УДК №519.21
В.А. Кузнецов, Институт математики НАН Украины [1]

Взаимные углы обхода частиц в броуновских стохастических потоках со старшим показателем Ляпунова, равным нулю

Abstract

The investigation of geometrical properties of particles moving in stochastic flows leads to the study of their mutual winding angles. The same problem for independent Brownian motions was solved in the article [1]. We generalize these results for the case of isotropic Brownian stochastic flows with zero top Lyapunov exponent.

Анотація

Дослідження геометричних властивостей траєкторій частинок у стохастичних потоках призводить до вивчення їхніх взаємних кутів обходу. Для незалежних двовимірних броунівських рухів відповідна задача була розв'язана в работі [1]. Ми узагальнюємо ці результати на випадок ізотропних броунівських стохастичних потоків зі старшим показником Ляпунова, що дорівнює нулю.

Аннотация

Исследование геометрических свойств траекторий частиц в стохастических потоках приводит к изучению их взаимных углов обхода. Для независимых двумерных броуновских движений соответствующая задача была решена в работе [1]. Мы обобщаем эти результаты на случай изотропных броуновских стохастических потоков со старшим показателем Ляпунова, равным нулю.

[1] Институт математики НАН Украины, ул. Терещенковская, 3, г. Киев
V.A. Kuznetsov, Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine
e-mail: vasylkuz@mail.ru

1. Введение

В настоящей статье приводится решение задачи об асимптотическом распределении взаимных углов обхода частиц, движущихся в двумерном броуновском стохастическом потоке. Броуновские стохастические потоки возникли в работах [2], [3], [4] как модели турбулентного течения жидкости.

Определение 1 ([5]). *Стохастическим потоком гомеоморфизмов в пространстве* $\mathbb{R}^d$ *называется семейство случайных отображений* $F_{s,t} = F_{s,t}(\omega, \cdot) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d, 0 \le s \le t$, *обладающих на некотором множестве* Ω_0 *с* $P(\Omega_0) = 1$ *следующими свойствами:*

1. *поле* $\phi(s,t,x) = F_{s,t}(\omega, x)$ *является непрерывным по совокупности параметров* s, t, x;
2. *все отображения* $F_{s,t}$ *являются гомеоморфизмами* $\mathbb{R}^d$;
3. *при каждом* $s \ge 0$ *имеет место* $F_{ss} = Id$, *т.е. отображение* F_{ss} *является тождественным;*
4. *при любых* $s < t < u$ *выполняется соотношение* $F_{tu} \circ F_{st} = F_{su}$.

Определение 2 ([5]). *Броуновским стохастическим потоком в* $\mathbb{R}^d$ *называется стохастический поток гомеоморфизмов* $F_{s,t}$ *со следующим свойством: при любых* $0 \le s_1 \le s_2 \le \ldots \le s_n$ *отображения* $F_{s_1,s_2}, F_{s_2,s_3}, \ldots, F_{s_{n-1},s_n}$ *независимы.*

Согласно [5], броуновский стохастический поток $F_{s,t}$, удовлетворяющий определённым условиям регулярности, можно задать как решение стохастического дифференциального уравнения

$$dF_{s,t}(x) = U(F_{s,t}(x), dt), \quad F_{s,s}(x) = x, \tag{1}$$

где U — некоторый непрерывный гауссовский семимартингал с пространственным параметром. Уравнение (1) следует понимать как сокращённую запись соотношения

$$F_{s,t}(x) = x + \int_s^t U(F_{s,r}(x), dr),$$

а последний интеграл определяется как интеграл по семимартингалу с пространственным параметром [5].

Важный класс потоков составляют однородные изотропные броуновские потоки, возникшие при изучении наиболее простой модели турбулентности — изотропной турбулентности. В этой модели распределение поля скоростей жидкости инвариантно относительно параллельных переносов, поворотов и отражений.

