Функциональный анализ — задачи

1 Рудин — Глава 1

1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

9.

10.

11. Допустим, есть не всюду плотное подпространство $L^p, 0 < p < 1$ конечной коразмерности. Тогда его замыкание — замкнутое собственное подпространство N пространства L^p также конечной коразмерности (возможно, меньшей, чем у исходного подпространства). Ну и мы можем устроить факторотображение $\pi\colon L^p \to L^p/N$, оно линейно и непрерывно (теорема 1.41), и отображает L^p на конечномерное пространство положительной размерности. Но конечномерное пространство локально выпукло. Противоречие с пунктом 1.47 — такое отображение может быть только нулевым.

12.

13. (a) τ-ограниченное множество является σ-ограниченным. Пусть A — некоторое τ-ограниченное множество. Покажем, что оно σ-ограниченное. В силу задачи 6, можно считать, что A счётно. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть

$$H_M = \{t \in [0,1] \mid |f(t)| \le M \forall f \in A\}, M > 0.$$

В силу счётности A, множетво H_M измеримо при любом M. В силу τ - ограниченности A (которая в силу теоремы 1.37 равносильна "обычной" ограниченности множеств

$$U_t = \{|f(t)|, f \in A\}$$

для каждого $t \in [0,1]$) имеем

$$\cup_{n=1}^{\infty} H_n = [0,1].$$

Значит, существует натуральное число N, такое, что

$$\mu(H_N) > 1 - \varepsilon,$$

где μ — мера Лебега на $[0,1]$.
Тогда имеем

$$\forall f \in A \ \ \mu\{t \in [0,1] \mid |f(t)| > N\} \le \varepsilon.$$

Значит,

$$\int\limits_0^1 \frac{|\varepsilon f(t)/N|}{1 + |\varepsilon f(t)/N|} dt \le (1-\varepsilon)\varepsilon + \varepsilon \le 2\varepsilon.$$

Итак,

$$\forall f \in A \ \ d\left(\frac{\varepsilon}{N} f, 0\right) \le 2\varepsilon.$$

Значит, $\frac{\varepsilon}{N}A$ содержится в 3ε-окрестности нуля в σ-топологии. В силу произвольности ε, с учётом задачи 5 это означает ограниченность A в σ-топологии. Доказали.

(b) Отображение $\mathrm{it}\colon (C,\tau) \to (C,\sigma)$ разрывно (хотя секвенциально непрерывно). Ну так это очевидно. Для непрерывности отображения id нам надо, чтоб для любой σ-окрестности нуля существовала τ-окрестность нуля внутри неё. Ну так возьмём такую σ-окрестность нуля:

$$U_\sigma = \left\{ f \in C \mid \int\limits_0^1 \frac{|f(t)|}{1+|f(t)|} dt < \frac{1}{2} \right\}.$$

Каждая τ-окрестность нуля содержит подокрестность вида

$$U_{t_1,\ldots,t_n,\varepsilon} = \{f \in C \mid |f(t_i)| < \varepsilon, i = 1, \ldots, n\}.$$

Ясно, что существует непрерывная неотрицательная функция, которая в точках $t_1, \ldots, t_n$ принимает значение 0, но равна 100 на множестве меры больше 0.99. Тогда эта функция лежит в $U_{t_1,\ldots,t_n,\varepsilon}$, но не лежит в U_σ. Вот и доказали раззрывность id.

Надо ещё показать непосредственно, что в (C, τ) не существует счётной локальной базы. Ну, это очевидно примерно из тех же соображений. Надо показать, что не существует счётного набора окрестностей нуля, такого, что любая окрестность нуля содержит окрестность из этого набора. Допустим, такой набор существует. Каждая окрестность из этого набора содержит окрестность вида

$$U_{t_1,\ldots,t_n,\varepsilon} = \{f \in C \mid |f(t_i)| < \varepsilon, i = 1, \ldots, n\}.$$

Точек t_i, которые входят в определение какой-то из окрестностей этого набора, счётное число. Возьмём точку $t \in [0, 1]$, не совпадающую ни с одной из них. Тогда для этой точки окрестность

$$\left\{f \in C \mid |f(t)| < \frac{1}{2}\right\}$$

не содержит ни одной из выбранных окрестностей. Вот и всё.

