, x > 0.$$

Покажем, что, на самом деле, неравенство здесь строгое. Если при некотором $x_0 > 0$ имеет место $J_1'(x_0) = \pm \frac{1}{2}$, то имеем

$$\xi^1(x_0) = \pm \xi^1(0),$$

и, следовательно (в силу однородности поля ξ), при любом натуральном n

$$\xi^1(nx_0) = \pm \xi^1(0).$$

Итак, имеются сколь угодно большие $x > 0$, для которых

$$\xi^1(x) = \pm \xi^1(0).$$

Но это противоречит тому, что для $x > 0$

$$\text{cov}(\xi^1(0), \xi^1(x)) = b_L(x) = J_1'(x) = J_0(x) - \frac{J_1(x)}{x} \rightarrow 0 (x \rightarrow +\infty),$$

поскольку $J_0(x) \rightarrow 0, J_1(x) \rightarrow 0 (x \rightarrow +\infty)$. Итак, неравенство

$$|J_1'(x)| < \frac{1}{2}, x > 0$$

доказано. Из него, поскольку $J_1(0) = 0$, сразу вытекает неравенство

$$|J_1(x)| < \frac{x}{2}, x > 0.$$

□

Утверждение 1.4.7. Для любого $x > 0$ имеем

$$(1/2 - J_1'(x))(1 + J_0(x)) > J_1(x)^2,$$

и

$$(1/2 + J_1'(x))(1 - J_0(x)) > J_1(x)^2.$$

Доказательство. Согласно замечанию 1.4.1, имеет место равенство

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

Отсюда, проводя замену переменных, получаем

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{e^{-ixt}}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

Следовательно, функция Бесселя $J_0(x)$ является преобразованием Фурье функции

$$p(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\pi(1-\lambda^2)}} \mathbb{1}_{-1 \leq \lambda \leq 1},$$

то есть

$$J_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} p(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda = \hat{p}(x),$$

где через \hat{h} мы обозначаем преобразование Фурье функции h :

$$\hat{h}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} p(\lambda) e^{-it\lambda} d\lambda.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |e^{it\lambda} + 1|^2 p(\lambda) d\lambda &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (2 + e^{it\lambda} + e^{-it\lambda}) p(\lambda) d\lambda = \\ &= 2\hat{p}(0) + \hat{p}(t) + \hat{p}(-t) = 2J_0(0) + J_0(t) + J_0(-t) = 2(1 + J_0(t)). \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |i\lambda(e^{it\lambda} - 1)|^2 p(\lambda) d\lambda = \\
& = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(2 \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 p(\lambda) d\lambda - \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 e^{it\lambda} p(\lambda) d\lambda - \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 e^{-it\lambda} p(\lambda) d\lambda \right) = \\
& = -2J_0''(0) + J_0''(t) + J_0''(-t) = 2J_1'(0) - 2J_1'(t) = 2 \left(\frac{1}{2} - J_1'(t) \right).
\end{aligned}$$

Аналогичные вычисления дают

$$\int_{-\infty}^{\infty} (e^{it\lambda} + 1)(i\lambda e^{-it\lambda} - i\lambda) p(\lambda) d\lambda = 2J_1(t).$$

Применяя неравенство Коши-Буняковского в форме

$$\int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2 p(\lambda) d\lambda \times \int_{\mathbb{R}} |g(\lambda)|^2 p(\lambda) d\lambda \geq \left| \int_{\mathbb{R}} |f(\lambda) \overline{g(\lambda)}| p(\lambda) d\lambda \right|^2$$

к функциям $f(\lambda) = e^{it\lambda} + 1$, $g(\lambda) = i\lambda(e^{it\lambda} - 1)$ и используя предыдущие равенства, получаем

$$4(1 + J_0(t)) (1/2 - J_1'(t)) \geq 4J_1(t)^2.$$

При этом равенство возможно только в случае, если существуют числа α, β , не равные нулю одновременно, такие, что

$$\alpha f(\lambda) \sqrt{p(\lambda)} = \beta g(\lambda) \sqrt{p(\lambda)},$$

или, учитывая вид p ,

$$\alpha f(\lambda) - \beta g(\lambda) = 0, \lambda \in (-1, 1),$$

или

$$(\alpha - i\lambda\beta)e^{it\lambda} + (\alpha + i\lambda\beta) = 0, \lambda \in (-1, 1).$$

Это возможно лишь при $t = 0$. Действительно, подставляя $\lambda = 0$, получаем $\alpha = 0$. Следовательно, $\lambda\beta(e^{it\lambda} - 1) = 0, \lambda \in (-1, 1)$, что возможно лишь при $t = 0$.

Неравенство

$$(1/2 + J_1'(x))(1 - J_0(x)) > J_1(x)^2$$

доказывается аналогично с помощью функций $f(\lambda) = e^{it\lambda} - 1$ и $g(\lambda) = i\lambda(e^{it\lambda} + 1)$. \square

Утверждение 1.4.8. Для любых $\alpha > 0, \beta > 0$ выполнены следующие неравенства:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2) - 2\alpha\beta J_1(\alpha)J_1(\beta) - J_0(\alpha)\beta^2 J_1'(\beta) - \\ & - J_0(\beta)\alpha^2 J_1'(\alpha) - \alpha^2 J_1'(\alpha) - \beta^2 J_1'(\beta) + \frac{1}{2}\alpha^2 J_0(\beta) + \frac{1}{2}\beta^2 J_0(\alpha) > 0 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2) - 2\alpha\beta J_1(\alpha)J_1(\beta) - J_0(\alpha)\beta^2 J_1'(\beta) - \\ & - J_0(\beta)\alpha^2 J_1'(\alpha) + \alpha^2 J_1'(\alpha) + \beta^2 J_1'(\beta) - \frac{1}{2}\alpha^2 J_0(\beta) - \frac{1}{2}\beta^2 J_0(\alpha) > 0. \end{aligned}$$

Доказательство. Наше первое неравенство можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & \alpha^2(1/2 - J_0(\beta)J_1'(\alpha) - J_1'(\alpha) + 1/2J_0(\beta)) + \\ & + \beta^2(1/2 - J_0(\alpha)J_1'(\beta) - J_1'(\beta) + 1/2J_0(\alpha)) - \\ & - 2\alpha\beta J_1(\alpha)J_1(\beta) > 0. \end{aligned}$$

Мы полагаем

$$\begin{aligned} a &= 1/2 - J_0(\beta)J_1'(\alpha) - J_1'(\alpha) + J_0(\beta)/2, \\ b &= -2J_1(\alpha)J_1(\beta), \\ c &= 1/2 - J_0(\alpha)J_1'(\beta) - J_1'(\beta) + J_0(\alpha)/2. \end{aligned}$$

Достаточно доказать, что квадратичная форма $ax^2 + bxy + cy^2$ не имеет нулей, за исключением $x = y = 0$. Для этого покажем, что $b^2 - 4ac < 0$. Из утверждения 1.4.7 получаем:

$$(1/2 - J_1'(\alpha))(1 + J_0(\alpha)) > J_1(\alpha)^2, \text{ и } (1/2 - J_1'(\beta))(1 + J_0(\beta)) > J_1(\beta)^2.$$

Перемножая эти неравенства, получаем

$$(1/2 - J_1'(\alpha))(1/2 - J_1'(\beta))(1 + J_0(\alpha))(1 + J_0(\beta)) > J_1(\alpha)^2 J_1(\beta)^2.$$

После определённых преобразований получаем в точности $b^2 - 4ac < 0$. Итак, первое неравенство утверждения доказано. Второе доказывается тем же способом, с применением неравенств

$$(1/2 + J_1'(\alpha))(1 - J_0(\alpha)) > J_1(\alpha)^2, \text{ и } (1/2 + J_1'(\beta))(1 - J_0(\beta)) > J_1(\beta)^2.$$

из того же утверждения 1.4.7. □

Утверждение 1.4.9. Для любого $r > 0$, выполнено следующее неравенство:

$$|\beta_N b_N(0) - b_N'(r)^2 + b_N(r) b_N''(r)| > |b_N(0) b_N''(r) + \beta_N b_N(r)|.$$

Доказательство. Имеем $b_N'(r) = - \int_0^\infty \alpha J_1(r\alpha) \Phi(d\alpha)$. Следовательно,

$$b_N'(r)^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty \alpha \beta J_1(r\alpha) J_1(r\beta) \Phi(d\alpha) \Phi(d\beta).$$

Используя неравенство $b_N''(r) = - \int_0^\infty \beta^2 J_0(r\beta) \Phi(d\beta)$, получаем

$$\begin{aligned} b_N(r) b_N''(r) &= - \int_0^\infty \int_0^\infty \beta^2 J_0(r\alpha) J_1'(r\beta) \Phi(d\alpha) \Phi(d\beta) = \\ &= - \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty J_0(r\alpha) \beta^2 J_1'(r\beta) \Phi(d\alpha) \Phi(d\beta) - \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty J_0(r\beta) \alpha^2 J_1'(r\alpha) \Phi(d\alpha) \Phi(d\beta). \end{aligned}$$

Что касается члена $\beta_N b_N(0)$, из $\beta_N = \frac{1}{2} \int_0^\infty \alpha^2 \Phi(d\alpha)$ и $b_N(0) = \int_0^\infty \Phi(d\beta)$ получаем, что

$$\beta_N b_N(0) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \alpha^2 \Phi(d\alpha) \Phi(d\beta) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \Phi(d\alpha) \Phi(d\beta).$$

Тем же самым способом получаем

$$b_N(0) b_N''(r) = - \int_0^\infty \frac{\alpha^2 J_1'(r\alpha) + \beta^2 J_1'(r\beta)}{2} \Phi(d\alpha) \Phi(d\beta).$$

Следовательно, нужно доказать следующее неравенство:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \Phi(d\alpha) \Phi(d\beta) - \int_0^\infty \int_0^\infty \alpha \beta J_1(r\alpha) J_1(r\beta) \Phi(d\alpha) \Phi(d\beta) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty J_0(r\alpha) \beta^2 J_1'(r\beta) \Phi(d\alpha) \Phi(d\beta) - \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty J_0(r\beta) \alpha^2 J_1'(r\alpha) \Phi(d\alpha) \Phi(d\beta) \right| > \\ & > \left| - \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\alpha^2 J_1'(r\alpha) + \beta^2 J_1'(r\beta)}{2} \Phi(d\alpha) \Phi(d\beta) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} \int_0^\infty \int_0^\infty \alpha^2 J_0(r\beta) \Phi(d\alpha) \Phi(d\beta) + \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty \beta^2 J_0(r\alpha) \Phi(d\alpha) \Phi(d\beta) \right|. \end{aligned}$$

Достаточно показать, что для любых $\alpha, \beta > 0$ выполнены следующие два неравенства:

$$\begin{aligned} & \{1/2(\alpha^2 + \beta^2) - 2\alpha\beta J_1(r\alpha) J_1(r\beta) - \\ & \quad - J_0(r\alpha) \beta^2 J_1'(r\beta) - J_0(r\beta) \alpha^2 J_1'(r\alpha)\} \pm \\ & \quad \pm \{-\alpha^2 J_1'(r\alpha) - \beta^2 J_1'(r\beta) + 1/2 \alpha^2 J_0(r\beta) + 1/2 \beta^2 J_0(r\alpha)\} > 0. \end{aligned}$$

Можно положить $r = 1$, поскольку, умножив на r^2 и положив $\hat{\alpha} = r\alpha$, $\hat{\beta} = r\beta$, наше неравенство можно свести к случаю $r = 1$. Следовательно, нам нужно показать, что

$$\begin{aligned} & \{1/2(\alpha^2 + \beta^2) - 2\alpha\beta J_1(\alpha) J_1(\beta) - J_0(\alpha) \beta^2 J_1'(\beta) - J_0(\beta) \alpha^2 J_1'(\alpha)\} \pm \\ & \quad \pm \{-\alpha^2 J_1'(\alpha) - \beta^2 J_1'(\beta) + 1/2 \alpha^2 J_0(\beta) + 1/2 \beta^2 J_0(\alpha)\} > 0. \end{aligned}$$

А это — в точности неравенства из утверждения 1.4.8. \square

Утверждение 1.4.10. Для любых $r > 0$, $\beta_N \cdot r > |b'_N(r)|$.

Доказательство. Имеем $\beta_N = \frac{1}{2} \int_0^\infty \alpha^2 \Phi(d\alpha)$ and $b'_N(r) = -\alpha \int_0^\infty J_1(r\alpha) \Phi(d\alpha)$.

Следовательно, достаточно показать, что

$$|\alpha J_1(r\alpha)| < \alpha^2 r / 2,$$

или

$$|J_1(r\alpha)| < \alpha r / 2,$$

что известно из утверждения 1.4.6.

Используя утверждения 1.4.10, 1.4.9 и 1.4.5, получаем утверждение 1.4.3. Последнее позволяет проверить условия б', в', д' теоремы 1.3.1 для нашего случая.

Теперь применим теорему 1.3.1. Достаточно показать, что

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\det \nabla f(t^1) \det \nabla f(t^2) \mid f(t^1) = f(t^2) = 0) = \\ = \frac{2b'_N(\|t^1 - t^2\|)}{\|t^1 - t^2\|} \left(\frac{b_N(\|t^1 - t^2\|)b'_N(\|t^1 - t^2\|)^2}{b_N(0)^2 - b_N(\|t^1 - t^2\|)^2} + b''_N(\|t^1 - t^2\|) \right) \end{aligned}$$

и

$$\mathbb{E}(|\det \nabla f(t)| \mid f(t) = 0) = \beta_N,$$

где β_N определено в утверждении 1.4.1. □

Пусть (X_{ij}, Y_{ij}) — случайный вектор, распределение которого совпадает с условным распределением $(\frac{\partial f_i}{\partial t_j}(t^1), \frac{\partial f_i}{\partial t_j}(t^2))$ при условии $f(t^1) = f(t^2) = 0$. Из теоремы о нормальной корреляции следует, что (X_{ij}, Y_{ij}) — гауссовский случайный вектор. Положим

$$u_{ijkl} = \mathbb{E} \left(\frac{\partial f_i}{\partial t_k}(t^1) \frac{\partial f_j}{\partial t_l}(t^2) \mid f(t^1) = f(t^2) = 0 \right).$$

Заметим, что следующие 3 леммы (лемма 1.4.1, 1.4.2, 1.4.3) выполняются для любого центрированного гауссовского векторного поля.

Лемма 1.4.1. *Выполнено следующее соотношение:*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\det \nabla f(t^1) \det \nabla f(t^2) \mid f(t^1) = f(t^2) = 0) = \\ = \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,l=1,2} (-1)^{i+j+k+l} u_{ijkl} u_{3-i,3-j,3-k,3-l} + \\ + \mathbb{E}(\det \nabla f(t^1) \mid f(t^1) = f(t^2) = 0) \mathbb{E}(\det \nabla f(t^2) \mid f(t^1) = f(t^2) = 0). \end{aligned}$$

Доказательство. В наших обозначениях, имеем:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\det \nabla f(t^1) \det \nabla f(t^2) \mid f(t^1) = f(t^2) = 0) = \\ = \mathbb{E}((X_{11}X_{22} - X_{12}X_{21})(Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21})) = \mathbb{E}X_{11}X_{22}Y_{11}Y_{22} - \mathbb{E}X_{12}X_{21}Y_{11}Y_{22} - \\ - \mathbb{E}X_{11}X_{22}Y_{12}Y_{21} + \mathbb{E}X_{12}X_{21}Y_{12}Y_{21}. \end{aligned}$$

Применение формулы Вика ([46], лемма 11.6.1) даёт:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}(\det \nabla f(t^1) \det \nabla f(t^2) \mid f(t^1) = f(t^2) = 0) = \\
& = \underbrace{\mathbb{E}X_{11}X_{22}\mathbb{E}Y_{11}Y_{22} - \mathbb{E}X_{12}X_{21}\mathbb{E}Y_{11}Y_{22} - \mathbb{E}X_{11}X_{22}\mathbb{E}Y_{12}Y_{21} + \mathbb{E}X_{12}X_{21}\mathbb{E}Y_{12}Y_{21}}_{\mathbb{E}(\det \nabla f(t^1) \mid f(t^1)=f(t^2)=0)\mathbb{E}(\det \nabla f(t^2) \mid f(t^1)=f(t^2)=0)} + \\
& + \mathbb{E}X_{11}Y_{11}\mathbb{E}X_{22}Y_{22} + \mathbb{E}X_{11}Y_{22}\mathbb{E}X_{22}Y_{11} - \mathbb{E}X_{12}Y_{11}\mathbb{E}X_{21}Y_{22} - \mathbb{E}X_{12}Y_{22}\mathbb{E}X_{21}Y_{11} - \\
& - \mathbb{E}X_{11}Y_{12}\mathbb{E}X_{22}Y_{21} - \mathbb{E}X_{11}Y_{21}\mathbb{E}X_{22}Y_{12} + \mathbb{E}X_{12}Y_{12}\mathbb{E}X_{21}Y_{21} + \mathbb{E}X_{12}Y_{21}\mathbb{E}X_{21}Y_{12} = \\
& = \mathbb{E}(\det \nabla f(t^1) \mid f(t^1) = f(t^2) = 0) \times \mathbb{E}(\det \nabla f(t^2) \mid f(t^1) = f(t^2) = 0) + \\
& + u_{1111}u_{2222} + u_{1212}u_{2121} - u_{1121}u_{2212} - u_{1222}u_{2111} - u_{1112}u_{2221} - u_{1211}u_{2122} + \\
& + u_{1122}u_{2211} + u_{1221}u_{2112}.
\end{aligned}$$

Это доказывает наше утверждение. \square

Обозначим через K ковариационную матрицу

$$K = \text{cov}(f_1(t^1), f_2(t^1), f_1(t^2), f_2(t^2)).$$

Лемма 1.4.2. *Имеет место равенство*

$$\begin{aligned}
u_{ijkl} &= \mathbb{E} \left(\frac{\partial f_i}{\partial t_k}(t^1) \frac{\partial f_j}{\partial t_l}(t^2) \right) + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial b_{i1}}{\partial t_k} & \frac{\partial b_{i2}}{\partial t_k} \end{pmatrix} K^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial b_{1j}}{\partial t_l} \\ \frac{\partial b_{2j}}{\partial t_l} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \\
&= \mathbb{E} \left(\frac{\partial f_i}{\partial t_k}(t^1) \frac{\partial f_j}{\partial t_l}(t^2) \right) + \begin{pmatrix} \frac{\partial b_{i1}}{\partial t_k} & \frac{\partial b_{i2}}{\partial t_k} \end{pmatrix} K_{12}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial b_{1j}}{\partial t_l} \\ \frac{\partial b_{2j}}{\partial t_l} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Здесь K_{12}^{-1} — подматрица K^{-1} , образованная пересечением её двух последних строк и двух первых столбцов.

Доказательство. Здесь мы вычисляем условное математическое ожидание $\mathbb{E}(X_1X_2 \mid Y_1 = Y_2 = Y_3 = Y_4 = 0)$ для совместно гауссовских случайных величин $X_1, X_2, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4$. Можно написать:

$$X_1 = \sum_{i=1}^4 \alpha_i Y_i + X_{1\perp}, X_2 = \sum_{i=1}^4 \beta_i Y_i + X_{2\perp},$$

где $X_{j\perp}$ не зависит от Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 .

Обозначим $X_{i\parallel} = X - X_{i\perp}$, $i = 1, 2$, $C = \text{cov}(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4)$. Тогда

$$\mathbb{E}(X_1X_2 \mid Y_1 = Y_2 = Y_3 = Y_4 = 0) = \mathbb{E}X_1X_2 - \mathbb{E}X_{1\parallel}X_{2\parallel}.$$

$$\text{Но } \mathbb{E}X_{1||}X_{2||} = \mathbb{E}X_{1||}X_2 = \sum_{i=1}^4 \alpha_i \mathbb{E}Y_i X_2 = \begin{pmatrix} \mathbb{E}Y_1 X_2 \\ \mathbb{E}Y_2 X_2 \\ \mathbb{E}Y_3 X_2 \\ \mathbb{E}Y_4 X_2 \end{pmatrix}^T \alpha, \text{ где } \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Однако, } \alpha = C^{-1} \begin{pmatrix} \mathbb{E}X_1 Y_1 \\ \mathbb{E}X_1 Y_2 \\ \mathbb{E}X_1 Y_3 \\ \mathbb{E}X_1 Y_4 \end{pmatrix}, \text{ и утверждение доказано.} \quad \square$$

Лемма 1.4.3. *Имеет место равенство*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\det \nabla f(t^1) \mid f(t^1) = f(t^2) = 0) = \\ = \begin{pmatrix} \frac{\partial b_{11}}{\partial t_2} & \frac{\partial b_{12}}{\partial t_2} \end{pmatrix} K_{22}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial b_{21}}{\partial t_1} \\ \frac{\partial b_{22}}{\partial t_1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial b_{11}}{\partial t_1} & \frac{\partial b_{12}}{\partial t_1} \end{pmatrix} K_{22}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial b_{21}}{\partial t_2} \\ \frac{\partial b_{22}}{\partial t_2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Здесь K_{22}^{-1} — подматрица матрицы K^{-1} , образованная пересечением её последних двух строк и последних двух столбцов.

Доказательство.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\det \nabla f(t^1) \mid f(t^1) = f(t^2) = 0) = \\ = \mathbb{E} \left(\frac{\partial f_1}{\partial t_1} \frac{\partial f_2}{\partial t_2}(t^1) - \frac{\partial f_1}{\partial t_2} \frac{\partial f_2}{\partial t_1}(t^1) \mid f(t^1) = f(t^2) = 0 \right) = \\ = \mathbb{E} \frac{\partial f_1}{\partial t_1} \frac{\partial f_2}{\partial t_2}(t^1) - \left(\mathbb{E} \frac{\partial f_1}{\partial t_1}(t^1) f_1(t^1) \quad \mathbb{E} \frac{\partial f_1}{\partial t_1}(t^1) f_2(t^1) \quad \mathbb{E} \frac{\partial f_1}{\partial t_1}(t^1) f_1(t^2) \quad \mathbb{E} \frac{\partial f_1}{\partial t_1}(t^1) f_2(t^2) \right) \times \\ \times K^{-1} \begin{pmatrix} \mathbb{E} \frac{\partial f_2}{\partial t_2}(t^1) f_1(t^1) \\ \mathbb{E} \frac{\partial f_2}{\partial t_2}(t^1) f_2(t^1) \\ \mathbb{E} \frac{\partial f_2}{\partial t_2}(t^1) f_1(t^2) \\ \mathbb{E} \frac{\partial f_2}{\partial t_2}(t^1) f_2(t^2) \end{pmatrix} - \\ - \mathbb{E} \frac{\partial f_1}{\partial t_2} \frac{\partial f_2}{\partial t_1}(t^1) + \left(\mathbb{E} \frac{\partial f_1}{\partial t_2}(t^1) f_1(t^1) \quad \mathbb{E} \frac{\partial f_1}{\partial t_2}(t^1) f_2(t^1) \quad \mathbb{E} \frac{\partial f_1}{\partial t_2}(t^1) f_1(t^2) \quad \mathbb{E} \frac{\partial f_1}{\partial t_2}(t^1) f_2(t^2) \right) \times \\ \times K^{-1} \begin{pmatrix} \mathbb{E} \frac{\partial f_2}{\partial t_2}(t^1) f_1(t^1) \\ \mathbb{E} \frac{\partial f_2}{\partial t_2}(t^1) f_2(t^1) \\ \mathbb{E} \frac{\partial f_2}{\partial t_1}(t^1) f_1(t^2) \\ \mathbb{E} \frac{\partial f_2}{\partial t_1}(t^1) f_2(t^2) \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

=

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E} \frac{\partial f_1}{\partial t_1} \frac{\partial f_2}{\partial t_2}(t^1) - \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbb{E} \frac{\partial f_1}{\partial t_1}(t^1) f_1(t^2) & \mathbb{E} \frac{\partial f_1}{\partial t_1}(t^1) f_2(t^2) \end{pmatrix} \times \\
&\quad \times K^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbb{E} \frac{\partial f_2}{\partial t_2}(t^1) f_1(t^2) \\ \mathbb{E} \frac{\partial f_2}{\partial t_2}(t^1) f_2(t^2) \end{pmatrix} - \mathbb{E} \frac{\partial f_1}{\partial t_2} \frac{\partial f_2}{\partial t_1}(t^1) + \\
&\quad + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbb{E} \frac{\partial f_1}{\partial t_2}(t^1) f_1(t^2) & \mathbb{E} \frac{\partial f_1}{\partial t_2}(t^1) f_2(t^2) \end{pmatrix} K^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbb{E} \frac{\partial f_2}{\partial t_1}(t^1) f_1(t^2) \\ \mathbb{E} \frac{\partial f_2}{\partial t_1}(t^1) f_2(t^2) \end{pmatrix} = \\
&= \mathbb{E} \left(\frac{\partial f_1}{\partial t_1} \frac{\partial f_2}{\partial t_2}(t^1) \right) - \mathbb{E} \left(\frac{\partial f_1}{\partial t_2} \frac{\partial f_2}{\partial t_1}(t^1) \right) + \begin{pmatrix} \mathbb{E} \frac{\partial f_1}{\partial t_2}(t^1) f_1(t^2) \\ \mathbb{E} \frac{\partial f_1}{\partial t_2}(t^1) f_2(t^2) \end{pmatrix} K_{22}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbb{E} \frac{\partial f_2}{\partial t_1}(t^1) f_1(t^2) \\ \mathbb{E} \frac{\partial f_2}{\partial t_1}(t^1) f_2(t^2) \end{pmatrix} - \\
&\quad - \begin{pmatrix} \mathbb{E} \frac{\partial f_2}{\partial t_1}(t^1) f_1(t^2) \\ \mathbb{E} \frac{\partial f_2}{\partial t_1}(t^1) f_2(t^2) \end{pmatrix} K_{22}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbb{E} \frac{\partial f_2}{\partial t_2}(t^1) f_1(t^2) \\ \mathbb{E} \frac{\partial f_2}{\partial t_2}(t^1) f_2(t^2) \end{pmatrix} = \left(-\frac{\partial b_{12}}{\partial t_1 \partial t_2}(0) + \frac{\partial b_{12}}{\partial t_2 \partial t_1}(0) \right) + \\
&\quad + \begin{pmatrix} -\frac{\partial b_{11}}{\partial t_2} & \frac{\partial b_{12}}{\partial t_2} \end{pmatrix} K_{22}^{-1} \begin{pmatrix} -\frac{\partial b_{21}}{\partial t_1} \\ -\frac{\partial b_{22}}{\partial t_1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{\partial b_{11}}{\partial t_1} & \frac{\partial b_{12}}{\partial t_1} \end{pmatrix} K_{22}^{-1} \begin{pmatrix} -\frac{\partial b_{21}}{\partial t_2} \\ -\frac{\partial b_{22}}{\partial t_2} \end{pmatrix} = \\
&\quad = \begin{pmatrix} \frac{\partial b_{11}}{\partial t_2} & \frac{\partial b_{12}}{\partial t_2} \end{pmatrix} K_{22}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial b_{21}}{\partial t_1} \\ \frac{\partial b_{22}}{\partial t_1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial b_{11}}{\partial t_1} & \frac{\partial b_{12}}{\partial t_1} \end{pmatrix} K_{22}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial b_{21}}{\partial t_2} \\ \frac{\partial b_{22}}{\partial t_2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

□

В следующих леммах мы существенно используем вид $b_{ij}(z) = \delta_{ij} b_N(\|z\|)$ ковариационной функции компонент. Доказательства проводятся прямыми вычислениями. Обозначим $r = \|t^1 - t^2\|$. Поскольку рассматриваемое поле изотропно, то значения выражений

$$\mathbb{E}(\det \nabla f(t^1) \mid f(t^1) = f(t^2) = 0) = 0$$

и

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(\det \nabla f(t^1) \det \nabla f(t^2) \mid f(t^1) = f(t^2) = 0) = \\
&= \frac{2b'_N(\|t^1 - t^2\|)}{\|t^1 - t^2\|} \left(\frac{b_N(\|t^1 - t^2\|) b'_N(\|t^1 - t^2\|)^2}{b_N(0)^2 - b_N(\|t^1 - t^2\|)^2} + b''_N(\|t^1 - t^2\|) \right)
\end{aligned}$$

зависят лишь от $r = \|t^1 - t^2\|$. Итак, в леммах 1.4.4–1.4.8 мы полагаем

$$t^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, t^2 = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix},$$

и это не ограничит общности конечного результата.

Лемма 1.4.4. $\mathbb{E} \left(\frac{\partial f_i}{\partial t_k}(t^1) \frac{\partial f_j}{\partial t_l}(t^2) \right) = -\delta_{ij} \delta_{kl} \left(\delta_{k1} \frac{\partial^2 b_N(r)}{\partial r^2} + \delta_{k2} \frac{1}{r} \frac{\partial b_N(r)}{\partial r} \right).$

Лемма 1.4.5. Матрица K имеет вид

$$K = \begin{pmatrix} b_N(0) & 0 & b_N(r) & 0 \\ 0 & b_N(0) & 0 & b_N(r) \\ b_N(r) & 0 & b_N(0) & 0 \\ 0 & b_N(r) & 0 & b_N(0) \end{pmatrix}.$$

Лемма 1.4.6. Матрицы K_{22}^{-1} , K_{12}^{-1} имеют вид

$$K_{22}^{-1} = \frac{b_N(0)}{b_N(0)^2 - b_N(r)^2} I, \quad K_{12}^{-1} = -\frac{b_N(0)}{b_N(0)^2 - b_N(r)^2} I,$$

где I — единичная матрица размера 2×2 .

Лемма 1.4.7. Выполнены следующие соотношения:

$$\frac{\partial}{\partial t_1} b_{11}(r, 0) = \frac{\partial}{\partial t_1} b_{22}(r, 0) = b'_N(r),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_2} b_{11}(r, 0) &= \frac{\partial}{\partial t_1} b_{12}(r, 0) = \frac{\partial}{\partial t_2} b_{12}(r, 0) = \frac{\partial}{\partial t_1} b_{21}(r, 0) = \\ &= \frac{\partial}{\partial t_2} b_{21}(r, 0) = \frac{\partial}{\partial t_2} b_{22}(r, 0) = 0. \end{aligned}$$

Лемма 1.4.8. Имеет место равенство

$$u_{ijkl} = -\delta_{ij} \delta_{kl} \left(\delta_{k1} \left(\frac{\partial^2 b_N(r)}{\partial r^2} + \frac{b_N(r)}{b_N(0)^2 - b_N(r)^2} \left(\frac{\partial b_N(r)}{\partial r} \right)^2 \right) + \delta_{k2} \frac{1}{r} \frac{\partial b_N(r)}{\partial r} \right).$$

Доказательство. Доказательство леммы получается подстановкой в выражение для u_{ijkl} из леммы 1.4.2 выражений из лемм 1.4.4, 1.4.6 и 1.4.7. \square

Лемма 1.4.9. Имеет место равенство

$$\mathbb{E}(\det \nabla f(t^1) \mid f(t^1) = f(t^2) = 0) = 0.$$

Доказательство. Доказательство леммы получается подстановкой в выражение из леммы 1.4.3 для

$$\mathbb{E}(\det \nabla f(t^1) \mid f(t^1) = f(t^2) = 0)$$

выражений из лемм 1.4.6 и 1.4.7. Заметим, что, хотя леммы 1.4.6 и 1.4.7 доказаны для частного случая

$$t^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, t^2 = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix},$$

результат леммы 1.4.9 выполнен для любых точек $t^1 \neq t^2$ в силу изотропности рассматриваемого поля. То же верно для следующей леммы. \square

Лемма 1.4.10. *Имеет место равенство*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\det \nabla f(t^1) \det \nabla f(t^2) \mid f(t^1) = f(t^2) = 0) = \\ = \frac{2b'_N(\|t^1 - t^2\|)}{\|t^1 - t^2\|} \left(\frac{b_N(\|t^1 - t^2\|)b'_N(\|t^1 - t^2\|)^2}{b_N(0)^2 - b_N(\|t^1 - t^2\|)^2} + b''_N(\|t^1 - t^2\|) \right) \end{aligned}$$

Доказательство. Доказательство леммы получается подстановкой в выражение из леммы 1.4.1 для

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\det \nabla f(t^1) \det \nabla f(t^2) \mid f(t^1) = f(t^2) = 0) = \\ = \frac{2b'_N(\|t^1 - t^2\|)}{\|t^1 - t^2\|} \left(\frac{b_N(\|t^1 - t^2\|)b'_N(\|t^1 - t^2\|)^2}{b_N(0)^2 - b_N(\|t^1 - t^2\|)^2} + b''_N(\|t^1 - t^2\|) \right) \end{aligned}$$

выражений из лемм 1.4.8 и 1.4.9. \square

Теперь вычислим $\mathbb{E}(|\det \nabla f(t)| \mid f(t) = 0)$.

