Вероятность — задачи

1 Kallenberg 2002 — Глава 4

1.
2.
3.

2 Kallenberg 2002 — Глава 5

1.
2.
3.

3 Kallenberg 2002 — Глава 6. Условное матожидание

Как доказать предложение 6.6 из Калленберга? В первую сторону: дано, что

$$P(H \mid \mathcal{F}, \mathcal{G}) = P(H \mid \mathcal{G}), H \in \mathcal{H}$$

Покажем, что

$$\mathcal{F} \perp\!\!\!\perp_{\mathcal{G}} \mathcal{H}.$$

Для этого надо показать, что при $F \in \mathcal{F}, H \in \mathcal{H}$

$$P^{\mathcal{G}}(F \cap H) = P^{\mathcal{G}}F \times P^{\mathcal{G}}H.$$

Иными словами,

$$\mathbb{E}(1_{F \cap H} \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(1_F \mid \mathcal{G}) \times \mathbb{E}(1_H \mid \mathcal{G}).$$

Имеем

$$\mathbb{E}(1_{F\cap H} \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(1_F 1_H \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(1_F 1_H \mid \mathcal{F}, \mathcal{G}) \mid \mathcal{G}) =$$
$$= \mathbb{E}(1_F \mathbb{E}(1_H \mid \mathcal{F}, \mathcal{G}) \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(1_F \mathbb{E}(1_H \mid \mathcal{G}) \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(1_H \mid \mathcal{G}) \times \mathbb{E}(1_F \mid \mathcal{G}).$$

А в другую сторону?

1.

2.

3.

4 Kallenberg 2002 — Глава 7. Мартингалы

1. $\{\sigma = \tau\} \in F_\sigma \cap F_\tau$. Достаточно показать, что

$$\{\sigma < \tau\} \in F_\sigma \cap F_\tau.$$

Отсюда с учётом аналогичного влючения для $\{\tau < \sigma\}$ будет следовать, что

$$\{\sigma \neq \tau\} \in F_\sigma \cap F_\tau.$$

Итак, имеем

$$\{\sigma < \tau\} \cap \{\tau \leq t\} = \bigcup_{0<q<t, q\in\mathbb{Q}} (\{\sigma < q\} \cap \{q < \tau \leq t\}) \in F_t.$$

Это верно для любого t, и по определению F_τ получаем

$$\{\sigma < \tau\} \in F_\tau.$$

Далее,

$$\{\sigma < \tau\} \cap \{\sigma \leq t\} = \{\sigma < \tau, \tau \leq t\} \cup \{\sigma \leq t, \tau > t\}.$$

Но оба последних события лежат в F_t. Дейтвительно,

$$\{\sigma < \tau, \tau \leq t\} \in F_t$$

мы доказали выше, а

$$\{\sigma \leq t, \tau > t\} = \{\sigma \leq t\} \cap \{\tau > t\} \in F_t.$$

Итак,

$$\{\sigma < \tau\} \cap \{\sigma \leq t\} \in F_t$$

для любого t, и по определению F_σ получаем $\{\sigma < \tau\} \in F_\sigma$.

Далее, почему $F_\sigma = F_\tau$ на $\{\sigma = \tau\}$? Пусть $A \subseteq \{\sigma = \tau\}, A \in F_\sigma$. Покажем, что $A \in F_\tau$. Из $A \in F_\sigma$ следует, что для любого t

$$A \cap \{\sigma \le t\} \in F_t.$$

Поскольку на множестве A $\sigma = \tau$, то для любого t

$$A \cap \{\tau \le t\} = A \cap \{\sigma \le t\} \in F_t.$$

По определению F_τ, $A \in F_\tau$. Вот и доказали всё.

Осталось объяснить, почему F_τ может отличаться от F_∞ на $\{\tau = \infty\}$. Это ясно. Если $\tau = \infty$ всегда, то по определению F_τ, в F_τ входят все множества из сигма-алгебры A, а не только из F_∞.

2. Стандартная задача.

3. Пример слабо опционального, но не опционального момента. Возьмём, как предлагает Калленберг. Берём бернуллиевскую случайную величину $\xi, P(\xi = 1) = P(\xi = -1) = \frac{1}{2}$, и положим

$$F_0 = \{\emptyset, \Omega\}, F_t = \sigma(\xi), t > 0.$$

Пусть

$$\tau = \begin{cases} 0, \xi = -1, \\ 1, \xi = 1. \end{cases}$$

Тогда для $t > 0$ имеем

$$\{\tau < t\} = \begin{cases} \{\xi = -1\}, t \le 1, \\ \Omega, t > 1. \end{cases}$$

В любом случае, $\{\tau < t\} \in F_t = \sigma(\xi), t > 0$. Поэтому τ слабо опциональный. Но $\{\tau \le 0\} = \{\tau = 0\} = \{\xi = -1\} \notin F_0$. Поэтому τ не опциональный.

