# Функциональный анализ — задачи

## 1 Рудин — Глава 1

1.
2.
3.

## 2 Рудин — Глава 2. Полнота

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9. $X, Y, Z$ банаховы, $B\colon X \times Y \to Z$ непрерывное билинейное. Докажем:

$$\|B(x,y)\| \leq M\|x\|\|y\|.$$

Во-первых, заметим, что для каждого $x \in X$ линейное отображение $l_x\colon Y \to Z$, определяемое $l_x(y) = B(x,y)$, непрерывно. Действительно, оно непрерывно по совокупности переменных, значит, и по одной $y$.

Во-вторых, отображение $F_B$ из $X$ в банахово пространство непрерывных линейных операторов из $Y$ в $Z$, заданное формулой

$$F_B(x) = l_x,$$

ограничено. Действительно, покажем, что существует $M$ такое, что если $\|x\| \le 1$, то

$$\|F_B(x)\| = \|l_x\| \le M.$$

Из непрерывности $B$ следует, что найдутся $\delta_1, \delta_2 > 0$ такие, что $\|B(x,y)\| < 1$, как только $\|x\| < \delta_1, \|y\| < \delta_2$. Отсюда, ясно, вытекает, что $\|B(x,y)\| \le C$ при $\|x\| \le 1, \|y\| \le 1$. Рассмотрим семейство операторов $l_x$ при всех $x$, таких, что $\|x\| \le 1$. Значения этих операторов в каждой точке $y \in Y$ ограничены:

$$\|l_x(y)\| = \|B(x,y)\| \le C\|y\|.$$

А значит, по теореме Банаха-Штейнгауза нормы всех этих операторов ограничены одним числом:

$$\|l_x\| \le M, \|x\| \le 1.$$

А это и означает, что оператор $F_B$ ограничен: $\|F_B\| \le M$.

Значит, имеем

$$\|l_x\| \le M\|x\|, \|B(x,y)\| = \|l_x(y)\| \le \|l_x\|\|y\| \le M\|x\|\|y\|.$$

10.

# 3 Халмош

1.

2. Координатное доказательство леммы Рисса. Пусть $l$ — непрерывный линейный функционал на $H$, его норма $k$. Пусть $c_i = l(e_i)$. Тогда

$$l(a_1e_1 + \ldots + a_ne_n) = a_1c_1 + \ldots + a_nc_n.$$

Нам надо показать, что $\sum\limits_k |c_k|^2 < \infty$. Для этого оценим

$$|c_1|^2 + \ldots + |c_n|^2.$$

Из неравенства $\|l\| \le K$ следует

$$|a_1c_1 + \ldots + a_nc_n| \le K\sqrt{|a_1|^2 + \ldots + |a_n|^2}.$$

Это что-то похожее на неравенство Коши-Буняковского, и левая часть максимальна при $a_i = c_i^*$. Подставляя $a_i = c_i^*$, получаем

$$\sqrt{|c_1|^2 + \ldots + |c_n|^2} \le K.$$

Вот и всё.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

9.

10.

11.

12.

13.

14.

15.

16.

17.

18.

19.

20. Элементарное доказательство теоремы Банаха-Штейнгауза.

Пусть есть совокупность линейных непрерывных операторов $A_\alpha$ на гильбертовом пространстве $H$, которая не ограничена по норме, но ограничена на каждом векторе. Построим вектор, на котором она неограничена, и тем самым получим противоречие. Построим по индукции последовательности $A_n \in \{A_\alpha\}$, $f_n \in H$ с такими свойствами:

(a) $\|f_n\| = m_n = \frac{1}{2^n(1+\max(\|A_1\|,\ldots,\|A_{n-1}\|))}$;

(b) $\|A_n f_n\| \geq 2^n + \|A_n(f_1 + \ldots + f_{n-1})\|$.
Такой $A_n$ существует, ибо множество $\{\|A_\alpha(f_1 + \ldots + f_{n-1})\|\}$ ограничено, и, таким образом, правая часть

$$2^n + \|A_\alpha(f_1 + \ldots + f_{n-1})\|$$

ограничена (при фиксированном $n$), а левая часть

$$\sup_{\|f\|=m_n} \|A_\alpha f\|$$

неограничена в силу неограниченности норм $A_\alpha$.

Имеем:

(a) Ряд $\sum\limits_n f_n$ сходится, ибо $\|f_n\| \leq \frac{1}{2^n}$. Пусть $f = \sum\limits_n f_n$.

(b) При $k > 0$ имеем

$$\|A_n f_{n+k}\| \leq \|A_n\|\|f_{n+k}\| \leq \frac{1}{2^{n+k}}.$$

Здесь мы воспользовались неравенством

$$\|f_{n+k}\| = m_{n+k} \leq \frac{1}{2^{n+k}\|A_n\|},$$

случай $A_n = 0$ нужно рассмотреть отдельно, но и в нём всё получается. Отсюда, учитывая непрерывность оператора $A_n$,

$$\|A_n \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|A_n f_k\| \leq \frac{1}{2^n}.$$

Итак,

$$\|A_n(f_1 + \ldots + f_n)\| \geq 2^n, \|A_n \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k\| \leq \frac{1}{2^n}.$$

В итоге,
$$\|A_n f\| \geq 2^n - \frac{1}{2^n}.$$
Итак, множество $\{A_n f\}_{n=1}^{\infty}$ неограничено.