Сначала введём, следуя работе [7], определение однородности и изотропности для случайных полей на $\mathbb{R}^d$. Случайное поле $V = V(z) \in \mathbb{R}^d, z \in \mathbb{R}^d$ называется однородным, если его распределение не меняется при параллельных переносах, т.е. для каждого вектора $h \in \mathbb{R}^d$ случайное поле $\tilde{V}(z) = V(z+h)$ имеет то же распределение, что и поле V. В случае гауссовского векторного поля V это условие можно переписать в виде условия на математическое ожидание и ковариационную матрицу компонент поля V. Так, если $a(x,y) = (a_{kl}(x,y))_{1 \le k,l \le d}$ — ковариационная матрица компонент однородного центрированного гауссовского поля V, т.е.

$$\mathbb{E} V_k(x) V_l(y) = a_{kl}(x,y),$$

то поле V является однородным в том и только в том случае, когда $a_{ij}(x,y)$ зависит лишь от разности $x-y$:

$$\mathbb{E}V_k(x)V_l(y) = a_{kl}(x,y) = b_{kl}(x-y), \ \ k,l = 1,\ldots,d.$$

Центрированное однородное случайное поле V называется изотропным, если для каждой ортогональной матрицы G размера $d \times d$ случайное поле $V'(z) = GV(G^{-1}z)$ имееет то же распределение, что и V. В случае гауссовского векторного поля V это условие можно переписать в виде условия на ковариационную матрицу компонент поля V. Так, если $b(z) = (b_{kl}(z))_{k,l=1,\ldots,d}$, где

$$\mathbb{E}V_k(x)V_l(y) = b_{kl}(x-y),$$

то условие изотропности V эквивалентно соотношению

$$Gb(G^{-1}z)G^{-1} = b(z) \tag{2}$$

для всех ортогональных матриц G.

Определения однородности и изотропности можно дать и для броуновских стохастических потоков.

Определение 3. *Однородным броуновским стохастическим потоком называется стохастический поток, который задаётся уравнением (1), где U — центрированное гауссовское случайное поле, удовлетворяющее соотношению*

$$\mathbb{E}U_k(x,t)U_l(y,s) = b_{kl}(x-y)\min\{t,s\}, k,l = 1,\ldots,d.$$

Здесь $x,y \in \mathbb{R}^d$, $t \in [0,+\infty)$, $b(z) = (b_{kl}(z), 1 \le k,l \le d)$ — некоторая матричнозначная функция.

Определение 4. *Однородный броуновский поток называется изотропным, если соответствующая матричнозначная функция $b = b(z)$ удовлетворяет соотношению (2) для каждого $z \in \mathbb{R}^d$ и каждой ортогональной матрицы G.*

Замечание 1. *Заметим, что это условие эквивалентно существованию однородного изотропного поля $V = V(z)$, для которого $b_{kl}(z) = cov(V_k(x), V_l(x+z))$ при всех $x,z \in \mathbb{R}^d$.*

Условие изотропности накладывает ограничения на вид матричнозначной функции $b(z)$. Полное описание ковариационных функций компонент изотропных случайных полей было получено в работе А.М. Яглома [6]. Мы приведём результат для случая двумерного броуновского потока ($d=2$), следуя работе [7]. В этом случае вид матрицы b описывается следующим утверждением.

Утверждение 1 ([7])**.** *Если матричнозначная функция $b = (b_{kl}(z), 1 \le k,l \le 2)$ является ковариационной матрицей компонент некоторого однородного изотропного случайного поля f, то она имеет вид*

$$b_{kl}(z) = \delta_{kl}b_N(\|z\|) + \frac{z^k z^l}{\|z\|^2}(b_L(\|z\|) - b_N(\|z\|)).$$

Здесь $b_L, b_N \colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ — некоторые функции, которые можно представить в виде

$$b_L(r) = \int\limits_0^\infty J_1'(r\alpha)\Phi_P(d\alpha) + \int\limits_0^\infty \frac{J_1(r\alpha)}{r\alpha}\Phi_S(d\alpha), \tag{3}$$

$$b_N(r) = \int\limits_0^\infty \frac{J_1(r\alpha)}{r\alpha}\Phi_P(d\alpha) + \int\limits_0^\infty J_1'(r\alpha)\Phi_S(d\alpha), \tag{4}$$

для некоторых конечных мер Φ_P, Φ_S на $[0, +\infty)$; J_1 — функция Бесселя первого рода.

