Функциональный анализ — задачи

1 Рудин — Глава 1

1.
2. C10. Полиномиальный алгоритм проверки выполнимости Хорновской формулы.
   Если в каждом дизъюнкте есть переменная с отрицанием, то формула выполнима — можно положить все переменные равными 0. Если есть дизъюнкт, в котором нет переменных с отрицанием, то там по условию только одна переменная, и она должна быть истинной. Фиксируем значение этой переменной и сводим задачу к задаче с меньшим числом переменных и меньшим числом дизъюнктов (при этом формула остаётся Хорновской). Легко видеть, что этот алгоритм полиномиален.
3. C1.

2 Рудин — Глава 2. Полнота

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.

9. X, Y, Z банаховы, $B\colon X\times Y \to Z$ непрерывное билинейное. Докажем:

$$\|B(x,y)\| \le M\|x\|\|y||.$$

Во-первых, заметим, что для каждого $x \in X$ линейное отображение $l_x\colon Y \to Z$, определяемое $l_x(y) = B(x,y)$, непрерывно. Действительно, оно непрерывно по совокупности переменных, значит, и по одной y.

Во-вторых, отображение F_B из X в банахово пространство непрерывных линейных операторов из Y в Z, заданное формулой

$$F_B(x) = l_x,$$

ограничено. Действительно, покажем, что существует M такое, что если $\|x\| \ \le 1$, то

$$\|F_B(x)\| = \|l_x\| \le M.$$

Из непрерывности B следует, что найдутся $\delta_1, \delta_2 > 0$ такие, что $\|B(x,y)\| < 1$, как только $\|x\| < \delta_1, \|y\| < \delta_2$. Отсюда, ясно, вытекает, что $\|B(x,y)\| \le C$ при $\|x\| \le 1, \|y\| \le 1$. Рассмотрим семейство операторов l_x при всех x, таких, что $\|x\| \le 1$. Значения этих операторов в каждой точке $y \in Y$ ограничены:

$$\|l_x(y)\| = \|B(x,y)\| \le C\|y\|.$$

А значит, по теореме Банаха-Штейнгауза нормы всех этих операторов ограничены одним числом:

$$\|l_x\| \le M, \|x\| \le 1.$$

А это и означает, что оператор F_B ограничен: $\|F_B\| \le M$.

Значит, имеем

$$\|l_x\| \le M\|x\|, \|B(x,y)\| = \|l_x(y)\| \le \|l_x\|\|y\| \le M\|x\|\|y\|.$$

10.

3 Халмош

1.

2. Координатное доказательство леммы Рисса. Пусть l — непрерывный линейный функционал на H, его норма k. Пусть $c_i = l(e_i)$. Тогда

$$l(a_1e_1 + \ldots + a_ne_n) = a_1c_1 + \ldots + a_nc_n.$$

Нам надо показать, что $\sum\limits_k |c_k|^2 < \infty$. Для этого оценим

$$|c_1|^2 + \ldots + |c_n|^2.$$

Из неравенства $\|l\| \leq K$ следует

$$|a_1c_1 + \ldots + a_nc_n| \leq K\sqrt{|a_1|^2 + \ldots + |a_n|^2}.$$

Это что-то похожее на неравенство Коши-Буняковского, и левая часть максимальна при $a_i = c_i^*$. Подставляя $a_i = c_i^*$, получаем

$$\sqrt{|c_1|^2 + \ldots + |c_n|^2} \leq K.$$

Вот и всё.