4. Скучно решать это.

5. Задача про прогрессивные процессы. Прогрессивность — это измеримость относительно соответствующей сигма-алгебры. Итак, сначала покажем, что класс множеств $A \in \Omega \times \mathbb{R}_+$, таких, что процесс 1_A прогрессивен, образует сигма-алгебру. Да это вроде очевидно! Прогрессивность 1_A означает, что для любого t

$$A \cap (\Omega \times [0, t]) \in F_t \otimes \mathcal{B}[0, t].$$

Ясно, что это свойство сохраняется счётным объединением. И для перехода к дополнению всё тоже очевидно. Итак, да, сигма-алгебра.

Почему прогрессивность процесса равносильна его измеримости относительно этой сигма-алгебры? Допустим, процесс X прогрессивен. Покажем, что он измерим относительно этой сигма-алгебры. Нужно проверить, что для любого a множество $\{X > a\}$ лежит в прогрессивной сигма-алгебре. А оно там лежит, если для любого t

$$\{X > a\} \cap (\Omega \times [0, t]) \in F_t \otimes \mathcal{B}[0, t].$$

А это так, если X прогрессивен. И в другую сторону аналогично. Короче, пусть Калленберг сам решает такие задачи! Одни проверки.

9. $X^1, X^2, \ldots$ — субмартингалы, причём $X = \sup_n X^n$ интегрируем. Покажем, что X — тоже субмартингал. Фиксируем $t > s$. Имеем

$$\forall n \;\; X(t) \geq X_n(t),$$

$$\forall n \;\; \mathbb{E}(X(t) \mid F_s) \geq \mathbb{E}(X_n(t) \mid F_s) \geq X_n(s),$$

а поскольку это для любого n, то

$$\mathbb{E}(X(t) \mid F_s) \geq \sup_n X_n(s) = X(s).$$

Вот и доказали. Дальше сложнее. Покажем, что если $\sup_n |X_n|$ интегрируем, то и $\limsup_n X_n$ — субмартингал. Фиксируем $s < t$. Пусть

$$\xi_n = \sup(X_n(t), X_{n+1}(t), X_{n+2}(t), \ldots),$$

$$\eta_n = \sup(X_n(s), X_{n+1}(s), X_{n+2}(s), \ldots).$$

Пусть также $\xi = \sup_n |X_n(t)|, \eta = \limsup_n X_n(s)$. Имеем

$$\lim_{n\to\infty} \xi_n = \limsup_n X_n(t) \;\; a.s., |\xi_n| \leq \xi \;\; a.s..$$

По условию, ξ интегрируема. Значит, по теореме Лебега об ограниченной сходимости,

$$\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{L_1} \limsup_n X_n(t).$$

Условное матожидание при условии F_s — ограниченный оператор на $L_1(F_t)$, см. начало предыдущей главы. Поэтому

$$\zeta_n = \mathbb{E}(\xi_n \mid F_s) \xrightarrow[n\to\infty]{L_1} \mathbb{E}(\limsup_n X_n(t) \mid F_s) = \zeta.$$

Из условия субмаритингальности,

$$\eta_n \leq \mathbb{E}(\xi_n \mid F_s) = \zeta_n.$$

Но аналогичные рассуждения для момента s

$$\eta_n \xrightarrow[n\to\infty]{L_1} \limsup_n X_n(s) = \eta.$$

Итак, имеем две последовательности случайных величин $\zeta_n \geq \eta_n$, и обе сходятся в L_1:

$$\zeta_n \xrightarrow[n\to\infty]{L_1} \zeta, \eta_n \xrightarrow[n\to\infty]{L_1} \eta.$$

Покажем, что

$$\zeta \geq \eta \ \ a.s.$$

Действительно,

$$\zeta_n - \eta_n \geq 0, \zeta_n - \eta_n \xrightarrow[n\to\infty]{L_1} \zeta - \eta.$$