(c) Представление линейных непрерывных функционалов на (C, τ). Пусть Λ — линейный непрерывный функционал на (C, τ). Существует окрестность нуля вида

$$U_{t_1,\ldots,t_n,\varepsilon} = \{f \in C \mid |f(t_i)| < \varepsilon, i = 1, \ldots, n\},$$

такая, что из $f \in U_{t_1,\ldots,t_n,\varepsilon}$ следует $|\Lambda f| < 1$. Ясно, что тогда имеет место неравенство

$$\forall f \in C \;\; |\Lambda f| \le \frac{1}{\varepsilon} \max\{|f(t_1), \ldots, |f(t_n)|\}.$$

Отсюда следует, что если $f \in C$ такова, что

$$f(t_1) = \ldots = f(t_n) = 0,$$

то $\Lambda f = 0$. Значит, если $f, g \in C$ совпадают на $t_1, \ldots, t_n$, то $\Lambda f = \Lambda g$. Осталось выбрать функции $h_i \in C$, такие, что

$$h_i(t_j) = \delta_{ij}, 1 \leq i, j \leq n.$$

Пусть $c_i = \Lambda(h_i)$. Тогда

$$\Lambda f = \Lambda \left(\sum_{i=1}^{n} f(t_i) h_i \right) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \Lambda(h_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i f(t_i).$$

Это и нужно было доказать.

(d) (C, σ) не содержит выпуклых открытых множеств, отличных от $\emptyset$ и C. Надо показать, что для любой функции $h \in C$ и любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное N и функции $h_1, \ldots, h_N \in C$, такие, что

$$h = h_1 + \ldots + h_N$$

и мера носителя каждой h_i меньше ε. Если мы построили такие h_i, то

$$h = \frac{Nh_1 + \ldots + Nh_N}{N},$$
$$\forall i \;\; d(Nh_i, 0) < \varepsilon,$$

и мы получаем, что выпуклая оболочка ε-окрестности нуля в d содержит h. В силу произвольности h, выпуклая ооболочка ε-окрестности нуля совпадает с C. Осталось пояснить, как строить h_i.

(e)

14. Известно, что два семейства полунорм $\{p_\alpha\}$ и $\{q_\beta\}$ на векторном пространстве X эквивалентны (то еть задают одну и ту же топологию), если для любой полунормы p_α из первого семейства найдутся полунормы $q_{\beta_1}, q_{\beta_2}, \ldots, q_{\beta_m}$ из второго семейства и константа $C > 0$, такие, что

$$\forall x \in X \;\; p_\alpha(x) \leq C(q_{\beta_1}(x) + \ldots + q_{\beta_m}(x)),$$

и для любой полунормы q_β из второго семейства найдутся полунормы $p_{\alpha_1}, \ldots, p_{\alpha_n}$ из первого семейства и константа $D > 0$, такие, что

$$\forall x \in X \;\; q_\beta(X) \leq D(p_{\alpha_1}(x) + \ldots + p_{\alpha_n}(x)).$$

(Это стандартный факт, он описан, например, у Саймона-Рида). Проверим такие неравенства для наших трёх семейств полунорм. Имеем

$$\int_0^1 |D^n f(x)|dx \leq \left(\int_0^1 |D^n f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \leq \sup_{x\in[0,1]} |D^n f(x)|.$$

Осталось оценить полунормы $\sup_{x\in[0,1]} |D^n f(x)|$ через полунормы $\int_0^1 |D^n f(x)|dx$. Имеем

$$\sup_{x\in[0,1]} |D^n f(x)| = \max_{x\in[0,1]} |D^n f(x)| \leq \min_{x\in[0,1]} |D^n f(x)| + \int_0^1 |D^{n+1} f(x)|dx \leq$$
$$\leq \int_0^1 |D^n f(x)|dx + \int_0^1 |D^{n+1} f(x)|dx.$$

Вот всё и доказали.

15.

16.

17.

18.

19.

20.

21.

22.

23.

24.

2 Рудин — Глава 2. Полнота

1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

9. X, Y, Z банаховы, $B\colon X\times Y \to Z$ непрерывное билинейное. Докажем:

$$\|B(x,y)\| \leq M\|x\|\|y||.$$

Во-первых, заметим, что для каждого $x \in X$ линейное отображение $l_x\colon Y \to Z$, определяемое $l_x(y) = B(x,y)$, непрерывно. Действительно, оно непрерывно по совокупности переменных, значит, и по одной y.