Лемма 1.4.11. $\mathbb{E} \frac{\partial f_i}{\partial t_k}(t) \frac{\partial f_j}{\partial t_l}(t) = \delta_{ij} \delta_{kl} \beta_N$,
где $\beta_N = -b''_N(0)$, как и в утверждении 1.4.1

Лемма 1.4.12. *Имеет место равенство*

$$\mathbb{E}(|\det \nabla f(t)| \mid f(t) = 0) = \beta_N.$$

Доказательство. Легко видеть, что все $\frac{\partial f_i}{\partial t_k}(t)$ не зависят от $f(t)$. Поэтому $\det \nabla f(t)$ имеет вид $\xi_1 \xi_2 - \xi_3 \xi_4$, где $\xi_i \in N(0, \beta_N)$, $i = 1, 2, 3, 4$ — независимые в совокупности гауссовские случайные величины (это видно из леммы 1.4.11), и

$$\mathbb{E}\{|\det \nabla f(t)| \mid f(t) = 0\} = \mathbb{E}|\det \nabla f(t)| = \mathbb{E}|\xi_1 \xi_2 - \xi_3 \xi_4|.$$

Полагая $\eta_i = \frac{1}{\sqrt{\beta_N}} \xi_i$, мы получаем для независимых в совокупности гауссовских случайных величин η_i , $i = 1, 2, 3, 4$:

$$\mathbb{E}|\xi_1 \xi_2 - \xi_3 \xi_4| = \beta_N \mathbb{E}|\eta_1 \eta_2 - \eta_3 \eta_4|.$$

Положив теперь

$$\zeta_1 = \frac{\eta_1 + \eta_2}{\sqrt{2}}, \zeta_2 = \frac{\eta_1 - \eta_2}{\sqrt{2}}, \zeta_3 = \frac{\eta_3 + \eta_4}{\sqrt{2}}, \zeta_4 = \frac{\eta_3 - \eta_4}{\sqrt{2}},$$

получаем для независимых в совокупности гауссовских случайных величин $\zeta_i, i = 1, 2, 3, 4$:

$$\mathbb{E}|\eta_1\eta_2 - \eta_3\eta_4| = \frac{1}{2}\mathbb{E}|\zeta_1^2 + \zeta_4^2 - \zeta_2^2 - \zeta_3^2|.$$

Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|\zeta_1^2 + \zeta_4^2 - \zeta_2^2 - \zeta_3^2| &= \int_{\mathbb{R}^4} |x_1^2 + x_4^2 - x_2^2 - x_3^2| \frac{1}{\sqrt{2\pi}^4} e^{-\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}{2}} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = \\ &= (x_1 = r_1 \cos \phi_1, x_4 = r_1 \sin \phi_1, x_2 = r_2 \cos \phi_1, x_3 = r_2 \sin \phi_2) = \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty |r_1^2 - r_2^2| e^{-\frac{r_1^2 + r_2^2}{2}} r_1 r_2 dr_1 dr_2 = \left(u = \frac{r_1^2}{2}, v = \frac{r_2^2}{2} \right) = \\ &= 2 \int_0^\infty \int_0^\infty |u - v| e^{-(u+v)} du dv = 2. \end{aligned}$$

□

Итак, теорема 1.4.1 полностью доказана.

Выводы к главе 1

1. Получено выражение для первого и второго момента индекса вращения случайного поля на плоскости вдоль замкнутой кривой в терминах условной плотности двухточечных распределений поля.
2. Для изотропного гауссовского случайного поля первый и второй моменты индекса вращения найдены в терминах ковариационной функции компонент поля.

Глава 2

Инварианты Васильева для кос, составленных из семимартингалов

Согласно [2], важную роль в исследовании геометрии фазовых потоков векторных полей играет коэффициент зацепления траекторий потока, выходящих из различных точек. Коэффициент зацепления является характеристикой двухточечного движения частиц. Для характеристики n -точечных движений в потоке естественно рассмотреть косу, образованную несколькими траекториями частиц. Гомотопические инварианты узлов и кос исследовались в работах В. А. Васильева (см., например, [52]). В работах М. Л. Концевича было получено представление инвариантов Васильева для гладких узлов в виде кратных интегралов. Аналогичное представление существует и для гладких кос [47]. Для важных классов стохастических потоков, в частности, для изотропных броуновских стохастических потоков, траектории частиц в них являются непрерывными семимартингалами. В типичных случаях траектории непрерывных семимартингалов не являются гладкими. Поэтому рассматриваемые нами косы по временной переменной t являются лишь непрерывными, но не гладкими.

В этой главе мы получаем представление инвариантов Васильева для кос, образованных непрерывными семимартингалами относительно общей фильтрации, в виде повторных интегралов Стратоновича. В разделе 2.1 приведены необходимые сведения об интеграле Концевича для гладких кос. В разделе 2.2 мы получаем результаты, касающиеся аппроксимации инвариантов Васильева для негладких кос с помощью инвариантов Васильева для вписанных в них ломаных. С использованием этих результатов в разделе 2.3 получается представление инвариантов Васильева для семимартингалов в виде повторных стохастических интегралов.

2.1. Инварианты Васильева для гладких кос

Приведём необходимые для дальнейшего изложения сведения из теории кос и их инвариантов. Наше изложение будет следовать, в основном, работе [47].

Определение 2.1.1. [47] *Конфигурационным пространством n точек комплексной плоскости называется топологическое пространство*

$$C_{0,n} = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : z_i \neq z_j, i \neq j\}$$

с топологией, индуцированной из \mathbb{C}^n .

Определение 2.1.2. [47] *Косой из n нитей называется непрерывная кривая*

$$Z(t) = (Z_1(t), \dots, Z_n(t)), t \in [0, T], Z_k(t) \in \mathbb{C}, t \in [0, T]$$

в конфигурационном пространстве $C_{0,n}$, т.е. непрерывное отображение из отрезка $[0, T]$ в пространство $C_{0,n}$. Траектории $Z_k(t), t \in [0, T]$ называются нитями косы.

Таким образом, нити косы не пересекаются, т.е. для произвольных $k \neq l$:

$$\forall t \in [0, T] \quad Z_k(t) \neq Z_l(t).$$

Определение 2.1.3. *Коса $Z(t) = (Z_1(t), \dots, Z_n(t)), t \in [0, T]$, где*

$$\forall k \quad Z_k(t) \in \mathbb{C}, t \in [0, T],$$

называется гладкой (кусочно-гладкой), если все Z_k — гладкие (кусочно-гладкие) функции времени t .

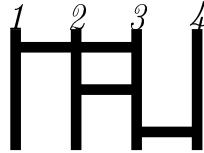
Инварианты Васильева обычно определяют для гладких (или кусочно-гладких) кос. Однако, поскольку они являются гомотопическими инвариантами, их можно определить и для непрерывных кос, — как соответствующие инварианты для гомотопных им гладких кос (рассматриваются гомотопии, сохраняющие начальные и конечные точки кос). В силу того, что инварианты Васильева совпадают для гомотопных гладких кос, имеющих общую начальную и конечную точки [47], это определение корректно. Система инвариантов Васильева является полной том смысле, что две косы являются гомотопными тогда и только тогда, когда все инварианты Васильева для них совпадают [53]. Для инвариантов Васильева существует интегральное представление, данное М. Л. Концевичем [54]. Приведём его описание, следуя статье [47].

Обозначим через \mathbb{P}_{mn} набор всех возможных матриц

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \\ \dots\dots\dots \\ P_{m1} & P_{m2} \end{pmatrix}$$

размера $m \times 2$, где при всех $i = 1, \dots, m$ $P_{i1}, P_{i2} \in \{1, \dots, n\}, P_{i1} \neq P_{i2}$. Очевидно, $|\mathbb{P}_{mn}| = (n(n-1)/2)^m$. Здесь n — количество нитей рассматриваемой нами косы. Поставим в соответствие каждой матрице $P \in \mathbb{P}_{mn}$ некоторый объект $D(P)$ — “диаграмму”. Диаграмма $D(P)$, соответствующая матрице $P \in \mathbb{P}_{mn}$, состоит из n вертикальных отрезков, соответствующих струнам косы, и соединяющих их m горизонтальных отрезков, представляющих строки матрицы P . Горизонтальный отрезок, представляющий i -ю строку $(P_{i1}P_{i2})$, соединяет вертикальные отрезки с номерами P_{i1} и P_{i2} . При $i < j$ отрезок, соответствующий i -ой строке, находится выше отрезка, соответствующего j -ой строке.

Пример 2.1.1. Пусть $n = 4$ (коса из 4 струн), $m = 3$, и матрица $P \in \mathbb{P}_{34}$ имеет вид $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Тогда диаграмма $D(P)$ имеет вид



Натянем на эти диаграммы $D(P)$ векторное пространство, которое будем называть пространством диаграмм порядка m , и проведём его факторизацию по следующим соотношениям:

- Одночленное соотношение. Пусть матрицы $P, P' \in \mathbb{P}_{mn}$ таковы:

$$P = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ i & j \\ k & l \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}, P' = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ k & l \\ i & j \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix},$$

где i, j, k, l соответствуют четырём попарно различным нитям. Тогда $D(P) = D(P')$.

- Четырёхчленное соотношение. Пусть матрицы $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 \in \mathbb{P}_{mn}$ таковы:

$$P_1 = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ i & j \\ j & k \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ j & k \\ i & k \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ i & k \\ i & j \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix},$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ j & k \\ i & j \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}, P_5 = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ i & k \\ j & k \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}, P_6 = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ i & j \\ i & k \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix},$$

где i, j, k соответствуют трём попарно различным нитям. Тогда

$$D(P_1) - D(P_4) = D(P_2) - D(P_5) = D(P_3) - D(P_6).$$

Точнее говоря, введём следующее определение.

Определение 2.1.4. Пусть V - комплексное векторное пространство размерности $(n(n-1)/2)^m$ с базисом $\{D(P), P \in \mathbb{P}_{mn}\}$, то есть пространство формальных конечных линейных комбинаций диаграмм $D(P), P \in \mathbb{P}_{mn}$ с коэффициентами из \mathbb{C} . Рассмотрим в нём подпространство $U \subset V$, являющееся линейной оболочкой векторов вида $D(P) - D(P'), D(P_1) - D(P_4) - D(P_2) + D(P_5), D(P_1) - D(P_4) - D(P_3) + D(P_6)$ для всевозможных матриц $P, P', P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ такого вида, как указано выше в определении одночленного и четырёхчленного соотношений. Тогда пространством диаграмм порядка t будем называть факторпространство пространства V по подпространству U .

Определение 2.1.5. Каждая линейная функция на пространстве диаграмм порядка t называется системой весов порядка t .

Нам потребуется также определение произведения диаграмм.

Определение 2.1.6. Произведением диаграмм $D(P)$ и $D(P')$, где

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \\ \dots & \dots \\ P_{r1} & P_{r2} \end{pmatrix}, P' = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \\ \dots & \dots \\ Q_{s1} & Q_{s2} \end{pmatrix},$$

называется диаграмма $D(P'')$, где

$$P'' = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \\ \dots & \dots \\ P_{r1} & P_{r2} \\ Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \\ \dots & \dots \\ Q_{s1} & Q_{s2} \end{pmatrix}.$$

Мы будем писать: $D(P'') = D(P) \times D(P')$.

Теперь мы можем дать определение интегралов Концевича.

Определение 2.1.7. [47] Интегралом Концевича порядка m для кусочно-гладкой косы $Z(t) = (Z_1(t), \dots, Z_n(t))$ называется следующий элемент пространства диаграмм порядка m :

$$K_m = \sum_{P \in \mathbb{P}_{mn} \Delta_m} \int \omega_{P_{11}P_{12}}(t_1) \dots \omega_{P_{m1}P_{m2}}(t_m) D(P),$$

где $\Delta_m = \Delta_m(T) = \{(t_1, \dots, t_m) \mid 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m \leq T\}$,

$$\omega_{kl}(t) = \omega_{lk}(t) = \frac{1}{2\pi i} \frac{dZ_k(t) - dZ_l(t)}{Z_k(t) - Z_l(t)}.$$

Числовые инварианты порядка m (будем называть их, как в [47], инвариантами порядка m) получаются из интегралов K_m и линейных функций на пространстве диаграмм порядка m с помощью замены диаграмм на соответствующие веса (таким образом, каждой системе весов соответствует свой инвариант).

Пример 2.1.2. Инварианты первого порядка — это всевозможные линейные комбинации величин

$$\lambda_{kl}(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^T \frac{dZ_k(t') - dZ_l(t')}{Z_k(t') - Z_l(t')} = \frac{1}{2\pi i} \left(\ln \frac{R_{kl}(T)}{R_{kl}(0)} + i(\Phi_{kl}(T) - \Phi_{kl}(0)) \right),$$

где $R_{kl}(t) = |Z_k(t) - Z_l(t)|$, $\Phi_{kl}(t)$ — непрерывная по t версия аргумента комплексного числа $Z_k(t) - Z_l(t)$. Иначе говоря, $\Phi_{kl}(T) - \Phi_{kl}(0)$ представляет собой угол, который нить Z_k обходит вокруг нити Z_l к моменту T .

Пример 2.1.3. [47] Примером инварианта второго порядка является следующий инвариант для гладкой косы из трёх нитей $(Z_1(t), Z_2(t), Z_3(t)), t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} \Psi_{123} = \frac{1}{2} \int_0^T (\lambda_{12}(s)d\lambda_{13}(s) - \lambda_{13}(s)d\lambda_{12}(s)) + \frac{1}{2} \int_0^T (\lambda_{13}(s)d\lambda_{23}(s) - \lambda_{23}(s)d\lambda_{13}(s)) + \\ + \frac{1}{2} \int_0^T (\lambda_{23}(s)d\lambda_{12}(s) - \lambda_{12}(s)d\lambda_{23}(s)), \end{aligned}$$

$$где \lambda_{kl}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^t \frac{dZ_k(t') - dZ_l(t')}{Z_k(t') - Z_l(t')}.$$

2.2. Инварианты Васильева для негладких кос

В этом разделе мы обсудим инварианты Васильева для негладких кос, что позволит получить в разделе 2.3 представление инвариантов Васильева для непрерывных семимартингалов в виде кратных интегралов Стратоновича. В наших рассуждениях мы будем приближать косы с помощью вписанных в них ломаных. Введём следующее обозначение.

Определение 2.2.1. Пусть Z — коса, образованная непрерывными кривыми $Z_k(t), t \in [0, T], k = 1, \dots, n$. Пусть $\tau = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_p = T\}$ — некоторое разбиение интервала $[0, T]$. Рассмотрим вписанные в кривые Z_k ломаные Z_k^τ с вершинами $Z_k(t_0), \dots, Z_k(t_p)$. Косу, образованную ломаными Z_k^τ , будем называть косой, вписанной в косу Z по разбиению τ , и обозначать Z^τ .

Замечание 2.2.1. Ломаные Z_k^τ могут пересекаться и потому не образуют косы. Однако ясно, что при достаточно мелких разбиениях τ такая ситуация возникать не будет, и поэтому мы не будем делать соответствующую оговорку в дальнейшем.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.2.1. Любой инвариант Васильева для непрерывной косы Z является пределом соответствующих инвариантов для последовательности вписанных в неё кос Z^τ , если мелкости разбиений τ_l стремятся к 0.

Доказательство. Пусть $Z(t) = (Z_1(t), \dots, Z_n(t)), t \in [0, T]$ - коса. Покажем, что при достаточно мелких разбиениях временного отрезка косы, образованные ломаными, построенными по этому разбиению, гомотопны косе $Z(t)$.

В данном доказательстве применяется следующая известная лемма.

Лемма 2.2.1. *(о левебеговом числе) [55, с. 179]. Для всякого открытого покрытия компактного метрического пространства X существует такое $\varepsilon > 0$, что при любом $x \in X$ шар $B_\varepsilon(x)$ содержится в одном из множеств покрытия.*

Пусть U_α —покрытие $\mathbb{C}^n \setminus \{\exists i \neq j : z_i = z_j\}$ открытыми шарами. Тогда множества $Z^{-1}(U_\alpha)$ образуют открытое покрытие $X = [0, T]$. Для этого покрытия выберем $\varepsilon > 0$ из леммы. Начиная с некоторой мелкости разбиения, при всех i имеем $|t_{i+1} - t_i| < \varepsilon$, и каждый отрезок разбиения $[t_i, t_{i+1}]$ отображается в фиксированное множество U_α . Тогда замена траектории $Z(t)$ на каждом отрезке $[t_i, t_{i+1}]$ на отрезок с концами $Z(t_i), Z(t_{i+1})$ меняет траекторию на гомотопную ей. Точнее говоря, гомотопия осуществляется семейством кривых $Z_\mu(t), \mu \in [0, 1], t \in [0, T]$, где

$$Z_\mu(t) = (1 - \mu)Z(t) + \mu \frac{(t - t_i)Z(t_{i+1}) + (t_{i+1} - t)Z(t_i)}{t_{i+1} - t_i}, t \in [t_i, t_{i+1}].$$

При $\mu = 0$ имеем исходную кривую, при $\mu = 1$ имеем ломаную с концами в точках $Z(t_i)$. □

Замечание 2.2.2. *Из доказательства следует, что гомотопными будут не только вся коса и соответствующая ломаная, но и все косы, соответствующие интервалам времени $[0, t_i]$. То есть косы*

$$Z(t)|_{t \in [0, t_i]} = (Z_1(t), \dots, Z_n(t)), t \in [0, t_i],$$

будут гомотопны соответствующим ломаным. Этот факт будет использоваться в дальнейших доказательствах.

Для любых двух непрерывных непересекающихся траекторий $Z_1(t), Z_2(t), t \in [0, T]$ определена функция

$$\lambda_{12}(t) = \frac{1}{2\pi} \Phi_{12}(t) - \frac{i}{2\pi} \ln \frac{R_{12}(t)}{R_{12}(0)},$$

где $R_{12}(t) = |Z_1(t) - Z_2(t)|$, а $\Phi_{12}(t)$ —угол обхода до момента t траектории Z_2 вокруг траектории Z_1 , т.е. угол обхода траектории $Z(t) = Z_2(t) - Z_1(t)$ вокруг нуля.

Следующий факт приводится с доказательством, поскольку в такой формулировке он не был найден в литературе.

Утверждение 2.2.1. *Любой инвариант L_m порядка m для кусочно гладкой косы $Z(t)$ представляется суммой вида*

$$\sum_i \int_0^T L_{m-1}^i(t) d\lambda_i(t),$$

где L_{m-1}^i — некоторые инварианты порядка $m-1$ для той же косы, $\lambda_i = \lambda_{kl}$ для некоторых $k \neq l$, где функции λ_{kl} введены выше.

Доказательство. Инвариант L_m получается из некоторого интеграла Концевича K_m порядка m заменой диаграмм на соответствующие веса. Имеем

$$\begin{aligned} K_m &= \sum_{P \in \mathbb{P}_{mn}} \int_{\Delta_m} \omega_{P_{11}P_{12}}(t_1) \dots \omega_{P_{m1}P_{m2}}(t_m) D(P) = \\ &= \sum_{i \neq j} \sum_{P \in \mathbb{P}_{m-1,n}} \int_0^T \left\{ \int_{\Delta_{m-1}(t_m)} \omega_{P_{11}P_{12}}(t_1) \dots \omega_{P_{m-1,1}P_{m-1,2}}(t_{m-1}) \right\} \omega_{ij}(t_m) \times \\ &\quad \times (D(P) \times D(P^{ij})), \end{aligned}$$

где $P^{ij} = (i \ j)$.

При фиксированной системе весов w , ставя в соответствие каждой диаграмме D число $w(D)$, получаем для соответствующего инварианта $L_m = w(K_m)$:

$$\begin{aligned} L_m &= \sum_{i \neq j} \sum_{P \in \mathbb{P}_{m-1,n}} \int_0^T \left\{ \int_{\Delta_{m-1}(t)} \omega_{P_{11}P_{12}}(t_1) \dots \omega_{P_{m-1,1}P_{m-1,2}}(t_{m-1}) \right\} \omega_{ij}(t) \times \\ &\quad \times w(D(P) \times D(P^{ij})). \end{aligned}$$

Система весов $w'(D(P)) = w(D(P) \times D(P'))$ на диаграммах $P \in \mathbb{P}_{m-1,n}$ корректно определена, поскольку выполнение для неё одночленного и четырёхчленного соотношений вытекает из выполнения соответствующих соотношений для весов $w(D(P) \times D(P'))$. Поэтому при фиксированных i, j каждая сумма

$$\sum_{P \in \mathbb{P}_{m-1,n}} \int_{\Delta_{m-1}(t_m)} \omega_{P_{11}P_{12}}(t_1) \dots \omega_{P_{m-1,1}P_{m-1,2}}(t_{m-1}) w(D(P) \times D(P^{ij}))$$

сама является инвариантом (порядка $m - 1$). Утверждение доказано. \square

Рассмотрим косу Z , образованную непрерывными кривыми

$$Z_k(t), t \in [0, T], k = 1, \dots, n,$$

и последовательность разбиений $\tau = \tau_p = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_p = T\}$ интервала $[0, T]$ с $|\tau_p| \rightarrow 0, p \rightarrow \infty$. Пусть $L(t)$ —некоторый инвариант порядка m для косы $Z(s), 0 \leq s \leq t$, образованной кривыми $Z_k(s), 0 \leq s \leq t$, $\lambda = \lambda_{kl}$ для некоторых $k \neq l$. Рассмотрим вписанные в кривые Z_k ломаные Z_k^τ с вершинами $Z_k(t_0), \dots, Z_k(t_p)$, и пусть Z_τ — коса, образованная этими ломаными. Обозначим через $L_\tau(t)$ значение исследуемого инварианта на косе $Z_\tau(s), 0 \leq s \leq t$, и пусть $\lambda_\tau(t)$ —соответствующая $\lambda(t)$ функция для этой ломаной. В этой ситуации имеет место следующее.

Теорема 2.2.2. *Если при каждом k суммы $\sum_{i=0}^{p-1} |Z_k(t_{i+1}) - Z_k(t_i)|^2$ ограничены равномерно по разбиениям τ_p , то имеет место сходимость*

$$\sum_{i=0}^{p-1} \frac{L(t_i) + L(t_{i+1})}{2} (\lambda(t_{i+1}) - \lambda(t_i)) - \int_0^T L_{\tau_p}(t) d\lambda_{\tau_p}(t) \rightarrow 0, p \rightarrow \infty. \quad (2.1)$$

Замечание 2.2.3. *Функции L_τ, λ_τ являются кусочно гладкими. Точнее говоря, они дифференцируемы всюду, за исключением точек t_i , в которых имеют правые и левые односторонние производные. Эта дифференцируемость следует из явного представления инвариантов Васильева в виде интегралов, справедливого для кусочно-гладких кос, каковой и является коса Z_τ .*

Замечание 2.2.4. *Условие теоремы выполнено для косы, нити которой Z_1, \dots, Z_n являются гёльдеровыми с показателем $1/2$.*

Докажем теорему 2.2.2.

Доказательство. Заметим сначала, что за счёт гомотопической инвариантности $L(t), \lambda(t)$ и замечания 2.2.2, для достаточно мелких разбиений $\tau = \tau_p$ из рассматриваемой последовательности при всех i выполнены равенства

$$L(t_i) = L_\tau(t_i), \lambda(t_i) = \lambda_\tau(t_i).$$

Последующие оценки будем проводить именно для таких достаточно мелких разбиений.

Заменяем функцию L_τ на её кусочно-линейную версию \tilde{L} : при каждом i $L_\tau(t_i) = \tilde{L}(t_i)$, $\tilde{L}(t)$ линейна на $[t_i, t_{i+1}]$.

Оценим разность:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T (L_\tau(t) - \tilde{L}(t)) d\lambda_\tau(t) \right| &\leq \sum_{i=0}^{p-1} \max_{t \in [t_i, t_{i+1}]} |L_\tau(t) - \tilde{L}(t)| |\lambda(t_{i+1}) - \lambda(t_i)| \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^{p-1} \max_{t \in [t_i, t_{i+1}]} |L''_\tau(t)| (t_{i+1} - t_i)^2 |\lambda(t_{i+1}) - \lambda(t_i)|. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Действительно, имеем $L_\tau(t_i) = \tilde{L}(t_i)$, $L_\tau(t_{i+1}) = \tilde{L}(t_{i+1})$. В силу теоремы Лагранжа, применённой к дифференцируемой на отрезке $[t_i, t_{i+1}]$ функции L_τ (см. замечание 2.2.3), существует $\tilde{t} \in [t_i, t_{i+1}]$, такое, что

$$L'_\tau(\tilde{t}) = \frac{L_\tau(t_{i+1}) - L_\tau(t_i)}{t_{i+1} - t_i} = \tilde{L}'(\tilde{t}),$$

и потому для всех $t \in [t_i, t_{i+1}]$:

$$\begin{aligned} |L'_\tau(t) - \tilde{L}'(t)| &= |L'_\tau(t) - \tilde{L}'(\tilde{t})| = |L'_\tau(t) - L'_\tau(\tilde{t})| \leq \\ &\leq \max_{[t_i, t_{i+1}]} |L''_\tau(t)| |t - \tilde{t}| \leq \max_{[t_i, t_{i+1}]} |L''_\tau(t)| |t_{i+1} - t_i|. \end{aligned}$$

Отсюда для $t \in [t_i, t_{i+1}]$:

$$\begin{aligned} |L_\tau(t) - \tilde{L}(t)| &= \left| \int_{t_i}^t (L'_\tau(s) - \tilde{L}'(s)) ds \right| \leq \\ &\leq \max_{s \in [t_i, t_{i+1}]} |L'_\tau(s) - \tilde{L}'(s)| |t_{i+1} - t_i| \leq \max_{s \in [t_i, t_{i+1}]} |L''_\tau(s)| (t_{i+1} - t_i)^2. \end{aligned}$$

Тем самым неравенство (2.2) установлено.

Имеет место следующая оценка на $L''_\tau(t)$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$:

$$|L''_\tau(t)| \leq C \max_{k=1, \dots, n} \frac{\Delta X_k(t_i)^2 + \Delta Y_k(t_i)^2}{\Delta t_i^2}, \quad (2.3)$$

где X_k, Y_k — координаты k -ой нити косы Z , т.е. $Z_k(t) = X_k(t) + iY_k(t)$, $\Delta X_k(t_i) = X_k(t_{i+1}) - X_k(t_i)$, $\Delta Y_k(t_i) = Y_k(t_{i+1}) - Y_k(t_i)$, $C > 0$ — некоторая постоянная, зависящая лишь от исходной косы (но не от разбиения). Действи-

тельно, $L_\tau(t)$ представляется в виде суммы интегралов вида $\int_0^T L_\tau^{m-1}(t) d\lambda_\tau(t)$,

где $L_\tau^{m-1}(t)$ —некоторые инварианты порядка $m-1$ (для ломаной, приближающей нашу косу), $\lambda_\tau(t) = \lambda_{kl}^\tau(t)$ для некоторых $k \neq l, 1 \leq k, l \leq n$ — инварианты первого порядка (тоже для ломаных). Имеем при $t \in [t_i, t_{i+1}]$

$$\left(\int_0^t L_\tau^{m-1}(t) d\lambda_\tau(t) \right)'' = (L_\tau^{m-1}(t) \lambda'_\tau(t))' = (L_\tau^{m-1}(t))' \lambda'_\tau(t) + L_\tau^{m-1}(t) \lambda''_\tau(t). \quad (2.4)$$

Далее, обозначая $X_{kl}(t) = X_l(t) - X_k(t), Y_{kl}(t) = Y_l(t) - Y_k(t)$, имеем

$$\lambda'_\tau(t) = (\lambda_\tau^{kl})'(t) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{X_{kl}Y'_{kl} - Y_{kl}X'_{kl}}{X_{kl}^2 + Y_{kl}^2} - i \frac{X_{kl}X'_{kl} + Y_{kl}Y'_{kl}}{X_{kl}^2 + Y_{kl}^2} \right).$$

Учитывая, что $X_l'' = Y_l'' = X_k'' = Y_k'' = 0$, получаем

$$\begin{aligned} 2\pi \lambda''_\tau(t) &= \frac{X_{kl}Y''_{kl} - Y_{kl}X''_{kl}}{X_{kl}^2 + Y_{kl}^2} - 2 \frac{(X_{kl}Y'_{kl} - Y_{kl}X'_{kl})(X_{kl}X'_{kl} + Y_{kl}Y'_{kl})}{(X_{kl}^2 + Y_{kl}^2)^2} - \\ &\quad - i \frac{X_{kl}X''_{kl} + Y_{kl}Y''_{kl} + 2X'_{kl}Y'_{kl}}{X_{kl}^2 + Y_{kl}^2} + 2i \frac{(X_{kl}X'_{kl} + Y_{kl}Y'_{kl})(X_{kl}X'_{kl} + Y_{kl}Y'_{kl})}{(X_{kl}^2 + Y_{kl}^2)^2} = \\ &= -2 \frac{(X_{kl}Y'_{kl} - Y_{kl}X'_{kl})(X_{kl}X'_{kl} + Y_{kl}Y'_{kl})}{(X_{kl}^2 + Y_{kl}^2)^2} - 2i \frac{X'_{kl}Y'_{kl}}{X_{kl}^2 + Y_{kl}^2} + 2i \frac{(X_{kl}X'_{kl} + Y_{kl}Y'_{kl})^2}{(X_{kl}^2 + Y_{kl}^2)^2}, \end{aligned}$$

откуда при некоторых $C_1, C_2 > 0$ для всех достаточно мелких разбиений получаем, что при $t \in [t_i, t_{i+1}]$

$$\begin{aligned} |\lambda''_\tau(t)| &\leq C_1 (X_l'^2 + Y_l'^2 + X_k'^2 + Y_k'^2) = \\ &= C_1 \frac{\Delta X_k(t_i)^2 + \Delta Y_k(t_i)^2 + \Delta X_l(t_i)^2 + \Delta Y_l(t_i)^2}{\Delta t_i^2} \leq \\ &\leq C_2 \max_{k=1, \dots, n} \frac{\Delta X_k(t_i)^2 + \Delta Y_k(t_i)^2}{\Delta t_i^2}. \end{aligned}$$

Аналогично проводится оценка $(L_\tau^{m-1}(t))'$. Из этих оценок и из (2.4) получается (2.3). Из неё и из (2.2), учитывая кусочную линейность X, Y , получаем

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T (L_\tau(t) - \tilde{L}(t)) d\lambda_\tau(t) \right| &\leq C \sum_{i=0}^{p-1} \max_{[t_i, t_{i+1}]} |L''_\tau(t)| (t_{i+1} - t_i)^2 |\lambda(t_{i+1}) - \lambda(t_i)| \leq \\ &\leq C' \max_{i=0, \dots, p-1} |\lambda(t_{i+1}) - \lambda(t_i)| \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{p-1} (\Delta X_k(t_i)^2 + \Delta Y_k(t_i)^2) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

в силу равномерной по p ограниченности сумм

$$\sum_{i=0}^{p-1} (\Delta X_k(t_i)^2 + \Delta Y_k(t_i)^2).$$

Далее, заменим $\lambda_\tau(\cdot)$ на кусочно-линейную версию $\tilde{\lambda}(\cdot)$. Имеем

$$\int_0^T \tilde{L}(t) d\lambda_\tau(t) = \tilde{L}(T)\lambda_\tau(T) - \int_0^T \lambda_\tau(t) d\tilde{L}(t).$$

Разность

$$\left| \int_0^T \lambda_\tau(t) d\tilde{L}(t) - \int_0^T \tilde{\lambda}(t) d\tilde{L}(t) \right|$$

оценивается аналогично разности

$$\left| \int_0^T (L_\tau(t) - \tilde{L}(t)) d\lambda_\tau(t) \right|.$$

Таким образом, получаем:

$$\int_0^T \tilde{L}(t) d\tilde{\lambda}(t) - \int_0^T L_\tau(t) d\lambda_\tau(t) \rightarrow 0, p \rightarrow \infty.$$

Однако,

$$\int_0^T \tilde{L}(t) d\tilde{\lambda}(t) = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{L(t_i) + L(t_{i+1})}{2} (\lambda(t_{i+1}) - \lambda(t_i)).$$

Это и завершает доказательство теоремы 2.2.2. □

2.3. Инварианты Васильева для семимартингалов

В этом параграфе мы получаем выражения для интегралов Концевича кос, составленных из непрерывных семимартингалов. Вначале рассмотрим интегралы Концевича первого порядка.