Но L_1-предел неотрицательных случайных величин неотрицателен почти наверное. Действительно, если λ_n — неотрицательные случайные величины и

$$\lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{L_1} \lambda,$$

$$A = \{\omega \in \Omega \mid \lambda(\omega) < 0\},$$

то при $P(A) > 0$ имеем $\mathbb{E}\lambda_n \mathbb{1}_A \to \mathbb{E}\lambda\mathbb{1}_A < 0$, противоречие. Кстати, откуда следует сходимость $\mathbb{E}\lambda_n \mathbb{1}_A \to \mathbb{E}\lambda\mathbb{1}_A, n \to \infty$?
Эта сходимость следует из

$$|\mathbb{E}\lambda_n \mathbb{1}_A - \mathbb{E}\lambda\mathbb{1}_A| \leq \mathbb{E}|(\lambda_n - \lambda)\mathbb{1}_A| \leq \mathbb{E}|\lambda_n - \lambda| \to 0, n \to \infty.$$

Вот всё и доказали. Неравенство $\zeta \geq \eta$ $a.s.$ и есть нужное нам неравенство

$$\mathbb{E}(\limsup_n X_n(t) \mid F_s) \geq \limsup_n X_n(s),$$

показывающее субмартингальность процесса $\limsup_n X_n$.

10. Разложение Дуба интегрируемой случайной последовательности $X = (X_n)$ зависит от фильтрации. Возьмём

$$F_n = \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n), G_n = \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}) = F_{n+1}.$$

Тогда X согласован и с фильтрацией F_n, и с фильтрацией G_n. Относительно фильтрации G_n X является предсказуемой последовательностью, и разложение Дуба имеет вид

$$X_n = X_0 + (X_n - X_0).$$

Когда у X относительно фильтрации F_n такое же разложение Дуба? Если оно то же, то $X_n - X_0$ должно быть при каждом $n \geq 1$ F_{n-1}-измеримым. Тогда и X_n при каждом $n \geq 1$ F_{n-1}-измеримо. Но тогда при каждом $n \geq 1$

$$\sigma(X_0, X_1, \dots, X_{n-1}) = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n),$$

$$F_{n-1} = F_n.$$

Тогда все сигма-алгебры F_n совпадают, и при каждом n X_n является X_0-измеримой величиной.

11.

12.

13.

14. Доказательство леммы 4.15 дословно переносится на случай, когда ξ_n — мартингал-разность для L_2-интегрируемого мартингала M. Итак, для L_2-ограниченного мартингала имеет место неравенство Колмогорова

$$P(\sup_n |M_n| > r) \leq r^{-2} \sup_n \mathbb{E} M_n^2.$$

Но можно такое вывести и из леммы 7.15. Эта лемма даёт для субмартингала X

$$rP(\sup_t |X_t| \geq r) \leq 3 \sup_t \mathbb{E}|X_t|.$$

Мы можем взять в качестве X субмартингал M^2 (квадрат мартингала — субмартингал). Имеем тогда из этого неравенства

$$r^2 P(\sup_n |M_n| \geq r) = r^2 P(\sup_n X_n \geq r^2) \leq 3 \sup_n \mathbb{E}|X_n| = 3 \sup_n \mathbb{E} M_n^2.$$

А теперь мы можем имитировать доказательство леммы 4.16. Пусть n фиксировано, построим случайный процесс $X^{(n)}$ на $\mathbb{Z}_+$,

$$X_k^{(n)} = (M_{n+k} - M_n)^2, k \geq 0.$$

Тогда $X^{(n)}$ — субмартингал. Имеем для него из 7.15

$$P(\sup_{k\geq 0} X_k^{(n)} \geq \epsilon^2) \leq 3\epsilon^{-2} \sup_{k\geq 0} \mathbb{E}|X_k^{(n)}| = 3\epsilon^{-2}\mathbb{E}(M_{n+k} - M_n)^2 \leq$$
$$\leq 3\epsilon^{-2} \sum_{k\geq 0} \mathbb{E}(M_{n+k+1} - M_{n+k})^2 \to 0, n \to \infty.$$

Отсюда

$$P(\sup_{k\geq 0}(M_{n+k} - M_n)^2 > \epsilon^2) \to 0, n \to \infty$$

для любого $\epsilon > 0$. Итак,

$$\sup_{k\geq n} |M_k - M_n| \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0.$$

Значит, для некоторой подпоследовательности n_s

$$\sup_{k\geq n_s} |M_k - M_{n_s}| \xrightarrow[s\to\infty]{a.s.} 0.$$

Но если $\sup_{k\geq n_s} |M_k - M_{n_s}| \leq \epsilon$, то

$$\sup_{k_1,k_2\geq n_s} |M_{k_1} - M_{k_2}| \leq 2\epsilon.$$

Отсюда следует, что последовательность $\{M_n\}$ фундаментальна почти наверное. Значит, сходится почти наверное. Ну а сходимость в L_2 по сравнению с этим тривиальна и следует из фундаментальности в L_2 последовательности M_n:

$$\sup_{k\geq 0} \mathbb{E}(M_{n+k} - M_n)^2 \leq \sum_{k\geq 0} \mathbb{E}(M_{n+k+1} - M_{n+k})^2 \to 0, n \to \infty.$$

