Математические мысли

1 Мысли по функциональному анализу

1. Какая категория у $C[0,1]$ в $L_2[0,1]$? По Рудину, можно сделать хитроумное доказательство, что первая. Рассмотрим функционалы на $L_2[0,1]$, вот такие:
$$F_n(f) = n \int\limits_0^{1/n} f(t)dt.$$
На любой $f \in C[0,1]$ эти функционалы ограничены, и
$$F_n(f) \to f(0), n \to \infty.$$
Но на функции $g(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{t}}$
$$F_n(g) \to \infty, n \to \infty.$$
Поэтому $C[0,1]$ не может иметь вторую категорию.

2. Кстати, вложение $C[0,1]$ в $L_2[0,1]$ компактно? Замыкание образа единичного шара — все функции с essential supremum модуля не более 1. А это множество компактно? Нет, там функции Радемахера образуют "плохое" множество попарно ортогональных единичной нормы, и поэтому компактности нет. Да можно и синусы взять, они тоже по модулю не больше единицы. Хорошо, значит, вложение $C[0,1]$ в $L_2[0,1]$ некомпактно. А как этот образ единичного шара представить в виде счётного объединения нигде не плотных? Да он же сам замкнут и не содержит внутренних точек! А можно представить его в виде счётного объединения компактов?

3. Тензорное произведение банаховых пространств (см. Кириллова-Гвишиани). Что за максимальная кросс-норма? А очень просто. Каждый тензор из тензорного произведения представляется разными способами в виде
$$\alpha_1 x_1 \otimes y_1 + \ldots + \alpha_n x_n \otimes y_n.$$
Из каждого такого представления мы получаем, что норма этого тензора не превосходит
$$|\alpha_1| p_1(x_1) p_2(y_1) + \ldots + |\alpha_n| p_1(x_n) p_2(y_n).$$
Инфинум таких оценок по всем таким представлениям и есть максимальная кросс-норма. Свойства нормы проверяются легко. Нетривиальная

часть — как доказать, что норма $x \otimes y$ равна $p_1(x)p_2(y)$? Вдруг она меньше? Пусть имеем представление

$$x \otimes y = x_1 \otimes y_1 + \ldots + x_n \otimes y_n.$$

Нам нужно доказать, что

$$p_1(x_1)p_2(y_1) + \ldots + p_1(x_n)p_2(y_n) \geq p_1(x)p_2(y).$$

Спасает Хан-Банах! Существует линейные функционалы l_1, l_2, такие, что

$$\forall u \in X p_1(u) \geq |l_1(u)|, \forall v \in Y p_2(v) \geq |l_2(v)|,$$

и

$$p_1(x) = l_1(x), p_2(y) = l_2(y).$$

Тогда

$$(l_1 \otimes l_2)(x_1 \otimes y_1 + \ldots + x_n \otimes y_n) = (l_1 \otimes l_2)(x \otimes y) = l_1(x)l_2(y) = p_1(x)p_2(y),$$

и

$$p_1(x_1)p_2(y_1) + \ldots + p_1(x_n)p_2(y_n) \geq |l_1(x_1)l_2(y_1)| + \ldots + |l_1(x_n)l_2(y_n)| \geq$$
$$\geq l_1(x_1)l_2(y_1) + \ldots + l_1(x_n)l_2(y_n) = l_1(x)l_2(y) = p_1(x)p_2(y).$$

Всё доказано.

4. А что за минимальная равномерная кросс-норма на алгебраическом тензорном произведении банаховых пространств?

$$p_0(x) = \sup_{f \in X', g \in Y'} \frac{|(f \otimes g)(x)|}{p_1'(f)p_2'(g)}.$$

Какова норма p_0' в сопряжённом пространстве?

2 Мысли по вероятности

1. Закон повторного логарифма для винеровского процесса. Давай докажем нижнюю оценку ЗПЛ для винеровского в нуле:

$$\limsup_{t \to 0} \frac{w(t)}{\sqrt{2t \ln \ln t^{-1}}} \geq 1.$$

Рассмотрим монотонно убывающую к нулю последовательность t_n. Тогда случайные величины

$$w(t_n) - \frac{t_n}{t_{n-1}} w(t_{n-1})$$

как легко видеть, независимы в совокупности. Можно применить лемму Бореля-Кантелли для событий

$$\left\{ w(t_n) - \frac{t_n}{t_{n-1}} w(t_{n-1}) > C\sqrt{2t_n \ln \ln t_n^{-1}} \right\}$$

где $C > 0$ — некоторая константа, выберем её потом. Ясно, что удобно положить $t_n = q^n$, где $0 < q < 1$. Случайная величина

$$w(t_n) - \frac{t_n}{t_{n-1}} w(t_{n-1} = w(t_n) - qw(t_{n-1})$$

имеет дисперсию $t_n - 2qt_n + q^2 t_{n-1} = t_n - qt_n = t_n(1-q)$. Поэтому её распределение есть $N(0, t_n(1-q)$. Имеем

$$\begin{aligned} P\left(w(t_n) - qw(t_{n-1}) > C\sqrt{2t_n \ln\ln t_n^{-1}}\right) = \\ = P(N(0, t_n(1-q)) > C\sqrt{2t_n \ln\ln t_n^{-1}}) = \\ = P(N(0,1) > A\sqrt{\ln\ln t_n^{-1}}) = \\ = P(N(0,1) > A\sqrt{\ln n + \ln\ln q^{-1}}), \end{aligned}$$

где $A = \frac{C\sqrt{2}}{\sqrt{1-q}}$. А эти вероятности можно оценить через известное неравенство

$$P(N(0,1) > y) > \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y^3}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}.$$

Легко видеть, что отсюда следует, что в нашем случае ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(N(0,1) > A\sqrt{\ln n + \ln\ln q^{-1}})$$

расходится при $A^2/2 < 1$, то есть при $A < \sqrt{2}$. Это соответствует $C < \sqrt{1-q}$. Итак, по лемме Бореля-Кантелли, при $C < \sqrt{1-q}$ с вероятностью 1 происходит бесконечно много событий

$$\left\{w(t_n) - qw(t_{n-1}) > C\sqrt{2t_n \ln\ln t_n^{-1}}\right\}.$$

Теперь надо отсюда вытащить оценку на $w(t_n)$. Тут, наверное, надо использовать верхнюю оценку для ЗПЛ в нуле (ясно, что она проще доказывается — там достаточно простой леммы Бореля-Кателли, без независимости). А именно, при фиксированном $\varepsilon > 0$ с вероятностью 1 с некоторого места ($n > n_0$)

$$w(t_{n-1}) > -(1+\varepsilon)\sqrt{2t_{n-1} \ln\ln t_{n-1}^{-1}}.$$

Объединяя с предыдущим, получаем, что бесконечно часто

$$w(t_n) > C\sqrt{2t_n \ln\ln t_n^{-1}} - q(1+\varepsilon)\sqrt{2t_{n-1} \ln\ln t_{n-1}^{-1}}.$$

q можно выбрать сколь угодно близким к нулю, ε тоже, C сколь угодно близко к 1, и отсюда всё следует. Более формально,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q(1+\varepsilon)\sqrt{2t_{n-1} \ln\ln t_{n-1}^{-1}}}{C\sqrt{2t_n \ln\ln t_n^{-1}}} = \frac{\sqrt{q}(1+\varepsilon)}{C}.$$

Это отношение может быть сделано сколь угодно близким к нулю, и отсюда всё следует.