Лемма 2.3.1. *Пусть X_t, Y_t — непрерывные семимартингалы относительно общей фильтрации $(\mathfrak{F}_t), t \in [0, T]$, такие, что с вероятностью 1*

$$\forall t \in [0, T] \quad Z(t) = X(t) + iY(t) \neq 0.$$

Тогда процессы $\ln R(t) = \ln |Z(t)|$ и угол обхода $\Phi(t)$ процесса Z вокруг начала координат являются семимартингалами относительно $(\mathfrak{F}_t), t \in [0, T]$.

Доказательство. Применяя формулу Ито, получаем для процесса

$$R_t^2 = X_t^2 + Y_t^2$$

равенство

$$R_t^2 = R_0^2 + 2 \int_0^t X_s dX_s + 2 \int_0^t Y_s dY_s + \langle X \rangle_t + \langle Y \rangle_t,$$

и процесс R^2 является непрерывным семимартингалом с характеристикой

$$\langle R^2 \rangle_t = 4 \int_0^t X_s^2 d\langle X \rangle_s + 4 \int_0^t Y_s^2 d\langle Y \rangle_s + 8 \int_0^t X_s Y_s d\langle X, Y \rangle_s.$$

Для процесса $\ln R(t) = \frac{1}{2} \ln R(t)^2$ с помощью формулы Ито теперь получаем

$$\begin{aligned} \ln R(t) = \ln R(0) + \int_0^t \frac{1}{R_s^2} (X_s dX_s + Y_s dY_s) - \\ - \int_0^t \frac{X_s^2 - Y_s^2}{2R_s^4} (d\langle X \rangle_s - d\langle Y \rangle_s) - \int_0^t \frac{4}{R_s^4} X_s Y_s d\langle X, Y \rangle_s. \end{aligned}$$

Поскольку интегралы Ито непрерывных семимартингалов по непрерывным семимартингалам являются непрерывными семимартингалами ([3], с. 58), то $\ln R(t)$ — непрерывный семимартингал.

Теперь покажем, что и $\Phi(t)$ является непрерывным семимартингалом. Рассмотрим последовательность разбиений $\tau_l : 0 = t_0 < \dots < t_l = T$ отрезка $[0, T]$ с мелкостью $|\tau_l|$, сходящейся к нулю. При достаточно больших $l \geq l_0 = l_0(\omega)$ все отрезки траекторий Z на интервалах $[t_i, t_{i+1}]$ будут целиком лежать в одном из множеств $\{(x, y) : x > 0\}$, $\{(x, y) : x < 0\}$, $\{(x, y) : y > 0\}$, $\{(x, y) : y < 0\}$. Таким образом, при достаточно больших $l \geq l_0 = l_0(\omega)$ приращения $\Phi(t_{i+1}) - \Phi(t_i)$ будут совпадать с приращениями одной из функций $\arctg \frac{Y_s}{X_s}$, $\text{arcsctg} \frac{X_s}{Y_s}$. Таким образом, можно заключить, что при достаточно больших $l \geq l_0(\omega)$ $\Phi(t) - \Phi(0)$ при всех $t \in [0, T]$ совпадает с одной из 2^l сумм

$$S_J = \sum_{i=0}^{l-1} (f_{j_i}(X(t_{i+1} \wedge t), Y(t_{i+1} \wedge t)) - f_{j_i}(X(t_i \wedge t), Y(t_i \wedge t))),$$

где $f_1(x, y) = \arctg \frac{y}{x}$, $f_2(x, y) = \text{arcctg} \frac{x}{y}$, а набор $J = (j_1, \dots, j_l)$ пробегает все 2^l возможных значений из $\{1, 2\}^l$. Применяя формулу Ито, получаем

$$d \frac{Y_s}{X_s} = -\frac{Y_s}{X_s^2} dX_s + \frac{1}{X_s} dY_s + \frac{Y_s}{X_s^3} d\langle X \rangle_s - \frac{1}{X_s^2} d\langle X, Y \rangle_s,$$

откуда

$$d \left\langle \frac{Y}{X} \right\rangle_s = \frac{Y_s^2}{X_s^4} d\langle X \rangle_s + \frac{1}{X_s^2} d\langle Y \rangle_s - 2 \frac{Y_s}{X_s^3} d\langle X, Y \rangle_s.$$

Из формулы Ито и полученных выражений имеем

$$\begin{aligned} d \arctg \frac{Y_s}{X_s} &= \frac{X_s^2}{X_s^2 + Y_s^2} d \frac{Y_s}{X_s} - \frac{X_s^3 Y_s}{(X_s^2 + Y_s^2)^2} d \left\langle \frac{Y}{X} \right\rangle_s = \\ &= \frac{X_s dY_s - Y_s dX_s}{X_s^2 + Y_s^2} + \frac{X_s Y_s}{(X_s^2 + Y_s^2)^2} (d\langle X \rangle_s - d\langle Y \rangle_s) - \frac{X_s^2 - Y_s^2}{(X_s^2 + Y_s^2)^2} d\langle X, Y \rangle_s. \end{aligned}$$

Аналогичные вычисления позволяют получить формулу

$$\begin{aligned} d \text{arcctg} \frac{X_s}{Y_s} &= \\ &= \frac{X_s dY_s - Y_s dX_s}{X_s^2 + Y_s^2} + \frac{X_s Y_s}{(X_s^2 + Y_s^2)^2} (d\langle X \rangle_s - d\langle Y \rangle_s) - \frac{X_s^2 - Y_s^2}{(X_s^2 + Y_s^2)^2} d\langle X, Y \rangle_s. \end{aligned}$$

Следовательно, для всех $l_0 \geq l_0(\omega)$ выполнено

$$\begin{aligned} \Phi(t) - \Phi(0) &= \\ &= \int_0^t \frac{X_s dY_s - Y_s dX_s}{X_s^2 + Y_s^2} + \int_0^t \frac{X_s Y_s}{(X_s^2 + Y_s^2)^2} (d\langle X \rangle_s - d\langle Y \rangle_s) - \int_0^t \frac{X_s^2 - Y_s^2}{(X_s^2 + Y_s^2)^2} d\langle X, Y \rangle_s. \end{aligned}$$

Итак, $\Phi(t)$ — также непрерывный семимартингал. Формулы, полученные в доказательстве этой леммы, будут использованы в главе 3 в доказательстве утверждения 3.2.2. \square

Теорема 2.3.1. *Для непрерывных семимартингалов $Z_k(t), t \in [0, T], k = 1, \dots, n$ относительно общей фильтрации $(\mathfrak{F}_t), t \in [0, T]$, таких, что с вероятностью 1*

$$\forall t \in [0, T] \quad \forall k \neq l \quad Z_k(t) \neq Z_l(t),$$

интегралы Концевича вычисляются как соответствующие кратные интегралы Стратоновича.

Доказательство. Теорема 2.3.1 очевидным образом следует из теоремы 2.2.2, и утверждения 2.2.1, с учётом того факта, что для конечного числа непрерывных семимартингалов $U_k(t)$ относительно общей фильтрации \mathfrak{F}_t существует (детерминированная) последовательность разбиений

$$\tau_p : 0 = t_0^{(p)} < t_1^{(p)} \dots < t_{j_p-1}^{(p)} < t_{j_p}^{(p)} = T$$

со стремящейся к 0 мелкостью (т.е. $\max_{0 \leq j \leq j_p-1} (t_{j+1}^{(p)} - t_j^{(p)}) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$), такая, что все последовательности сумм

$$\sum_{j=0}^{j_p-1} |U_k(t_{j+1}^{(p)}) - U_k(t_j^{(p)})|^2, k = 1, \dots, n,$$

ограничены с вероятностью 1. Действительно, выбрав произвольную последовательность разбиений

$$\Lambda_q : 0 = s_0^{(q)} < s_1^{(q)} \dots < s_{l_q-1}^{(q)} < s_{l_q}^{(q)} = T$$

со сходящейся к 0 мелкостью, получаем, что соответствующие суммы

$$\sum_{j=0}^{l_q-1} |U_k(s_{j+1}^{(q)}) - U_k(s_j^{(q)})|^2$$

сходятся по вероятности при $q \rightarrow \infty$ [3, с. 51], а поскольку этих сумм конечное число, то можно выбрать подпоследовательность последовательности Λ_q , для которой соответствующие суммы будут сходиться с вероятностью 1. \square

Пример 2.3.1. Инвариант из примера 2.1.3 теперь записывается в виде

$$\begin{aligned} \Psi_{123} = & \frac{1}{2} \int_0^T (\lambda_{12}(s) \circ d\lambda_{13}(s) - \lambda_{13}(s) \circ d\lambda_{12}(s)) + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^T (\lambda_{13}(s) \circ d\lambda_{23}(s) - \lambda_{23}(s) \circ d\lambda_{13}(s)) + \frac{1}{2} \int_0^T (\lambda_{23}(s) \circ d\lambda_{12}(s) - \lambda_{12}(s) \circ d\lambda_{23}(s)). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Заметим, что в этом случае вместо интегралов Стратоновича можно

писать интегралы Ито, т.е.

$$\begin{aligned}\Psi_{123} = & \frac{1}{2} \int_0^T (\lambda_{12}(s)d\lambda_{13}(s) - \lambda_{13}(s)d\lambda_{12}(s)) + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^T (\lambda_{13}(s)d\lambda_{23}(s) - \lambda_{23}(s)d\lambda_{13}(s)) + \frac{1}{2} \int_0^T (\lambda_{23}(s)d\lambda_{12}(s) - \lambda_{12}(s)d\lambda_{23}(s)).\end{aligned}\tag{2.6}$$

Действительно, имеет место следующее соотношение между интегралами Ито и Стратоновича для непрерывных семимартингалов X, Y (см. [56], стр. 342):

$$\int_0^t X_s \circ dY_s = \int_0^t X_s dY_s + \frac{1}{2} \langle X, Y \rangle_t.$$

Отсюда получается соотношение

$$\int_0^t X_s \circ dY_s - \int_0^t Y_s \circ dX_s = \int_0^t X_s dY_s - \int_0^t Y_s dX_s.$$

Применяя его в нашем случае для пар семимартингалов λ_{12} и λ_{13} , λ_{13} и λ_{23} , λ_{23} и λ_{12} , мы получаем из (2.5) представление (2.6).

Выводы к главе 2

Получено представление инвариантов Васильева для кос, образованных непрерывными семимартингалами относительно общей фильтрации, в виде кратных интегралов Стратоновича.

Глава 3

Вращение частиц в броуновских потоках

В предыдущей главе мы обсуждали инварианты Васильева для случайных кос, в частности, для кос, образованных траекториями частиц в стохастических потоках. Частным случаем инвариантов Васильева для косы являются взаимные углы обхода нитей косы. В этой главе мы исследуем совместное асимптотическое поведение (при $t \rightarrow \infty$) взаимных углов обхода траекторий нескольких частиц в броуновском стохастическом потоке. Для независимых броуновских движений соответствующая задача была решена в работе М. Йора [57]. Там был получен следующий результат.

Теорема 3.0.2. [57] Пусть w_1, \dots, w_n — независимые двумерные стандартные броуновские движения, выходящие из попарно различных точек плоскости. Тогда для углов обхода $\Phi_{kl}(t)$ траектории броуновского движения w_k вокруг броуновского движения w_l справедливо асимптотическое соотношение $(\frac{2}{\ln t} \Phi_{kl}(t), 1 \leq k < l \leq n) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{d} (\xi_{kl}, 1 \leq k < l \leq n)$. Здесь $\xi_{kl}, 1 \leq i < j \leq n$ — независимые в совокупности случайные величины, имеющие стандартное распределение Коши.

Мы покажем, что то же самое предельное соотношение выполнено для траекторий частиц в определённом классе броуновских стохастических потоков. В разделе 3.1 мы приводим предварительные сведения о броуновских потоках. В разделе 3.2 мы получаем аналог закона Спизера для углов обхода частиц в броуновском потоке. В разделе 3.3 мы получаем аналог теоремы 3.0.2 для броуновских потоков.

3.1. Предварительные сведения о броуновских потоках

В этом разделе мы изложим, следуя книге [3] и статьям [11], [12], [18], сведения о броуновских стохастических потоках, которые понадобятся в дальнейшем. Вначале приведём некоторые факты о мартингалах с пространственным параметром и соответствующих стохастических дифференциальных уравнениях, необходимые для рассмотрения броуновских потоков.

Определение 3.1.1. [3] Будем говорить, что функция

$$g: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$$

лежит в классе $\tilde{C}_b^{0,\delta}$, $0 < \delta \leq 1$, если при любом $t \geq 0$

$$\|a(t)\|_{\delta}^{\sim} = \sup_{\substack{x,y,x',y' \in \mathbb{R}^d \\ x \neq x', y \neq y'}} \frac{|g(x', y', t) - g(x, y', t) - g(x', y, t) + g(x, y, t)|}{|x - x'|^{\delta} |y - y'|^{\delta}} < +\infty,$$

и функция $h(t) = \|a(t)\|_{\delta}^{\sim}$ интегрируема на $[0, T]$ при любом $T > 0$. Если к тому же $h(t)$ ограничена по t , то будем говорить, что g лежит в классе $\tilde{C}_{ub}^{0,\delta}$.

Определение 3.1.2. Мартингалом с пространственным параметром называется семейство непрерывных локальных мартингалов

$$U(x, \cdot), x \in \mathbb{R}^d$$

относительно общей фильтрации \mathfrak{F} .

Определение 3.1.3. [3] Пусть $U(x, t), x \in \mathbb{R}^d, t \geq 0$ — мартингал с пространственным параметром. Будем говорить, что $a(x, y, r)$ — локальная характеристика $U(x, t)$, если при любом $t \geq 0$ имеет место

$$\langle U(x, \cdot), U(y, \cdot) \rangle_t = \int_0^t a(x, y, s) ds.$$

Определение 3.1.4. [3] Будем говорить, что локальная характеристика $a(x, y, r)$ некоторого мартингала с пространственным параметром $U(x, t)$ лежит в классе $B_b^{0,\delta}$, $0 < \delta \leq 1$, если $a(x, y, r)$ имеет модификацию предсказуемого процесса со значениями в $\tilde{C}_b^{0,\delta}$, и с вероятностью 1 $\|a(t)\|_{\delta}^{\sim}$ интегрируема на $[0, T]$ при любом $T > 0$. Если к тому же $\|a(t)\|_{\delta}^{\sim}$ ограничена по t с вероятностью 1, то говорим, что $a(x, y, r)$ лежит в классе $B_{ub}^{0,\delta}$.

Согласно [3], для мартингала U с пространственным параметром, имеющим локальную характеристику, лежащую в классе $B_b^{0,\delta}$ при некотором $\delta \in (0, 1]$, и любого непрерывного предсказуемого процесса f со значениями в \mathbb{R}^d определён интеграл

$$\int_0^t U(f_s, ds)$$

(интеграл по мартингалу с пространственным параметром).

Теперь мы можем рассматривать уравнения, основанные на мартингалах с пространственным параметром.

Определение 3.1.5. [3] *Решением уравнения*

$$dF_t(x) = U(F_t(x), dt), \quad (3.1)$$

где U — мартингал с пространственным параметром, называется непрерывный согласованный процесс f , такой, что

$$f(0) = x$$

и при любом $t > 0$ имеет место

$$f_t = x + \int_0^t U(f_s, ds).$$

Замечание 3.1.1. Согласно [3], теорема 3.4.1, решение такого уравнения существует и единственно при условии, что U имеет локальную характеристику из класса $B_b^{0,1}$.

При определённых условиях на U уравнение (3.1) задаёт броуновский стохастический поток. Приведём некоторые сведения о броуновских потоках. Такие потоки возникли в работах [9], [20], [21] как модели турбулентного течения жидкости.

Определение 3.1.6 ([3]). *Стохастическим потоком гомеоморфизмов в пространстве \mathbb{R}^d называется семейство случайных отображений $F_{s,t} = F_{s,t}(\omega, \cdot) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, 0 \leq s \leq t$, обладающих на некотором множестве Ω_0 с $P(\Omega_0) = 1$ следующими свойствами:*

1. поле $F_{s,t}(\cdot, x)$ является непрерывным по совокупности параметров s, t, x ;
2. все отображения $F_{s,t}$ являются гомеоморфизмами \mathbb{R}^d ;

3. при каждом $s \geq 0$ имеет место $F_{ss} = Id$, т.е. отображение F_{ss} является тождественным;

4. при всех $\omega \in \Omega_0$ при $s < t < u$ выполняется соотношение $F_{tu} \circ F_{st} = F_{su}$.

Определение 3.1.7 ([3]). Броуновским стохастическим потоком в \mathbb{R}^d называется стохастический поток гомеоморфизмов $F_{s,t}$ со следующим свойством: при любых $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n$ отображения $F_{s_1, s_2}, F_{s_2, s_3}, \dots, F_{s_{n-1}, s_n}$ независимы.

Согласно [3], если $U(x, t)$ является мартингалом с пространственным параметром, локальная характеристика которого $a(x, y, t)$ лежит в классе $B_{ub}^{0,1}$, то решение уравнения (3.1) задаёт броуновский поток.

Важный класс потоков составляют однородные изотропные броуновские потоки, возникшие при изучении наиболее простой модели турбулентности — изотропной турбулентности. В этой модели распределение поля скоростей жидкости инвариантно относительно параллельных переносов, поворотов и отражений.

В разделе 1.4 мы приводили определение однородности и изотропности для случайных полей на \mathbb{R}^d . Определения однородности и изотропности можно дать и для броуновских стохастических потоков.

Определение 3.1.8. Однородным броуновским стохастическим потоком называется стохастический поток, который задаётся уравнением (3.1), где U — центрированное гауссовское случайное поле, удовлетворяющее соотношению

$$\mathbb{E}U_k(x, t)U_l(y, s) = b_{kl}(x - y) \min\{t, s\}, k, l = 1, \dots, d.$$

Здесь $x, y \in \mathbb{R}^d$, $t \in [0, +\infty)$, $b(z) = (b_{kl}(z), 1 \leq k, l \leq d)$ — некоторая матричнозначная функция.

Определение 3.1.9. Однородный броуновский поток называется изотропным, если соответствующая матричнозначная функция $b = b(z)$ удовлетворяет соотношению

$$Gb(G^{-1}z)G^{-1} = b(z)$$

для каждого $z \in \mathbb{R}^d$ и каждой ортогональной матрицы G .

Замечание 3.1.2. Заметим, что это условие эквивалентно существованию однородного изотропного поля $V = V(z)$, для которого

$$b_{kl}(z) = \text{cov}(V_k(x), V_l(x + z))$$

при всех $x, z \in \mathbb{R}^d$.

Условие изотропности накладывает ограничения на вид матричнозначной функции $b(z)$. Полное описание ковариационных функций компонент изотропных случайных полей было получено в работе А.М. Яглома [58]. Соответствующий результат был приведён в разделе 1.4, утверждение 1.4.1. При определённых дополнительных предположениях функции b_L и b_N из утверждения 1.4.1 являются достаточно гладкими. В этом случае, согласно результатам [3], поток $F_{s,t}$ является потоком диффеоморфизмов. Это даёт возможность говорить о показателях Ляпунова λ_1, λ_2 ($\lambda_1 > \lambda_2$) потока F . Эти показатели, как было показано в работе [10], выражаются через функции b_L, b_N .

Так, имеет место следующий результат.

Утверждение 3.1.1. [12] Пусть $U(x, t), x \in \mathbb{R}^2, t \geq 0$ — гауссовское векторное поле со значениями в \mathbb{R}^2 , задающее однородный изотропный броуновский поток F . Предположим, что меры Φ_P, Φ_S из утверждения 1.4.1 имеют конечный четвёртый момент. Тогда функции b_L, b_N четырежды непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют следующим асимптотическим соотношениям:

$$b_L(r) = b_0 - \frac{1}{2}\beta_L r^2 + O(r^4), r \rightarrow 0, \quad (3.2)$$

$$b_N(r) = b_0 - \frac{1}{2}\beta_N r^2 + O(r^4), r \rightarrow 0, \quad (3.3)$$

где $b_L(0) = b_N(0) = b_0$, и

$$\beta_L = \frac{3}{8} \int_0^\infty \alpha^2 \Phi_P(d\alpha) + \frac{1}{8} \int_0^\infty \alpha^2 \Phi_S(d\alpha),$$

$$\beta_N = \frac{1}{8} \int_0^\infty \alpha^2 \Phi_P(d\alpha) + \frac{3}{8} \int_0^\infty \alpha^2 \Phi_S(d\alpha).$$

При этом показатели Ляпунова соответствующего потока равны

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(\beta_N - \beta_L), \lambda_2 = -\beta_L.$$

Замечание 3.1.3. При указанных предположениях уравнение (3.1) действительно имеет единственное решение, поскольку

$$\langle U(x, \cdot), U(y, \cdot) \rangle_t = t \begin{pmatrix} b_{11}(x-y) & b_{12}(x-y) \\ b_{21}(x-y) & b_{22}(x-y) \end{pmatrix},$$

и локальная характеристика

$$a(x, y, t) = \begin{pmatrix} b_{11}(x - y) & b_{12}(x - y) \\ b_{21}(x - y) & b_{22}(x - y) \end{pmatrix}$$

лежит в классе $B_b^{0,1}$. Проверим это для рассматриваемого нами в дальнейшем случая $b_L \equiv b_N$. При этом

$$a(x, y, t) = b_L(\|x - y\|) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Функция $h(x, y) = b_L(\|x - y\|)$ является дважды непрерывно дифференцируемой с ограниченными вторыми производными, и потому лежит в классе $\tilde{C}^{0,1}$. Более того, поскольку $a(x, y, t)$ не зависит от t , то она лежит и в классе $\tilde{C}_{ub}^{0,1}$. Следовательно, локальная характеристика U лежит в классе $B_{ub}^{0,1}$, и уравнение (3.1) задаёт броуновский поток.

Показатели Ляпунова определяют асимптотическое поведение расстояния между частицами в потоке. Так, имеет место следующие результаты, полученные в работах [9], [11].

Теорема 3.1.1. [11] Для двумерного однородного изотропного броуновского стохастического потока имеют место следующие варианты асимптотического поведения $R_{ab}(t) = \|F_t(a) - F_t(b)\|$ расстояния между частицами, вышедшими из двух произвольных различных точек плоскости a и b , в зависимости от максимального показателя Ляпунова λ_1 :

1. Если $\lambda_1 < 0$, то $R_{ab}(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$ почти наверное.
2. Если $\lambda_1 \geq 0$, то $R_{ab}(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty$ по вероятности, и процесс R_{ab} является нуль-возвратным диффузионным процессом.

Замечание 3.1.4. Мы обозначаем $F_t(x) = F_{0,t}(x)$.

Далее мы переходим к исследованию поведения взаимных углов обхода частиц в броуновских потоках. Вначале получим аналог закона Спицера.

3.2. Аналог закона Спицера для угла обхода в броуновском потоке

Пусть F — однородный изотропный броуновский стохастический поток. Мы рассмотрим случай, когда функции b_L и b_N , задающие поток, совпадают:

$$b_L \equiv b_N.$$

Замечание 3.2.1. В случае $b_L \equiv b_N$ имеет место равенство $\beta_L = \beta_N$, и согласно утверждению 3.1.1 старший показатель Ляпунова соответствующего потока равен нулю. Естественно ожидать, что полученные нами результаты выполнены и в более общем случае броуновского потока со старшим показателем Ляпунова, равным нулю. Однако, рассмотрение этого случая технически гораздо более сложно и требует дальнейшего исследования.

Пусть $a, b \in \mathbb{R}^2, a \neq b$. Рассмотрим траектории потока $F_t(a), F_t(b)$, выходящие из точек a и b . Отождествляя \mathbb{R}^2 и \mathbb{C} , можно написать

$$F_t(b) - F_t(a) = R_{ab}(t)e^{i\Phi_{ab}(t)} \frac{F_0(b) - F_0(a)}{\|F_0(b) - F_0(a)\|},$$

где $R_{ab}(t) = \|F_t(b) - F_t(a)\|$, $\Phi_{ab}(t)$ — непрерывная версия угла обхода траектории $F(b)$ вокруг $F(a)$.

Замечание 3.2.2. Согласно [12], процесс R_{ab} является решением стохастического дифференциального уравнения

$$dR_{ab}(t) = \sqrt{2(1 - b_L(R_{ab}(t)))}dW_t^1 + \frac{1 - b_L(R_{ab}(t))}{R_{ab}(t)}dt,$$

а процесс Φ_{ab} удовлетворяет уравнению

$$d\Phi_{ab}(t) = \frac{\sqrt{2(1 - b_L(R_{ab}(t)))}}{R_{ab}(t)}dW_t^2.$$

Здесь W^1, W^2 — независимые броуновские движения.

Следующая теорема является основной теоремой данного параграфа и представляет собой аналог закона Спизера для угла обхода $\Phi_{ab}(t)$.

Теорема 3.2.1. Пусть F — однородный изотропный броуновский стохастический поток, задаваемый стохастическим дифференциальным уравнением

$$dF_t(x) = U(F_t(x), dt),$$

$x \in \mathbb{R}^2, t \geq 0$, где $U = U(x, t)$ — центрированное гауссовское случайное векторное поле,

$$\mathbb{E} U_k(x, t) U_l(y, s) = b_{kl}(x - y) t \wedge s,$$

а матрица b имеет вид $b(z) = (b_{kl}(z)) = (\delta_{kl} b_L(\|z\|)), 1 \leq k, l \leq 2, b_L: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ — некоторая функция, удовлетворяющая условиям

- $b_0 = b_L(0) = 1$;
- $b_L(r) < 1$ при $r > 0$;
- $b_L \in C^{(4)}([0, +\infty))$;
- $b_L(r) \rightarrow 0$ ($r \rightarrow \infty$);
- $\int_0^\infty r|b'_L(r)|dr < \infty$;
- $\int_0^\infty r|b'_L(r) - rb''_L(r)|dr < \infty$;
- $b_L(r) = 1 - \frac{1}{2}\beta_L r^2 + O(r^4)$, $r \rightarrow 0+$, для некоторого $\beta_L > 0$.

Тогда имеет место соотношение

$$\frac{\Phi_{ab}(t)}{\frac{1}{2} \ln t} \xrightarrow{d} \xi,$$

где ξ — случайная величина, имеющая стандартное распределение Коши.

Замечание 3.2.3. Примером функции b_L , удовлетворяющей условиям теоремы, является $b_L(r) = \frac{1}{1+r^2}$. В [59] (§3.6) показано, что $b_L(\|z\|)$ является ковариационной функцией некоторого случайного поля $X: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, т.е.

$$\text{cov}(X(z_1), X(z_2)) = b_L(\|z_1 - z_2\|), z_1, z_2 \in \mathbb{R}^2.$$

Пусть точки $F_t(a), F_t(b)$ имеют координаты

$$F_t(a) = \begin{pmatrix} X_t(a) \\ Y_t(a) \end{pmatrix}, F_t(b) = \begin{pmatrix} X_t(b) \\ Y_t(b) \end{pmatrix}.$$

Введём обозначения $X_{ab}(t) = X_t(b) - X_t(a)$, $Y_{ab}(t) = Y_t(b) - Y_t(a)$.

Применение изложенной в работе [3] техники обращения с интегралами по семимартингалам, зависящим от пространственного параметра, позволяет получить следующее утверждение.

Утверждение 3.2.1. *Имеют место следующие соотношения:*

$$\langle X_{ab} \rangle_t = \langle Y_{ab} \rangle_t = \int_0^t 2(1 - b_L(R_{ab}(s)))ds,$$

$$\langle X_{ab}, Y_{ab} \rangle_t = 0.$$

Доказательство. Пусть U_1, U_2 — компоненты поля U , т.е.

$$U(a, t) = \begin{pmatrix} U_1(a, t) \\ U_2(a, t) \end{pmatrix}.$$

Для любых точек $u, v \in \mathbb{R}^2$ случайные процессы $U_1(u, \cdot)$, $U_1(v, \cdot)$, $U_2(u, \cdot)$, $U_2(v, \cdot)$ являются двумерными броуновскими движениями, совместные характеристики которых

$$\langle U_1(u, \cdot), U_1(v, \cdot) \rangle_t = \langle U_2(u, \cdot), U_2(v, \cdot) \rangle_t = b_L(\|u - v\|)t,$$

$$\langle U_1(u, \cdot), U_2(v, \cdot) \rangle_t = \langle U_1(v, \cdot), U_2(u, \cdot) \rangle_t = 0.$$

Рассматривая U_1 как мартингал с пространственным параметром, получаем для любых u, v, s

$$a(u, v, s) = b_L(\|u - v\|).$$

Из представлений

$$F_t(u) = u + \int_0^t U(F_s(u), ds), F_t(v) = v + \int_0^t U(F_s(v), ds)$$

следует, согласно теореме 3.2.4 из [3]:

$$\left\langle \int_0^t U_1(F_s(u), ds), \int_0^t U_1(F_s(v), ds) \right\rangle_t = \int_0^t b_L(\|F_s(u) - F_s(v)\|) ds.$$

Поскольку

$$X_t(a) = a + \int_0^t U_1(F_s(a), ds), X_t(b) = b + \int_0^t U_1(F_s(b), ds),$$

то

$$\langle X(a) \rangle_t = b_L(0)t, \langle X(b) \rangle_t = b_L(0)t, \langle X(a), X(b) \rangle_t = \int_0^t b_L(R_{ab}(s))ds.$$

Отсюда сразу получаются искомые выражения для $\langle X_{ab} \rangle_t = \langle X(a) - X(b) \rangle_t$.
Выражения для $\langle Y_{ab} \rangle_t$, $\langle X_{ab}, Y_{ab} \rangle_t$ получаются аналогично. \square

Утверждение 3.2.2. Углы обхода частиц друг вокруг друга представляются в виде следующих интегралов Ито:

$$\Phi_{ab}(t) = \int_0^t \frac{X_{ab}(s)dY_{ab}(s) - Y_{ab}(s)dX_{ab}(s)}{X_{ab}(s)^2 + Y_{ab}(s)^2},$$

Логарифмы попарных расстояний между частицами представляются в виде

$$\ln R_{ab}(t) - \ln R_{ab}(0) = \int_0^t \frac{X_{ab}(s)dX_{ab}(s) + Y_{ab}(s)dY_{ab}(s)}{X_{ab}(s)^2 + Y_{ab}(s)^2}.$$

Доказательство. Рассматриваемые выражения получаются из выражений, полученных в доказательстве леммы 2.3.1, с учётом того, что в нашем случае

$$d\langle X_{ab} \rangle_t = d\langle Y_{ab} \rangle_t = 2(1 - b_L(R_{ab}(s)))dt, d\langle X_{ab}, Y_{ab} \rangle_t = 0.$$

□

Нам понадобится следующее определение.