15. Мартингал, который L^1-ограничен, но не равномерно интегрируем. Это известный пример. Берём последовательность независимых случайных величин ξ_n, каждая из которых принимает значения 0 и 2 с равными вероятностями $\frac{1}{2}$. Пусть

$$X_n = \xi_1\xi_2 \dots \xi_n.$$

Тогда $\mathbb{E}|X_n| = \mathbb{E}X_n = 1$, но X_n не равномерно интегрируем. А в непрерывном времени пример? Это экспоненциальные мартингалы.

$$X_t = e^{w_t - t/2}.$$

Ясно, что $\mathbb{E}X_t = \mathbb{E}X_0 = 1$. Почему X_t не равномерно интегрируем? Потому что

$$X_t \xrightarrow[t\to\infty]{a.s.} 0.$$

Если бы X_t был равномерно интегрируем, то сходимость к 0 была бы и в L^1, а её нет, потому что

$$\mathbb{E}X_t = 1 \neq 0.$$

5 Kallenberg 2002 — Глава 12

1.

2.

3.

6 Protter — Глава 2

1. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна за исключением одной точки, в которой у неё скачок. Показать, что $X_t = f(B_t)$ не семимартингал.

   Решение задачи опирается на то, что в окрестности момента достижения любого уровня броуновское движение бесконечно много раз проходит через этот уровень.

   Фиксируем $t > 0$ и покажем, что X^t — не тотальный семимартингал. Пусть a — точка скачка f. Пусть

   $$\tau_a = \inf\{t > 0\colon B_t = a\}.$$

   Для $\epsilon > 0$ определим последовательность моментов остановки τ_n^ϵ следующим образом:

   $$\tau_0^\epsilon = \inf\{t > 0\colon B_t = a - \epsilon\},$$

   $$\tau_{2n+1}^\epsilon = \inf\{t > \tau_{2n}^\epsilon\colon B_t = a + \epsilon\},$$
   $$\tau_{2n}^\epsilon = \inf\{t > \tau_{2n-1}^\epsilon\colon B_t = a - \epsilon\}.$$

   Из свойств броуновского движения

   $$\max\{n > 0\colon \tau_n^{1/m} < t\} \xrightarrow[m\to\infty]{a.s.} \infty$$

на множестве $\{\tau_a < t\}$. Пусть $h_m \to \infty$ такая детерминированная последовательность, что

$$0 < h_m < \sqrt{m}$$

и

$$P(\max\{n > 0\colon \tau_n^{1/m} < t\} > h_m) \geq \frac{1}{2} P\{\tau_a < t\}.$$

Определим случайные процессы H_m таким образом:

$$H_m(t) = \begin{cases} 0, t \leq \tau_0^{1/\sqrt[3]{h_m}}, \\ \frac{(-1)^n}{\sqrt{h_m}}, t \in (\tau_n^{1/\sqrt[3]{h_m}}, \tau_{n+1}^{1/\sqrt[3]{h_m}}], n < m, \\ 0, t > \tau_m^{1/\sqrt[3]{h_m}} \end{cases}.$$

Тогда

$$|I_{X^t}(H_m)| \geq \frac{1}{h_m^{5/6}} \left(m \wedge \max\{n > 0\colon \tau_n^{1/m} < t\}\right) - \frac{1}{\sqrt{h_m}} |\sup_{s\in[0,t]} f(B_s) - \inf_{s\in[0,t]} f(B_s)|.$$

С вероятностью не меньше, чем $\frac{1}{2} P\{\tau_a < t\} = const > 0$ имеем

$$\max\{n > 0\colon \tau_n^{1/m} < t\} > h_m,$$

$$|I_{X^t}(H_m)| > h_m^{1/6} - \frac{1}{\sqrt{h_m}} |\sup_{s\in[0,t]} f(B_s) - \inf_{s\in[0,t]} f(B_s)| \xrightarrow[m\to\infty]{a.s.} \infty.$$

Это противоречит сходимости по вероятности

$$I_{X^t}(H_m) \xrightarrow[m\to\infty]{P} 0.$$

Значит, X^t — не тотальный семимартингал, а X — не семимартингал.

2.

3.