1. Асимптотика инвариантов Васильева высших порядков

Лемма 1. *Пусть набор случайных величин* $\xi(T), T > 0$ *таков, что имеются случайные величины* $\eta_n(T), \gamma_n(T) \geq 0, \gamma_n \geq 0, \eta_n$ *такие, что*

- $\forall T\, |\xi(T) - \eta_n(T)| \leq \gamma_n(T)$;
- $\forall n\, \eta_n(T) \xrightarrow[T\to\infty]{d} \eta_n$;
- $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0\ \exists T_0(n)\ \forall T \geq T_0(n)\colon P(\gamma_n(T) > \varepsilon) < \varepsilon$.

Тогда $\xi(T)$ *имеет предел по распределению при* $T \to \infty$*:*

$$\xi(T) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \xi_0.$$

Более того, при этом $\eta_n \xrightarrow[T\to\infty]{d} \xi_0$.

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Выберем n_0 и $T_0(n)$ так, что при $n \geq n_0, T \geq T_0(n)$:

$$P(\gamma_n(T) > \varepsilon) < \varepsilon.$$

Тогда при $n \geq n_0, T \geq T_0(n)$:

$$\mathbb{E}\frac{\gamma_n(T)}{1+\gamma_n(T)} \leq 2\varepsilon.$$

Пусть μ_ξ—распределение случайной величины ξ, и пусть ρ обозначает расстояние Васерштейна нулевого порядка, т.е. для случайных величин ξ, η

$$\rho(\mu_\xi, \mu_\eta) = \inf_{\xi' \overset{d}{=} \xi, \eta' \overset{d}{=} \eta} \mathbb{E}\frac{|\xi' - \eta'|}{1 + |\xi' - \eta'|}.$$

Для каждого $n \geq n_0$ выберем $T_1(n) > T_0(n)$ так, чтобы при $T \geq T_1(n)$ выполнялось следующее условие:

$$\rho(\mu_{\eta_n(T)}, \mu_{\eta_n}) \leq \varepsilon.$$

В силу $T_1(n) > T_0(n)$, при $n \geq n_0, T \geq T_1(n)$ выполнено ещё и

$$\mathbb{E}\frac{\gamma_n(T)}{1+\gamma_n(T)} \leq 2\varepsilon.$$

Имеем тогда при $n \geq n_0$, $T \geq T_1(n)$, учитывая неравенство $|\xi(T) - \eta_n(T)| \leq \gamma_n(T)$:

$$\rho(\mu_{\xi(T)}, \mu_{\eta_n(T)}) \leq \mathbb{E}\frac{|\xi(T) - \eta_n(T)|}{1 + |\xi(T) - \eta_n(T)|} \leq \mathbb{E}\frac{|\gamma_n(T)|}{1 + |\gamma_n(T)|} \leq 2\varepsilon.$$

Далее, имеем при $n \geq n_0$, $T \geq T_1(n)$:

$$\rho(\mu_{\xi(T)}, \mu_{\eta_n}) \leq \rho(\mu_{\xi(T)}, \mu_{\eta_n(T)}) + \rho(\mu_{\eta_n(T)}, \mu_{\eta_n}) \leq 2\varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

Отсюда следует, что для любых $t_1, t_2 \geq T_1(n_0)$ имеет место

$$\rho(\mu_{\xi(t_1)}, \mu_{\xi(t_2)}) \leq \rho(\mu_{\xi(t_1)}, \mu_{\eta_N}) + \rho(\mu_{\xi(t_2)}, \mu_{\eta_{n_0}}) \leq 6\varepsilon.$$

Следовательно, в силу произвольности выбора ε, последовательность $\{\mu_{\xi(T)}\}$ фундаментальна в метрике ρ и имеет слабый предел:

$$\xi(T) \xrightarrow[T\to\infty]{d} \xi_0.$$

Осталось показать, что $\eta_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} \xi_0$. Выберем T_2 так, что при $T \geq T_2$:

$$\rho(\mu_{\xi(T)}, \mu\xi_0) \leq \varepsilon.$$

Имеем тогда при $n \geq N, T \geq \max\{T_1(n), T_2\}$:

$$\rho(\mu_{\xi_0}, \mu_{\eta_n}) \leq \rho(\mu_{\xi_0}, \mu_{\xi(T)}) + \rho(\mu_{\xi(T)}, \mu_{\eta_n}) \leq \varepsilon + 3\varepsilon = 4\varepsilon.$$

Отсюда следует сходимость $\rho(\mu_{\eta_n}, \mu_{\xi_0}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, и доказательство окончено. $\square$

Лемма 2. *Пусть $\varepsilon > 0$, $f \in \mathbb{D}[0,1]$ не имеет скачков величины больше ε. Тогда*

$$\exists n_0 \forall n \geq n_0 \forall k, 0 \leq k \leq 2^n - 1\colon \sup_{s,t\in[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]} |f(s) - f(t)| < \varepsilon.$$