Определение 3.2.1. Броуновским движением, ассоциированным с непрерывным локальным мартингалом M , называется такое броуновское движение β , что при всех $t > 0$ с вероятностью 1 выполнено соотношение $M_t = \beta(\langle M \rangle_t)$.

Замечание 3.2.4. Такое броуновское движение существует в силу известного результата Дэмбиса-Дубинса-Шварца (см. теорему 18.4 в [56]). При $\langle M \rangle_t \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\text{н.н.}} \infty$ процесс β почти наверное определяется единственным образом. В наших рассмотрениях всегда будет иметь место именно такая ситуация.

Из предыдущих утверждений следует, что $\ln R_{ab}$, Φ_{ab} — ортогональные локальные мартингалы с характеристикой $\langle \ln R_{ab} \rangle_t = \langle \Phi_{ab} \rangle_t = \int_0^t \frac{2(1 - b_L(R_{ab}(s)))}{R_{ab}(s)^2} ds$. Пусть β, γ — ассоциированные с $\ln R_{ab}$, Φ_{ab} броуновские движения, т.е.

$$\ln R_{ab}(t) = \beta \left(\int_0^t \frac{2(1 - b_L(R_{ab}(s)))}{R_{ab}(s)^2} ds \right), \quad \beta(0) = \ln R_{ab}(0),$$

$$\Phi_{ab}(t) = \gamma \left(\int_0^t \frac{2(1 - b_L(R_{ab}(s)))}{R_{ab}(s)^2} ds \right), \quad \gamma(0) = 0.$$

Заметим, что броуновское движение γ не зависит от β в силу теоремы Найта (утверждение 18.8 из [56]). Далее в этом подразделе обозначаем $R(t) = R_{ab}(t)$. Введём также следующие обозначения:

w — некоторый одномерный винеровский процесс, не зависящий от β и γ , $w(0) = 0$,

$$\tau_a = \inf\{s > 0: w(s) = a\}, \quad H_t = \inf \left\{ u > 0: \int_0^u \frac{e^{2\beta(s)}}{2(1 - b_L(e^{\beta(s)}))} ds = t \right\},$$

$$\theta_a = \inf\{s > 0: \beta(s) = a\}, \quad T_r = \inf\{s > 0: R_{ab}(s) = r\}.$$

Докажем сначала, что

$$\frac{\langle \ln R \rangle_t}{(\ln t)^2} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{d} \tau_{1/2}.$$

Переформулируем эту задачу в терминах процесса β . Имеем

$$t = \int_0^t \frac{ds}{d \langle \ln R \rangle_s} d \langle \ln R \rangle_s.$$

Однако, $\frac{d \langle \ln R \rangle_s}{ds} = \frac{2(1 - b_L(R_s))}{R_s^2} = \frac{2(1 - b_L(e^{\beta(\langle \ln R \rangle_s)}))}{e^{2\beta(\langle \ln R \rangle_s)}}$. Следовательно,

$$t = \int_0^t \frac{e^{2\beta(\langle \ln R \rangle_s)}}{2(1 - b_L(e^{\beta(\langle \ln R \rangle_s)}))} d \langle \ln R \rangle_s = \int_0^{\langle \ln R \rangle_t} \frac{e^{2\beta(s)}}{2(1 - b_L(e^{\beta(s)}))} ds.$$

Таким образом,

$$\langle \ln R \rangle_t = \inf \left\{ u > 0: \int_0^u \frac{e^{2\beta(s)}}{2(1 - b_L(e^{\beta(s)}))} ds = t \right\},$$

т.е.

$$\langle \ln R \rangle_t = H_t, \tag{3.4}$$

и наша задача свелась к исследованию распределения некоторого момента остановки для броуновского движения. Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3.2.1. *Для любого $\varepsilon, 0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, имеет место*

$$P \left(\theta_{(\frac{1}{2} - \varepsilon) \ln t} \leq H_t \leq \theta_{(\frac{1}{2} + \varepsilon) \ln t} \right) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 1.$$

Доказательство. Покажем сначала, что

$$P\left(H_t < \theta_{(\frac{1}{2}-\varepsilon)\ln t}\right) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0.$$

Выберем x_0 так, что $b_L(u) < \frac{1}{2}$ при $u > e^{x_0}$. Выберем теперь t_1 таким образом, что

$$\sup_{-\infty < x \leq x_0} \frac{e^{2x}}{2(1 - b_L(e^x))} < t_1^{1-\varepsilon}.$$

Тогда при $t > t_1 = t_1(\varepsilon)$ имеем для всех $x < (\frac{1}{2} - \varepsilon) \ln t$:

$$\frac{e^{2x}}{2(1 - b_L(e^x))} < t^{1-\varepsilon}.$$

Следовательно, если $t > t_1$ и $\sup_{0 \leq s \leq H_t} \beta(s) \leq (\frac{1}{2} - \varepsilon) \ln t$, то

$$t = \int_0^{H_t} \frac{e^{2\beta(s)}}{2(1 - b_L(e^{\beta(s)}))} ds \leq t^{1-\varepsilon} H_t,$$

и $H_t \geq t^\varepsilon$. Таким образом, получаем при $t > t_1$:

$$P\left(H_t < \theta_{(\frac{1}{2}-\varepsilon)\ln t}\right) = P\left(t^\varepsilon \leq H_t < \theta_{(\frac{1}{2}-\varepsilon)\ln t}\right) \leq P\left(\theta_{(\frac{1}{2}-\varepsilon)\ln t} > t^\varepsilon\right) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty).$$

Теперь покажем, что

$$P\left(H_t > \theta_{(\frac{1}{2}+\varepsilon)\ln t}\right) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0.$$

При достаточно больших значениях t , $t > t_2 = t_2(\varepsilon)$, имеем

$$\frac{e^{2x}}{2(1 - b_L(e^x))} > \frac{1}{4} t^{1+\varepsilon},$$

как только $x > (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\varepsilon) \ln t$. При $t > t_2$ получаем:

$$\begin{aligned}
P(H_t > \theta_{(\frac{1}{2}+\varepsilon)\ln t}) &= P\left(\int_0^{\theta_{(\frac{1}{2}+\varepsilon)\ln t}} \frac{e^{2\beta(s)}}{2(1-b_L(e^{\beta(s)}))} ds < t\right) \leq \\
&\leq P\left(\int_{\theta_{(\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2})\ln t}}^{\theta_{(\frac{1}{2}+\varepsilon)\ln t}} \frac{e^{2\beta(s)}}{2(1-b_L(e^{\beta(s)}))} ds < t\right) \leq P\left(\int_{\theta_{(\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2})\ln t}}^{\theta_{(\frac{1}{2}+\varepsilon)\ln t}} \frac{1}{4} t^{1+\varepsilon} \mathbb{1}_{\beta(s) \geq (\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2})\ln t} ds < t\right) \leq \\
&\leq P\left(\int_{\theta_{(\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2})\ln t}}^{\theta_{(\frac{1}{2}+\varepsilon)\ln t}} \mathbb{1}_{\beta(s) \geq (\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2})\ln t} ds < 4t^{-\varepsilon}\right).
\end{aligned}$$

Однако, легко видеть (например, применив свойство самоподобия винеровского процесса), что

$$P\left(\int_{\theta_{(\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2})\ln t}}^{\theta_{(\frac{1}{2}+\varepsilon)\ln t}} \mathbb{1}_{\beta(s) \geq (\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2})\ln t} ds < 4t^{-\varepsilon}\right) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty).$$

□

Теперь мы можем доказать следующее утверждение, характеризующее предельное распределение момента остановки H_t :

Утверждение 3.2.3. *Имеет место следующая сходимость по распределению:*

$$\frac{H_t}{(\ln t)^2} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{d} \tau_{\frac{1}{2}} = \inf \left\{ s > 0 : w(s) = \frac{1}{2} \right\}.$$

Доказательство. Это утверждение вытекает из следующих фактов:

- $\left(\frac{\theta_{(\frac{1}{2}-\varepsilon)\ln t}}{(\ln t)^2}, \frac{\theta_{(\frac{1}{2}+\varepsilon)\ln t}}{(\ln t)^2} \right) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{d} (\tau_{\frac{1}{2}-\varepsilon}, \tau_{\frac{1}{2}+\varepsilon})$, что легко получается из свойства самоподобия винеровского процесса.
- $P\left(\theta_{(\frac{1}{2}-\varepsilon)\ln t} \leq H_t \leq \theta_{(\frac{1}{2}+\varepsilon)\ln t}\right) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 1$. (Это составляет содержание леммы 3.2.1).
- $(\tau_{\frac{1}{2}-\varepsilon}, \tau_{\frac{1}{2}+\varepsilon}) \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{d} (\tau_{\frac{1}{2}}, \tau_{\frac{1}{2}})$.

□

Замечание 3.2.5. Легко видеть, что приведённые рассуждения показывают даже большее:

$$\left(\frac{\theta_{\frac{1}{2}} \ln t}{(\ln t)^2}, \frac{H_t}{(\ln t)^2} \right) \xrightarrow{d} (\tau_{1/2}, \tau_{1/2}).$$

Из (3.4) теперь вытекает

Утверждение 3.2.4. *Имеет место сходимость*

$$\frac{\langle \Phi_{ab} \rangle_t}{(\ln t)^2} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{d} \tau_{1/2}.$$

Теперь мы готовы доказать теорему 3.2.1.

Доказательство. Заметим, что процессы γ и $\langle \Phi_{ab} \rangle_t = \langle \ln R \rangle_t, t \geq 0$ независимы. Действительно, как мы знаем, γ и β независимы; но $R(t) = e^{\ln R_t} = e^{\beta(H_t)}$, а H_t измерим относительно β ; следовательно, процесс R измерим относительно β ; потому и $\langle \ln R \rangle_t$ измерим относительно β и не зависит от γ . Учитывая независимость γ и $\langle \Phi_{ab} \rangle$, получаем с использованием предыдущего утверждения

$$\frac{\Phi_{ab}(t)}{\ln t} = \frac{\gamma(\langle \Phi_{ab} \rangle_t)}{\ln t} \stackrel{d}{=} \gamma \left(\frac{\langle \Phi_{ab} \rangle_t}{(\ln t)^2} \right) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{d} \gamma(\tau_{\frac{1}{2}}),$$

и потому

$$\frac{\Phi_{ab}(t)}{\frac{1}{2} \ln t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{d} 2\gamma(\tau_{\frac{1}{2}}),$$

а последняя случайная величина имеет распределение Коши ([60], теорема 2.34). Теорема 3.2.1 доказана. □

В следующем утверждении показано, что значения угла обхода $\Phi_{ab}(t)$, в некотором смысле, хорошо приближаются значениями $\Phi_{ab}(T_{\sqrt{t}})$. Аналогичный результат для броуновских движений играет важную роль в исследовании совместного распределения углов обхода двумерного броуновского движения вокруг нескольких точек [61].

Утверждение 3.2.5.

$$\frac{\Phi_{ab}(T_{\sqrt{t}}) - \Phi_{ab}(t)}{\ln t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{d} 0.$$

Доказательство. Заметим, что

$$\begin{aligned}
\Phi_{ab}(T_{\sqrt{t}}) &= \gamma(\langle \Phi_{ab} \rangle (T_{\sqrt{t}})) = \gamma(\langle \ln R \rangle (T_{\sqrt{t}})) = \\
&= \gamma(\langle \ln R \rangle (\inf\{s > 0: R(s) = \sqrt{t}\})) = \\
&= \gamma(\langle \ln R \rangle (\inf\{s > 0: \ln R(s) = \ln t/2\})) = \\
&= \gamma(\langle \ln R \rangle (\inf\{s > 0: \beta(\langle \ln R \rangle_s) = \ln t/2\})) = \\
&= \gamma(\inf\{u > 0: \beta(u) = \ln t/2\}) = \gamma(\theta_{\frac{1}{2} \ln t}).
\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что для непрерывной возрастающей функции f с $f(0) = 0$ и любого $y > 0$ имеет место равенство

$$f(\inf\{s > 0: \beta(f(s)) = y\}) = \inf\{u > 0: \beta(u) = y\}.$$

Имеем, учитывая замечание 3.2.5:

$$\left(\frac{\gamma(\theta_{\frac{1}{2} \ln t})}{\ln t}, \frac{\gamma(H_t)}{\ln t} \right) \stackrel{d}{=} \left(\gamma \left(\frac{\theta_{\frac{1}{2} \ln t}}{(\ln t)^2} \right), \gamma \left(\frac{H_t}{(\ln t)^2} \right) \right) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{d} (\gamma(\tau_{1/2}), \gamma(\tau_{1/2})).$$

Отсюда

$$\frac{\gamma(\theta_{\frac{1}{2} \ln t})}{\ln t} - \frac{\gamma(H_t)}{\ln t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{d} 0.$$

Утверждение доказано. □

3.3. Совместное асимптотическое распределение углов обхода в броуновском потоке

В этом параграфе мы исследуем совместное асимптотическое распределение взаимных углов обхода нескольких траекторий в броуновском потоке.

Теорема 3.3.1. Пусть F — изотропный броуновский стохастический поток, удовлетворяющий условиям теоремы 3.2.1. Пусть $F_t(x_1), \dots, F_t(x_n)$ — траектории потока F , выходящие из попарно различных точек плоскости x_1, \dots, x_n . Тогда для углов обхода $\Phi_{kl}(t)$ траектории $F_t(x_k)$ вокруг траектории $F_t(x_l)$ справедливо асимптотическое соотношение

$$\left(\frac{2}{\ln t} \Phi_{kl}(t), 1 \leq k < l \leq n \right) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{d} (\xi_{kl}, 1 \leq k < l \leq n).$$

Здесь $\xi_{kl}, 1 \leq k < l \leq n$ — независимые в совокупности случайные величины, имеющие стандартное распределение Коши.

Для доказательства нашей теоремы используется следующее утверждение из работы [61].

Теорема 3.3.2. [61] Пусть $(M_j^n, 1 \leq j \leq m)$ — последовательность m -компонентных наборов непрерывных локальных мартингалов, таких, что

$$\forall j, n \quad \langle M_j^n \rangle_\infty = \infty,$$

и для любой пары различных индексов j, k существует последовательность положительных случайных величин H_n , таких, что

$$\bullet \quad \langle M_j^n \rangle_{H_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \infty, \quad \langle M_k^n \rangle_{H_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \infty;$$

$$\bullet \quad \int_0^{H_n} \left| d \langle M_j^n, M_k^n \rangle_s \right| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0;$$

здесь через $\int_0^t |df(s)|$ мы обозначаем полную вариацию функции f на $[0, t]$.

Тогда при $n \rightarrow \infty$ броуновские движения β_j^n , ассоциированные с M_j^n , асимптотически независимы, т.е. имеет место слабая сходимость в пространстве $C[0, \infty)$

$$(\beta_j^n, 1 \leq j \leq m) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} (\beta_j^\infty, 1 \leq j \leq m),$$

где $(\beta_j^\infty, 1 \leq j \leq m)$ — независимые броуновские движения.

Поясним, как применяется теорема 3.3.2 для получения нашего результата в случае $m = 3$, когда рассматриваются три траектории потока F (схема рассуждений в общем случае остаётся такой же). Пусть a, b, c — попарно различные точки плоскости, $\Phi_{ab}(t)$ — угол обхода $F_t(b)$ вокруг $F_t(a)$, $\Phi_{ac}(t)$ определяется аналогично, $R_{ab}(t)$ — расстояние между частицами a и b в момент времени t . Для применения теоремы 3.3.2 нужно показать, что совместные характеристики

$$\langle \Phi_{ab}, \Phi_{ac} \rangle_t, \langle \ln R_{ab}, \ln R_{ac} \rangle_t, \langle \Phi_{ab}, \ln R_{ab} \rangle_t, \quad (3.5)$$

$$\langle \Phi_{ac}, \ln R_{ac} \rangle_t, \langle \ln R_{ab}, \Phi_{ac} \rangle_t, \langle \ln R_{ac}, \Phi_{ab} \rangle_t, \quad (3.6)$$

в определённом смысле, растут по времени t намного медленнее, чем характеристики

$$\langle \Phi_{ab} \rangle_t = \langle \ln R_{ab} \rangle_t, \quad \langle \Phi_{ac} \rangle_t = \langle \ln R_{ac} \rangle_t.$$

Это соображение формализуется в наших утверждениях 3.2.4 и 3.3.32. Так, в утверждении 3.2.4 мы показываем, что $\frac{\langle \Phi_{ab} \rangle_t}{(\ln t)^2}$ сходится при $t \rightarrow \infty$ по распределению к некоторой положительной с вероятностью 1 случайной величине, а из утверждения 3.3.32 следует

$$\frac{\langle \Phi_{ab}, \Phi_{ac} \rangle_t}{(\ln t)^2} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{P} 0.$$

Последующие рассуждения аналогичны проведённым в статье [61] для исследования асимптотического распределения углов обхода двумерного броуновского движения вокруг нескольких точек плоскости. Полученные оценки на характеристики дают возможность применить теорему 3.3.2 к последовательности локальных мартингалов

$$\frac{\ln R_{ab}}{h_n}, \frac{\ln R_{ac}}{h_n}, \frac{\Phi_{ab}}{h_n}, \frac{\Phi_{ac}}{h_n},$$

h_n — некоторая возрастающая бесконечно большая последовательность положительных чисел. Таким образом, мы получаем асимптотическую независимость наборов

$$(\beta_{ab}^{(h_n)}, \beta_{ac}^{(h_n)}, \gamma_{ab}^{(h_n)}, \gamma_{ac}^{(h_n)}),$$

полученных из ассоциированных с локальными мартингалами $\ln R_{ab}, \ln R_{ac}, \Phi_{ab}, \Phi_{ac}$ броуновских движений

$$(\beta_{ab}, \beta_{ac}, \gamma_{ab}, \gamma_{ac})$$

с помощью перемасштабирования:

$$\begin{aligned} \beta_{ab}^{(h_n)}(t) &= \frac{1}{h_n} \beta_{ab}(h_n^2 t), \beta_{ac}^{(h_n)}(t) = \frac{1}{h_n} \beta_{ac}(h_n^2 t), \\ \gamma_{ab}^{(h_n)}(t) &= \frac{1}{h_n} \gamma_{ab}(h_n^2 t), \gamma_{ac}^{(h_n)}(t) = \frac{1}{h_n} \gamma_{ac}(h_n^2 t). \end{aligned}$$

Итак, мы получаем слабую сходимость последовательности

$$(\beta_{ab}^{(h_n)}, \beta_{ac}^{(h_n)}, \gamma_{ab}^{(h_n)}, \gamma_{ac}^{(h_n)})$$

к набору независимых броуновских движений. В то же время, значения углов обхода $\Phi_{ab}(t), \Phi_{ac}(t)$ в моменты $T_{ab}(e^{h_n}) = \inf\{t: R_{ab}(t) = e^{h_n}\}, T_{ac}(e^{h_n}) = \inf\{t: R_{ac}(t) = e^{h_n}\}$ выхода $R_{ab}(t), R_{ac}(t)$ на уровень e^{h_n} выражаются через броуновские движения $\beta_{ab}^{(h_n)}, \beta_{ac}^{(h_n)}, \gamma_{ab}^{(h_n)}, \gamma_{ac}^{(h_n)}$:

$$\frac{\Phi_{ab}(T_{ab}(e^{h_n}))}{h_n} = \gamma_{ab}^{(h_n)}(\inf\{u: \beta_{ab}^{(h_n)}(u) = 1\}),$$

$$\frac{\Phi_{ac}(T_{ac}(e^{h_n}))}{h_n} = \gamma_{ac}^{(h_n)}(\inf\{u : \beta_{ac}^{(h_n)}(u) = 1\}).$$

Отсюда и из того, что $\Phi_{ab}(e^{2h_n})$, $\Phi_{ac}(e^{2h_n})$ хорошо приближаются случайными величинами $\Phi_{ab}(T_{ab}(e^{h_n}))$, $\Phi_{ac}(T_{ac}(e^{h_n}))$, (см. утверждение 3.2.5), уже получается соотношение

$$\left(\frac{\Phi_{ab}(e^{2h_n})}{h_n}, \frac{\Phi_{ac}(e^{2h_n})}{h_n} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} (\xi_1, \xi_2),$$

где ξ_1, ξ_2 — независимые случайные величины со стандартным распределением Коши.

Всюду в этом разделе F — броуновский стохастический поток, удовлетворяющий условиям теоремы 3.3.1. Рассмотрим траектории $F_t(a), F_t(b), F_t(c)$, вышедшие из попарно различных точек $a, b, c \in \mathbb{R}^2$. Пусть точки $F_t(a), F_t(b), F_t(c)$ имеют координаты

$$F_t(a) = \begin{pmatrix} X_t(a) \\ Y_t(a) \end{pmatrix}, F_t(b) = \begin{pmatrix} X_t(b) \\ Y_t(b) \end{pmatrix}, F_t(c) = \begin{pmatrix} X_t(c) \\ Y_t(c) \end{pmatrix}.$$

Как и в предыдущем разделе, мы обозначаем $X_{ab}(t) = X_t(b) - X_t(a)$, $X_{ac}(t) = X_t(c) - X_t(a)$.
 $Y_{ab}(t) = Y_t(b) - Y_t(a)$, $Y_{ac}(t) = Y_t(c) - Y_t(a)$.

Применение изложенной в [3] техники позволяет получить аналогично утверждению 3.2.1. следующие равенства.

Утверждение 3.3.1. *Имеют место следующие соотношения:*

$$\langle X_{ab} \rangle_t = \langle Y_{ab} \rangle_t = \int_0^t 2(1 - b_L(R_{ab}(s)))ds,$$

$$\langle X_{ac} \rangle_t = \langle Y_{ac} \rangle_t = \int_0^t 2(1 - b_L(R_{ac}(s)))ds,$$

$$\langle X_{ab}, X_{ac} \rangle_t = \langle Y_{ab}, Y_{ac} \rangle_t = \int_0^t (1 + b_L(R_{bc}(s)) - b_L(R_{ab}(s)) - b_L(R_{ac}(s)))ds,$$

$$\langle X_{ab}, Y_{ab} \rangle_t = \langle X_{ab}, Y_{ac} \rangle_t = \langle X_{ac}, Y_{ab} \rangle_t = \langle X_{ac}, Y_{ac} \rangle_t = 0.$$

Пользуясь этими соотношениями, а также представлением взаимных углов обхода частиц в виде стохастических интегралов (см. лемму 2.3.1), мы получаем следующие выражения для совместных характеристик.

Утверждение 3.3.2. Совместные характеристики углов обхода частиц друг вокруг друга и логарифмов расстояний между частицами имеют вид

$$\begin{aligned} \langle \Phi_{ab}, \Phi_{ac} \rangle_t &= \langle \ln R_{ab}, \ln R_{ac} \rangle_t = \\ &= \int_0^t \frac{(X_{ab}(s)X_{ac}(s) + Y_{ab}(s)Y_{ac}(s))(1 + b_L(R_{bc}(s)) - b_L(R_{ab}(s)) - b_L(R_{ac}(s)))}{(X_{ab}(s)^2 + Y_{ab}(s)^2)(X_{ac}(s)^2 + Y_{ac}(s)^2)} ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \Phi_{ab}, \ln R_{ac} \rangle_t &= \\ &= \int_0^t \frac{(X_{ab}(s)Y_{ac}(s) - Y_{ab}(s)X_{ac}(s))(1 + b_L(R_{bc}(s)) - b_L(R_{ab}(s)) - b_L(R_{ac}(s)))}{(X_{ab}(s)^2 + Y_{ab}(s)^2)(X_{ac}(s)^2 + Y_{ac}(s)^2)} ds. \end{aligned}$$

Полные вариации соответствующих характеристик

$$\begin{aligned} \int_0^t |d \langle \Phi_{ab}, \Phi_{ac} \rangle_s| &= \int_0^t |d \langle \ln R_{ab}, \ln R_{ac} \rangle_s| = \\ &= \int_0^t \frac{|X_{ab}(s)X_{ac}(s) + Y_{ab}(s)Y_{ac}(s)| |1 + b_L(R_{bc}(s)) - b_L(R_{ab}(s)) - b_L(R_{ac}(s))|}{(X_{ab}(s)^2 + Y_{ab}(s)^2)(X_{ac}(s)^2 + Y_{ac}(s)^2)} ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^t |d \langle \Phi_{ab}, \ln R_{ac} \rangle_s| &= \\ &= \int_0^t \frac{|X_{ab}(s)Y_{ac}(s) - Y_{ab}(s)X_{ac}(s)| |1 + b_L(R_{bc}(s)) - b_L(R_{ab}(s)) - b_L(R_{ac}(s))|}{(X_{ab}(s)^2 + Y_{ab}(s)^2)(X_{ac}(s)^2 + Y_{ac}(s)^2)} ds. \end{aligned}$$

Для характеристик имеют место следующие оценки.

Утверждение 3.3.3. Для некоторой постоянной $C_1 > 0$ при всех $t > 0$ выполнено

$$\begin{aligned} \frac{d \langle \Phi_{ab} \rangle_t}{dt} &\leq C_1 \frac{1}{R_{ab}^2(t) \vee 1}, \\ \left| \frac{d \langle \Phi_{ab}, \Phi_{ac} \rangle_t}{dt} \right| &\leq C_1 \frac{1}{R_{ab}(t) \vee 1} \frac{1}{R_{ac}(t) \vee 1}, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\langle \Phi_{ab} \rangle_t \leq C_1 \int_0^t \frac{1}{R_{ab}^2(s) \vee 1} ds,$$

$$\int_0^t |d \langle \Phi_{ab}, \Phi_{ac} \rangle_s| \leq C_1 \int_0^t \frac{1}{R_{ab}(s) \vee 1} \frac{1}{R_{ac}(s) \vee 1} ds.$$

Доказательство. Поскольку $\frac{1-b_L(x)}{x^2} \rightarrow \frac{1}{2}\beta_L, x \rightarrow 0$, и $b_L(x) \rightarrow 0, x \rightarrow \infty$, то для некоторого $A > 0$

$$\frac{1 - b_L(x)}{x^2} \leq \frac{A}{x^2 \vee 1}$$

при всех $x > 0$. Отсюда с учётом равенства

$$\langle \Phi_{ab} \rangle_t = \int_0^t \frac{2(1 - b_L(R_{ab}(s)))}{R_{ab}(s)^2} ds$$

сразу следует оценка

$$\frac{d \langle \Phi_{ab} \rangle_t}{dt} \leq C_1 \frac{1}{R_{ab}^2(t) \vee 1},$$

с постоянной $C_1 = 2A$.

Далее, из того, что функция $b_L(\|z\|)$ неотрицательно определена, а $b_L(0) = 1$, следует существование векторов $u, v, w \in \mathbb{R}^3$, таких, что

$$\|u\| = \|v\| = \|w\| = 1, (u, v) = b_L(R_{ab}(s)), (u, w) = b_L(R_{ac}(s)), (v, w) = b_L(R_{bc}(s)).$$

Применяя неравенство Коши-Буняковского к векторам $u - v, u - w$, получаем

$$\begin{aligned} |1 + (v, w) - (u, v) - (u, w)| &= |(u - v, u - w)| \leq \|u - v\| \|u - w\| = \\ &= \sqrt{(u - v, u - v)} \sqrt{(u - w, u - w)} = \sqrt{2 - 2(u, v)} \sqrt{2 - 2(u, w)} = \\ &= 2\sqrt{1 - (u, v)} \sqrt{1 - (u, w)}, \end{aligned}$$

или

$$|1 + b_L(R_{bc}(s)) - b_L(R_{ab}(s)) - b_L(R_{ac}(s))| \leq 2\sqrt{1 - b_L(R_{ab}(s))} \sqrt{1 - b_L(R_{ac}(s))}.$$

Из неравенства Коши-Буняковского имеем

$$\begin{aligned} |X_{ab}(s)X_{ac}(s) + Y_{ab}(s)Y_{ac}(s)| &\leq \sqrt{X_{ab}(s)^2 + Y_{ab}(s)^2} \sqrt{X_{ac}(s)^2 + Y_{ac}(s)^2} = \\ &= R_{ab}(s)R_{ac}(s). \end{aligned}$$

Из предыдущих неравенств получаем

$$\begin{aligned} & \frac{|(X_{ab}(s)X_{ac}(s) + Y_{ab}(s)Y_{ac}(s))(1 + b_L(R_{bc}(s)) - b_L(R_{ab}(s)) - b_L(R_{ac}(s)))|}{(X_{ab}(s)^2 + Y_{ab}(s)^2)(X_{ac}(s)^2 + Y_{ac}(s)^2)} \leq \\ & \leq 2 \frac{\sqrt{1 - b_L(R_{ab}(s))} \sqrt{1 - b_L(R_{ac}(s))}}{R_{ab}(s)R_{ac}(s)} \leq \frac{2A}{(R_{ab}(s) \vee 1)(R_{ac}(s) \vee 1)}. \end{aligned}$$

Отсюда следует наша оценка для $\left| \frac{d\langle \Phi_{ab}, \Phi_{ac} \rangle_t}{dt} \right|$ с $C_1 = 2A$. □

Аналогично с использованием выражения

$$\begin{aligned} & \langle \Phi_{ab}, \Phi_{cd} \rangle_t = \\ & = \int_0^t \frac{(X_{ab}(s)X_{cd}(s) + Y_{ab}(s)Y_{cd}(s))(b_L(R_{ac}) + b_L(R_{bd}(s)) - b_L(R_{ad}(s)) - b_L(R_{bc}(s)))}{(X_{ab}(s)^2 + Y_{ab}(s)^2)(X_{cd}(s)^2 + Y_{cd}(s)^2)} ds, \end{aligned}$$

получается следующее утверждение.

Утверждение 3.3.4. Пусть a, b, c, d — попарно различные точки плоскости. Для некоторой постоянной $C_2 > 0$ при всех $t > 0$ выполнено

$$\left| \frac{d\langle \Phi_{ab}, \Phi_{cd} \rangle_t}{dt} \right| \leq C_2 \frac{1}{R_{ab}(t) \vee 1} \frac{1}{R_{cd}(t) \vee 1},$$

и, следовательно,

$$\int_0^t |d\langle \Phi_{ab}, \Phi_{cd} \rangle_s| \leq C_2 \int_0^t \frac{1}{R_{ab}(s) \vee 1} \frac{1}{R_{cd}(s) \vee 1} ds.$$

В дальнейших рассуждениях мы получим оценки характеристик $\langle \Phi_{ab}, \Phi_{ac} \rangle_t$, что сделает возможным применение теоремы 3.3.2 в доказательстве утверждения 3.3.34. Из этого утверждения с помощью рассуждений, аналогичных работе [61], уже несложно будет получить теорему 3.3.1.

