Алгебра 1

1 Алгебра 1 2022 Листок 5

1.

2. б) Докажем, что в поле F хотя бы один из элементов 2, 3, 6 является квадратом. Пусть A и B — два непересекающихся подмножества простых чисел, в объединении дающие всё множество простых. Пусть $a \in R$ — такой элемент, у которого все a_p равны 1 при $p \in A$ и 0 при $p \notin A$. Аналогично, у $b \in R$ все b_p равны 1 при $p \in B$ и 0 при $p \notin B$. Тогда $a+b=1$, и a и b не могут одновременно принадлежать идеалу $\mathfrak{m}$ (поскольку $\mathfrak{m}$ — собственный идеал).С другой стороны, хотя бы один из элементов a, b принадлежит идеалу $\mathfrak{m}$. Докажем это. Допустим, ни a, ни b не лежат в идеале $\mathfrak{m}$. Покажем, что это противоречит его максимальности. Добавим к этому идеалу a, тем самым получив идеал $\mathfrak{m}_1$. Покажем, что $\mathfrak{m}_1$ всё равно собственный, а именно, $b \notin \mathfrak{m}_1$. Действительно, если бы было $b \in \mathfrak{m}_1$, то b представлялось бы в виде

$$b = ha + t, h \in R, t \in \mathfrak{m}.$$

2 Алгебра 1 2022 Листок 5

1. а) Имеем для суммы количеств неподвижных элементов по всем элементам G

$$\sum_{g\in G}\sum_{x\in X} \mathbb{1}_{gx=x} = \sum_{x\in X}\sum_{g\in G} \mathbb{1}_{gx=x} = \sum_{x\in X} |\mathrm{Stab}_x| = \sum_{x\in X} \frac{|G|}{|X|} = |G|.$$

Поэтому искомое среднее равно 1. Мы воспользовались тем, что

$$|\mathrm{Stab}_x| = \frac{|G|}{|\mathrm{Orb}_x|} = \frac{|G|}{|X|},$$

ведь в нашем случае орбита x — это всё X в силу транзитивности.