При определённых дополнительных предположениях функции b_L и b_N являются достаточно гладкими. В этом случае, согласно результатам [5], поток $F_{s,t}$ является потоком диффеоморфизмов. Это даёт возможность говорить о показателях Ляпунова λ_1, λ_2 ($\lambda_1 > \lambda_2$) потока F. Эти показатели, как было показано в работе [8], выражаются через функции b_L, b_N.

Так, имеет место следующий результат.

Утверждение 2 ([7]). *Пусть $U(x,t), x \in \mathbb{R}^2, t \geq 0$ — гауссовское векторное поле со значениями в $\mathbb{R}^2$, задающее однородный изотропный броуновский поток F. Предположим, что меры Φ_P, Φ_S в представлениях (3), (4) из утверждения 1 имеют конечный четвёртый момент. Тогда функции b_L, b_N четырежды непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют следующим асимптотическим соотношениям:*

$$b_L(r) = b_0 - \frac{1}{2}\beta_L r^2 + O(r^4), r \to 0, \tag{5}$$

$$b_N(r) = b_0 - \frac{1}{2}\beta_N r^2 + O(r^4), r \to 0, \tag{6}$$

где $b_L(0) = b_N(0) = b_0$, и

$$\beta_L = \frac{3}{8}\int\limits_0^\infty \alpha^2\Phi_P(d\alpha) + \frac{1}{8}\int\limits_0^\infty \alpha^2\Phi_S(d\alpha),$$

$$\beta_N = \frac{1}{8}\int\limits_0^\infty \alpha^2\Phi_P(d\alpha) + \frac{3}{8}\int\limits_0^\infty \alpha^2\Phi_S(d\alpha).$$

При этом показатели Ляпунова равны

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(\beta_N - \beta_L), \lambda_2 = -\beta_L.$$

Показатели Ляпунова определяют асимптотическое поведение расстояния между частицами в потоке. Так, имеет место следующие результаты, полученные в работах [3], [9].

Теорема 1. *Для двумерного одногодного изотропного броуновского стохастического потока имеют место следующие варианты асимптотического поведения $R_{ab}(t) = \|F_t(a) - F_t(b)\|$ расстояния между частицами, вышедшими из двух произвольных различных точек плоскости a и b, в зависимости от максимального показателя Ляпунова λ_1:*

1. *Если $\lambda_1 < 0$, то $R_{ab}(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ почти наверное.*

2. *Если $\lambda_1 \geq 0$, то $R_{ab}(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty$ по вероятности, и процесс R_{ab} является нуль-возвратным диффузионным процессом.*

Замечание 2. *Мы обозначаем* $F_t(x) = F_{0,t}(x)$.

Заметим, что изучение траекторий частиц, движущихся под действием потока жидкости, может быть использовано для анализа свойств самого потока. Этот подход применяется в работе [10]. Поэтому представляет интерес описание различных геометрических характеристик системы частиц, движущихся под воздействием стохастического потока. Одной из таких характеристик являются взаимные углы обхода частиц друг вокруг друга. Мы приводим решение задачи об асимптотическом распределении взаимных углов обхода частиц в броуновском стохастическом потоке. Точная формулировка полученного результата приводится в разделе **??**. Для независимых броуновских движений аналогичная задача была решена в статье [1], где был получен следующий результат.

Теорема 2 ([1])**.** *Пусть* $w_1, \ldots w_n$ *— независимые двумерные стандартные броуновские движения, выходящие из попарно различных точек плоскости. Тогда для углов обхода* $\Phi_{kl}(t)$ *траектории броуновского движения* w_k *вокруг броуновского движения* w_l *справедливо асимптотическое соотношение* $(\frac{2}{\ln t}\Phi_{kl}(t), 1 \le k < l \le n) \xrightarrow[t\to\infty]{d} (\xi_{kl}, 1 \le k < l \le n)$. *Здесь* $\xi_{kl}, 1 \le k < l \le n$ *— независимые в совокупности случайные величины, имеющие распределение Коши с параметром 1.*

