

Функциональный анализ — задачи

1 Рудин — Глава 1

- 1.
- 2.
- 3.

2 Рудин — Глава 2. Полнота

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.
- 5.
- 6.
- 7.
- 8.

9. X, Y, Z банаховы, $B: X \times Y \rightarrow Z$ непрерывное билинейное. Докажем:

$$\|B(x, y)\| \leq M\|x\|\|y\|.$$

Во-первых, заметим, что для каждого $x \in X$ линейное отображение $l_x: Y \rightarrow Z$, определяемое $l_x(y) = B(x, y)$, непрерывно. Действительно, оно непрерывно по совокупности переменных, значит, и по одной y .

Во-вторых, отображение F_B из X в банахово пространство непрерывных линейных операторов из Y в Z , заданное формулой

$$F_B(x) = l_x,$$

ограничено. Действительно, покажем, что существует M такое, что если $\|x\| \leq 1$, то

$$\|F_B(x)\| = \|l_x\| \leq M.$$

Из непрерывности B следует, что найдутся $\delta_1, \delta_2 > 0$ такие, что $\|B(x, y)\| < 1$, как только $\|x\| < \delta_1, \|y\| < \delta_2$. Отсюда, ясно, вытекает, что $\|B(x, y)\| \leq C$ при $\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1$. Рассмотрим семейство операторов l_x при всех x , таких, что $\|x\| \leq 1$. Значения этих операторов в каждой точке $y \in Y$ ограничены:

$$\|l_x(y)\| = \|B(x, y)\| \leq C\|y\|.$$

А значит, по теореме Банаха-Штейнгауза нормы всех этих операторов ограничены одним числом:

$$\|l_x\| \leq M, \|x\| \leq 1.$$

А это и означает, что оператор F_B ограничен: $\|F_B\| \leq M$.

Значит, имеем

$$\|l_x\| \leq M\|x\|, \|B(x, y)\| = \|l_x(y)\| \leq \|l_x\|\|y\| \leq M\|x\|\|y\|.$$

10.

3 Халмош

1.

2. Координатное доказательство леммы Рисса. Пусть l — непрерывный линейный функционал на H , его норма k . Пусть $c_i = l(e_i)$. Тогда

$$l(a_1 e_1 + \dots + a_n e_n) = a_1 c_1 + \dots + a_n c_n.$$

Нам надо показать, что $\sum_k |c_k|^2 < \infty$. Для этого оценим

$$|c_1|^2 + \dots + |c_n|^2.$$

Из неравенства $\|l\| \leq K$ следует

$$|a_1c_1 + \dots + a_nc_n| \leq K\sqrt{|a_1|^2 + \dots + |a_n|^2}.$$

Это что-то похожее на неравенство Коши-Буняковского, и левая часть максимальна при $a_i = c_i^*$. Подставляя $a_i = c_i^*$, получаем

$$\sqrt{|c_1|^2 + \dots + |c_n|^2} \leq K.$$

Вот и всё.

- 3.
- 4.
- 5.
- 6.
- 7.
- 8.
- 9.
- 10.
- 11.
- 12.
- 13.
- 14.
- 15.
- 16.
- 17.
- 18.
- 19.

20. Элементарное доказательство теоремы Банаха-Штейнгауза.

Пусть есть совокупность линейных непрерывных операторов A_α на гильбертовом пространстве H , которая не ограничена по норме, но ограничена на каждом векторе. Построим вектор, на котором она неограничена, и тем самым получим противоречие. Построим по индукции последовательности $A_n \in \{A_\alpha\}$, $f_n \in H$ с такими свойствами:

$$(a) \|f_n\| = m_n = \frac{1}{2^n(1+\max(\|A_1\|, \dots, \|A_{n-1}\|))};$$

$$(b) \|A_n f_n\| \geq 2^n + \|A_n(f_1 + \dots + f_{n-1})\|.$$

Такой A_n существует, ибо множество $\{\|A_\alpha(f_1 + \dots + f_{n-1})\|\}$ ограничено, и, таким образом, правая часть

$$2^n + \|A_\alpha(f_1 + \dots + f_{n-1})\|$$

ограничена (при фиксированном n), а левая часть

$$\sup_{\|f\|=m_n} \|A_\alpha f\|$$

неограничена в силу неограниченности норм A_α .