Утверждение 3.3.5. При любых $r_1, r_2, 0 < r_1 < r_2$ имеет место

$$\frac{1}{(\ln t)^2} \int_0^t \mathbb{1}_{r_1 \leq R_{ab}(s) \leq r_2} ds \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{P} 0.$$

Доказательство. Утверждение вытекает из следующего результата для изотропных броуновских потоков с нулевым старшим показателем Ляпунова (утверждение 6.1 из [11]):

$$\mathbb{E} \int_0^t \mathbb{1}_{r_1 \leq R_{ab}(s) \leq r_2} ds \sim C \ln t, t \rightarrow \infty$$

для некоторого $C > 0$ (C зависит от r_1, r_2). □

Утверждение 3.3.6.

$$\frac{1}{(\ln t)^2} \int_0^t \frac{1}{R_{ab}(s)^2 \vee 1} ds$$

стохастически ограничено при $t \rightarrow \infty$, то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \exists C > 0 \exists t_0 > 0 \forall t > t_0 P \left(\frac{1}{(\ln t)^2} \int_0^t \frac{1}{R_{ab}(s)^2 \vee 1} ds > C \right) < \varepsilon.$$

Доказательство. Выберем $R_0 > 1$ так, что при $r \geq R_0$ выполнено неравенство $b_L(r) < \frac{1}{2}$ (такой выбор возможен в силу сходимости $b_L(r) \rightarrow 0, r \rightarrow \infty$). Выберем $r_0, 0 < r_0 < 1$, так, что при $0 < r \leq r_0$ имеет место $\frac{1-b_L(r)}{r^2} \geq \frac{1}{4}\beta_L$ (такой выбор возможен в силу сходимости $\frac{1-b_L(r)}{r^2} \rightarrow \frac{1}{2}\beta_L, r \rightarrow 0$). Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{1}{R_{ab}(s)^2 \vee 1} ds &= \int_0^t \mathbb{1}_{R_{ab}(s) \leq r_0} ds + \int_0^t \mathbb{1}_{r_0 \leq R_{ab}(s) \leq R_0} \frac{1}{R_{ab}(s)^2 \vee 1} ds + \\ &+ \int_0^t \mathbb{1}_{R_{ab}(s) \geq R_0} \frac{1}{R_{ab}(s)^2} ds \leq \frac{4}{\beta_L} \int_0^t \frac{1 - b_L(R_{ab}(s))}{R_{ab}(s)^2} ds + \int_0^t \mathbb{1}_{r_0 \leq R_{ab}(s) \leq R_0} ds + \\ &+ \int_0^t \frac{2(1 - b_L(R_{ab}(s)))}{R_{ab}(s)^2} ds = \frac{2}{\beta_L} \langle \Phi_{ab} \rangle_t + \int_0^t \mathbb{1}_{r_0 \leq R_{ab}(s) \leq R_0} ds + \langle \Phi_{ab} \rangle_t. \end{aligned}$$

Доказательство следует теперь из утверждений 3.2.4 и 3.3.5. □

Утверждение 3.3.7. При любых $r_1, r_2 > 0$ имеет место

$$\frac{1}{(\ln t)^2} \int_0^t \mathbb{1}_{R_{ab}(s) \geq r_1, R_{ac}(s) \leq r_2} \frac{1}{R_{ab}(s)} ds \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{P} 0.$$

Доказательство. Имеем при любом $A > \max\{1, r_1\}$:

$$\begin{aligned}
\int_0^t \mathbb{1}_{R_{ab}(s) \geq r_1, R_{ac}(s) \leq r_2} \frac{1}{R_{ab}(s)} ds &\leq \\
&\leq \frac{1}{r_1} \int_0^t \mathbb{1}_{r_1 \leq R_{ab}(s) \leq A} ds + \int_0^t \mathbb{1}_{R_{ab}(s) \geq A, R_{ac}(s) \leq r_2} \frac{1}{R_{ab}(s)} ds \leq \\
&\leq \frac{1}{r_1} \int_0^t \mathbb{1}_{r_1 \leq R_{ab}(s) \leq A} ds + \frac{1}{A} \int_0^t \mathbb{1}_{R_{ac}(s) \leq r_2} ds \leq \\
&\leq \frac{1}{r_1} \int_0^t \mathbb{1}_{r_1 \leq R_{ab}(s) \leq A} ds + \frac{r_2^2 \vee 1}{A} \int_0^t \frac{1}{R_{ac}(s)^2 \vee 1} ds.
\end{aligned}$$

Доказываемое утверждение теперь вытекает в силу произвольности A из утверждений 3.3.5 и 3.3.6. \square

Аналогично доказывается следующее утверждение.

Утверждение 3.3.8. Пусть a, b, c, d — четыре попарно различные точки плоскости. При любых $r_1, r_2 > 0$ имеет место

$$\frac{1}{(\ln t)^2} \int_0^t \mathbb{1}_{R_{ab}(s) \geq r_1, R_{cd}(s) \leq r_2} \frac{1}{R_{ab}(s)} ds \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{P} 0.$$

Утверждение 3.3.9. При любых $r_1, r_2 > 0$ имеет место

$$\frac{1}{(\ln t)^2} \int_0^t \mathbb{1}_{R_{ab}(s) \geq r_1, R_{ac}(s) \leq r_2} \frac{1}{R_{ab}(s)^2 \vee 1} ds \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{P} 0.$$

Доказательство. Имеем

$$\int_0^t \mathbb{1}_{R_{ab}(s) \geq r_1, R_{ac}(s) \leq r_2} \frac{1}{R_{ab}(s)^2 \vee 1} ds \leq \int_0^t \mathbb{1}_{R_{ab}(s) \geq r_1, R_{ac}(s) \leq r_2} \frac{1}{R_{ab}(s)} ds.$$

Доказываемое утверждение теперь вытекает из утверждения 3.3.7. \square

Утверждения 3.3.10–3.3.23 посвящены оценке

$$\int_0^t \mathbb{1}_{R_{ab}(s) \leq R, R_{ac}(s) \leq R} ds$$

при $t \rightarrow \infty$. Мы показываем, что при любом $R > 0$

$$\frac{1}{(\ln t)^2} \int_0^t \mathbb{1}_{R_{ab}(s) \leq R, R_{ac}(s) \leq R} ds \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{P} 0, t \rightarrow \infty.$$

Доказательство основано на исследовании семимартингала

$$Q_t = R_{ab}(t)^2 + R_{ac}(t)^2.$$

Для семимартингала $\ln Q_t$ имеет место разложение Дуба

$$\ln Q_t = \ln Q_0 + V_t + M_t,$$

где V — процесс ограниченной вариации, M — непрерывный локальный мартингал, $V_0 = M_0 = 0$.

Утверждение 3.3.10. *Процесс V_t является неубывающим п.н. Иными словами, $\ln Q_t$ — локальный субмартингал.*

Доказательство. Применяя выражения из доказательства леммы 2.3.1, имеем

$$\begin{aligned} dR_{ab}(t)^2 &= 2X_{ab}(t)dX_{ab}(t) + 2Y_{ab}(t)dY_{ab}(t) + d\langle X_{ab} \rangle_t + d\langle Y_{ab} \rangle_t = \\ &= 2X_{ab}(t)dX_{ab}(t) + 2Y_{ab}(t)dY_{ab}(t) + 4(1 - b_L(R_{ab}(t)))dt. \end{aligned}$$

Аналогичные выражения имеют место и для $dR_{ac}(t)^2$. Складывая их, получаем

$$\begin{aligned} dQ_t &= 2X_{ab}(t)dX_{ab}(t) + 2Y_{ab}(t)dY_{ab}(t) + 2X_{ac}(t)dX_{ac}(t) + 2Y_{ac}(t)dY_{ac}(t) + \\ &\quad + 4[2 - b_L(R_{ab}(t)) - b_L(R_{ac}(t))]dt. \end{aligned}$$

Пусть

$$N_t = \int_0^t (X_{ab}(s)dX_{ab}(s) + Y_{ab}(s)dY_{ab}(s)) + \int_0^t (X_{ac}(s)dX_{ac}(s) + Y_{ac}(s)dY_{ac}(s)),$$

$$H_t = 4(2 - b_L(R_{ab}(t)) - b_L(R_{ac}(t))).$$

Тогда $dQ_t = H_t dt + 2dN_t$. N_t — локальный мартингал, и

$$\begin{aligned} d\langle N \rangle_t &= X_{ab}(t)^2 d\langle X_{ab} \rangle_t + Y_{ab}(t)^2 d\langle Y_{ab} \rangle_t + \\ &\quad + X_{ac}(t)^2 d\langle X_{ac} \rangle_t + Y_{ac}(t)^2 d\langle Y_{ac} \rangle_t + \\ &\quad + 2X_{ab}(t)X_{ac}(t)d\langle X_{ab}, X_{ac} \rangle_t + 2Y_{ab}(t)Y_{ac}(t)d\langle Y_{ab}, Y_{ac} \rangle_t. \end{aligned}$$

Заметим, что матрица инфинитезимальных ковариаций $dX_{ab}(t), dX_{ac}(t)$, т.е. матрица

$$K = \frac{1}{dt} \begin{pmatrix} d\langle X_{ab}, X_{ab} \rangle_t & d\langle X_{ab}, X_{ac} \rangle_t \\ d\langle X_{ab}, X_{ac} \rangle_t & d\langle X_{ac}, X_{ac} \rangle_t \end{pmatrix} = \frac{1}{dt} \begin{pmatrix} d\langle Y_{ab}, Y_{ab} \rangle_t & d\langle Y_{ab}, Y_{ac} \rangle_t \\ d\langle Y_{ab}, Y_{ac} \rangle_t & d\langle Y_{ac}, Y_{ac} \rangle_t \end{pmatrix}$$

неотрицательно определена. Поэтому существуют векторы $v_{ab}, v_{ac} \in \mathbb{R}^3$, такие, что их матрица Грама

$$\begin{pmatrix} (v_{ab}, v_{ab}) & (v_{ab}, v_{ac}) \\ (v_{ab}, v_{ac}) & (v_{ac}, v_{ac}) \end{pmatrix}$$

совпадает с K . В частности,

$$\|v_{ab}\|^2 = 2(1 - b_L(\|r_{ab}\|)), \|v_{ac}\|^2 = 2(1 - b_L(\|r_{ac}\|)).$$

Обозначим

$$r_{ab} = F_t(b) - F_t(a),$$

$$r_{ac} = F_t(c) - F_t(a),$$

$$P_t = \frac{d\langle N \rangle_t}{dt}.$$

Тогда

$$Q_t = \|r_{ab}\|^2 + \|r_{ac}\|^2,$$

$$P_t = \|r_{ab}\|^2 \|v_{ab}\|^2 + \|r_{ac}\|^2 \|v_{ac}\|^2 + 2(r_{ab}, r_{ac})(v_{ab}, v_{ac}),$$

$$H_t = 2(\|v_{ab}\|^2 + \|v_{ac}\|^2).$$

Имеем

$$\|r_{ab}\|^2 \|v_{ac}\|^2 + \|r_{ac}\|^2 \|v_{ab}\|^2 \geq 2\|r_{ab}\| \|r_{ac}\| \|v_{ab}\| \|v_{ac}\| \geq 2(r_{ab}, r_{ac})(v_{ab}, v_{ac}),$$

и отсюда

$$\begin{aligned} (\|r_{ab}\|^2 + \|r_{ac}\|^2)(\|v_{ab}\|^2 + \|v_{ac}\|^2) &\geq \\ &\geq \|r_{ab}\|^2 \|v_{ab}\|^2 + \|r_{ac}\|^2 \|v_{ac}\|^2 + 2(r_{ab}, r_{ac})(v_{ab}, v_{ac}). \end{aligned}$$

или

$$H_t Q_t \geq 2P_t.$$

Применяя формулу Ито, получаем

$$\begin{aligned} d \ln Q_t &= \frac{1}{Q_t} dQ_t - \frac{1}{2Q_t^2} d\langle Q \rangle_t = \frac{1}{Q_t} (H_t dt + 2dN_t) - \frac{2}{Q_t^2} d\langle N \rangle_t = \\ &= \frac{1}{Q_t} (H_t dt + 2dN_t) - \frac{2}{Q_t^2} P_t dt = \left(\frac{H_t}{Q_t} - \frac{2}{Q_t^2} P_t \right) dt + \frac{2}{Q_t} dN_t. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$M_t = \int_0^t \frac{2}{Q_s} dN_s, \langle M \rangle_t = \int_0^t \frac{4P_s}{Q_s^2} ds, V_t = \int_0^t \left(\frac{H_s}{Q_s} - \frac{2P_s}{Q_s^2} \right) ds.$$

В силу $H_t Q_t \geq 2P_t$ имеем

$$\frac{H_t}{Q_t} - \frac{2P_t}{Q_t^2} \geq 0.$$

Следовательно, процесс $\ln Q_t$ является локальным субмартингалом. \square

Утверждение 3.3.11. *Имеет место равенство*

$$2V_t + \langle M \rangle_t = 2 \int_0^t \frac{H_s}{Q_s} ds.$$

Доказательство. Мы используем те же обозначения, что в доказательстве утверждения 3.3.10. Имеем

$$2V_t + \langle M \rangle_t = 2 \int_0^t \left(\frac{H_s}{Q_s} - \frac{2P_s}{Q_s^2} \right) ds + \int_0^t \frac{4P_s}{Q_s^2} ds = 2 \int_0^t \frac{H_s}{Q_s} ds.$$

\square

Утверждение 3.3.12. *При некоторых $\rho > 0, \mu > 0$ имеет место неравенство*

$$\frac{H_t}{Q_t} \geq \mu \mathbb{1}_{Q_t \leq \rho^2}, t \geq 0.$$

Доказательство. Выберем $\rho > 0$ так, что при $0 < r < \rho$

$$\frac{1 - b_L(r)}{r^2} > \frac{1}{4} \beta_L.$$

Такой выбор возможен в силу сходимости $\frac{1-b_L(r)}{r^2} \rightarrow \frac{1}{2}\beta_L, r \rightarrow 0+$. При $R_{ab}(t) < \rho, R_{ac}(t) < \rho$ имеем

$$\frac{H_t}{Q_t} = 4 \frac{(1 - b_L(R_{ab}(t)) + (1 - b_L(R_{ac}(t)))}{R_{ab}(t)^2 + R_{ac}(t)^2} > \beta_L.$$

Имеем поэтому

$$\frac{H_t}{Q_t} \geq \beta_L \mathbb{1}_{R_{ab}(t) \leq \rho, R_{ac}(t) \leq \rho} \geq \beta_L \mathbb{1}_{Q_t \leq \rho^2}.$$

□

Утверждение 3.3.13. *При некоторых $\rho > 0, \nu > 0$ имеет место неравенство*

$$2V_t + \langle M \rangle_t \geq \nu \int_0^t \mathbb{1}_{Q_s \leq \rho^2} ds.$$

Доказательство. Из утверждения 3.3.11 имеем

$$2V_t + \langle M \rangle_t = 2 \int_0^t \frac{H_s}{Q_s} ds.$$

Выберем ρ, μ как в утверждении 3.3.12. Имеем

$$\int_0^t \frac{H_s}{Q_s} ds \geq \int_0^t \frac{H_s}{Q_s} \mathbb{1}_{Q_s \leq \rho^2} ds \geq \mu \int_0^t \mathbb{1}_{Q_s \leq \rho^2} ds.$$

Итак,

$$2V_t + \langle M \rangle_t \geq 2\mu \int_0^t \mathbb{1}_{Q_s \leq \rho^2} ds.$$

□

Утверждение 3.3.14. *При некоторых $R_0 > 0, \gamma > 0$ имеет место неравенство*

$$V_t \geq \gamma \int_0^t \mathbb{1}_{R_{ab}(s) \geq R_0, R_{ac}(s) \geq R_0} d\langle M \rangle_s.$$

Доказательство. Мы используем те же обозначения, что в доказательстве утверждения 3.3.10. Выберем $R_0 > 0$ так, что $|b_L(r)| < \frac{1}{8}$ при $r > R_0$. Покажем, что при $R_{ab}(t) \geq R_0, R_{ac}(t) \geq R_0$ имеет место

$$\frac{H_t Q_t - 2P_t}{Q_t^2} \geq \frac{3}{32} \frac{P_t}{Q_t^2}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \|v_{ab}\|^2 &= 2(1 - b_L(\|r_{ab}\|)) \geq \frac{7}{4}, \|v_{ac}\|^2 \geq \frac{7}{4}, \\ (v_{ab}, v_{ac}) &= 1 - b_L(\|r_{ab}\|) - b_L(\|r_{ac}\|) + b_L(\|r_{bc}\|) \leq \frac{11}{8}, \end{aligned}$$

и отсюда

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} H_t Q_t - P_t &= \|r_{ab}\|^2 \|v_{ac}\|^2 + \|r_{ac}\|^2 \|v_{ab}\|^2 - 2(r_{ab}, r_{ac})(v_{ab}, v_{ac}) \geq \\ &\geq \frac{7}{4} (\|r_{ab}\|^2 + \|r_{ac}\|^2) - \frac{11}{8} (\|r_{ab}\|^2 + \|r_{ac}\|^2) = \frac{3}{8} (\|r_{ab}\|^2 + \|r_{ac}\|^2) = \frac{3}{8} Q_t. \end{aligned}$$

Ясно, что

$$\begin{aligned} P_t &= \|r_{ab}\|^2 \|v_{ab}\|^2 + \|r_{ac}\|^2 \|v_{ac}\|^2 + 2(r_{ab}, r_{ac})(v_{ab}, v_{ac}) \leq \\ &\leq 4(\|r_{ab}\|^2 + \|r_{ac}\|^2) + 8\|r_{ab}\| \|r_{ac}\| \leq 8(\|r_{ab}\|^2 + \|r_{ac}\|^2) = 8Q_t. \end{aligned}$$

Итак, при $R_{ab}(t) \geq R_0, R_{ac}(t) \geq R_0$ имеет место

$$\frac{H_t Q_t - 2P_t}{Q_t^2} \geq \frac{3}{4Q_t} = \frac{3}{32} \frac{8Q_t}{Q_t^2} \geq \frac{3}{32} \frac{P_t}{Q_t^2}.$$

Для разложения Дуба семимартингала $\ln Q_t$

$$\ln Q_t = \ln Q_0 + V_t + M_t,$$

имеют место соотношения

$$V_t = \int_0^t \frac{H_s Q_s - 2P_s}{Q_s^2} ds, \quad \langle M \rangle_t = \int_0^t \frac{4P_s}{Q_s^2} ds.$$

Из доказанного следует

$$\begin{aligned} V_t &\geq \int_0^t \mathbb{1}_{R_{ab}(s) \geq R_0, R_{ac}(s) \geq R_0} dV_s \geq \int_0^t \mathbb{1}_{R_{ab}(s) \geq R_0, R_{ac}(s) \geq R_0} \frac{H_s Q_s - 2P_s}{Q_s^2} ds \geq \\ &\geq \frac{3}{32} \int_0^t \mathbb{1}_{R_{ab}(s) \geq R_0, R_{ac}(s) \geq R_0} \frac{P_s}{Q_s^2} ds = \frac{3}{128} \int_0^t \mathbb{1}_{R_{ab}(s) \geq R_0, R_{ac}(s) \geq R_0} d\langle M \rangle_s. \end{aligned}$$

□

Утверждение 3.3.15. При некотором $C > 0$ имеет место

$$\frac{d\langle M \rangle_t}{dt} \leq \frac{C}{R_{ab}(t)^2 \vee 1}.$$

Доказательство. Мы используем те же обозначения, что в доказательстве утверждения 3.3.10. Выберем $\rho > 0$ так, что при $r < \rho$

$$\frac{1 - b_L(r)}{r^2} \leq \beta_L.$$

Такой выбор возможен в силу сходимости $\frac{1-b_L(r)}{r^2} \rightarrow \frac{1}{2}\beta_L, r \rightarrow 0$. При $R_{ab}(t) < \rho, R_{ac}(t) < \rho$ имеем

$$\frac{H_t}{Q_t} = 4 \frac{(1 - b_L(R_{ab}(t)) + (1 - b_L(R_{ac}(t)))}{R_{ab}(t)^2 + R_{ac}(t)^2} \leq 4\beta_L.$$

Имеем поэтому, используя неравенство $H_t \leq 16$:

$$\begin{aligned} \frac{H_t}{Q_t} &\leq \frac{H_t}{Q_t} \mathbb{1}_{R_{ab}(t) \leq \rho, R_{ac}(t) \leq \rho} + \frac{H_t}{Q_t} \mathbb{1}_{R_{ab}(t) \leq \rho, R_{ac}(t) > \rho} + \frac{H_t}{Q_t} \mathbb{1}_{R_{ab}(t) > \rho, R_{ac}(t) > \rho} \leq \\ &\leq 4\beta_L \mathbb{1}_{R_{ab}(t) \leq \rho} + \frac{16}{\rho^2} \mathbb{1}_{R_{ab}(t) \leq \rho} + \frac{16}{Q_t} \mathbb{1}_{R_{ab}(t) > \rho} \leq \frac{C_1}{R_{ab}(t)^2 \vee \rho^2} \end{aligned}$$

при некотором $C_1 > 0$. Следовательно, применяя неравенство $H_t Q_t \geq 2P_t$ (см. доказательство утверждения 3.3.10), при некотором $C_2 > 0$ получаем

$$\frac{d\langle M \rangle_t}{dt} = \frac{4P_t}{Q_t^2} \leq 2 \frac{H_t}{Q_t} \leq 2C_1 \frac{1}{R_{ab}(t)^2 \vee \rho^2} \leq C_2 \frac{1}{R_{ab}(t)^2 \vee 1}.$$

□

Утверждение 3.3.16. При $t \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{(\ln t)^2} \langle M \rangle_t$$

стохастически ограничено, то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \exists t_0 \exists C > 0 \forall t > t_0 P(\langle M \rangle_t \geq C(\ln t)^2) < \varepsilon.$$

Доказательство. Доказательство вытекает непосредственно из утверждений 3.3.15 и 3.3.6. □

Утверждение 3.3.17. Пусть $R > 0$ — фиксировано. Для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших t имеет место

$$P(\exists s \leq t: Q_s \leq R, V_s \geq \varepsilon(\ln t)^2) < \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть β — ассоциированный с M винеровский процесс,

$$\beta^{(\ln t)}(u) = \frac{1}{\ln t} \beta((\ln t)^2 u), u \geq 0.$$

Выберем $C > 0$ так, чтобы при достаточно больших t

$$P(\langle M \rangle_t \geq C(\ln t)^2) < \varepsilon.$$

Такой выбор возможен в силу утверждения 3.3.16. Имеем теперь

$$\begin{aligned} P(\exists s \leq t: Q_s \leq R, V_s \geq \varepsilon(\ln t)^2) &= \\ &= P(\exists s \leq t: \ln Q_s \leq \ln R, V_s \geq \varepsilon(\ln t)^2) \leq \\ &\leq P(\exists s \leq t: \varepsilon(\ln t)^2 + \ln Q_0 + \beta(\langle M \rangle_s) \leq \ln R) \leq \\ &\leq P(\exists u \leq \langle M \rangle_t: \varepsilon(\ln t)^2 + \ln Q_0 + \beta(u) \leq \ln R) \leq \\ &\leq \varepsilon + P(\exists u \leq C(\ln t)^2: \varepsilon(\ln t)^2 + \ln Q_0 + \beta(u) \leq \ln R) = \\ &= \varepsilon + P\left(\exists u \leq C(\ln t)^2: \varepsilon \ln t + \frac{1}{\ln t} \beta(u) \leq \frac{\ln R - \ln Q_0}{\ln t}\right) = \\ &= \varepsilon + P\left(\exists u \leq C: \varepsilon \ln t + \beta^{(\ln t)}(u) \leq \frac{\ln R - \ln Q_0}{\ln t}\right) = \\ &= \varepsilon + P\left(\inf_{0 \leq u \leq C} \beta(u) \leq \frac{\ln R - \ln Q_0}{\ln t} - \varepsilon \ln t\right) < 2\varepsilon \end{aligned}$$

при достаточно больших t . □

Утверждение 3.3.18. Для любых $r_1, r_2 > 0, \varepsilon > 0$ при достаточно больших t имеет место

$$P\left(\int_0^t \mathbb{1}_{R_{ab}(s) \geq r_1, R_{ac}(s) \leq r_2} d\langle M \rangle_s \geq \varepsilon(\ln t)^2\right) < \varepsilon.$$

Доказательство. Доказательство вытекает непосредственно из утверждений 3.3.15 и 3.3.9. □

Утверждение 3.3.19. Пусть $R > 0$ — фиксировано. При некотором $\alpha \in \mathbb{R}$ для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших t имеет место

$$P\left(\exists s \in [0, t]: Q_s \leq R, \int_0^s \mathbb{1}_{M_u \geq \alpha} d\langle M \rangle_u \geq \varepsilon(\ln t)^2\right) < \varepsilon.$$

Доказательство. Положим $\alpha = \ln(2R_0^2) - \ln Q_0$, где R_0 из утверждения 3.3.14. Имеем, используя утверждения 3.3.14, 3.3.18 и неравенство $M_u = \ln Q_u - \ln Q_0 - V_u \leq \ln Q_u - \ln Q_0$:

$$\begin{aligned}
& P \left(\exists s \in [0, t]: Q_s \leq R, \int_0^s \mathbb{1}_{M_u \geq \alpha} d\langle M \rangle_u \geq \varepsilon (\ln t)^2 \right) \leq \\
& \leq P \left(\exists s \in [0, t]: Q_s \leq R, \int_0^s \mathbb{1}_{\ln Q_u - \ln Q_0 \geq \alpha} d\langle M \rangle_u \geq \varepsilon (\ln t)^2 \right) \leq \\
& \leq P \left(\exists s \in [0, t]: Q_s \leq R, \int_0^s \mathbb{1}_{Q_u \geq 2R_0^2} d\langle M \rangle_u \geq \varepsilon (\ln t)^2 \right) \leq \\
& \leq P \left(\exists s \in [0, t]: Q_s \leq R, \int_0^s \mathbb{1}_{R_{ab}(u) \geq R_0, R_{ac}(u) \geq R_0} d\langle M \rangle_u \geq \varepsilon (\ln t)^2 / 3 \right) + \\
& + P \left(\exists s \in [0, t]: Q_s \leq R, \int_0^s \mathbb{1}_{R_{ab}(u) \geq R_0, R_{ac}(u) \leq R_0} d\langle M \rangle_u \geq \varepsilon (\ln t)^2 / 3 \right) + \\
& + P \left(\exists s \in [0, t]: Q_s \leq R, \int_0^s \mathbb{1}_{R_{ab}(u) \leq R_0, R_{ac}(u) \geq R_0} d\langle M \rangle_u \geq \varepsilon (\ln t)^2 / 3 \right) \leq \\
& \leq P(\exists s \in [0, t]: Q_s \leq R, V_s \geq \gamma \varepsilon (\ln t)^2 / 3) + 2\varepsilon / 3 \leq \\
& \leq \gamma \varepsilon / 3 + 2\varepsilon / 3
\end{aligned}$$

при достаточно больших t в силу утверждения 3.3.17. \square

Утверждение 3.3.20. Пусть $R > 0$ — фиксировано. Для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших t имеет место

$$P(\exists s \leq t: Q_s \leq R, \langle M \rangle_s \geq \varepsilon (\ln t)^2) < \varepsilon.$$

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть

$$\tau_\varepsilon = \tau_\varepsilon(t) = \inf\{s > 0: Q_s \leq R, \langle M \rangle_s \geq \varepsilon (\ln t)^2\}.$$

Тогда $Q(\tau_\varepsilon) \leq R, \langle M \rangle(\tau_\varepsilon) \geq \varepsilon (\ln t)^2$,

$$P(\exists s \leq t: Q(s) \leq R, \langle M \rangle_s \geq \varepsilon (\ln t)^2) = P(\tau_\varepsilon \leq t).$$

Пусть α — из утверждения 3.3.19, β — ассоциированный с M винеровский процесс, $\beta^{(\ln t)}(u) = \frac{1}{\ln t} \beta((\ln t)^2 u)$, $u \geq 0$. Выберем $\delta = \delta(\varepsilon)$, $0 < \delta < \varepsilon$ так, что

$$P \left(\int_0^\varepsilon \mathbb{1}_{\beta(u) \geq \delta} du \leq \delta \right) < \varepsilon.$$

Имеем при $t > t_0 = e^{\alpha/\delta}$

$$\begin{aligned} P \left(\int_0^{\tau_\varepsilon} \mathbb{1}_{M_s \geq \alpha} d\langle M \rangle_s \leq \delta(\ln t)^2 \right) &= P \left(\int_0^{\tau_\varepsilon} \mathbb{1}_{\beta(\langle M \rangle_s) \geq \alpha} d\langle M \rangle_s \leq \delta(\ln t)^2 \right) = \\ &= P \left(\int_0^{\langle M \rangle(\tau_\varepsilon)} \mathbb{1}_{\beta(u) \geq \alpha} du \leq \delta(\ln t)^2 \right) \leq P \left(\int_0^{\varepsilon(\ln t)^2} \mathbb{1}_{\beta(u) \geq \alpha} du \leq \delta(\ln t)^2 \right) = \\ &= P \left(\int_0^\varepsilon \mathbb{1}_{\beta^{(\ln t)}(u) \geq \alpha/\ln t} du \leq \delta \right) \leq P \left(\int_0^\varepsilon \mathbb{1}_{\beta^{(\ln t)}(u) \geq \delta} du \leq \delta \right) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Имеем, используя утверждение 3.3.19 и проведённые оценки:

$$\begin{aligned} P \left(\exists s \in [0, t]: Q_s \leq R, \int_0^t \mathbb{1}_{Q_s \leq R} d\langle M \rangle_s \geq \varepsilon(\ln t)^2 \right) &= P(\tau_\varepsilon \leq t) \leq \\ &\leq P \left(\int_0^{\tau_\varepsilon} \mathbb{1}_{M_s \geq \alpha} d\langle M \rangle_s \leq \delta(\ln t)^2 \right) + P \left(\tau_\varepsilon \leq t, \int_0^{\tau_\varepsilon} \mathbb{1}_{M_s \geq \alpha} d\langle M \rangle_s \geq \delta(\ln t)^2 \right) \leq \\ &\leq \varepsilon + P \left(\exists s \in [0, t]: Q_s \leq R, \int_0^s \mathbb{1}_{M_u \geq \alpha} d\langle M \rangle_u \geq \delta(\ln t)^2 \right) \leq \varepsilon + \delta < 2\varepsilon \end{aligned}$$

при достаточно больших t . □

Утверждение 3.3.21. При некотором $\rho > 0$ для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших t имеет место

$$P \left(\int_0^t \mathbb{1}_{Q_s \leq \rho^2} ds \geq \varepsilon(\ln t)^2 \right) < \varepsilon.$$

Иными словами,

$$\frac{1}{(\ln t)^2} \int_0^t \mathbb{1}_{Q_s \leq \rho^2} ds \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{P} 0.$$