Замечание 3. *Угол обхода непрерывной двумерной траектории* $X(t) = (X_1(t), X_2(t)), t \ge 0$ *вокруг точки* 0 *определяется как* $\Phi(t) - \Phi(0)$, *где* $\Phi = \Phi(t)$ *— непрерывная функция, которая в каждый момент времени* t *является одной из версий аргумента комплексного числа* $X_1(t) + iX_2(t)$, *т.е. при всех* t

$$\Phi(t) \in Arg(X_1(t) + iX_2(t)).$$

Такая функция существует и однозначно определена, если при $t \ge 0 \quad X_1(t) + iX_2(t) \ne 0$.

Угол обхода $\Phi(t)$ *траектории* $X(s), 0 \le s \le t$ *вокруг* $Y(s), 0 \le s \le t$ *определяется как угол обхода траектории* $Z(s) = Y(s) - X(s)$ *вокруг точки* 0. *Он определён, если траектории* X *и* Y *не пересекаются, т.е. при всех* $s \in [0,t]$ $X(s) \ne Y(s)$. *Траектории независимых двумерных винеровских процессов не пересекаются с вероятностью* 1, *поэтому углы обхода траекторий друг вокруг друга определены почти наверное.*

В настоящей работе показано, что то же самое предельное соотношение выполнено для траекторий частиц в броуновском стохастическом потоке, в котором функции b_L и b_N совпадают: $b_L \equiv b_N$. Как и в рассмотренном в работе [1] случае независимых броуновских движений, доказательство использует оценку на рост совместной характеристики углов обхода частиц $< \Phi_{ab}, \Phi_{ac} >_t$. Но если в случае независимых броуновских движений эта оценка может быть проведена за счёт явного нахождения математического ожидания $\mathbb{E} < \Phi_{ab}, \Phi_{ac} >_t$, то в нашем случае изучение асимптотического поведения $< \Phi_{ab}, \Phi_{ac} >_t$ гораздо более сложно. Основная сложность состоит в том, что движения различных частиц в потоке теперь не являются независимыми. Вместо использования понятия независимости приходится проводить рассуждения, основанные на понятии ортогональности мартингалов.

Замечание 4. *Естественно ожидать, что полученный нами результат выполнен в более общем случае броуновского потока со старшим показателем Ляпунова, равным нулю. Однако, рассмотрение этого случая технически гораздо более сложно и требует дальнейшего исследования.*

2. Асимптотика инвариантов Васильева высших порядков

Исследовав предельное распределение углов обхода в броуновских стохастических потоках, естественно задаться вопросом о распределении инвариантов Васильева порядка 2 и выше. Инварианты Васильева представляются в виде сумм стохастических интегралов, Мы начнём с рассмотрения более простых примеров исследования предельного распределения стохастических интегралов.

Пусть $Z_t, t \geq 1$ — двумерное броуновское движение, выходящее из точки $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$Z(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Введём, следуя [?], процесс X_t с помощью экспоненциальной замены времени для Z_t:

$$X(t) = e^{-t/2} Z(e^t), t \geq 0.$$

Тогда $X(t)$ — двумерный процесс Орнштейна-Уленбека.
Пусть $R(t) = |X(t)|, H(t) = \int\limits_0^t \frac{ds}{R_s^2}$.

Можно показать, что конечномерные распределения процесса $\frac{H(tT)}{T^2}$ сходятся при $T \to \infty$ к конечномерным распределениям процесса S, где

$$S(t) = \int\limits_0^{\sigma(t)} \mathbb{1}_{w_s \leq 0} ds, t \geq 0,$$

w — одномерное броуновское движение с $w(0) = 0$,
l_t — локальное время w в нуле,
$\sigma(t) = \inf\{s > 0 : l_s > t\}$.