Во-вторых, отображение F_B из X в банахово пространство непрерывных линейных операторов из Y в Z, заданное формулой

$$F_B(x) = l_x,$$

ограничено. Действительно, покажем, что существует M такое, что если $\|x\| \ \leq 1$, то

$$\|F_B(x)\| = \|l_x\| \leq M.$$

Из непрерывности B следует, что найдутся $\delta_1, \delta_2 > 0$ такие, что $\|B(x,y)\| < 1$, как только $\|x\| < \delta_1, \|y\| < \delta_2$. Отсюда, ясно, вытекает, что $\|B(x,y)\| \leq C$ при $\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1$. Рассмотрим семейство операторов l_x при всех x, таких, что $\|x\| \leq 1$. Значения этих операторов в каждой точке $y \in Y$ ограничены:

$$\|l_x(y)\| = \|B(x,y)\| \leq C\|y\|.$$

А значит, по теореме Банаха-Штейнгауза нормы всех этих операторов ограничены одним числом:

$$\|l_x\| \leq M, \|x\| \leq 1.$$

А это и означает, что оператор F_B ограничен: $\|F_B\| \leq M$.

Значит, имеем

$$\|l_x\| \leq M\|x\|, \|B(x,y)\| = \|l_x(y)\| \leq \|l_x\|\|y\| \leq M\|x\|\|y\|.$$

10.

3 Халмош

1.

2. Координатное доказательство леммы Рисса. Пусть l — непрерывный линейный функционал на H, его норма k. Пусть $c_i = l(e_i)$. Тогда

$$l(a_1e_1 + \ldots + a_ne_n) = a_1c_1 + \ldots + a_nc_n.$$

Нам надо показать, что $\sum\limits_k |c_k|^2 < \infty$. Для этого оценим

$$|c_1|^2 + \ldots + |c_n|^2.$$

Из неравенства $\|l\| \leq K$ следует

$$|a_1c_1 + \ldots + a_nc_n| \leq K\sqrt{|a_1|^2 + \ldots + |a_n|^2}.$$

Это что-то похожее на неравенство Коши-Буняковского, и левая часть максимальна при $a_i = c_i^*$. Подставляя $a_i = c_i^*$, получаем

$$\sqrt{|c_1|^2 + \ldots + |c_n|^2} \leq K.$$

Вот и всё.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

9.

10.

11.

12.

13.

14.

15.

16.

17.

18.

19.

20. Элементарное доказательство теоремы Банаха-Штейнгауза.

    Пусть есть совокупность линейных непрерывных операторов A_α на гильбертовом пространстве H, которая не ограничена по норме, но ограничена на каждом векторе. Построим вектор, на котором она неограничена, и тем самым получим противоречие. Построим по индукции последовательности $A_n \in \{A_\alpha\}$, $f_n \in H$ с такими свойствами:

    (a) $\|f_n\| = m_n = \frac{1}{2^n(1+\max(\|A_1\|,\ldots,\|A_{n-1}\|))}$;

    (b) $\|A_n f_n\| \geq 2^n + \|A_n(f_1 + \ldots + f_{n-1})\|$.
    Такой A_n существует, ибо множество $\{\|A_\alpha(f_1 + \ldots + f_{n-1})\|\}$ ограничено, и, таким образом, правая часть

    $$2^n + \|A_\alpha(f_1 + \ldots + f_{n-1})\|$$

    ограничена (при фиксированном n), а левая часть

    $$\sup_{\|f\|=m_n} \|A_\alpha f\|$$

    неограничена в силу неограниченности норм A_α.

Имеем:

(a) Ряд $\sum\limits_n f_n$ сходится, ибо $\|f_n\| \leq \frac{1}{2^n}$. Пусть $f = \sum\limits_n f_n$.