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть

$$\tau_\varepsilon = \inf \left\{ t > 0: \int_0^t \mathbb{1}_{Q_s \leq \rho^2} ds \geq \varepsilon (\ln t)^2 \right\}.$$

Тогда $Q(\tau_\varepsilon) \leq \rho^2$. Выберем ρ, ν как в утверждении 3.3.13. Имеем

$$\begin{aligned} P \left(\int_0^t \mathbb{1}_{Q_s \leq \rho^2} ds \geq \varepsilon (\ln t)^2 \right) &\leq P \left(\exists s \leq t: Q_s \leq \rho^2, \int_0^s \mathbb{1}_{Q_u \leq \rho^2} du \geq \varepsilon (\ln t)^2 \right) \leq \\ &\leq P \left(\exists s \leq t: Q_s \leq \rho^2, 2V_s + \langle M \rangle_s \geq \varepsilon \nu (\ln t)^2 \right) \leq \\ &\leq P \left(\exists s \leq t: Q_s \leq \rho^2, V_s \geq \varepsilon \nu (\ln t)^2 / 3 \right) + \\ &\quad + P \left(\exists s \leq t: Q_s \leq \rho^2, \langle M \rangle_s \geq \varepsilon \nu (\ln t)^2 / 3 \right) < 2\varepsilon \nu / 3 \end{aligned}$$

при достаточно больших t в силу утверждений 3.3.17 и 3.3.20. \square

Отсюда непосредственно следует

Утверждение 3.3.22. При некотором $\rho > 0$ имеет место

$$\frac{1}{(\ln t)^2} \int_0^t \mathbb{1}_{R_{ab}(s) \leq \rho, R_{ac}(s) \leq \rho} ds \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{P} 0.$$

Утверждение 3.3.23. При любом $R > 0$ имеет место

$$\frac{1}{(\ln t)^2} \int_0^t \mathbb{1}_{R_{ab}(s) \leq R, R_{ac}(s) \leq R} ds \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{P} 0.$$

Доказательство. Пусть ρ — из утверждения 3.3.22. Без ограничения общности можно считать $R > \rho$. В этом случае имеем

$$\begin{aligned} \int_0^t \mathbb{1}_{R_{ab}(s) \leq R, R_{ac}(s) \leq R} ds &\leq \\ &\leq \int_0^t \mathbb{1}_{R_{ab}(s) \leq \rho, R_{ac}(s) \leq \rho} ds + \int_0^t \mathbb{1}_{\rho \leq R_{ab}(s) \leq R} ds + \int_0^t \mathbb{1}_{\rho \leq R_{ac}(s) \leq R} ds. \end{aligned}$$

Доказываемая оценка теперь вытекает из утверждений 3.3.5 и 3.3.22. \square

Утверждение 3.3.24. Для попарно различных точек плоскости a, b, c, d при любом $R > 0$ имеет место

$$\frac{1}{(\ln t)^2} \int_0^t \mathbb{1}_{R_{ab}(s) \leq R, R_{cd}(s) \leq R} ds \xrightarrow{P} 0, t \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Доказательство проводится аналогично доказательству

$$\frac{1}{(\ln t)^2} \int_0^t \mathbb{1}_{R_{ab}(s) \leq R, R_{ac}(s) \leq R} ds \xrightarrow{P} 0, t \rightarrow \infty,$$

только вместо $Q_t = R_{ab}(t)^2 + R_{ac}(t)^2$ рассматривается $Q'_t = R_{ab}(t)^2 + R_{cd}(t)^2$. Для Q'_t имеют место аналогичные равенства

$$\begin{aligned} dQ'_t &= H'_t dt + 2dN'_t, \\ d \ln Q'_t &= \left(\frac{H'_t}{Q'_t} - \frac{2P'_t}{Q'^2_t} \right) dt + \frac{2}{Q'_t} dN'_t, \end{aligned}$$

где

$$H'_t = 4(2 - b_L(R_{ab}(t)) - b_L(R_{cd}(t))),$$

$$\begin{aligned} d \langle N' \rangle_t &= P'_t dt = R_{ab}(t)^2 d \langle X_{ab} \rangle_t + R_{cd}(t)^2 d \langle X_{cd} \rangle_t + \\ &\quad + 2(X_{ab}(t)X_{cd}(t) + Y_{ab}(t)Y_{cd}(t))d \langle X_{ab}, X_{cd} \rangle_t. \end{aligned}$$

Доказательство неравенства

$$H'_t Q'_t \geq 2P'_t$$

и последующие рассуждения проводятся аналогично рассуждениям для Q_t . □

Утверждение 3.3.25. При любом $R > 0$ имеет место

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\ln t)^2} \int_0^t \mathbb{1}_{R_{ab}(s) \leq R} \frac{1}{(R_{ab}(s) \vee 1)(R_{ac}(s) \vee 1)} ds &\xrightarrow[t \rightarrow \infty]{P} 0, t \rightarrow \infty, \\ \frac{1}{(\ln t)^2} \int_0^t \mathbb{1}_{R_{ac}(s) \leq R} \frac{1}{(R_{ab}(s) \vee 1)(R_{ac}(s) \vee 1)} ds &\xrightarrow[t \rightarrow \infty]{P} 0, t \rightarrow \infty, \\ \frac{1}{(\ln t)^2} \int_0^t \mathbb{1}_{R_{bc}(s) \leq R} \frac{1}{(R_{ab}(s) \vee 1)(R_{ac}(s) \vee 1)} ds &\xrightarrow[t \rightarrow \infty]{P} 0, t \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^t \mathbb{1}_{R_{ab}(s) \leq R} \frac{1}{(R_{ab}(s) \vee 1)(R_{ac}(s) \vee 1)} ds &\leq \int_0^t \mathbb{1}_{R_{ab}(s) \leq R} \frac{1}{R_{ac}(s) \vee 1} ds = \\ &= \int_0^t \mathbb{1}_{R_{ab}(s) \leq R, R_{ac}(s) \leq 1} ds + \int_0^t \mathbb{1}_{R_{ab}(s) \leq R, R_{ac}(s) \geq 1} \frac{1}{R_{ac}(s)} ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^t \mathbb{1}_{R_{ac}(s) \leq R} \frac{1}{(R_{ab}(s) \vee 1)(R_{ac}(s) \vee 1)} ds &\leq \int_0^t \mathbb{1}_{R_{ac}(s) \leq R} \frac{1}{R_{ab}(s) \vee 1} ds = \\ &= \int_0^t \mathbb{1}_{R_{ac}(s) \leq R, R_{ab}(s) \leq 1} ds + \int_0^t \mathbb{1}_{R_{ac}(s) \leq R, R_{ab}(s) \geq 1} \frac{1}{R_{ab}(s)} ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^t \mathbb{1}_{R_{bc}(s) \leq R} \frac{1}{(R_{ab}(s) \vee 1)(R_{ac}(s) \vee 1)} ds &\leq \\ &\leq \int_0^t \mathbb{1}_{R_{bc}(s) \leq R, R_{ab}(s) \leq 1} ds + \int_0^t \mathbb{1}_{R_{bc}(s) \leq R, R_{ab}(s) \geq 1} \frac{1}{R_{ab}(s)} ds. \end{aligned}$$

Из утверждений 3.3.7 и 3.3.23 во всех трёх случаях получаем нужное. . \square

Утверждение 3.3.26. *При любом $A > 0, R > 1$ имеет место*

$$\begin{aligned} \int_0^t \mathbb{1}_{R_{ab}(s) \geq R, R_{ac}(s) \geq R, |\ln R_{ab}(s) - \ln R_{ac}(s)| > A} \frac{1}{(R_{ab}(s) \vee 1)(R_{ac}(s) \vee 1)} ds &\leq \\ &\leq C_1 e^{-A} \left(\int_0^t \frac{1}{R_{ab}(s)^2 \vee 1} ds + \int_0^t \frac{1}{R_{ac}(s)^2 \vee 1} ds \right). \end{aligned}$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^t \mathbb{1}_{R_{ab}(s) \geq R, R_{ac}(s) \geq R, \ln R_{ac}(s) - \ln R_{ab}(s) > A} \frac{1}{(R_{ab}(s) \vee 1)(R_{ac}(s) \vee 1)} ds = \\ = \int_0^t \mathbb{1}_{R_{ab}(s) \geq R, R_{ac}(s) > e^A R_{ab}(s)} \frac{1}{R_{ab}(s) R_{ac}(s)} ds \leq e^{-A} \int_0^t \frac{1}{R_{ab}(s)^2 \vee 1} ds. \end{aligned}$$

Аналогично получаем

$$\begin{aligned} \int_0^t \mathbb{1}_{R_{ab}(s) \geq R, R_{ac}(s) \geq R, \ln R_{ac}(s) - \ln R_{ab}(s) < -A} \frac{1}{(R_{ab}(s) \vee 1)(R_{ac}(s) \vee 1)} ds \leq \\ \leq e^{-A} \int_0^t \frac{1}{R_{ac}(s)^2 \vee 1} ds. \end{aligned}$$

Складывая полученные неравенства, получаем нужное. \square

Утверждение 3.3.27. Пусть β — одномерное броуновское движение, $\beta(0) = x_0$. Тогда при любом $A > 0$

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{1}_{|\beta(u)| \leq A} du \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{P} 0.$$

Доказательство. Поскольку

$$\int_0^t \mathbb{1}_{|\beta(u)| \leq A} du \leq \int_0^t \mathbb{1}_{|\beta(u) - x_0| \leq A + |x_0|} du,$$

можно считать $\beta(0) = 0$. В этом случае имеем

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{1}_{|\beta(u)| \leq A} du = \int_0^1 \mathbb{1}_{|\beta(tu)| \leq A} du = \int_0^1 \mathbb{1}_{|w(u)| \leq \frac{A}{\sqrt{t}}} du,$$

где $w(u) = \frac{1}{\sqrt{t}}\beta(tu)$ — одномерное броуновское движение, $w(0) = 0$. Осталось показать, что имеет место сходимость

$$\int_0^1 \mathbb{1}_{|w(u)| \leq \varepsilon} du \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0+]{P} 0.$$

Для любой неотрицательной измеримой функции f имеет место соотношение

$$\int_0^t f(w_s) ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) L_t^x dx, t \geq 0,$$

где L — непрерывная справа версия локального времени w (см. теорему 22.5 в [56]). Применяя это соотношение для $f(x) = \mathbb{1}_{|x| \leq \varepsilon}$, получаем

$$\int_0^1 \mathbb{1}_{|w_s| \leq \varepsilon} ds = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} L_1^x dx \rightarrow 0 \text{ п.н., } \varepsilon \rightarrow 0+.$$

Доказательство окончено. \square

Утверждение 3.3.28. При некоторых $R > 1, C' > 0$ имеет место

$$\mathbb{1}_{R_{ab}(t) \geq R, R_{bc}(t) \geq R, R_{ac}(t) \geq R} \frac{1}{R_{ac}(t)^2} \leq C' \frac{d \langle \ln R_{ab} - \ln R_{ac} \rangle_t}{dt}.$$

Доказательство. Имеем, обозначая $R_{ab} = R_{ab}(t), R_{ac} = R_{ac}(t), X_{ab} = X_{ab}(t)$ и т. д.:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d \langle \ln R_{ab} - \ln R_{ac} \rangle_t}{dt} &= \frac{1}{2} \frac{d \langle \ln R_{ab} \rangle_t}{dt} + \frac{1}{2} \frac{d \langle \ln R_{ac} \rangle_t}{dt} - \frac{d \langle \ln R_{ab}, \ln R_{ac} \rangle_t}{dt} = \\ &= \frac{1 - b_L(R_{ab})}{R_{ab}^2} + \frac{1 - b_L(R_{ac})}{R_{ac}^2} - \frac{X_{ab}X_{ac} + Y_{ab}Y_{ac}}{R_{ab}^2 R_{ac}^2} (1 - b_L(R_{ab}) - b_L(R_{ac}) + b_L(R_{bc})) \geq \\ &\geq \frac{1 - b_L(R_{ab})}{R_{ab}^2} + \frac{1 - b_L(R_{ac})}{R_{ac}^2} - \frac{R_{ab}R_{ac}}{R_{ab}^2 R_{ac}^2} |1 - b_L(R_{ab}) - b_L(R_{ac}) + b_L(R_{bc})| = \\ &= \frac{1 - b_L(R_{ab})}{R_{ab}^2} + \frac{1 - b_L(R_{ac})}{R_{ac}^2} - \frac{|1 - b_L(R_{ab}) - b_L(R_{ac}) + b_L(R_{bc})|}{R_{ab}R_{ac}}. \end{aligned}$$

Для данного $\varepsilon, 0 < \varepsilon < 1$, выберем R так, что $|b_L(r)| < \varepsilon$ при $r > R$. Такой выбор возможен в силу $b_L(r) \rightarrow 0$ ($r \rightarrow \infty$). При $R_{ab} \geq R, R_{ac} \geq R, R_{bc} \geq R$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{1 - b_L(R_{ab})}{R_{ab}^2} + \frac{1 - b_L(R_{ac})}{R_{ac}^2} - \frac{|1 - b_L(R_{ab}) - b_L(R_{ac}) + b_L(R_{bc})|}{R_{ab}R_{ac}} &\geq \\ &\geq \frac{1 - \varepsilon}{R_{ab}^2} + \frac{1 - \varepsilon}{R_{ac}^2} - \frac{1 + 3\varepsilon}{R_{ab}R_{ac}} \geq \frac{1 - \varepsilon}{R_{ab}^2} + \frac{1 - \varepsilon}{R_{ac}^2} - \frac{1 + 3\varepsilon}{2} \left(\frac{1}{R_{ab}^2} + \frac{1}{R_{ac}^2} \right) = \\ &= \frac{1 - 5\varepsilon}{2} \left(\frac{1}{R_{ab}^2} + \frac{1}{R_{ac}^2} \right). \end{aligned}$$

Положив $\varepsilon = \frac{1}{6}$, получаем

$$\frac{1}{2} \frac{d \langle \ln R_{ab} - \ln R_{ac} \rangle_t}{dt} \geq \frac{1}{12} \mathbb{1}_{R_{ab} \geq R, R_{bc} \geq R, R_{ac} \geq R} \left(\frac{1}{R_{ab}^2} + \frac{1}{R_{ac}^2} \right),$$

и

$$\frac{6d \langle \ln R_{ab} - \ln R_{ac} \rangle_t}{dt} \geq \mathbb{1}_{R_{ab} \geq R, R_{bc} \geq R, R_{ac} \geq R} \frac{1}{R_{ac}^2}.$$

□

Утверждение 3.3.29. Пусть a, b, c, d — попарно различные точки плоскости. При любом $\varepsilon > 0$ существует $R_1 > 1$, такое, что

$$\left| \frac{d \langle \Phi_{ab}, \Phi_{cd} \rangle_t}{dt} \right| \leq \varepsilon \frac{1}{R_{ab}(t) R_{cd}(t)},$$

как только все попарные расстояния между точками a, b, c, d больше R_1 .

Доказательство. Выберем $R_1 > 1$ так, чтобы $|b_L(r)| < \frac{\varepsilon}{4}$ при $r > R_1$. Имеем

$$\begin{aligned} \left| \frac{d \langle \Phi_{ab}, \Phi_{cd} \rangle_t}{dt} \right| &= \\ &= \frac{|X_{ab} X_{cd} + Y_{ab} Y_{cd}| |b_L(R_{ac}) + b_L(R_{bd}) - b_L(R_{ad}) - b_L(R_{bc})|}{R_{ab}^2 R_{cd}^2}(t) \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{R_{ab}(t) R_{cd}(t)}, \end{aligned}$$

как только все попарные расстояния между точками a, b, c, d больше R_1 . □

Утверждение 3.3.30. При некотором $R > 1$ для всех $A > 0$ имеет место

$$\frac{1}{(\ln t)^2} \int_0^t \mathbb{1}_{R_{ab}(s) \geq R, R_{ac}(s) \geq R, R_{bc}(s) \geq R, |\ln R_{ab}(s) - \ln R_{ac}(s)| \leq A} \frac{1}{R_{ac}(s)^2} ds \xrightarrow{P} 0, t \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Выбирая R как в утверждении 3.3.28, получаем

$$\begin{aligned} &\int_0^t \mathbb{1}_{R_{ab}(s) \geq R, R_{ac}(s) \geq R, |\ln R_{ab}(s) - \ln R_{ac}(s)| \leq A} \frac{1}{R_{ac}(s)^2} ds \leq \\ &\leq C' \int_0^t \mathbb{1}_{|\ln R_{ab}(s) - \ln R_{ac}(s)| \leq A} d \langle \ln R_{ab} - \ln R_{ac} \rangle_s = \\ &= C' \int_0^{\langle \ln R_{ab} - \ln R_{ac} \rangle_t} \mathbb{1}_{|\beta(u)| \leq A} du \leq C' \int_0^{2 \langle \ln R_{ab} \rangle_t + 2 \langle \ln R_{ac} \rangle_t} \mathbb{1}_{|\beta(u)| \leq A} du, \end{aligned}$$

где β — ассоциированное с локальным мартингалом $\ln R_{ab} - \ln R_{ac}$ броуновское движение. Утверждение теперь вытекает из существования пределов по распределению

$$\frac{\langle \ln R_{ab} \rangle_t}{(\ln t)^2} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{d} \tau_{1/2}, \quad \frac{\langle \ln R_{ac} \rangle_t}{(\ln t)^2} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{d} \tau_{1/2}$$

и утверждения 3.3.27. □

Утверждение 3.3.31. *Имеет место сходимость*

$$\frac{1}{(\ln t)^2} \int_0^t \frac{1}{(R_{ab}(s) \vee 1)(R_{ac}(s) \vee 1)} ds \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{P} 0.$$

Доказательство. Выберем $R > 1$ как в утверждении 3.3.30. Имеем при произвольном $A > 0$, применяя утверждение 3.3.26:

$$\begin{aligned} & \int_0^t \frac{1}{(R_{ab}(s) \vee 1)(R_{ac}(s) \vee 1)} ds \leq \int_0^t \mathbb{1}_{R_{ab}(s) \leq R} \frac{1}{(R_{ab}(s) \vee 1)(R_{ac}(s) \vee 1)} ds + \\ & + \int_0^t \mathbb{1}_{R_{ac}(s) \leq R} \frac{1}{(R_{ab}(s) \vee 1)(R_{ac}(s) \vee 1)} ds + \int_0^t \mathbb{1}_{R_{bc}(s) \leq R} \frac{1}{(R_{ab}(s) \vee 1)(R_{ac}(s) \vee 1)} ds + \\ & + \int_0^t \mathbb{1}_{R_{ab}(s) \geq R, R_{bc}(s) \geq R, R_{ac}(s) \geq R, |\ln R_{ab}(s) - \ln R_{ac}(s)| \leq A} \frac{1}{(R_{ab}(s) \vee 1)(R_{ac}(s) \vee 1)} ds + \\ & + \int_0^t \mathbb{1}_{R_{ab}(s) \geq R, R_{bc}(s) \geq R, R_{ac}(s) \geq R, |\ln R_{ab}(s) - \ln R_{ac}(s)| > A} \frac{1}{(R_{ab}(s) \vee 1)(R_{ac}(s) \vee 1)} ds \leq \\ & \leq \int_0^t \mathbb{1}_{R_{ab}(s) \leq R} \frac{1}{(R_{ab}(s) \vee 1)(R_{ac}(s) \vee 1)} ds + \\ & + \int_0^t \mathbb{1}_{R_{ac}(s) \leq R} \frac{1}{(R_{ab}(s) \vee 1)(R_{ac}(s) \vee 1)} ds + \int_0^t \mathbb{1}_{R_{bc}(s) \leq R} \frac{1}{(R_{ab}(s) \vee 1)(R_{ac}(s) \vee 1)} ds + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^t \mathbb{1}_{R_{ab}(s) \geq R, R_{bc}(s) \geq R, R_{ac}(s) \geq R, |\ln R_{ab}(s) - \ln R_{ac}(s)| \leq A} \frac{1}{R_{ab}(s)^2} ds + \\
& + \int_0^t \mathbb{1}_{R_{ab}(s) \geq R, R_{bc}(s) \geq R, R_{ac}(s) \geq R, |\ln R_{ab}(s) - \ln R_{ac}(s)| \leq A} \frac{1}{R_{ac}(s)^2} ds + \\
& + C_1 e^{-A} \left(\int_0^t \frac{1}{R_{ab}(s)^2 \vee 1} ds + \int_0^t \frac{1}{R_{ac}(s)^2 \vee 1} ds \right).
\end{aligned}$$

Поскольку A может быть выбрано сколь угодно большим, то, учитывая утверждения 3.3.25, 3.3.30 и 3.3.6, получаем нужное. \square

С использованием оценок из утверждения 3.3.3 и аналогичных оценок для $\int_0^t |d \langle \ln R_{ab}, \Phi_{ac} \rangle_s|$, мы получаем из утверждения 3.3.31

Утверждение 3.3.32. *Для попарно различных точек плоскости a, b, c имеет место*

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(\ln t)^2} \int_0^t |d \langle \Phi_{ab}, \Phi_{ac} \rangle_s| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{P} 0, \\
& \frac{1}{(\ln t)^2} \int_0^t |d \langle \ln R_{ab}, \ln R_{ac} \rangle_s| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{P} 0, \\
& \frac{1}{(\ln t)^2} \int_0^t |d \langle \ln R_{ab}, \Phi_{ac} \rangle_s| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{P} 0.
\end{aligned}$$

Аналогичные рассуждения позволяют получить следующий результат.

Утверждение 3.3.33. *Для попарно различных точек плоскости a, b, c, d имеет место*

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(\ln t)^2} \int_0^t |d \langle \Phi_{ab}, \Phi_{cd} \rangle_s| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{P} 0, \\
& \frac{1}{(\ln t)^2} \int_0^t |d \langle \ln R_{ab}, \ln R_{cd} \rangle_s| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{P} 0,
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{(\ln t)^2} \int_0^t |d \langle \ln R_{ab}, \Phi_{cd} \rangle_s| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{P} 0.$$

Доказательство. Покажем, что

$$\frac{1}{(\ln t)^2} \int_0^t |d \langle \Phi_{ab}, \Phi_{cd} \rangle_s| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{P} 0.$$

Остальные соотношения доказываются аналогично. Пусть $\varepsilon > 0$ фиксировано. Выберем R_1 как в утверждении 3.3.29. Имеем для некоторой постоянной $C > 0$, используя утверждение 3.3.4

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\ln t)^2} \int_0^t |d \langle \Phi_{ab}, \Phi_{cd} \rangle_s| &\leq \frac{C}{(\ln t)^2} \int_0^t \mathbb{1}_{R_{ab}(s) \leq R_1, R_{cd}(s) \leq R_1} ds + \\ &+ \frac{C}{(\ln t)^2} \sum_{k, l \in \{a, b, c, d\}, k \neq l, \{k, l\} \neq \{a, b\}} \int_0^t \mathbb{1}_{R_{kl}(s) \leq R_1, R_{ab}(s) \geq R_1} \frac{1}{R_{ab}(s)} ds + \\ &+ \frac{C}{(\ln t)^2} \sum_{k, l \in \{a, b, c, d\}, k \neq l, \{k, l\} \neq \{c, d\}} \int_0^t \mathbb{1}_{R_{kl}(s) \leq R_1, R_{cd}(s) \geq R_1} \frac{1}{R_{cd}(s)} ds + \\ &+ \frac{1}{(\ln t)^2} \int_0^t \mathbb{1}_{\forall k \neq l \in \{a, b, c, d\} R_{kl} \geq R_1} \left| \frac{d \langle \Phi_{ab}, \Phi_{cd} \rangle_s}{ds} \right| ds. \end{aligned}$$

Первая подсумма нашей суммы сходится к 0 по вероятности при $t \rightarrow \infty$ (при фиксированном R_1) за счёт утверждения 3.3.24, вторая и третья — за счёт утверждений 3.3.7 и 3.3.8. Четвёртая сумма в силу выбора R_1 не превышает

$$\frac{\varepsilon}{(\ln t)^2} \left(\int_0^t \frac{1}{R_{ab}(s)^2 \vee 1} ds + \int_0^t \frac{1}{R_{cd}(s)^2 \vee 1} ds \right).$$

Поскольку ε может быть выбрано сколь угодно малым, с учётом утверждения 3.3.6 получаем нужное. \square

Рассмотрим в условиях теоремы 3.3.1 траектории частиц $F_t(x_i)$, $1 \leq i \leq m$, выходящие из попарно различных точек плоскости x_1, \dots, x_m . Обозначим для каждой пары частиц $k, l, k \neq l$ $R_{kl}(t) = \|F_t(x_k) - F_t(x_l)\|$, $\Phi_{kl}(t)$ — угол обхода траектории $F_s(x_k)$ вокруг $F_s(x_l)$ к моменту времени t .

В дальнейших выкладках мы будем использовать обозначение

$$f^{(h)}(u) = \frac{1}{h} f(h^2 u), h > 0.$$

Приведённые оценки позволяют получить следующий результат.

Утверждение 3.3.34. Пусть $\{\alpha_n\}$ — последовательность положительных чисел, такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = +\infty$. Пусть $(\beta_{kl}, \gamma_{kl}, 1 \leq k < l \leq m)$, — ассоциированные с локальными мартингалами $(\ln R_{kl}, \Phi_{kl}, 1 \leq k < l \leq m)$ броуновские движения (см. определение 3.2.1). Тогда

$$(\beta_{kl}^{(\alpha_n)}, \gamma_{kl}^{(\alpha_n)}, 1 \leq k < l \leq m) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} (\beta_{kl}^\infty, \gamma_{kl}^\infty, 1 \leq k < l \leq m),$$

где $\beta_{kl}^\infty, \gamma_{kl}^\infty, 1 \leq k < l \leq m$ — независимые в совокупности броуновские движения, $\beta_{kl}^{(a)}(t) = \frac{1}{a} \beta_{kl}(a^2 t)$, $\gamma_{kl}^{(a)}(t) = \frac{1}{a} \gamma_{kl}(a^2 t)$.

Доказательство. Из утверждений 3.3.32, 3.3.33 следует, что существует такая последовательность $\{H_n\}$, что

- $H_n \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)$;
- $\alpha_n = o(\ln H_n) (n \rightarrow \infty)$;
- для любых $p, q, k, l, \{p, q\} \neq \{k, l\}, p \neq q, k \neq l$, выполнено

$$\frac{1}{\alpha_n^2} \int_0^{H_n} |d \langle \Phi_{pq}, \Phi_{kl} \rangle_s| = \frac{1}{\alpha_n^2} \int_0^{H_n} |d \langle \ln R_{pq}, \ln R_{kl} \rangle_s| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0,$$

$$\frac{1}{\alpha_n^2} \int_0^{H_n} |d \langle \Phi_{pq}, \ln R_{kl} \rangle_s| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0,$$

Рассмотрим последовательность наборов локальных мартингалов

$$\left(\frac{\ln R_{kl}}{\alpha_n}, \frac{\Phi_{kl}}{\alpha_n}, 1 \leq k < l \leq m \right), n = 1, 2, 3, \dots,$$

и пусть $(\beta_{kl}^n, \gamma_{kl}^n, 1 \leq k < l \leq m)$, — ассоциированные с этими локальными мартингалами броуновские движения (см. определение 3.2.1). Заметим, что имеют место соотношения

$$\beta_{kl}^n(s) = \frac{1}{\alpha_n} \beta_{kl}(\alpha_n^2 s), s \geq 0,$$

$$\gamma_{kl}^n(s) = \frac{1}{\alpha_n} \gamma_{kl}(\alpha_n^2 s), s \geq 0.$$

Утверждение 3.2.4 и условия на последовательность $\{H_n\}$ делают возможным применение теоремы 3.3.2 к последовательности локальных мартингалов

$$\left(\frac{\ln R_{kl}}{\alpha_n}, \frac{\Phi_{kl}}{\alpha_n}, 1 \leq k < l \leq m \right), n = 1, 2, 3, \dots$$

Следовательно, имеет место следующая слабая сходимость в пространстве $C[0, \infty)$:

$$(\beta_{kl}^n, \gamma_{kl}^n, 1 \leq k < l \leq m) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{d} (\beta_{kl}^\infty, \gamma_{kl}^\infty, 1 \leq k < l \leq m),$$

где $\beta_{kl}^\infty, \gamma_{kl}^\infty, 1 \leq k < l \leq m$ — независимые в совокупности броуновские движения. \square

Отсюда уже несложно получается наш основной результат. Рассуждения при этом аналогичны тем, которые проводятся в работе [61] при исследовании совместного асимптотического распределения углов обхода двумерного броуновского движения вокруг нескольких точек плоскости. Так, мы рассматриваем случайные моменты времени

$$T_{kl}(r) = \inf \{s > 0: R_{kl}(s) = r\}$$

и показываем, что углы обхода $\Phi_{kl}(t)$ в некотором смысле хорошо приближаются углами $\Phi_{kl}(T_{kl}(\sqrt{t}))$. Точнее говоря, согласно утверждению 3.2.5

$$\frac{\Phi_{kl}(t) - \Phi_{kl}(T_{kl}(\sqrt{t}))}{\frac{1}{2} \ln t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{P} 0,$$

в то время как

$$\frac{\Phi_{kl}(T_{kl}(\sqrt{t}))}{\frac{1}{2} \ln t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{d} \xi,$$

где ξ — случайная величина, имеющая стандартное распределение Коши. Остаётся показать, что

$$\left(\frac{1}{\frac{1}{2} \ln t} \Phi_{kl}(T_{kl}(\sqrt{t})), 1 \leq k < l \leq m \right) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{d} (\xi_{kl}, 1 \leq k < l \leq m), \quad (3.7)$$

где ξ_{kl} — независимые случайные величины с распределением Коши. Последнее же соотношение получается из утверждения 3.3.34 применением следующей леммы из работы [61].

