

# Статистика

## 1 Оценка гауссовского среднего

Пусть  $Y_1, \dots, Y_n$  — независимые  $N(\mu, 1)$  случайные величины. Исследуем вопрос нахождения оценки снизу на дисперсию оценки  $\mu$  по  $Y_1, \dots, Y_n$ , то есть

$$\sup_{\mu} \mathbb{E} (f(Y_1, \dots, Y_n) - \mu)^2,$$

где  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  — некоторая измеримая функция (нижняя оценка не должна зависеть от  $f$ ). Иными словами, для независимых гауссовских  $X_1, \dots, X_n \sim N(0, 1)$  нужно оценить снизу

$$\sup_{\mu} \mathbb{E} (f(X_1 + \mu, \dots, X_n + \mu) - \mu)^2.$$

В случае несмещённой оценки это делается с помощью неравенства Рао-Крамера. Но нам нужно сделать это без предположения несмещённости, и кроме того, я не помню доказательства Рао-Крамера. Как оценивать супремум, сразу не ясно, но возникает идея проинтегрировать наше выражение

$$\sup_{\mu} \mathbb{E} (f(X_1 + \mu, \dots, X_n + \mu) - \mu)^2$$

по некоторой плотности  $p(\mu)$ . Однако, проще, чем вычислять интегралы, сделать через вероятность. Пусть  $U \sim N(0, 1)$  не зависит от вектора  $X_1, \dots, X_n$ . Имеем

$$\sup_{\mu} \mathbb{E} (f(X_1 + \mu, \dots, X_n + \mu) - \mu)^2 \geq \mathbb{E} (f(X_1 + U, \dots, X_n + U) - U)^2.$$

Найдём

$$\mathbb{E} (U \mid X_1 + U, \dots, X_n + U).$$

Для этого найдём такое  $\alpha$ , что

$$U - \alpha(X_1 + \dots + X_n + nU)$$

не зависит от  $X_1 + U, \dots, X_n + U$ . Имеем

$$\mathbb{E}(U - \alpha(X_1 + \dots + X_n + nU))(X_1 + U) = 0,$$

$$1 - \alpha n - \alpha = 0,$$

$$\alpha = \frac{1}{n+1}.$$

Итак,

$$H = \mathbb{E}(U \mid X_1 + U, \dots, X_n + U) = \frac{1}{n+1}(X_1 + \dots + X_n + nU).$$

Пусть

$$Z = U - H = U - \frac{1}{n+1}(X_1 + \dots + X_n + nU) = \frac{1}{n+1}(U - X_1 - \dots - X_n).$$

$Z$  не зависит от вектора

$$(X_1 + U, \dots, X_n + U, H).$$

Имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f(X_1 + U, \dots, X_n + U) - U)^2 &= \mathbb{E}(f(X_1 + U, \dots, X_n + U) - (Z + H))^2 = \\ &= \mathbb{E}((f(X_1 + U, \dots, X_n + U) - H) - Z)^2 \geq \mathbb{E}Z^2 = \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Итак,

$$\sup_{\mu} \mathbb{E}(f(X_1 + \mu, \dots, X_n + \mu) - \mu)^2 \geq \frac{1}{n+1}.$$

Нельзя ли эту оценку улучшить? А мы возьмём  $U \sim N(0, \sigma^2)$  не зависящую от  $X_1, \dots, X_n$ . Тогда всё то же, только

$$\mathbb{E}(U - \alpha(X_1 + \dots + X_n + nU))(X_1 + U) = 0$$

перепишется как

$$\sigma^2 - \alpha n \sigma^2 - \alpha = 0,$$

$$\alpha = \frac{\sigma^2}{n\sigma^2 + 1}.$$

$$Z = \frac{1}{n\sigma^2 + 1}U - \frac{\sigma^2}{n\sigma^2 + 1}(X_1 + \dots + X_n).$$

$$\mathbb{E}Z^2 = \frac{\sigma^2 + n\sigma^4}{(1 + n\sigma^2)^2} \rightarrow \frac{1}{n}, \sigma \rightarrow \infty.$$

Значит,

$$\sup_{\mu} \mathbb{E}(f(X_1 + \mu, \dots, X_n + \mu) - \mu)^2 \geq \frac{1}{n}.$$

А вот это уже улучшить нельзя - такое достигается для

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n).$$

Нельзя ли из этого доказательства получить Рао-Крамера? Видимо, нельзя, так как там нет супремума по  $\mu$ .