Утверждение 3. *Пусть* $L(t) = \int\limits_0^t H_1(u) dH_2(u)$. *Тогда*

$$\frac{L(t)}{t^2} \xrightarrow[t \to \infty]{d} \int\limits_0^1 S_1(u) dS_2(u).$$

Доказательство. Процессы H_1, H_2 — возрастающие с вероятностью 1. Для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\frac{1}{t^4} \sum_{k=0}^{n-1} H_1\left(\frac{k}{n}t\right) \left(H_2\left(\frac{k+1}{n}t\right) - H_2\left(\frac{k}{n}t\right)\right) \leq \frac{1}{t^4} \int\limits_0^t H_1(u) dH_2(u) \leq$$

$$\leq \frac{1}{t^4} \sum_{k=0}^{n-1} H_1\left(\frac{k+1}{n}t\right) \left(H_2\left(\frac{k+1}{n}t\right) - H_2\left(\frac{k}{n}t\right)\right).$$

Заметим, что в силу сходимости конечномерных распределений процессов H_1, H_2, при фиксированном n имеем

$$\frac{1}{t^4}\sum_{k=0}^{n-1} H_1\left(\frac{k}{n}t\right)\left(H_2\left(\frac{k+1}{n}t\right) - H_2\left(\frac{k}{n}t\right)\right) \xrightarrow[t\to\infty]{d} \sum_{k=0}^{n-1} S_1\left(\frac{k}{n}\right)\left(S_2\left(\frac{k+1}{n}\right) - S_2\left(\frac{k}{n}\right)\right).$$

С другой стороны,

$$\frac{1}{t^4}\sum_{k=0}^{n-1} H_1\left(\frac{k+1}{n}t\right)\left(H_2\left(\frac{k+1}{n}t\right) - H_2\left(\frac{k}{n}t\right)\right) -$$
$$- \frac{1}{t^4}\sum_{k=0}^{n-1} H_1\left(\frac{k}{n}t\right)\left(H_2\left(\frac{k+1}{n}t\right) - H_2\left(\frac{k}{n}t\right)\right) \xrightarrow[t\to\infty]{d}$$
$$\xrightarrow[t\to\infty]{d} \sum_{k=0}^{n-1}\left(S_1\left(\frac{k+1}{n}\right) - S_1\left(\frac{k}{n}\right)\right)\left(S_2\left(\frac{k+1}{n}\right) - S_2\left(\frac{k}{n}\right)\right).$$

Заметим, что

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(S_1\left(\frac{k+1}{n}\right) - S_1\left(\frac{k}{n}\right)\right)\left(S_2\left(\frac{k+1}{n}\right) - S_2\left(\frac{k}{n}\right)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0.$$

Действительно, □

Утверждение 4. *Имеет место асимптотическое соотношение*

$$\frac{1}{T}\int_0^T \alpha_{12}(s)ds \xrightarrow[T\to\infty]{d}$$

Доказательство. Сначала покажем, что $\frac{1}{T}\int_0^T \alpha_{12}(s)ds$ имеет предел по распределению. Рассмотрим разность

$$\frac{1}{T^2}\int_0^T \alpha_{12}(s)ds - \frac{1}{T^2}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}T}^{\frac{k+1}{n}T} \frac{T}{n}\alpha_{12}(kT/n) = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}T}^{\frac{k+1}{n}T} \left(\alpha_{12}(s) - \alpha_{12}(kT/n)\right)ds \leq$$
$$\leq \frac{1}{Tn}\sum_{k=0}^{n-1} \max_{s\in[kT/n,(k+1)T/n]} |\alpha_{12}(s) - \alpha_{12}(kT/n)|.$$

Вспомним, что $\alpha_{12}(s) = \theta_{12}(e^s)$. Имеем

$$< \theta_{12} >_t = 2\int_0^t \frac{ds}{|Z_{12}(s)|^2}.$$

Отсюда получаем

$$< \alpha_{12} > (t) =< \theta_{12} > (e^t) = 2\int\limits_0^t \frac{ds}{R_{12}(s)^2} = H_{12}(t).$$

Итак, имеем

$$\alpha_{12}(t) = \beta_{12}(H_{12}(t))$$

для некоторого броуновского движения β_{12}, не зависящего от процесса R_{12}. Поэтому

$$\frac{1}{Tn}\sum_{k=0}^{n-1} \max_{s\in[kT/n,(k+1)T/n]} |\alpha_{12}(s) - \alpha_{12}(kT/n)| \xrightarrow[T\to\infty]{d}$$

$$\xrightarrow[T\to\infty]{d} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \max_{s\in[S(k/n),S((k+1)/n)]} |\beta(s) - \beta(S(k/n))|.$$