Имеем:

$$(a) \text{ Ряд } \sum_n f_n \text{ сходится, ибо } \|f_n\| \leq \frac{1}{2^n}. \text{ Пусть } f = \sum_n f_n.$$

$$(b) \text{ При } k > 0 \text{ имеем}$$

$$\|A_n f_{n+k}\| \leq \|A_n\| \|f_{n+k}\| \leq \frac{1}{2^{n+k}}.$$

Здесь мы воспользовались неравенством

$$\|f_{n+k}\| = m_{n+k} \leq \frac{1}{2^{n+k}\|A_n\|},$$

случай $A_n = 0$ нужно рассмотреть отдельно, но и в нём всё получается. Отсюда, учитывая непрерывность оператора A_n ,

$$\|A_n \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|A_n f_k\| \leq \frac{1}{2^n}.$$

Итак,

$$\|A_n(f_1 + \dots + f_n)\| \geq 2^n, \|A_n \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k\| \leq \frac{1}{2^n}.$$

В итоге,

$$\|A_n f\| \geq 2^n - \frac{1}{2^n}.$$

Итак, множество $\{A_n f\}_{n=1}^\infty$ неограничено.

21.

22.

23.

24.

25.

26.

27.

28.

29.

30.

31.

32.

33.

34.

35.

36.

37.

38.

39.

40.

41. Нужно элементарное доказательство теоремы Банаха об обратном операторе. $A: H \rightarrow K$ взаимно однозначный. Надо показать, что он ограничен снизу.

Я пробовал сначала построить последовательность векторов в H , которая по норме стремится к бесконечности, но образы которой сходятся (в K). Конечно, такую последовательность построить можно, но это ничего не даёт.

Идея нашлась, когда я стал плясать не от оператора A , а от оператора A^{-1} . Всё сразу сводится к применению теоремы Банаха-Штейнгауза. Мы выбираем ортонормированный базис e_1, e_2, \dots в H и определяем операторы $B_n: K \rightarrow H$ таким образом: B_n переводит вектор $z \in K$ в проекцию вектора $A^{-1}z$ на линейную оболочку e_1, \dots, e_n . Так мы получаем совокупность линейных операторов $\{B_n\}$, которая ограничена на каждом векторе. Значит, она и вообще ограничена:

$$\|B_n z\| \leq C \|z\| \quad \forall n \forall z \in K.$$

Тогда в силу сходимости $B_n z \rightarrow A^{-1}z, n \rightarrow \infty$ получаем

$$\|A^{-1}z\| \leq C \|z\| \quad \forall z \in K.$$

Но это рассуждение неполное. Мы не показали, что B_n являются ограниченными операторами. На самом деле, это непонятно как показывать.

4 Пирковский

1. Задача о функциональном исчислении.

- 1.1. Условие $M \supset \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ необходимо для разрешимости задачи функционального исчисления с $A = F(M)$. Допустим, $\lambda_k \notin M$. Нам нужно показать, что не существует гомоморфизма из алгебры всех функций на M в алгебру операторов, который переводит многочлены куда надо. Допустим, такой гомоморфизм γ_A существует. Имеем

$$\gamma_A(\lambda_k - t) \gamma_A \left(\frac{1}{\lambda_k - t} \right) = \gamma_A(1) = 1_E,$$

$$(\lambda_k - A) \gamma_A \left(\frac{1}{\lambda_k - t} \right) = 1_E.$$

Но оператор $\lambda_k - A$ необратим. Противоречие.

1.2.

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Не существует оператора S с $S^2 = T$. Допустим, $S^2 = T$. Тогда $\ker S$ — это не всё \mathbb{C}^2 и не 0 (в первом случае оператор S был бы нулевым, во втором невырожденным, и оба этих случая противоречат равенству $S^2 = T$). Значит, $\ker S$ одномерно. Аналогично, $\operatorname{Im} S$ одномерно. Если $\ker S = \operatorname{Im} S$, то $S^2 = 0$, противоречие. Значит, $\ker S$ и $\operatorname{Im} S$ — это разные одномерные подпространства \mathbb{C}^2 . Пусть $v \in \operatorname{Im} S$ — ненулевой вектор. Тогда Sv — ненулевой вектор и $Sv \in \ker S$. Отсюда получаем

$$Sv = \alpha v, \alpha \neq 0.$$

Но тогда

$$S^4v = \alpha^4v \neq 0.$$

Однако $S^4 = T^2 = 0$. Противоречие.

