Интеграл Концевича для траекторий случайных процессов

Кузнецов Василий Алексеевич

Отдел Теории случайных процессов
Институт математики НАНУ

Конференция Ломоносов-2013

Стохастические потоки

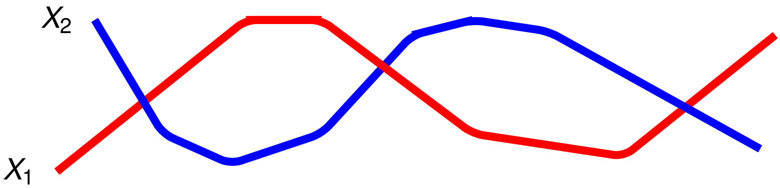
- Гладкие: $dx(u,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x(u,t))dw_k(t)$
  $d < x(u1,t), x(u_2,t) >= b(||x(u_1,t) - x(u_2,t)||)dt$
  b-гладкая функция.
- Негладкие потоки
  $d < x(u_1,t), x(u_2,t) >= b(||x(u_1,t) - x(u_2,t)||)dt$
  b-не гладкая. $x(,t)$ может быть разрывным.
- Основной вопрос: геометрические свойства x.

Геометрия потоков.

ξ-векторное поле на трёхмерном замкнутом односвязном многообразии M с мерой μ, ξ-бездивергентное поле на M. Рассматриваются траектории частичек, которые стартуют из точек x_1, x_2, под действием фазового потока поля ξ. Асимптотический коэффициент зацепления:

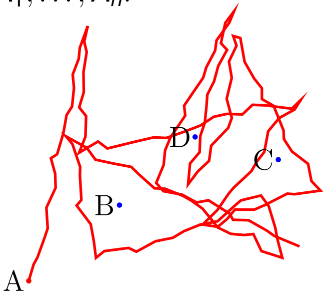
$\lambda_\xi(x_1, x_2) = \lim\limits_{T_1, T_2 \to \infty} \frac{lk_\xi(x_1, x_2; T_1, T_2)}{T_1 T_2}$. Имеет место такой результат: для почти всех $x_1, x_2 \in M$ выполняется:

$\lambda_\xi(x_1, x_2) = \int\limits_M \int\limits_M \lambda_\xi(x_1, x_2) d\mu(x_1) d\mu(x_2).$



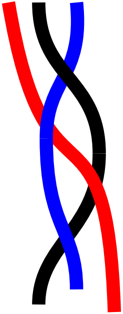
Вращения винеровского процесса на плоскости

Для двумерного винеровского процесса, который выходит из точки, отличной от различных точек $A_1, \dots, A_n$, обозначим: $\Phi_k(t)$- "количество оборотов", которое его траектория совершает вокруг точки A_k. Тогда $(\frac{2}{\ln t}\Phi_k(t), k = 1, \dots, n) \xrightarrow[t\to\infty]{d} (C_1, \dots, C_n)$. При этом предельное распределение не зависит от выбора точек $A_1, \dots, A_n$.



Косы и их инварианты.

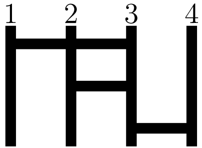
- Коса $Z(t) = (Z_1(t), \ldots, Z_n(t)), t \in [0, T], Z(t) \in \mathbb{C}$ - непрерывная траектория в пространстве $\mathbb{C}^n$



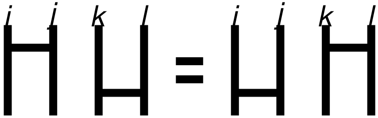
- Косы различаются с точностью до гомотопии.
- Для кос существует полная система инвариантов, которая различает негомотопные косы (система инвариантов Васильева).

Диаграммы.

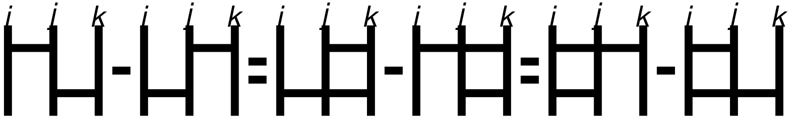
- $P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \\ \dots & \dots \\ P_{m1} & P_{m2} \end{pmatrix}$ —матрица размера $m \times 2$.
  Совокупность таких матриц на n струнах ($P_{ij} \le n$): $\mathbb{P}_{mn}$, $|\mathbb{P}_{mn}| = (n(n-1)/2)^m$.
- Матрице P отвечает диаграмма $D(P)$. Пример: $n = 4$ (коса из 4 струн), $m = 3$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, тогда $D(P)$:



Соотношения на диаграммах.