21.

22.

23.

24.

25.

26.

27.

28.

29.

30.

31.

32.

33.

34.

35.

36.

37.

38.

39.

40.

41. Нужно элементарное доказательство теоремы Банаха об обратном операторе. $A\colon H \to K$ взаимно однозначный. Надо показать, что он ограничен снизу.

    Я пробовал сначала построить последовательность векторов в $H$, которая по норме стремится к бесконечности, но образы которой сходятся (в $K$). Конечно, такую последовательность построить можно, но это ничего не даёт.

    Идея нашлась, когда я стал плясать не от оператора $A$, а от оператора $A^{-1}$. Всё сразу сводится к применению теоремы Банаха-Штейнгауза. Мы выбираем ортонормированный базис $e_1, e_2, \dots$ в $H$ и определяем операторы $B_n\colon K \to H$ таким образом: $B_n$ переводит вектор $z \in K$ в проекцию вектора $A^{-1}z$ на линейную оболочку $e_1, \dots, e_n$. Так мы получаем совокупность линейных операторов $\{B_n\}$, которая ограничена на каждом векторе. Значит, она и вообще ограничена:

$$\|B_n z\| \le C\|z\| \ \ \forall n \forall z \in K.$$

    Тогда в силу сходимости $B_n z \to A^{-1}z, n \to \infty$ получаем

$$\|A^{-1}z\| \le C\|z\| \ \ \forall z \in K.$$

    Но это рассуждение неполное. Мы не показали, что $B_n$ являются ограниченными операторами.На самом деле, это непонятно как показывать.

# 4 Пирковский

1. Задача о функциональном исчислении.

    1.1. Условие $M \supset \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ необходимо для разрешимости задачи функционального исчисления с $A = F(M)$. Допустим, $\lambda_k \notin M$. Нам нужно показать, что не существует гомоморфизма из алгебры всех функций на $M$ в алгебру операторов, который переводит многочлены куда надо. Допустим, такой гомоморфизм $\gamma_A$ существует. Имеем

$$\gamma_A(\lambda_k - t)\gamma_A\left(\frac{1}{\lambda_k - t}\right) = \gamma_A(1) = 1_E,$$

$$(\lambda_k - A)\gamma_A\left(\frac{1}{\lambda_k - t}\right) = 1_E.$$

    Но оператор $\lambda_k - A$ необратим. Противоречие.

1.2.

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Не существует оператора $S$ с $S^2 = T$. Допустим, $S^2 = T$. Тогда $\ker S$ — это не всё $\mathbb{C}^2$ и не 0 (в первом случае оператор $S$ был бы нулевым, во втором невырожденным, и оба этих случая противоречат равенству $S^2 = T$). Значит, $\ker S$ одномерно. Аналогично, $\operatorname{Im} S$ одномерно. Если $\ker S = \operatorname{Im} S$, то $S^2 = 0$, противоречие. Значит, $\ker S$ и $\operatorname{Im} S$ — это разные одномерные подпространства $\mathbb{C}^2$. Пусть $v \in \operatorname{Im} S$ — ненулевой вектор. Тогда $Sv$ — ненулевой вектор и $Sv \in \operatorname{Im} S$. Отсюда получаем

$$Sv = \alpha v, \alpha \neq 0.$$

Но тогда

$$S^4 v = \alpha^4 v \neq 0.$$

Однако $S^4 = T^2 = 0$. Противоречие.

Есть и другой, более алгебраический, способ это доказывать. У оператора $S$ есть характеристический многочлен $p$ второй степени:

$$p(S) = 0.$$

С другой стороны, $S^4 = T^2 = 0$. Поделив над полем $\mathbb{C}$ многочлен $t^4$ с остатком на $p(t)$, получим два случая

- В остатке получается некоторый ненулевой многочлен степени не выше первой. Тогда $S$ пропорционален единичному оператору. Это протииворечит равенству $S^2 = T$.
- Многочлен $t^4$ делится на $p(t)$ нацело. Это может быть, только если $p(t) = t^2$. Но тогда $S^2 = 0$, что противоречит равенству $S^2 = T$.

2) То же самое верно для любого $n \geq 2$: не существует $S$ со свойством $S^n = T$. Для этого можно доказать более общее утверждение: если $S\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ нильпотентен, $S^n = 0$, то $S^2 = 0$. Оба способа доказательства из предыдущего пункта тривиально обобщаются.

3) Для $A = C(\mathbb{R})$ задача построения функционального исчисления от оператора $T$ неразрешима. Действительно, иначе имеем

$$\gamma_A(\sqrt[3]{t})^3 = \gamma_A(t) = T.$$

Это противоречит пункту 2).