□

Лемма 1. *Пусть набор случайных величин $\xi(T), T > 0$ и случайная величина η таковы, что имеются случайные величины $\eta_n(T), \gamma_n(T)(T > 0), \gamma_n, \eta_n$ такие, что*

- $\forall T\, |\xi(T) - \eta_n(T)| \leq \gamma_n(T)$;
- $\forall n\, \gamma_n(T) \xrightarrow[T\to\infty]{d} \gamma_n$;
- $\gamma_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} 0$;
- $\forall n\, \eta_n(T) \xrightarrow[T\to\infty]{d} \eta_n$.

Тогда $\xi(T)$ имеет предел по распределению при $T \to \infty$:

$$\xi(T) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \xi_0.$$

Более того, при этом $\eta_n \xrightarrow[T\to\infty]{d} \xi_0$.

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Поскольку $\gamma_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} 0$, то для непрерывной ограниченной функции $f(x) = \frac{|x|}{1+|x|}$ имеем $\mathbb{E}f(\gamma_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}f(0)$, или $\mathbb{E}\frac{|\gamma_n|}{1+|\gamma_n|} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Следовательно, можно выбрать N так, что при $n \geq N$

$$\mathbb{E}\frac{|\gamma_n|}{1+|\gamma_n|} \leq \varepsilon.$$

Пусть ρ обозначает расстояние Вассерштейна нулевого порядка, т.е. для случайных величин ξ, η

$$\rho(\xi,\eta) = \inf_{\xi' \overset{d}{=} \xi, \eta' \overset{d}{=} \eta} \mathbb{E}\frac{|\xi' - \eta'|}{1+|\xi' - \eta'|}.$$

Как известно, расстояние Вассерштейна метризует сходимость по распределению. Следовательно, при любом n

$$\rho(\gamma_n(T), \gamma_n) \xrightarrow[T\to\infty]{} 0.$$

Отсюда следует, что при достаточно больших $T \geq T_0(n)$ имеет место $\rho(\gamma_n(T), \gamma_n) \leq \varepsilon$, и при $n \geq N, T \geq T_0(n)$:

$$\mathbb{E}\frac{|\gamma_n(T)|}{1+|\gamma_n(T)|} = \rho(\gamma_n(T), 0) \leq \rho(\gamma_n(T), \gamma_n) + \rho(\gamma_n, 0) \leq \rho(\gamma_n, 0) + \varepsilon = \mathbb{E}\frac{|\gamma_n|}{1+|\gamma_n|} + \varepsilon \leq 2\varepsilon.$$

Для каждого $n \geq N$ выберем $T_1(n)$ так, чтобы при $T \geq T_1(n)$ выполнялись следующие условия:

- $\mathbb{E}\frac{|\gamma_n(T)|}{1+|\gamma_n(T)|} \leq 2\varepsilon$;
- $\rho(\eta_n(T), \eta_n) \leq \varepsilon$.

Имеем тогда при $n \geq N$, $T \geq T_1(n)$, учитывая неравенство $|\xi(T) - \eta_n(T)| \leq \gamma_n(T)$:

$$\rho(\xi(T), \eta_n(T)) \leq \mathbb{E}\frac{|\xi(T) - \eta_n(T)|}{1+|\xi(T) - \eta_n(T)|} \leq \mathbb{E}\frac{|\gamma_n(T)|}{1+|\gamma_n(T)|} \leq 2\varepsilon.$$

Далее, имеем при $n \geq N$, $T \geq T_1(n)$

$$\rho(\xi(T), \eta_n) \leq \rho(\xi(T), \eta_n(T)) + \rho(\eta_n(T), \eta_n) \leq 2\varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

Отсюда следует, что для любых $t_1, t_2 \geq T_1(N)$ имеет место

$$\rho(\xi(t_1), \xi(t_2)) \leq \rho(\xi(t_1), \eta_N) + \rho(\xi(t_2), \eta_N) \leq 6\varepsilon.$$