(b) При $k > 0$ имеем

$$\|A_n f_{n+k}\| \leq \|A_n\| \|f_{n+k}\| \leq \frac{1}{2^{n+k}}.$$

Здесь мы воспользовались неравенством

$$\|f_{n+k}\| = m_{n+k} \leq \frac{1}{2^{n+k}\|A_n\|},$$

случай $A_n = 0$ нужно рассмотреть отдельно, но и в нём всё получается. Отсюда, учитывая непрерывность оператора A_n,

$$\|A_n \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|A_n f_k\| \leq \frac{1}{2^n}.$$

Итак,

$$\|A_n(f_1 + \ldots + f_n)\| \geq 2^n, \|A_n \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k\| \leq \frac{1}{2^n}.$$

В итоге,

$$\|A_n f\| \geq 2^n - \frac{1}{2^n}.$$

Итак, множество $\{A_n f\}_{n=1}^{\infty}$ неограничено.

21.

22.

23.

24.

25.

26.

27.

28.

29.

30.

31.

32.

33.

34.

35.

36.

37.

38.

39.

40.

41. Нужно элементарное доказательство теоремы Банаха об обратном операторе. $A\colon H \to K$ взаимно однозначный. Надо показать, что он ограничен снизу.

    Я пробовал сначала построить последовательность векторов в H, которая по норме стремится к бесконечности, но образы которой сходятся (в K). Конечно, такую последовательность построить можно, но это ничего не даёт.

    Идея нашлась, когда я стал плясать не от оператора A, а от оператора A^{-1}. Всё сразу сводится к применению теоремы Банаха-Штейнгауза. Мы выбираем ортонормированный базис $e_1, e_2, \dots$ в H и определяем операторы $B_n\colon K \to H$ таким образом: B_n переводит вектор $z \in K$ в проекцию вектора $A^{-1}z$ на линейную оболочку $e_1, \dots, e_n$. Так мы получаем совокупность линейных операторов $\{B_n\}$, которая ограничена на каждом векторе. Значит, она и вообще ограничена:

    $$\|B_n z\| \leq C\|z\| \;\; \forall n \forall z \in K.$$

    Тогда в силу сходимости $B_n z \to A^{-1}z, n \to \infty$ получаем

    $$\|A^{-1}z\| \leq C\|z\| \;\; \forall z \in K.$$

    Но это рассуждение неполное. Мы не показали, что B_n являются ограниченными операторами.На самом деле, это непонятно как показывать.

4 Пирковский

1. Задача о функциональном исчислении.

   1.1. Условие $M \supset \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ необходимо для разрешимости задачи функционального исчисления с $A = F(M)$. Допустим, $\lambda_k \notin M$. Нам нужно показать, что не существует гомоморфизма из алгебры всех функций на M в алгебру операторов, который переводит многочлены куда надо. Допустим, такой гомоморфизм γ_A существует. Имеем

   $$\gamma_A(\lambda_k - t)\gamma_A\left(\frac{1}{\lambda_k - t}\right) = \gamma_A(1) = 1_E,$$

   $$(\lambda_k - A)\gamma_A\left(\frac{1}{\lambda_k - t}\right) = 1_E.$$

   Но оператор $\lambda_k - A$ необратим. Противоречие.

   1.2.
   $$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   1) Не существует оператора S с $S^2 = T$. Допустим, $S^2 = T$. Тогда $\ker S$ — это не всё $\mathbb{C}^2$ и не 0 (в первом случае оператор S был бы нулевым, во втором невырожденным, и оба этих случая противоречат равенству $S^2 = T$). Значит, $\ker S$ одномерно. Аналогично, $\operatorname{Im} S$ одномерно. Если $\ker S = \operatorname{Im} S$, то $S^2 = 0$, противоречие. Значит, $\ker S$ и $\operatorname{Im} S$ — это разные одномерные подпространства $\mathbb{C}^2$. Пусть $v \in \operatorname{Im} S$ — ненулевой вектор. Тогда Sv — ненулевой вектор и $Sv \in \operatorname{Im} S$. Отсюда получаем

   $$Sv = \alpha v, \alpha \neq 0.$$

   Но тогда
   $$S^4 v = \alpha^4 v \neq 0.$$

   Однако $S^4 = T^2 = 0$. Противоречие.

   Есть и другой, более алгебраический, способ это доказывать. У оператора S есть характеристический многочлен p второй степени:
   $$p(S) = 0.$$

   С другой стороны, $S^4 = T^2 = 0$. Поделив над полем $\mathbb{C}$ многочлен t^4 с остатком на $p(t)$, получим два случая

- В остатке получается некоторый ненулевой многочлен степени не выше первой. Тогда S пропорционален единичному оператору. Это протииворечит равенству $S^2 = T$.
- Многочлен t^4 делится на $p(t)$ нацело. Это может быть, только если $p(t) = t^2$. Но тогда $S^2 = 0$, что противоречит равенству $S^2 = T$.