Есть и другой, более алгебраический, способ это доказывать. У оператора S есть характеристический многочлен p второй степени:

$$p(S) = 0.$$

С другой стороны, $S^4 = T^2 = 0$. Поделив над полем \mathbb{C} многочлен t^4 с остатком на $p(t)$, получим два случая

- В остатке получается некоторый ненулевой многочлен степени не выше первой. Тогда S пропорционален единичному оператору. Это противоречит равенству $S^2 = T$.
- Многочлен t^4 делится на $p(t)$ нацело. Это может быть, только если $p(t) = t^2$. Но тогда $S^2 = 0$, что противоречит равенству $S^2 = T$.

2) То же самое верно для любого $n \geq 2$: не существует S со свойством $S^n = T$. Для этого можно доказать более общее утверждение: если $S: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ нильпотентен, $S^n = 0$, то $S^2 = 0$. Оба способа доказательства из предыдущего пункта тривиально обобщаются.

3) Для $A = C(\mathbb{R})$ задача построения функционального исчисления от оператора T неразрешима. Действительно, иначе имеем

$$\gamma_A(\sqrt[3]{t})^3 = \gamma_A(t) = T.$$

Это противоречит пункту 2).

1.3. 1) Для $f \in C^1(U)$ положим

$$\gamma_A(f) = f(0) + f'(0)T.$$

Имеем

$$\begin{aligned}\gamma_A(fg) &= f(0)g(0) + (f(0)g'(0) + f'(0)g(0))T = \\ &= (f(0) + f'(0)T)(g(0) + g'(0)T) = \gamma_A(f)\gamma_A(g)\end{aligned}$$

в силу $T^2 = 0$.

2) Перейдём в базис, в котором наш оператор T представляется в жордановой форме. Тогда в этом базисе $T = D + N$, где D диагональный, $N^n = 0$, и вдобавок D и N коммутируют. Положим для $f \in C^{n-1}(U)$

$$f(T) = f(D) + f'(D)N + \dots + \frac{f^{(n-1)}(D)}{(n-1)!}N^{n-1}.$$

Здесь $f^{(k)}(D)$ определяются как обычно для диагонального оператора. Легко проверить, что

$$(fg)(T) = f(T)g(T).$$

Вот и построили функциональное исчисление.

2. Спектр.

2.1. У обратимого элемента есть лишь один обратный. Допустим, у элемента a два обратных, b и c . Имеем

$$ab = ba = 1, ac = ca = 1.$$

Тогда

$$c = 1 \times c = (ba)c = b(ac) = b.$$

2.2. 1) a обратим слева. a_l^{-1} не обязательно единственно. Например, рассмотрим l_2 и алгебру всех ограниченных линейных операторов на нём. Пусть оператор a действует сдвигом:

$$a(x_0, x_1, x_2, \dots) = (0, x_0, x_1, x_2, \dots).$$

Тогда любой оператор $b_\alpha, \alpha \in \mathbb{C}$ вида

$$b_\alpha(x_0, x_1, x_2, \dots) = (\alpha x_0 + x_1, x_2, x_3, \dots)$$

является левым обратным для a :

$$b_\alpha a = 1.$$

2) Если a обратим слева и справа, то он обратим.

$$a_r^{-1} = (a_l^{-1}a)a_r^{-1} = a_l^{-1}(aa_r^{-1}) = a_l^{-1}.$$

Итак, $a_r^{-1} = a_l^{-1}$, и всё ясно.

3) Если A конечномерна и $a \in A$ обратим слева, то он обратим. Для любого элемента $b \in A$, bA — это линейное подпространство в A . Это подпространство совпадает с A тогда и только тогда, когда его размерность равна размерности A . Наш a обратим слева. Пусть h — левый обратный для a . Если размерность aA меньше размерности A , то размерность haA тем более не выше. Но этого быть не может, так как $haA = A$. Значит, $aA = A$. Итак, в виде ax можно представить любой элемент A , поскольку $aA = A$. Тогда существует $y \in A$, такое, что $ay = 1$. Значит, у a есть и правый обратный. По предыдущему пункту, a обратим.

4) Для произвольной алгебры A это неверно, пример тот же, что в пункте 1). Там оператор a имеет левый обратный, но правого обратного не имеет.