Следовательно, в силу произвольности выбора ε, $\{\xi(T)\}$ фундаментальна в метрике ρ и имеет предел:

$$\xi(T) \xrightarrow[T\to\infty]{d} \xi_0.$$

Осталось показать, что $\eta_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} \xi_0$. Выберем T_2 так, что при $T \geq T_2$:

$$\rho(\xi(T), \xi_0) \leq \varepsilon.$$

Имеем тогда при $n \geq N, T \geq \max\{T_1(n), T_2\}$:

$$\rho(\xi_0, \eta_n) \leq \rho(\xi_0, \xi(T)) + \rho(\xi(T), \eta_n) \leq \varepsilon + 3\varepsilon = 4\varepsilon.$$

Отсюда следует сходимость $\rho(\eta_n, \xi_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, и доказательство окончено. $\square$

Список литературы

[1] *Marc Yor.* Etude asymptotique des nombres de tours de plusieurs mouvements browniens complexes correles//Progress in Probability. — 1991. — **28**. — P. 441–455.

[2] *Монин А. С., Яглом И. М.* Статистическая гидромеханика: В 2-х ч. — М.: Наука, 1967. — Часть 2. — 720 с.

[3] *Le Jan Y.* On isotropic Brownian motions// Z. Wahrsch. verw. Gebiete. — 1985. — **70**, No 1. — P.609–620.

[4] *Kesten H., Papanicolaou G.* A limit theorem for turbulent diffusion// Commun. Math. Phys. — 1979. — **65**, No 2. — P.97–128.

[5] *Kunita H.* Stochastic Flows and Stochastic Differential Equations. — Cambridge: Univ. Press, 1997. — 346 p.

[6] *Yaglom A.M.* Correlation Theory of Stationary and Related Random Functions. — Springer, New York, 1987. — 258 p.

[7] *Craig L. Zirbel and Wojbor A. Woyczyński.* Rotation of particles in polarized Brownian flows// Stochastics and Dynamics. — 2002. — **2**, No 1. — P.109–129.

[8] *Peter H. Baxendale.* The Lyapunov spectrum of a stochastic flow of diffeomorphisms// Lyapunov Exponents, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1186. — Springer, New York, 1986. — P. 322–337.

[9] *Craig L. Zirbel and Wojbor A. Woyczyński.* Mean occupation times of continuous one-dimensional Markov processes// Stochastic Processes and Their Applications. — 1997. — **69**, No 2. — P.161–178.

[10] *Jean-Luc Thiffeault.* Braids of entangled particle trajectories//Chaos. — 2010. — **20**, No 1.

[11] *Craig L. Zirbel.* Stochastic flows — dispersion of a mass distribution and Lagrangian observations of a random field. — PhD Thesis, Princeton University. — 1993.

[12] *Kallenberg O.* Foundations of Modern Probability. — Springer, 2002. — 638 p.

[13] *Jim Pitman, Marc Yor.* Asymptotic Laws of Planar Brownian Motion//Ann. Probab. — 1986. — **14**, No 3. — P. 733–779.

[14] *Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж. Н.* Курс современного анализа. — М., 1963. — Часть 2. — 516 с.

[15] *Daniel Revuz, Mare Yor.* Continuous Martingales and Brownian Motion. — Springer-Verlag Berlin Heidelberg, — 1991. — 535 pp.

[16] *Peter Mörters, Yuval Peres.* Brownian Motion. — Cambridge Univ. Press, 2010. — 416 pp.

[17] *Ито К., Маккин Г.* Диффузионные процессы и их траектории. —М.:"Мир, 1968. — 396 с.

[18] *Craig L. Zirbel and Wojbor A. Woyczyński.* Translation and dispersion of mass by isotropic Brownian flows// Stochastic Processes and Their Applications. — 1997. — **70**, No 1. — P. 1–29.

[19] *Bingham, N.H., Goldie, C.M., Teugels, J.L.* Regular Variation. — Cambridge University Press, 1987. — 494 pp.