

# Алгебра 3 2023 Кузнецов

## 1 Листок 1

1. Существует ли функтор из  $\text{Grp}$  в  $\text{Ab}$ , переводящий группу в её центр? Покажем, что нет такого функтора. Предположим, что это функтор  $\mathcal{F}$ . Рассмотрим группы  $G = S_2$  и  $H = S_n$  с таким  $n$ , что центр  $S_n$  тривиален (например,  $n = 5$ ). Рассмотрим гомоморфизмы  $g: G \rightarrow H$ , являющийся просто вложением, и  $h: H \rightarrow G$ , переводящий чётные перестановки в  $e$ , а нечётные в  $(12)$ . Тогда  $hg = id_G$ . Отсюда

$$\mathcal{F}(h)\mathcal{F}(g) = id_{\mathcal{F}(G)}.$$

Но  $\mathcal{F}(G)$  — это центр группы  $G$ , то есть в нашем случае вся  $G$ . А  $\mathcal{F}(g)$  действует из  $G$  в центр  $H$ , то есть обязана быть тривиальным гомоморфизмом (всё в  $e$ ). Но тогда

$$\mathcal{F}(h)\mathcal{F}(g)$$

тоже обязано всё переводить в  $e$ , а это не так ( $id_{\mathcal{F}(G)}$  тождественно, а не переводит всё в  $e$ ).

2. а)  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$  — эпиморфизм колец. Я так понимаю, коммутативных колец с единицей. Допустим, есть  $f_1, f_2: \mathbb{Q} \rightarrow K$ , совпадающие на  $\mathbb{Z}$ . Надо показать, что они совпадают на всём  $\mathbb{Q}$ . Предположим,

$$f_1\left(\frac{m}{n}\right) \neq f_2\left(\frac{m}{n}\right).$$

Пусть  $a = f_2(m/n) - f_1(m/n)$ . Имеем  $na = 0$ . Тогда

$$f_1\left(\frac{1}{n}\right)na = 0,$$

$$f_1\left(\frac{1}{n}\right)f_1(n)a = 0,$$

$$a = 0.$$

Вот и доказали.