2) То же самое верно для любого $n \geq 2$: не существует S со свойством $S^n = T$. Для этого можно доказать более общее утверждение: если $S\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ нильпотентен, $S^n = 0$, то $S^2 = 0$. Оба способа доказательства из предыдущего пункта тривиально обобщаются.
3) Для $A = C(\mathbb{R})$ задача построения функционального исчисления от оператора T неразрешима. Действительно, иначе имеем

$$\gamma_A(\sqrt[3]{t})^3 = \gamma_A(t) = T.$$

Это противоречит пункту 2).

1.3. 1) Для $f \in C^1(U)$ положим

$$\gamma_A(f) = f(0) + f'(0)T.$$

Имеем

$$\begin{aligned}\gamma_A(fg) = f(0)g(0) + (f(0)g'(0) + f'(0)g(0))T = \\ = (f(0) + f'(0)T)(g(0) + g'(0)T) = \gamma_A(f)\gamma_A(g)\end{aligned}$$

в силу $T^2 = 0$.
2) Перейдём в базис, в котором наш оператор T представляется в жорданово форме. Тогда в этом базисе $T = D + N$, где D диагональный, $N^n = 0$, и вдобавок D и N коммутируют. Положим для $f \in C^{n-1}(U)$

$$f(T) = f(D) + f'(D)N + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(D)}{(n-1)!}N^{n-1}.$$

Здесь $f^{(k)}(D)$ определяются как обычно для диагонального оператора. Легко проверить, что

$$(fg)(T) = f(T)g(T).$$

Вот и построили функциональное исчисление.

2. Спектр.

2.1. У обратимого элемента есть илшь один обратный. Допустим, у элемента a два обратных, b и c. Имеем

$$ab = ba = 1, ac = ca = 1.$$

Тогда

$$c = 1 \times c = (ba)c = b(ac) = b.$$

2.2. 1) a обратим слева. a_l^{-1} не обязательно единственно. Например, рассмотрим l_2 и алгебру всех ограниченных линейных операторов на нём. Пусть оператор a действует сдвигом:

$$a(x_0, x_1, x_2, \ldots) = (0, x_0, x_1, x_2, \ldots).$$

Тогда любой оператор $b_\alpha, \alpha \in \mathbb{C}$ вида

$$b_\alpha(x_0, x_1, x_2, \ldots) = (\alpha x_0 + x_1, x_2, x_3, \ldots)$$

является левым обратным для a:

$$b_\alpha a = 1.$$

2) Если a обратим слева и справа, то он обратим.

$$a_r^{-1} = (a_l^{-1}a)a_r^{-1} = a_l^{-1}(aa_r^{-1}) = a_l^{-1}.$$

Итак, $a_r^{-1} = a_l^{-1}$, и всё ясно.
3) Если A конечномерна и $a \in A$ обратим слева, то он обратим. Для любого элемента $b \in A$, bA — это линейное подпространство в A. Это подпространство совпадает с A тогда и только тогда, когда его размерность равна размерности A. Наш a обратим слева. Пусть h — левый обратный для a. Если размерность aA меньше размерности A, то размерность haA тем более не выше. Но этого быть не может, так как $haA = A$. Значит, $aA = A$. Итак, в виде ax можно представить любой элемент A, поскольку $aA = A$. Тогда существует $y \in A$, такое, что $ay = 1$. Значит, у a есть и правый обратный. По предыдущему пункту, a обратим.
4) Для произвольной алгебры A это неверно, пример тот же, что в пункте 1). Там оператор a имеет левый обратный, но правого обратного не имеет.

2.3. Для произвольного нормированного пространства из биективности не следует обратимость. Возьмём в роли E подпространство l_2, состоящее из всех финитных последовательностей

$$(x_1, \ldots, x_m, 0, 0, \ldots).$$

На этом пространстве оператор A, заданный равенством

$$A(x_1, \ldots, x_m, 0, 0, \ldots) = (x_1, x_2/2, x_3/3, \ldots, x_m/m, 0, 0, \ldots)$$

ограничен и биективен, но необратим. Его обратный в теоретико-множественном смысле неограничен.