- Одночленное соотношение: 

- Четырёхчленное соотношение:

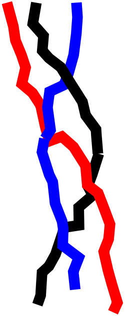


Интеграл Концевича.

- Интеграл Концевича
$K_m = \sum\limits_{P\in\mathbb{P}_{mn}} \int\limits_{\Delta_m} \omega_{P_{11}P_{12}}(t_1)\dots\omega_{P_{m1}P_{m2}}(t_m)D(P)$, де
$\Delta_m = \Delta_m(T) = \{(t_1,\dots,t_m) \mid 0 \le t_1 \le \dots \le t_m \le T\}$,
$\omega_{ij}(t) = \omega_{ji}(t) = \frac{1}{2\pi i}\frac{dZ_i(t)-dZ_j(t)}{Z_i(t)-Z_j(t)}$.
- Числовые инварианты: при каждом m все диаграммы порядка m заменяем на числа (“веса“) таким образом, что удовлетворяются одночленное и четырёхчленное соотношения. При этой замене K_m превращается в числовой инвариант.
- Пример: $\lambda_{kl}(t) = \int\limits_0^t \omega_{ij}(t')dt'$.
Интегральный инвариант второго порядка для косы из трёх струн a, b, c:
$2\Psi_{abc} = \int\limits_0^t (\lambda_{ab} - \lambda_{bc})\lambda_{ca} + (\lambda_{bc} - \lambda_{ca})\omega_{ab} + (\lambda_{ca} - \lambda_{ab})\lambda_{bc}$.

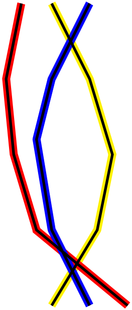
Основная задача.

Поставленная задача: построить интеграл Концевича для кос, порождённых непрерывными семимартингалами.



Вычисление инвариантов Концевича для негладких траекторий.

Интегральный инвариант Концевича для непрерывной траектории является пределом инвариантов для последовательности вписанных в эту траекторию ломаных, когда мелкость разбиения стремится к 0.



Основное утверждение.

- Для семимартингалов относительно общей фильтрации инварианты Концевича вычисляются как соответствующие кратные интегралы Стратоновича.
- Пример: упомянутый выше инвариант второго порядка становится
$$\int_0^t (\lambda_{ab} - \lambda_{bc}) \circ d\lambda_{ca} + (\lambda_{bc} - \lambda_{ca}) \circ d\lambda_{ab} + (\lambda_{ca} - \lambda_{ab}) \circ d\lambda_{bc}.$$

Идея доказательства.

- Имеет место такое свойство интегралов Стратоновича:
$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{X(t_i)+X(t_{i+1})}{2}(Y(t_{i+1}) - Y(t_i)) \xrightarrow[\max \Delta t_i \to 0]{P} \int\limits_0^T X(t) \circ dY(t),$$
где X, Y - непрерывнве семимартингалы.
- Во время доказательства непрерывная коса заменяется на ломаные, которые её приближают, а суммы
$\sum_{i=0}^{p-1} \frac{K(t_i)+K(t_{i+1})}{2}(\phi(t_{i+1}) - \phi(t_i))$ для ломаных заменяются на соответствующие суммы для исходной косы. Оценивается точность замены.

Дальнейшая работа.

- Найти совместную асимптотику при $t \to \infty$ инвариантов Концевича порядка 2 и выше для независимых винеровских процессов.
- Найти асимптотику при $t \to \infty$ инвариантов Концевича для траекторий в стохастических потоках.

Литература I

Fabrice Baudoin.
An introduction to the geometry of stochastic flows.
World Scientific Publishing Company, 2005.

Chmutov S., Duzhin S., Mostovoy J.
Introduction to Vassiliev knot invariants.
Cambridge University Press, 2012.

Arnold V., Khesin B.
Topological Methods in Hydrodynamics.
Springer-Verlag, 1998.

Dror Bar-Natan.
Vassiliev homotopy string link invariants.
Journal of Knot Theory and its Ramifications, 4(1):13–32, 1995.

Литература II

- Jim Piman, Marc Yor.
  Asymptotic Laws of Planar Brownian Motion.
  Annals of Probability, 14(3):733–779, 1986.
- Mitchell A. Berger.
  Topological invariants in braid theory.
  Letters in Mathematical Physics , 55(3):181–192, 2001.