Лемма 3.3.1. [61] Допустим, что для всех $j = 1, \dots, k$ и $n = 1, 2, \dots, X_j^n$ — случайные элементы со значениями в сепарабельном метрическом пространстве S_j , такие, что для каждого j распределение X_j^n не зависит от n , и при $n \rightarrow \infty$

$$(X_j^n, j = 1, \dots, k) \xrightarrow{d} (X_j, j = 1, \dots, k).$$

Тогда для измеримых борелевских функций $\phi_j : S_j \rightarrow T_j$ со значениями в некоторых сепарабельных метрических пространствах T_j имеет место сходимость

$$(\phi_j(X_j^n), j = 1, \dots, k) \xrightarrow{d} (\phi_j(X_j), j = 1, \dots, k).$$

Итак, пусть $\{t_n\}$ — произвольная последовательность, удовлетворяющая условию $t_n \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow \infty$). Положим $\alpha_n = \frac{1}{2} \ln t_n$, и пусть, как в доказательстве утверждения 3.3.34,

$$\beta_{kl}^n(s) = \frac{1}{\alpha_n} \beta_{kl}(\alpha_n^2 s), s \geq 0,$$

$$\gamma_{kl}^n(s) = \frac{1}{\alpha_n} \gamma_{kl}(\alpha_n^2 s), s \geq 0.$$

Мы применяем лемму 3.3.1 к наборам двумерных броуновских движений X_{kl}^n , где

$$X_{kl}^n(t) = \beta_{kl}^n(t) - \beta_{kl}^n(0) + i\gamma_{kl}^n(t),$$

а в роли $\phi_j : C[0, \infty) \times C[0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ берём одну и ту же функцию

$$\phi(u(\cdot), v(\cdot)) = \phi(u(\cdot) + iv(\cdot)) = v(\inf\{s : u(s) = 1\}).$$

Применение леммы даёт сходимость по распределению набора случайных величин $\gamma_{kl}^n(\inf\{u : \beta_{kl}^n(u) - \beta_{kl}^n(0) = 1\})$ к набору независимых случайных величин с распределением Коши. Легко видеть, что при всех $k < l$: $\beta_{kl}^n(0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, и

$$\gamma_{kl}^n(\inf\{u : \beta_{kl}^n(u) = 1\}) - \gamma_{kl}^n(\inf\{u : \beta_{kl}^n(u) - \beta_{kl}^n(0) = 1\}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0.$$

Следовательно, и

$$(\gamma_{kl}^n(\inf\{u : \beta_{kl}^n(u) = 1\}), 1 \leq k < l \leq m) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} (\xi_{kl}, 1 \leq k < l \leq m),$$

где ξ_{kl} — независимые случайные величины со стандартным распределением Коши. Заметим, что имеет место равенство

$$\frac{1}{\frac{1}{2} \ln t_n} \Phi_{kl}(T_{kl}(\sqrt{t_n})) = \gamma_{kl}^n(\inf\{u : \beta_{kl}^n(u) = 1\}),$$

поскольку

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\frac{1}{2} \ln t_n} \Phi_{kl}(T_{kl}(\sqrt{t_n})) &= \frac{1}{\alpha_n} \Phi_{kl}(\inf\{s > 0: R_{kl}(s) = \sqrt{t_n}\}) = \\
&= \frac{1}{\alpha_n} \gamma_{kl}(\langle \Phi_{kl} \rangle (\inf\{s > 0: \ln R_{kl}(s) = \alpha_n\})) = \\
&= \frac{1}{\alpha_n} \gamma_{kl}(\langle \ln R_{kl} \rangle (\inf\{s > 0: \beta_{kl}(\langle \ln R_{kl} \rangle_s) = \alpha_n\})) = \\
&= \frac{1}{\alpha_n} \gamma_{kl}(\inf\{u > 0: \beta_{kl}(u) = \alpha_n\}),
\end{aligned}$$

и далее, производя перемасштабирование винеровских процессов β_{kl}, γ_{kl} ,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\alpha_n} \gamma_{kl}(\inf\{u > 0: \beta_{kl}(u) = \alpha_n\}) &= \frac{1}{\alpha_n} \gamma_{kl}(\alpha_n^2 \inf\{u > 0: \beta_{kl}(\alpha_n^2 u) = \alpha_n\}) = \\
&= \gamma_{kl}^n(\inf\{u > 0: \beta_{kl}(\alpha_n^2 u) = \alpha_n\}) = \gamma_{kl}^n(\inf\{u > 0: \beta_{kl}(\alpha_n^2 u)/\alpha_n = 1\}) = \\
&= \gamma_{kl}^n(\inf\{u > 0: \beta_{kl}^n(u) = 1\}).
\end{aligned}$$

Тем самым, мы получили

$$\left(\frac{1}{\frac{1}{2} \ln t_n} \Phi_{kl}(T_{kl}(\sqrt{t_n})), 1 \leq k < l \leq m \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} (\xi_{kl}, 1 \leq k < l \leq m).$$

Поскольку последовательность $\{t_n\}$ произвольна, мы получили (3.7), и доказательство окончено.

Выводы к главе 3

1. Установлен аналог закона Спицера для броуновских потоков со старшим показателем Ляпунова, равным нулю.
2. Получено совместное асимптотическое распределение взаимных углов обхода частиц в броуновском стохастическом потоке при $t \rightarrow \infty$.

Глава 4

Большие уклонения для угла обхода

В предыдущей главе мы рассматривали поведение взаимных углов обхода частиц в броуновском потоке при $t \rightarrow \infty$. Исследование поведения угла обхода началось с работ Ф. Спицера, который в 1958 году доказал [14], что для двумерного броуновского движения

$$\frac{2\Phi(t)}{\ln t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{d} \xi.$$

Здесь $\Phi(t)$ — угол обхода вокруг начала координат O двумерного броуновского движения, выходящего из точки, отличной от O , к моменту времени t , ξ — случайная величина со стандартным распределением Коши, т.е. с плотностью распределения $p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$. Более тонкие результаты, описывающие поведение углов обхода, были получены в работах Zhan Shi [65], J. Bertoin и W. Werner [66].

Кроме асимптотического поведения угла обхода броуновского движения при $t \rightarrow \infty$, представляет интерес его поведение на малых интервалах времени, при $t \rightarrow 0$. В этой главе рассматривается возможность получения принципа больших уклонений для угла обхода броуновского движения вокруг начала координат. Приведём необходимые определения, следуя гл. 27 [56].

Определение 4.0.1. [56] Пусть X — метрическое пространство, $(\xi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ — семейство случайных элементов со значениями в X , $I: X \rightarrow [0, \infty]$ — некоторая полунепрерывная снизу функция. Для любого подмножества $A \subseteq X$ мы обозначаем $I(A) = \inf_{x \in A} I(x)$. Мы говорим, что для семейства $(\xi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ выполнен принцип больших уклонений с функцией скорости I , если для любого борелевского множества $A \subseteq X$ выполнены следующие неравенства:

$$-I(A^\circ) \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln P(\xi_\varepsilon \in A) \leq \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln P(\xi_\varepsilon \in A) \leq -I(\bar{A}).$$

Здесь через A° обозначена внутренность множества A , и через \overline{A} — замыкание A .

Определение 4.0.2. [56] Пусть $X, (\xi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}, I$ — как в определении 4.0.1. Мы говорим, что для семейства $(\xi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ выполнен слабый принцип больших уклонений с функцией скорости I , если для любого открытого множества $G \subseteq X$ и любого компакта $K \subseteq X$ выполнены следующие неравенства:

$$-I(G) \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln P(\xi_\varepsilon \in G),$$

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln P(\xi_\varepsilon \in K) \leq -I(K).$$

В этой главе мы рассматриваем асимптотику таких же выражений в следующей ситуации. Пусть $X = C([0, 1])$ с равномерной нормой. Определим случайные элементы Φ_ε со значениями в X .

Поставим в соответствие каждой непрерывной функции $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, 0 \leq t \leq 1$, удовлетворяющей условию $f(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f(t) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ для всех $t \in [0, 1]$, функцию $\Phi(f) \in C([0, 1])$, являющуюся непрерывной версией угла обхода f вокруг начала координат. Итак, мы ввели отображение

$$\Phi: \left\{ f \in C([0, 1], \mathbb{R}^2) \mid f(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \forall t \in [0, 1] f(t) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow C([0, 1]).$$

Пусть w — двумерный винеровский процесс, выходящий из точки $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Пусть w_ε — процесс вида $w_\varepsilon(t) = w(\varepsilon t)$, $t \in [0, 1]$ для $\varepsilon > 0$. Теперь мы можем рассмотреть семейство случайных элементов $\Phi_\varepsilon = \Phi(w_\varepsilon)$ со значениями в $C([0, 1])$. Заметим, что эти случайные элементы определены с вероятностью 1, поскольку для любого ε вероятность, что w_ε попадает в начало координат, равна 0.

В этой главе мы исследуем такой вопрос: можно ли найти функцию J , такую, что для семейства случайных элементов (Φ_ε) выполнен слабый принцип больших уклонений или принцип больших уклонений с функцией скорости J ? В разделе 4.1 мы покажем, что для (Φ_ε) выполнен слабый принцип больших уклонений. В разделе 4.2 мы показываем, что оценки принципа больших уклонений выполнены для класса цилиндрических множеств в $C([0, 1])$. Однако, полный принцип больших уклонений для (Φ_ε) не выполнен, как мы показываем в разделе 4.3.

4.1. Слабый принцип больших уклонений для угла обхода

Пусть $I(x)$ — функция скорости для двумерного броуновского движения, выходящего из точки $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, т.е. (см. [56], теорема 27.6)

$$I(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_0^1 \|x'(s)\|^2 ds, & x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \infty, & x(0) \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Мы придерживаемся соглашения $\int_0^1 \|x'(s)\|^2 ds = \infty$, если x не является абсолютно непрерывной функцией. В этом разделе мы доказываем следующую теорему.

Теорема 4.1.1. *Для случайных элементов $\Phi_\varepsilon \in C([0, 1])$ выполнен слабый принцип больших уклонений с функцией скорости $J(\phi) = I(\overline{\Phi^{-1}(\phi)})$.*

Замечание 4.1.1. *Здесь и в дальнейшем мы обозначаем через $\overline{\Phi^{-1}(A)}$ замыкание в $C([0, 1], \mathbb{R}^2)$ множества $\Phi^{-1}(A) = \{x \in C([0, 1], \mathbb{R}^2) : x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \forall t \in [0, 1] \|x(t)\| > 0, \Phi(x) \in A\}$. Мы пишем $\Phi^{-1}(\phi)$ для $\Phi^{-1}(\{\phi\})$.*

Заметим, что было бы естественно попробовать доказать выполнение принципа больших уклонений для семейства (Φ_ε) с помощью принципа сжатия [67]. Действительно, случайные элементы Φ_ε получаются из случайных элементов w_ε с помощью отображения Φ . Но это отображение не является непрерывным на $C([0, 1], \mathbb{R}^2)$. Тем не менее, для некоторых разрывных отображений принцип больших уклонений тоже может быть получен [67], [68]. Например, в статье [29] было доказано выполнение принципа больших уклонений для остановленного винеровского процесса. Точнее говоря, рассматривались случайные элементы $w(\varepsilon t \wedge \tau)$. Здесь w — d -мерный винеровский процесс, $\tau = \inf\{t : w(t) \in B\} \wedge 1$, $B \subset \mathbb{R}^d$ — некоторое замкнутое множество. Эти случайные элементы получаются из случайных элементов w_ε с помощью отображения Ψ , где для $f \in C([0, 1], \mathbb{R}^d)$

$$\tau(f) = \inf\{t : f(t) \in B\} \wedge 1; \Psi(f)(t) = f(t \wedge \tau(f)), t \in [0, 1].$$

Доказательство верхней оценки в [29] основывается на соотношении

$$I(\Psi^{-1}(F)) = I(\overline{\Psi^{-1}(F)})$$

для замкнутых множеств F . Но в нашем случае аналогичное равенство

$$I(\overline{\Phi^{-1}(F)}) = J(F)$$

выполнено не для всех замкнутых множеств F . Однако, оно выполнено для компактных множеств $F \subseteq C([0, 1])$, и этот факт позволяет получить слабый принцип больших уклонений для (Φ_ε) .

Прежде всего, мы показываем, что функция J непрерывна снизу. Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 4.1.1. *Для любого компактного множества $K \subseteq C([0, 1])$ имеем*

$$\overline{\Phi^{-1}(K)} = \{r(t)e^{i\phi(t)}, 0 \leq t \leq 1 \mid \phi \in K, \phi(0) = 0, r \in C([0, 1]), r(0) = 1\}.$$

То есть замыкание $\Phi^{-1}(K)$ содержит лишь функции вида $r(t)e^{i\phi(t)}$ с некоторым $\phi \in K$.

Замечание 4.1.2. *Это свойство не выполнено для некомпактных множеств. Например, если*

$$A = \{\phi \in C([0, 1]) : \phi(0) = 0, \phi(1) \geq 1\},$$

то легко видеть, что замыкание $\Phi^{-1}(A)$ содержит функцию $z(t) = 1 - t$, $0 \leq t \leq 1$, которая не является функцией вида $r(t)e^{i\phi(t)}$ ни при каком $\phi \in A$.

Доказательство. Пусть $x_0 \in \overline{\Phi^{-1}(K)}$. Тогда существует последовательность $x_n \rightarrow x_0, x_n \in \Phi^{-1}(K)$. Пусть $\phi_n = \Phi(x_n)$. Для любого n , $\phi_n \in K$. Поскольку K компактно, существует сходящаяся подпоследовательность $\{\phi_{n_k}\}$ с $\phi_{n_k} \rightarrow \phi_0$ для некоторого $\phi_0 \in K$. Пусть $r_n(t) = \|x_n(t)\|$, $r_0(t) = \|x_0(t)\|$. Имеем $r_n \rightarrow r_0$ в $C([0, 1])$. Следовательно, $x_{n_k}(t) = r_{n_k}(t)e^{i\phi_{n_k}(t)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} r_0(t)e^{i\phi_0(t)}$ для любого $t \in [0, 1]$. Поскольку предел единственный, мы получаем

$$\forall t \in [0, 1] \ x_0(t) = r_0(t)e^{i\phi_0(t)}.$$

Это доказывает включение

$$\overline{\Phi^{-1}(K)} \subseteq \{r(t)e^{i\phi(t)}, 0 \leq t \leq 1 \mid \phi \in K, \phi(0) = 0, r \in C([0, 1]), r(0) = 1\}.$$

Включение

$$\{r(t)e^{i\phi(t)}, 0 \leq t \leq 1 \mid \phi \in K, \phi(0) = 0, r \in C([0, 1]), r(0) = 1\} \subseteq \overline{\Phi^{-1}(K)}$$

очевидно. □

Лемма 4.1.2. Функция $J(\phi) = I(\overline{\Phi^{-1}(\phi)})$ полунепрерывна снизу на $C([0, 1])$.

Доказательство. Мы показываем, что для любого C множество $\{\phi \in C([0, 1]): J(\phi) \leq C\}$ замкнуто.

Пусть $\phi_n \in C([0, 1])$ таково, что $\phi_n \rightarrow \phi_0$, и $J(\phi_n) \leq C$ для всех $n \geq 1$. Покажем, что и $J(\phi_0) \leq C$. Выберем $x_n \in \overline{\Phi^{-1}(\phi_n)}$ так, что $I(x_n) \leq J(\phi_n) + \frac{1}{n}$. Поскольку $I(x_n) \leq C + 1$ для каждого n , и множества уровня I компактны, мы получаем, что все x_n лежат в одном компакте $K = \{x: I(x) \leq C + 1\}$. Следовательно, существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ с $x_{n_k} \rightarrow x_0 \in K$. Имеем $I(x_0) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} I(x_{n_k}) \leq C$.

Для каждого $n \geq 1$ имеем $x_n \in \overline{\Phi^{-1}(\phi_n)}$. Следовательно, по лемме 4.1.1, применённой к компактным множествам $\{\phi_n\}$ мы получаем $x_n(t) = \|x_n(t)\|e^{i\phi_n(t)}$ для всех n . Поскольку $x_{n_k} \rightarrow x_0$ и $\phi_{n_k} \rightarrow \phi_0$, имеем

$$\|x_{n_k}(t)\|e^{i\phi_{n_k}(t)} \rightarrow \|x_0(t)\|e^{i\phi_0(t)} (k \rightarrow \infty).$$

С другой стороны,

$$\|x_{n_k}(t)\|e^{i\phi_{n_k}(t)} = x_{n_k}(t) \rightarrow x_0(t) (k \rightarrow \infty).$$

Поскольку предел единственен, то $x_0(t) = \|x_0(t)\|e^{i\phi_0(t)}$ для всех $t \in [0, 1]$. Следовательно, $x_0 \in \overline{\Phi^{-1}(\phi_0)}$, и $J(\phi_0) \leq I(x_0) \leq C$. \square

Теперь докажем верхнюю оценку в слабом принципе больших уклонений для Φ_ε .

Утверждение 4.1.1. Для любого компактного множества $K \subseteq C([0, 1])$ выполнено

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln P(\Phi_\varepsilon \in K) \leq -J(K).$$

Доказательство. Из принципа больших уклонений для броуновского движения получаем:

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln P(\Phi_\varepsilon \in K) = \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln P(w_\varepsilon \in \Phi^{-1}(K)) \leq -I(\overline{\Phi^{-1}(K)}).$$

По лемме 4.1.1 имеем

$$\overline{\Phi^{-1}(K)} = \bigcup_{\phi \in K} \overline{\Phi^{-1}(\phi)}.$$

Следовательно, $I(\overline{\Phi^{-1}(K)}) = \inf_{\phi \in K} I(\overline{\Phi^{-1}(\phi)}) = \inf_{\phi \in K} J(\phi) = J(K)$. Итак, получаем

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln P(\Phi_\varepsilon \in K) \leq -I(\overline{\Phi^{-1}(K)}) = -J(K).$$

\square

Мы переходим к доказательству нижней оценки в принципе больших уклонений. Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 4.1.3. *Для каждого открытого множества $G \subseteq C([0, 1])$ имеем*

$$J(G) = I(\Phi^{-1}(G)).$$

Доказательство. Ясно, что $J(G) = \inf_{\phi \in G} I(\overline{\Phi^{-1}(\phi)}) \leq \inf_{\phi \in G} I(\Phi^{-1}(\phi)) = I(\Phi^{-1}(G))$.

Докажем выполнение противоположного неравенства, то есть

$$I(\Phi^{-1}(G)) \leq J(G) = I\left(\bigcup_{\phi \in G} \overline{\Phi^{-1}(\phi)}\right).$$

Выберем произвольное $x_0 \in \overline{\Phi^{-1}(\phi_0)}$ для некоторого $\phi_0 \in G$. Нам нужно показать, что $I(\Phi^{-1}(G)) \leq I(x_0)$.

Во-первых, рассмотрим случай, когда x_0 не проходит через начало координат:

$$\forall t \in [0, 1] \quad \|x_0(t)\| \neq 0.$$

Покажем, что в этом случае $x_0 \in \Phi^{-1}(G)$, и, следовательно, нужное нам неравенство выполнено. Действительно, по лемме 4.1.1, применённой к компактному множеству $\{\phi_0\}$, x_0 имеет вид $x_0(t) = \|x_0(t)\|e^{i\phi_0(t)}$. Поскольку x_0 не проходит через начало координат, получаем $\Phi(x_0) = \phi_0$. Следовательно, $x_0 \in \Phi^{-1}(\phi) \subseteq \Phi^{-1}(G)$.

Рассмотрим теперь случай, когда $x_0(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ для некоторого $t_0 \in [0, 1]$. Обозначим

$$\tau = \inf\{t \in [0, 1]: \|x_0(t)\| = 0\}, \tau_\delta = \inf\{t \in [0, 1]: \|x_0(t)\| = \delta\}, \delta \in (0, 1).$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$ с $B_\varepsilon(\phi_0) \subseteq G$. Выберем любую функцию $\psi \in B_{\varepsilon/2}(\phi_0)$ со свойством

$$\int_0^1 \psi'(s)^2 ds < +\infty.$$

Определим для всех $\delta > 0$ функции $x_\delta \in C([0, 1], \mathbb{R}^2)$ таким образом:

$$x_\delta(t) = \begin{cases} x_0(t), & 0 \leq t \leq \tau_\delta, \\ x_0(\tau_\delta), & \tau_\delta \leq t \leq \tau, \\ \delta e^{i(\psi(t) - \psi(\tau) + \phi_0(\tau_\delta))}, & t \geq \tau. \end{cases}$$

Легко видеть, что $x_\delta \in \Phi^{-1}(G)$ для всех достаточно малых δ , и

$$I(x_\delta) = \frac{1}{2} \int_0^{\tau_\delta} \|x'_0(s)\|^2 ds + \frac{\delta^2}{2} \int_\tau^1 \psi'(s)^2 ds.$$

Следовательно, поскольку $\int_0^1 \psi'(s)^2 ds < +\infty$, получаем $\lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^2 \int_\tau^1 \psi'(s)^2 ds = 0$.
Имеем также

$$I(x_0) \geq \frac{1}{2} \int_0^{\tau_\delta} \|x'_0(s)\|^2 ds$$

для всех $\delta > 0$. Следовательно, $I(\Phi^{-1}(G)) \leq \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} I(x_\delta) \leq I(x_0)$. □

Теперь мы готовы доказать нижнюю оценку.

Утверждение 4.1.2. *Для каждого открытого множества $G \subseteq C([0, 1])$ выполнено следующее соотношение:*

$$\underline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln P(\Phi_\varepsilon \in G) \geq -J(G).$$

Доказательство. Обозначим для каждого $a \in \mathbb{R}^2, x \in C([0, 1], \mathbb{R}^2)$

$$(T_a x)(t) = x(t) + a, t \in [0, 1].$$

Тогда $T_a x \in C([0, 1], \mathbb{R}^2)$. Положим для $A \subseteq C([0, 1], \mathbb{R}^2)$

$$T_a(A) = \{T_a x \mid x \in A\}, T(A) = \bigcup_{a \in \mathbb{R}^2} T_a(A).$$

Для каждого открытого $G \subseteq C([0, 1])$ множество $T(\Phi^{-1}(G))$ открыто в $C([0, 1], \mathbb{R}^2)$,
и

$$I(\Phi^{-1}(G)) = I(T(\Phi^{-1}(G))).$$

(Заметим, что $\Phi^{-1}(G)$ не является открытым в $C([0, 1], \mathbb{R}^2)$, поскольку $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ для каждого $x \in \Phi^{-1}(G)$). Следовательно, по принципу больших уклонений для винеровского процесса и по лемме 4.1.3:

$$\begin{aligned} \underline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln P(\Phi_\varepsilon \in G) &= \underline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln P(w_\varepsilon \in \Phi^{-1}(G)) = \\ &= \underline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln P(w_\varepsilon \in T(\Phi^{-1}(G))) \geq -I(T(\Phi^{-1}(G))) = -I(\Phi^{-1}(G)) = -J(G). \end{aligned}$$

□

Из утверждений 4.1.1 и 4.1.2 получаем теорему 4.1.1.

4.2. Принцип больших уклонений для цилиндрических множеств

В этом разделе мы покажем выполнение верхней оценки принципа больших уклонений для цилиндрических множеств в $C([0, 1])$. Как мы увидим в разделе 4.3, полный принцип больших уклонений не выполняется для (Φ_ε) .

Теорема 4.2.1. Пусть $B \subseteq \mathbb{R}^m$ — замкнутое множество, $0 < t_1 < \dots < t_m \leq 1$,

$$A = \{\phi \in C([0, 1]) : (\phi(t_1), \dots, \phi(t_m)) \in B\}.$$

Тогда выполнена следующая оценка:

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln P(\Phi_\varepsilon \in A) \leq -J(A).$$

Замечание 4.2.1. Нижняя оценка принципа больших уклонений для всех открытых множеств $G \subset C([0, 1])$ была получена в разделе 4.1.

Для доказательства нам понадобятся несколько лемм.

Лемма 4.2.1. Пусть $A \subseteq C([0, 1])$ — замкнутое множество, $x_0 \in \overline{\Phi^{-1}(A)}$. Если $\|x_0(t)\| > 0$ для любого $t \in [0, 1]$ (т.е. если x_0 не проходит через начало координат), то $x_0 \in \Phi^{-1}(A)$.

Доказательство. Выберем $x_n \in \Phi^{-1}(A)$ со свойством $x_n \rightarrow x_0$. Поскольку Φ непрерывно в точке x_0 , имеем

$$\Phi(x_n) \rightarrow \Phi(x_0).$$

Т.к. A замкнуто, получаем $\Phi(x_0) \in A$, и следовательно, $x_0 \in \Phi^{-1}(A)$. \square

Лемма 4.2.2. Пусть $A \subseteq C([0, 1])$, $x_0 \in \overline{\Phi^{-1}(A)}$. Пусть $\tau = \inf\{t \in [0, 1] : \|x_0(t)\| = 0\} \wedge 1$, $y_0(t) = x_0(t \wedge \tau)$. Тогда $y_0 \in \overline{\Phi^{-1}(A)}$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть лишь случай, когда x_0 проходит через начало координат. Выберем $x_n \in \Phi^{-1}(A)$ со свойством $x_n \rightarrow x_0$. Положим $\tau_\delta = \inf\{t : \|x_0(t)\| = \delta\}$ для $0 < \delta < 1$. Пусть

$$y_\delta^n(t) = \begin{cases} x_n(t), & t \leq \tau_\delta, \\ \frac{\|x_n(\tau_\delta)\|}{\|x_n(t)\|} x_n(t), & t \geq \tau_\delta. \end{cases}$$

Тогда $\Phi(y_\delta^n) = \Phi(x_n) \in A$, $y_{1/n}^n \rightarrow y_0$ ($n \rightarrow \infty$) в $C([0, 1], \mathbb{R}^2)$. Следовательно, $y_0 \in \overline{\Phi^{-1}(A)}$. \square

Лемма 4.2.3. Пусть $t_1 < t_2$ — действительные числа, $\phi: [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция, такая, что $\int_{t_1}^{t_2} \phi'(s)^2 ds < +\infty$, $h: [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}$ — положительная непрерывная функция, $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$ и $\{\beta_n\}_{n=1}^\infty$ две последовательности действительных чисел со свойством $\alpha_n \rightarrow 0$, $\beta_n \rightarrow 0$. Тогда существует последовательность функций $\psi_n \in C([t_1, t_2])$ со свойством $\int_{t_1}^{t_2} \psi'_n(s)^2 ds < +\infty$, удовлетворяющая следующим условиям:

- $\psi_n(t_1) = \phi(t_1) + \alpha_n$ для каждого n ;
- $\psi_n(t_2) = \phi(t_2) + \beta_n$ для каждого n ;
- $\int_{t_1}^{t_2} h(s) \psi'_n(s)^2 ds \rightarrow \int_{t_1}^{t_2} h(s) \phi'(s)^2 ds$.

Доказательство. Положим $l_n(t) = \alpha_n + \frac{\beta_n - \alpha_n}{t_2 - t_1}(t - t_1)$, $\psi_n(t) = \phi(t) + l_n(t)$. Имеем

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} h(s) \psi'_n(s)^2 ds - \int_{t_1}^{t_2} h(s) \phi'(s)^2 ds &= \int_{t_1}^{t_2} h(s) l'_n(s)^2 ds + 2 \int_{t_1}^{t_2} h(s) \phi'(s) l'_n(s) ds = \\ &= \left(\frac{\beta_n - \alpha_n}{t_2 - t_1} \right)^2 \int_{t_1}^{t_2} h(s) ds + 2 \left(\frac{\beta_n - \alpha_n}{t_2 - t_1} \right) \int_{t_1}^{t_2} h(s) \phi'(s) ds \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

□

Лемма 4.2.4. Пусть $B \subseteq \mathbb{R}^m$ — замкнутое множество, $0 < t_1 < \dots < t_m \leq 1$,

$$A = \{\phi \in C([0, 1]): \phi(0) = 0, (\phi(t_1), \dots, \phi(t_m)) \in B\}.$$

Тогда

$$I(\Phi^{-1}(A)) = I(\overline{\Phi^{-1}(A)}) = J(A).$$

Доказательство. Поскольку $I(\overline{\Phi^{-1}(A)}) \leq J(A) \leq I(\Phi^{-1}(A))$, нам нужно доказать лишь

$$I(\Phi^{-1}(A)) \leq I(\overline{\Phi^{-1}(A)}).$$

Выберем произвольное $x_0 \in \overline{\Phi^{-1}(A)}$. Мы покажем, что $I(\Phi^{-1}(A)) \leq I(x_0)$.

Без потери общности, мы полагаем $t_m = 1$ всюду в этом доказательстве. Рассмотрим сначала случай, когда x_0 не проходит через начало координат. По лемме 4.2.1, получаем $x_0 \in \Phi^{-1}(A)$, и следовательно $I(\Phi^{-1}(A)) \leq I(x_0)$.

Предположим теперь, что x_0 проходит через начало координат. Обозначим

$$\tau = \inf\{t \in [0, 1] : \|x(t)\| = 0\}.$$

По лемме 4.2.2, мы можем считать $x_0(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ для $t \geq \tau$. Положим $t_0 = 0$.

Пусть $k, 1 \leq k \leq m$ таковы, что $\tau \in (t_{k-1}, t_k]$. Тогда имеем

$$x_0(t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x_0(t_1) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, x_0(t_{k-1}) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x_0(t_k) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Выберем последовательность $x_n \rightarrow x_0$ с $x_n \in \Phi^{-1}(A)$ для каждого n . Обозначим $\phi_n = \Phi(x_n)$. Пусть $\phi(t)$ — угол обхода $x_0(t)$, определённый на $[0, \tau)$. Имеем $\phi_n(t_i) \rightarrow \phi(t_i)$, $n \rightarrow \infty$ для $i = 1, \dots, k-1$.

Фиксируем любое $\alpha > 1$. Выберем функции $\psi_{n,i}: [t_{i-1}, t_i] \rightarrow \mathbb{R}$ для $i = 1, \dots, k-1$ со свойствами

- $\psi_{n,i}(t_{i-1}) = \phi_n(t_{i-1})$;
- $\psi_{n,i}(t_i) = \phi_n(t_i)$;
- $\int_{t_{i-1}}^{t_i} \|x_0(s)\|^2 \psi'_{n,i}(s)^2 ds \rightarrow \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|x_0(s)\|^2 \phi'(s)^2 ds$ ($n \rightarrow \infty$).

Такие функции существуют в силу леммы 4.2.3.

Положим

$$\psi_n(t) = \begin{cases} \psi_{n,i}(t), & t_{i-1} \leq t \leq t_i, i = 1, \dots, k-1, \\ \phi_n(t_{k-1}), & t_{k-1} \leq t \leq t_{k-1} + \frac{t_k - t_{k-1}}{\alpha}, \\ \phi_n(t_i), & i = k, k+1, \dots, m, \\ \text{линейна на каждом замкнутом интервале } [t_{k-1} + \frac{t_k - t_{k-1}}{\alpha}, t_k], [t_k, t_{k+1}], \dots, \\ [t_{m-1}, t_m]. \end{cases}$$

Поскольку ψ_n кусочно линейна на $[t_{k-1} + \frac{t_k - t_{k-1}}{\alpha}, 1]$, мы можем выбрать $\delta_n > 0$ с

$$\delta_n^2 \int_{t_{k-1} + \frac{t_k - t_{k-1}}{\alpha}}^1 \psi'_n(s)^2 ds < \frac{1}{2^n}$$

и

$$\tau_n = \inf\{t : \|x_0(t)\| = \delta_n\} > t_{k-1}.$$

Пусть

$$\rho_n(t) = \begin{cases} \|x_0(t)\|, 0 \leq t \leq t_{k-1}, \\ \|x_0(t_{k-1} + \alpha(t - t_{k-1}))\|, 0 \leq t \leq t_{k-1} + \frac{\tau_n - t_{k-1}}{\alpha}, \\ \delta_n, t \geq t_{k-1} + \frac{\tau_n - t_{k-1}}{\alpha}. \end{cases}$$

Положим $y_n(t) = \rho_n(t)e^{i\psi_n(t)}$, $t \in [0, 1]$. Имеем

$$\begin{aligned} 2I(y_n) &= \sum_{i=1}^{k-1} \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{d}{ds} \|x_0(s)\| \right)^2 ds + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|x_0(s)\|^2 \psi'_{n,i}(s)^2 ds \right) + \\ &\quad + \alpha^2 \int_{t_{k-1}}^{\tau_n} \left(\frac{d}{ds} \|x_0(s)\| \right)^2 ds + \delta_n^2 \int_{t_{k-1} + \frac{t_k - t_{k-1}}{\alpha}}^1 \psi'_n(s)^2 ds \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{k-1} \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{d}{ds} \|x_0(s)\| \right)^2 ds + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|x_0(s)\|^2 \psi'_{n,i}(s)^2 ds \right) + \\ &\quad + \alpha^2 \int_{t_{k-1}}^1 \|x'_0(s)\|^2 ds + \frac{1}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{k-1} \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{d}{ds} \|x_0(s)\| \right)^2 ds + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|x_0(s)\|^2 \phi'(s)^2 ds \right) + \alpha^2 \int_{t_{k-1}}^1 \|x'_0(s)\|^2 ds \leq \\ &\leq \alpha^2 \int_0^1 \|x'_0(s)\|^2 ds = 2\alpha^2 I(x_0). \end{aligned}$$

Следовательно, получаем

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} I(y_n) \leq \alpha^2 I(x_0).$$

Поскольку $\Phi(y_n) \in A$ для каждого n , то $I(\Phi^{-1}(A)) \leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} I(y_n)$, и следовательно

$$I(\Phi^{-1}(A)) \leq \alpha^2 I(x_0).$$

Поскольку $\alpha > 1$ произвольно, получаем

$$I(\Phi^{-1}(A)) \leq I(x_0).$$

□

Теперь мы доказываем теорему 4.2.1.

Доказательство. Из принципа больших уклонений для броуновского движения получаем

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln P(\Phi_\varepsilon \in A) \leq -I(\overline{\Phi^{-1}(A)}).$$

По лемме 4.2.4 имеем $J(A) = I(\overline{\Phi^{-1}(A)})$. Следовательно,

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln P(\Phi_\varepsilon \in A) \leq -J(A).$$

□

4.3. Отсутствие полного принципа больших уклонений для угла обхода

Покажем, что принцип больших уклонений для семейства $(\Phi_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ не выполнен. Во-первых, покажем, что принцип больших уклонений с функцией скорости $J(\phi) = \inf_{x \in \overline{\Phi^{-1}(\phi)}} I(x)$, где

$$I(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_0^1 \|x'(s)\|^2 ds, & x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \infty, & x(0) \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

не выполнен.

Утверждение 4.3.1. *Существует такое замкнутое множество $A \subseteq C([0, 1])$, что выполнены следующие условия:*

- $\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln P(\Phi_\varepsilon \in A) \geq -\frac{1}{2}$;
- существует $C > \frac{1}{2}$, такое, что для любого $\phi \in A$

$$I(\overline{\Phi^{-1}(\phi)}) \geq C.$$

Доказательство утверждения основано на следующей лемме.

Лемма 4.3.1. *Для каждого $\alpha > \frac{\pi}{2}$, с вероятностью 1 выполнено следующее соотношение:*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln P(\Phi_\varepsilon(1) \geq \alpha) = -\frac{1}{2}.$$

Доказательство. Фиксируем некоторое $\alpha > \frac{\pi}{2}$. Мы должны доказать следующее:

$$-\frac{1}{2} \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln P(\Phi_\varepsilon(1) \geq \alpha) \leq \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln P(\Phi_\varepsilon(1) \geq \alpha) \leq -\frac{1}{2}.$$

Сначала проведём оценку сверху. Имеем

$$\begin{aligned} \left\{ x = \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{pmatrix} \in C([0, 1], \mathbb{R}^2) : x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \Phi(x)(1) \geq \alpha \right\} \subseteq \\ \subseteq \left\{ x : \Phi(x)(1) \geq \frac{\pi}{2} \right\} \subseteq \{x : \exists t \in [0, 1], x^{(1)}(t) \leq 0\}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln P(\Phi_\varepsilon(1) \geq \alpha) \leq \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln P(\exists t \in [0, 1] : w_\varepsilon^{(1)}(t) \leq 0) = -\frac{1}{2}.$$

Здесь $w = \begin{pmatrix} w^{(1)} \\ w^{(2)} \end{pmatrix}$ — двумерный винеровский процесс, выходящий из точки $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w_\varepsilon^{(1)}(t) = w^{(1)}(\varepsilon t)$, $t \in [0, 1]$. Теперь проведём оценку снизу. Для каждого $\delta \in (0, 1)$ обозначим $\beta_\delta = \frac{2\alpha}{\delta}$ и рассмотрим траекторию $\begin{pmatrix} x_\delta(t) \\ y_\delta(t) \end{pmatrix} \in C([0, 1], \mathbb{R}^2)$, определённую соотношениями

$$x_\delta(t) + iy_\delta(t) = z_\delta(t), z_\delta(t) = \begin{cases} 1 - t, & 0 \leq t \leq 1 - \delta; \\ \delta e^{i\beta_\delta(t - (1 - \delta))}, & 1 - \delta \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Легко видеть, что

$$I(z_\delta) = \frac{1}{2}(1 - \delta + \beta_\delta^2 \delta^3) = \frac{1}{2}(1 - \delta + 4\alpha^2 \delta) \rightarrow \frac{1}{2}(\delta \rightarrow 0).$$

Пусть

$$G = \left\{ x \in C([0, 1], \mathbb{R}^2) : x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \forall t \in [0, 1] \|x(t)\| > 0, \Phi(x)(1) > \alpha \right\}.$$

Тогда имеем $z_\delta \in G$, и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln P(\Phi_\varepsilon(1) \geq \alpha) \geq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln P(w_\varepsilon \in G) \geq -I(G) \geq -I(z_\delta).$$

Используя $I(z_\delta) \rightarrow \frac{1}{2}(\delta \rightarrow 0)$, получаем $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln P(\Phi_\varepsilon(1) \geq \alpha) \geq -\frac{1}{2}$. □

Теперь докажем утверждение 4.3.1.

Доказательство. Разделим наше доказательство на 3 части. В первой части мы проведём построение множества A . Во второй части мы покажем, что множество A замкнуто. В третьей части мы найдём такое $C > \frac{1}{2}$, что второе условие утверждения выполнено.

1. Пусть $a \in (0, \frac{\pi}{2})$ — некоторое положительное число, такое, что $\frac{\sin x}{x} > \frac{3}{4}$ for $0 < x < a$. Фиксируем возрастающую последовательность $\alpha_k \rightarrow \infty$ ($k \rightarrow \infty$), такую, что $\alpha_k > \frac{\pi}{2}$ для любого k , и убывающую последовательность $\varepsilon_k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$). Нам также потребуется убывающая последовательность $t_k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$), такая, что $0 < t_k < \frac{a^2}{2}$ для каждого k , которую мы построим позже. Пусть $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, где A_k определены как

$$A_k = \left\{ \phi \in C([0, 1]) : \phi(0) = 0, \phi(1) \geq \alpha_k, \sup_{t \in [t_k, t_{k-1}]} \frac{\phi(t)}{\sqrt{2t}} \geq 1 \right\}.$$

Теперь определим последовательность t_k . Выберем t_k по индукции следующим образом. Положим $t_0 = \frac{a^2}{4}$. Если для некоторого $k \geq 1$ t_{k-1} уже выбрано, выберем $n = n(k) \geq k$ так, что

$$\varepsilon_n \ln P(\Phi_{\varepsilon_n}(1) \geq \alpha_k) > -\frac{1}{2} - \frac{1}{2^k}.$$

Этот выбор возможен в силу леммы 4.3.1. Теперь найдём $t_k, 0 < t_k < t_{k-1}$, так, что

$$P(\Phi_{\varepsilon_n} \in A_k) > \frac{1}{2} P(\Phi_{\varepsilon_n}(1) \geq \alpha_k).$$

Это можно сделать, поскольку

$$\lim_{u \rightarrow 0} P \left(\sup_{t \in [u, t_{k-1}]} \frac{\Phi_{\varepsilon_n}(t)}{\sqrt{2t}} \geq 1 \right) = 1,$$

что легко следует из закона повторного логарифма.

Итак, мы предъявили алгоритм для построения множеств A_k . Теперь имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n(k)} \ln P(\Phi_{\varepsilon_{n(k)}} \in A) &\geq \varepsilon_{n(k)} \ln P(\Phi_{\varepsilon_{n(k)}} \in A_k) \geq \\ &\geq \varepsilon_{n(k)} \ln \left(\frac{1}{2} P(\Phi_{\varepsilon_{n(k)}}(1) \geq \alpha_k) \right) > -\varepsilon_{n(k)} \ln 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^k}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_{n(k)} \ln P(\Phi_{\varepsilon_{n(k)}} \in A) \geq -\frac{1}{2}$.

2. Мы знаем, что множество A замкнуто. Пусть последовательность $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ такова, что для любого n : $\phi_n \in A$, и $\phi_n \rightarrow \phi(n \rightarrow \infty)$. Покажем, что и $\phi \in A$. Поскольку $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, то для любого n существует число $k(n)$, такое, что $\phi_n \in A_{k(n)}$. Поскольку $\phi_n(1) \rightarrow \phi(1)(n \rightarrow \infty)$, то последовательность $\{\phi_n(1)\}$ ограничена, и множество $\{k(n)\}$ также ограничено. Следовательно, существует k_0 , такое, что $\phi_n \in A_{k_0}$ для бесконечно многих индексов n . Легко видеть, что все множества A_k замкнуты, и, следовательно, $\phi \in A_{k_0} \subseteq A$.

3. Теперь проверим выполнение второго условия нашего утверждения. Оценим $I(\overline{\Phi^{-1}(\phi)})$ для каждого $\phi \in A$. Выберем любое $z \in \Phi^{-1}(\phi)$.

Поскольку $\sup_{t \in [t_k, t_{k-1}]} \frac{\phi(t)}{\sqrt{2t}} \geq 1$ для некоторого k , существует $h \in [t_k, t_{k-1}]$, такое, что $\phi(h) \geq \sqrt{2h}$. Следовательно, траектория z должна пересекать прямую l , определённую уравнением $y = x \tan \sqrt{2h}$, до момента h , и то же свойство, очевидно, выполнено для каждого $z \in \overline{\Phi^{-1}(\phi)}$. Поскольку расстояние от точки $z(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ до прямой l равно $\sin \sqrt{2h}$, и $h < \frac{a^2}{2}$, то

$$I(x) \geq \frac{1}{2} \int_0^h |x'(u)|^2 du \geq \frac{(\sin \sqrt{2h})^2}{2h} = \left(\frac{\sin \sqrt{2h}}{\sqrt{2h}} \right)^2 > \left(\frac{3}{4} \right)^2 = \frac{9}{16}.$$

Следовательно, для любого $\phi \in A$ $I(\overline{\Phi^{-1}(\phi)}) \geq \frac{9}{16}$. Следовательно, второе условие утверждения выполнено с $C = \frac{9}{16}$.

□

Теперь покажем, что семейство случайных элементов (Φ_ε) не может удовлетворять принципу больших уклонений ни с какой функцией скорости \tilde{I} . Для этого нам понадобятся несколько лемм. Обозначим

$$I(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 \|x'(u)\|^2 du.$$

Лемма 4.3.2. *Для любого $\phi \in C([0, 1])$ выполнено следующее равенство:*

$$\bigcap_{\delta > 0} \Phi^{-1}(B_\delta(\phi)) = \Phi^{-1}(\phi).$$

Доказательство. Если $x \in \Phi^{-1}(B_\delta(\phi))$ для всех $\delta > 0$, то $\Phi(x) \in B_\delta(\phi)$ для любого $\delta > 0$. Это означает, что $\Phi(x) = \phi$. \square

Лемма 4.3.3. Для каждого $\phi \in C([0, 1])$, такого, что $\phi(0) = 0$, выполнено следующее:

$$\bigcap_{\delta > 0} \overline{\Phi^{-1}(B_\delta(\phi))} = \overline{\Phi^{-1}(\phi)}.$$

Доказательство. Пусть $x_0 \in \bigcap_{\delta > 0} \overline{\Phi^{-1}(B_\delta(\phi))}$. Тогда для любого $\delta > 0$ существует $x_\delta \in \Phi^{-1}(B_\delta(\phi))$ такое, что $\|x_\delta - x_0\| < \delta$. Следовательно, $x_\delta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} x_0$.

Выберем теперь y_δ таким образом, что $y_\delta \in \Phi^{-1}(\phi)$ и $y_\delta \rightarrow x_0$ ($\delta \rightarrow 0$).

Пусть $x_\delta(t) = r_\delta(t)e^{i\phi_\delta(t)}$. Положим $y_\delta(t) = r_\delta(t)e^{i\phi(t)}$. Покажем, что $\|y_\delta - x_\delta\| \rightarrow 0$ ($\delta \rightarrow 0$). Для любого $t \in [0, 1]$:

$$\|y_\delta(t) - x_\delta(t)\| = r_\delta(t)|e^{i\phi(t)} - e^{i\phi_\delta(t)}| \leq r_\delta(t)|\phi(t) - \phi_\delta(t)|.$$

Следовательно, $\|y_\delta - x_\delta\| \leq |r_\delta| \cdot \|\phi - \phi_\delta\| \rightarrow 0$ ($\delta \rightarrow 0$). Теперь имеем $x_\delta \rightarrow x_0$, $\|y_\delta - x_\delta\| \rightarrow 0$. Следовательно, $y_\delta \rightarrow x_0$ ($\delta \rightarrow 0$). Поскольку $\Phi(y_\delta) = \phi$, то $y_\delta \in \Phi^{-1}(\phi)$. Поэтому $x_0 \in \overline{\Phi^{-1}(\phi)}$. \square

Лемма 4.3.4. Если $I(\overline{\Phi^{-1}(\phi)}) < +\infty$, то $I(\overline{\Phi^{-1}(B_\delta(\phi))}) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} I(\overline{\Phi^{-1}(\phi)})$.

Доказательство. Мы покажем, что для любой последовательности $\delta_n \rightarrow 0$, $\delta_n > 0$ выполнено следующее условие:

$$I(\overline{\Phi^{-1}(B_{\delta_n}(\phi))}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} I(\overline{\Phi^{-1}(\phi)}).$$

Поскольку $I(\overline{\Phi^{-1}(B_{\delta_n}(\phi))}) \leq I(\overline{\Phi^{-1}(\phi)})$, нам нужно показать лишь то, что для любого $\varepsilon > 0$ неравенство

$$I(\overline{\Phi^{-1}(B_{\delta_n}(\phi))}) \leq I(\overline{\Phi^{-1}(\phi)}) - 2\varepsilon$$

не может быть выполнено для всех n . Предположим, что, наоборот, для некоторого $\varepsilon > 0$ имеем для всех n :

$$I(\overline{\Phi^{-1}(B_{\delta_n}(\phi))}) \leq I(\overline{\Phi^{-1}(\phi)}) - 2\varepsilon.$$

Тогда для любого n мы можем найти $x_n \in \overline{\Phi^{-1}(B_{\delta_n}(\phi))}$ такое, что $I(x_n) \leq I(\overline{\Phi^{-1}(\phi)}) - \varepsilon$. Но $I(\overline{\Phi^{-1}(\phi)}) < +\infty$ по условию леммы. Следовательно, $I(x_n) \leq I(\overline{\Phi^{-1}(\phi)}) - \varepsilon < +\infty$ для всех n .

Множество $K = \{x : I(x) \leq I(\Phi^{-1}(\phi)) - \varepsilon\}$ компактно. Поэтому все x_n лежат в одном компакте K . Следовательно, существует сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ последовательности $\{x_n\}$. Пусть $x_{n_k} \rightarrow x_0$ ($k \rightarrow \infty$). Поскольку x_0 лежит в том же компакте K , то $I(x_0) \leq I(\Phi^{-1}(\phi)) - \varepsilon$. С другой стороны, $x_0 \in \bigcap_k \overline{\Phi^{-1}(B_{\delta_{n_k}}(\phi))} = \overline{\Phi^{-1}(\phi)}$.

Поэтому $x_0 \in \overline{\Phi^{-1}(\phi)}$, и $I(x_0) \leq I(\overline{\Phi^{-1}(\phi)}) - \varepsilon$. Мы получили противоречие. \square

Лемма 4.3.5. Если $I(\overline{\Phi^{-1}(\phi)}) = +\infty$, то $I(\overline{\Phi^{-1}(B_{\delta}(\phi))}) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} +\infty$.

Доказательство. Ясно, что $I(\overline{\Phi^{-1}(B_{\delta}(\phi))})$ не возрастает при $\delta \rightarrow 0$. Следовательно, существует конечный или бесконечный предел $\lim_{\delta \rightarrow 0} I(\overline{\Phi^{-1}(B_{\delta}(\phi))})$.

Предположим, что этот предел конечен:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} I(\overline{\Phi^{-1}(B_{\delta}(\phi))}) = A < +\infty.$$

Следовательно, для любого достаточно малого $\delta > 0$ существует $x_{\delta} \in \overline{\Phi^{-1}(B_{\delta}(\phi))}$ с $I(x_{\delta}) \leq A + 1$. Поскольку множества уровня I компактны, получаем, как и в доказательстве леммы 4.3.4, что $x_{\delta_n} \rightarrow x_0$ для некоторой последовательности $\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\delta_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Следовательно, имеем

- $I(x_0) \leq A + 1$;
- $x_0 \in \bigcap_n \overline{\Phi^{-1}(B_{\delta_n}(\phi))} = \overline{\Phi^{-1}(\phi)}$.

Поэтому $I(\overline{\Phi^{-1}(\phi)}) \leq I(x_0) \leq A + 1 < +\infty$. Мы пришли к противоречию. \square

Лемма 4.3.6. Для любого $\phi \in C([0, 1])$ имеет место следующая сходимость:

$$I(\overline{\Phi^{-1}(B_{\delta}(\phi))}) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} I(\overline{\Phi^{-1}(\phi)}).$$

Эта лемма является следствием лемм 4.3.4 и 4.3.5.

Лемма 4.3.7. Если для случайных элементов (Φ_{ε}) выполнен принцип больших отклонений с функцией скорости \tilde{I} , то для любого $\phi \in C([0, 1])$, $\phi(0) = 0$ выполнено следующее неравенство:

$$\tilde{I}(\phi) \geq I(\overline{\Phi^{-1}(\phi)}) = \inf_{x \in \overline{\Phi^{-1}(\phi)}} \frac{1}{2} \int_0^1 \|x'(u)\|^2 du.$$

Доказательство. Из предполагаемого принципа больших уклонений для (Φ_ε) и принципа больших уклонений для (w_ε) получаем:

$$\begin{aligned} -\tilde{I}(B_\delta(\phi)) &\leq \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln P(\Phi_\varepsilon \in B_\delta(\phi)) = \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln P(\Phi(w_\varepsilon) \in B_\delta(\phi)) = \\ &= \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln P(w_\varepsilon \in \Phi^{-1}(B_\delta(\phi))) \leq -I(\overline{\Phi^{-1}(B_\delta(\phi))}). \end{aligned}$$

Отсюда получаем: $I(\overline{\Phi^{-1}(B_\delta(\phi))}) \leq \tilde{I}(B_\delta(\phi))$. Но $\tilde{I}(B_\delta(\phi)) \leq \tilde{I}(\phi)$. Таким образом, имеем $I(\overline{\Phi^{-1}(B_\delta(\phi))}) \leq \tilde{I}(\phi)$.

Устремляя $\delta \rightarrow 0$ и используя лемму 4.3.6, получаем $I(\overline{\Phi^{-1}(\phi)}) \leq \tilde{I}(\phi)$. \square

Теорема 4.3.1. *Принцип больших уклонений для семейства (Φ_ε) не выполняется ни с какой функцией скорости \tilde{I} .*

Доказательство. Рассмотрим множество $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ из утверждения 4.3.1. По лемме 4.3.7, получаем

$$\forall \phi \in A \quad \tilde{I}(\phi) \geq I(\overline{\Phi^{-1}(\phi)}).$$

с другой стороны, из утверждения 4.3.1 следует, что для любого $\phi \in A$

$$I(\overline{\Phi^{-1}(\phi)}) \geq C.$$

Поэтому $\tilde{I}(A) \geq C > \frac{1}{2}$. Но это противоречит неравенству

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln P(\Phi_\varepsilon \in A) \geq -\frac{1}{2}.$$

\square

Выводы к главе 4

1. Получен слабый принцип больших уклонений для угла обхода двумерного броуновского движения вокруг начала координат на малых интервалах времени.
2. Установлено отсутствие полного принципа больших уклонений для угла обхода двумерного броуновского движения вокруг начала координат.
3. Показано выполнение оценок принципа больших уклонений на классе цилиндрических множеств.

Выводы

Диссертационная работа посвящена изучению геометрических характеристик случайных полей и стохастических потоков:

- исследовано распределение индекса случайного двумерного векторного поля относительно кривой;
- для изотропного двумерного гауссовского случайного поля найдены явные выражения для первого и второго моментов индекса поля относительно кривой;
- для инвариантов Васильева кос, образованных непрерывными семимартингалами относительно общей фильтрации, найдено выражение в виде кратных интегралов Стратоновича, аналогичное интегральному представлению Концевича этих инвариантов для гладких кос;
- найдено совместное асимптотическое распределение взаимных углов обхода частиц в броуновском изотропном стохастическом потоке при $t \rightarrow \infty$;
- получен слабый принцип больших уклонений для угла обхода двумерного броуновского движения вокруг начала координат при $t \rightarrow 0$; показано, что оценки принципа больших уклонений выполняются также на классе цилиндрических множеств;
- установлено отсутствие полного принципа больших уклонений для угла обхода двумерного броуновского движения.

Литература

- [1] Палис Ж., Димелу В. Геометрическая теория динамических систем. — М.: Мир, 1986. — 301 с.
- [2] Арнольд В., Хесин Б. Топологические методы в гидродинамике.— М.: МЦНМО, 2007. — 392 с.
- [3] Kunita H. Stochastic flows and stochastic differential equations. — Cambridge: Univ. Press, 1997. — 346 p.
- [4] Spitzer F. Interaction of Markov processes // Advances in mathematics. — 1970. — **5**. — Pp. 246–290.
- [5] Добрушин Р. Л. Марковские процессы с большим числом локально взаимодействующих компонент— существование предельного процесса и его эргодичность // Пробл. передачи информ. — 1971. — **7**, 2. — С. 70—87.
- [6] Harris T. E. Brownian motions on the homeomorphisms of the plane // Ann. Probab. — 1981. — **9**, 2. — Pp. 232–254.
- [7] Колмогоров А. Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // Докл. АН СССР. — 1941. — **30**, 4. — С. 299–303.
- [8] Falkovich G., Gawędzki K., Vergassola M. Particles and fields in fluid turbulence // Rev. Mod. Phys. — 2001. — **73**, 4. — Pp. 913–975.
- [9] Le Jan Y. On isotropic Brownian motions // Z. Wahrsch. verw. Gebiete. — 1985. — **70**, 1. — Pp. 609–620.
- [10] Baxendale P. H. The Lyapunov spectrum of a stochastic flow of diffeomorphisms // Lyapunov Exponents, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1186. — Springer, New York, 1986. — Pp. 322–337.

- [11] Zirbel C. L. Mean occupation times of continuous one-dimensional Markov processes // Stochastic Processes and Their Applications. — 1997. — **69**, 2. — Pp. 161–178.
- [12] Zirbel C. L., Woyczyński W. A. Rotation of particles in polarized Brownian flows // Stochastics and Dynamics. — 2002. — **2**, 1. — Pp. 109–129.
- [13] Зельдович Я. Б., Молчанов С. А., Рuzмайкиh А. А., Соколов Д. Д. Перемежаемость в случайной среде // УФН. — 1987. — 152. — С. 3–32.
- [14] Spitzer F. Some theorems concerning 2-dimensional Brownian motion // Trans. Amer. Math. Soc. — 1958. — **87**, 1. — Pp. 187–197.
- [15] Manabe S. Stochastic intersection number and homological behaviors of diffusion processes on Riemannian manifolds // Osaka journal of mathematics. — 1982. — **19**, 2. — Pp. 429–457.
- [16] Franchi J. Asymptotic singular homology of a complete hyperbolic 3-manifold of finite volume // Proc. London Math. Soc. — 1999. — **79**, 2. — Pp. 451–480.
- [17] Franchi J. Asymptotic windings over the trefoil knot. // Rev. Mat. Iberoamericana. — 2005. — **21**, 3. — Pp. 729–770.
- [18] Zirbel C. L. Translation and dispersion of mass by isotropic Brownian flows// Stochastic Processes and Their Applications. — 1997. — **70**, 1. — Pp. 1–29.
- [19] Zirbel C. L., Cinlar E. Mass transport by Brownian flows // Stochastic Models in Geosystems (series The IMA Volumes in Mathematics and its Applications). — 1997. — **85**. — Pp. 459–492.
- [20] Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика: В 2-х ч. — М.: Наука, 1967. — Часть 2. — 720 с.
- [21] Kesten H., Papanicolaou G. A limit theorem for turbulent diffusion // Commun. Math. Phys. — 1979. — Vol. 65, no. 2. — Pp. 97–128.
- [22] Cranston M., Le Jan Y. Geometric evolution under isotropic stochastic flow // Electronic Journal of Probability. — 1998. — **3**. — Pp. 1–36.
- [23] Dimitroff G., Scheutzow M. Dispersion of volume under the action of isotropic Brownian flows // Stochastic Processes and their Applications. — 2009. — **119**, 2. — Pp. 588–601.

- [24] Stevens I. G., Stevens D. P. Passive tracers in a general circulation model of the Southern Ocean // *Ann. Geophysicae* 17. — 1999. — **17**, 7. — Pp. 971–982.
- [25] Thiffeault J.-L. Braids of entangled particle trajectories // *Chaos*. — 2010. — 20, 017516.
- [26] Darling R. W. R. Constructing nonhomeomorphic stochastic flows // *Memoirs of the American Mathematical Society*. — 1987. — **70**, 376. — 97 p.
- [27] Arratia R. A. Coalescing Brownian motions on the line, Ph.D. Thesis, University of Wisconsin, Madison, 1979.
- [28] Dorogovtsev A. A. One version of the Clark representation theorem for Arratia flow // *Theory of Stochastic Processes*. — 2005. — **11(27)**, 3–4. — Pp. 63–70.
- [29] Dorogovtsev A. A., Ostapenko O. V. Large deviations for flows of interacting Brownian motions // *Stochastics and Dynamics*. — 2010. — **10**, 3. — Pp. 315–339. <https://arxiv.org/abs/0907.3207v1>
- [30] Dorogovtsev A. A., Gnedin A. V., Vovchanskii M. B. Iterated logarithm law for sizes of clusters in Arratia flow // *Theory of Stochastic Processes*. — 2012. — **18**, 2. — Pp. 1–7.
- [31] Конаровський В. В. Система дифузійних частинок із склеюванням змінної маси // *Укр. мат. журн.* — 2010. — **62**, 1. — С. 90–103.
- [32] Harris T. E. Coalescing and noncoalescing stochastic flows in \mathbb{R}^1 // *Stochastic Processes and their Applications*. — 1984. — **17**, 2. — Pp. 187–210.
- [33] Dorogovtsev A. A. One Brownian stochastic flow // *Theory of Stochastic Processes*. — 2004. — **10(26)**, 3–4. — Pp. 21–25.
- [34] Маловичко Т. В. О сходимости решений стохастических дифференциальных уравнений к потоку Аппатя // *Укр. мат. журн.* — 2008. — **60**, 11. — С. 1529–1538.
- [35] Dorogovtsev A. A., Fomichov V. V. The rate of weak convergence for n-point motions of Harris flows // *Dynamic Systems & Applications*. — 2016. — Vol. 25.

- [36] Nishchenko I. I. Discrete time approximation of coalescing stochastic flows on the real line // Theory of Stochastic Processes. — 2011. — **17(33)**, 1. — Pp. 70–78.
- [37] Glinyanaya E. V. Asymptotics of disordering in the discrete approximation of an Arratia flow // Theory of Stochastic Processes. — 2012. — **18 (34)**, 2. — Pp. 8–14.
- [38] Pilipenko A. Yu. Flows generated by stochastic equations with reflection // Random Oper. and Stoch. Equ. — 2004. — **12**, 4. — Pp. 389–396.
- [39] Pilipenko A. Yu. Functional central limit theorem for flows generated by stochastic equations with reflection // Nonlinear Oscillations. — 2006. — **9**, 1. — Pp. 85–97.
- [40] Pilipenko A. Yu. An introduction to stochastic differential equations with reflection. — Potsdam: Universitätsverlag, 2014. — 75 p.
- [41] Dorogovtsev A. A., Kotelenetz P. Smooth stationary solutions of quasilinear stochastic partial differential equations: 1. Finite Mass. — Preprint No. 97-145 Dept. of Mathematics CWRU, Cleveland: Ohio, 1997. — 19 p.
- [42] Kotelenetz P. A class of quasilinear stochastic partial differential equations of McKean-Vlasov type with mass conservation // Probab. Theory Related Fields. — 1995. — **102**, 2. — Pp. 159–188.
- [43] Dorogovtsev A. A. Stochastic flows with interaction and measure-valued processes // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. — 2003. — **2003**, 63. — Pp. 3963–3977.
- [44] Дороговцев А. А. Мерозначные процессы и стохастические потоки. — К.: Ин-т математики НАН Украины, 2007. — 290 с.
- [45] Маловичко Т. В. Теорема Гирсанова для стохастических потоков со взаимодействием // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, 3. — С. 384–390.
- [46] Adler R. J., Taylor J. E. Random fields and geometry. — New York: Springer, 2007. — 448 p.
- [47] Berger M. A. Topological invariants in braid theory // Lett. Math. Phys. — 2001. — **55**, 3. — P. 181–192.

- [48] Красносельский М. А., Перов А. И., Поволоцкий А. И., Забрейко П. П. Векторные поля на плоскости. — М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. — 245 с.
- [49] Оксендаль Б. Стохастические дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 2003. — 408 с.
- [50] Dorogovtsev A. A, Vovchanskii M. B. Arratia flow with drift and the Trotter formula for Brownian web // <https://arxiv.org/abs/1310.7431>
- [51] Арфкен Г. Математические методы в физике. — М.: Атомиздат. —1970.
- [52] Vassiliev V. A. Cohomology of knot spaces // Theory of singularities and its applications, Adv. Soviet Math. — 1990. — **1**. — Pp. 23–69.
- [53] Bar-Natan D. Vassiliev homotopy string link invariants. — J. Knot Theory and Ramifications. — 1995.— **4**, 1. — Pp. 13–32.
- [54] Kontsevich M. Vassiliev’s knot invariants // Adv. Soviet Math.— 1993. — **16**, 2. — Pp. 137–150.
- [55] Munkres J. R. Topology: a first course. — Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1974. — 414 p.
- [56] Kallenberg O. Foundations of modern probability. — Springer, 2002. — 638 p.
- [57] Yor M. Etude asymptotique des nombres de tours de plusieurs mouvements browniens complexes correles // Progress in Probability. — 1991. — **28**. — P. 441–455.
- [58] Yaglom A. M. Correlation theory of stationary and related random functions. — Springer, New York, 1987. — 258 p.
- [59] Zirbel C. L. Stochastic flows — dispersion of a mass distribution and Lagrangian observations of a random field. — PhD Thesis, Princeton University. — 1993.
- [60] Mörters P., Peres Y. Brownian motion. — Cambridge: Univ. Press, 2010. — 416 p.
- [61] Pitman J., Yor M. Asymptotic laws of planar brownian motion // Ann. Probab. — 1986. — **14**, 3. — Pp. 733–779.

- [62] Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. — М., 1963. — Часть 2. — 516 с.
- [63] Ито К., Маккин Г. Диффузионные процессы и их траектории. — М.: "Мир", 1968. — 396 с.
- [64] Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L. Regular variation. — Cambridge: Univ. Press, 1987. — 494 p.
- [65] Shi Z. Liminf behaviours of the windings and Levy's stochastic areas of planar Brownian motion // Séminaire de probabilités de Strasbourg. — 1994. — **28**(1994). — Pp. 122–137.
- [66] Bertoin J., Werner W. Asymptotic windings of planar Brownian motion revisited via the Ornstein-Uhlenbeck process // Séminaire de probabilités de Strasbourg, **28** (1994), 138–152.
- [67] Dembo A., Zeitouni O. Large deviations techniques and applications. — Springer, 2010. — 396 p.
- [68] Feng J., Kurtz T. J. Large deviations for stochastic processes. — American Mathematical Society, 2006. — 410 p.