Доказательство. Допустим, это не так. Тогда при каждом n существуют отрезки разбиения, на которых $\sup\limits_{s,t\in[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]} |f(s) - f(t)| \geq \varepsilon$. Построим дерево, в котором вершинами будут такие отрезки. При этом для вершины, соответствующей отрезку $[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]$, дочерними будут вершины, соответствующие отрезкам $[\frac{k}{2^n}, \frac{2k+1}{2^{n+1}}]$ и $[\frac{2k+1}{2^{n+1}}, \frac{k+1}{2^n}]$ (если они входят в дерево). По предположению, наше дерево бесконечно. Значит, в нём есть бесконечная ветвь. В пересечении отрезки, соответствующие вершинам этой ветви, дают некоторую точку x. Эта точка x обладает тем свойством, что в любой её окрестности есть s, t, такие, что $|f(s) - f(t)| \geq \varepsilon$. Следовательно, скачок в точке x не меньше ε. $\square$

Лемма 3. *Пусть $f \in \mathbb{D}[0,1]$, $\varepsilon > 0$ задано. Тогда существует $K > 0$, такое, что при всех достаточно больших n ($n \geq n_0$) выполнено*

$$\sum_{k=0}^{2^n-1} \mathbb{1}_{\sup\limits_{s,t\in[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]} |f(s)-f(t)|>\varepsilon} \leq K,$$

причём при $n \geq n_0$ все отрезки $[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]$, для которых $\sup\limits_{s,t\in[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]} |f(s) - f(t)| > \varepsilon$, содержатся среди отрезков, содержащих точки разрыва величины $\geq \varepsilon$.

Доказательство. Уберём из f все скачки величины $\geq \varepsilon$. Тогда лемма сводится к лемме 2. $\square$

Лемма 4. *Пусть $f, g \in \mathbb{D}[0,1]$ не имеют общих моментов скачков. Тогда*

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \;\; \forall n \geq n_0 \sum_{k=0}^{2^n-1} \mathbb{1}_{\sup\limits_{s,t\in[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]} |f(s)-f(t)|>\varepsilon} \mathbb{1}_{\sup\limits_{s,t\in[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]} |g(s)-g(t)|>\varepsilon} = 0.$$

Доказательство. Согласно лемме 3, при всех достаточно больших n ($n \geq n_0$) неравенства

$$\sup_{s,t\in[\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}]} |f(s)-f(t)| > \varepsilon,$$

$$\sup_{s,t\in[\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}]} |g(s)-g(t)| > \varepsilon$$

могут выполняться лишь для отрезков $[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]$, содержащих разрывы f, g соответственно величины $\geq \varepsilon$. Поскольку разрывов f, g величины $\geq \varepsilon$ конечное число, и все они находятся в разных точках, то при достаточно больших n они будут разделены отрезками разбиения, и при достаточно больших n никакие два таких разрыва не придутся на один отрезок вида $[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]$. □

Лемма 5. *Пусть $f, g \in \mathbb{D}[0,1]$ не имеют общих моментов скачков, $\varepsilon > 0$ фиксировано. Тогда*

$$\sum_{k=0}^{2^n-1} \mathbb{1}_{\sup\limits_{s,t\in[\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}]} |f(s)-f(t)|>\varepsilon} \left| g\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - g\left(\frac{k}{2^n}\right)\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. = 0.$$

Доказательство. По лемме 3, для некоторого $K > 0$ при всех достаточно больших n в интересующей нас сумме не болеее K слагаемых. С другой стороны, по лемме 4, при всех достаточно больших n на всех отрезках $[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]$, которые дают вклад в сумму, имеет место неравенство $\left|g\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - g\left(\frac{k}{2^n}\right)\right| \leq \varepsilon$. Отсюда следует, что наша сумма при достаточно больших n не превосходит $K\varepsilon$. Однако, это ещё не доказывает лемму.

Поэтому усложним наше рассуждение. Выберем произвольное $\delta, 0 < \delta < \varepsilon$. При достаточно больших n все ненулевые слагаемые в сумме не превосходят δ в силу леммы 4, а количество ненулевых слагаемых не более K (константа K та же, что в начале доказательства). Следовательно, при достаточно больших n наша сумма не превосходит $K\delta$. Поскольку δ произвольное, а K фиксировано, то лемма доказана. □

Лемма 6. *Пусть $f, g \in \mathbb{D}[0,1]$ — неубывающие функции без общих моментов скачков, $h \in C[0,\infty)$ — непрерывная функция. Тогда*

$$S_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} \sup_{s,t\in[f(\frac{k}{2^n}),f(\frac{k+1}{2^n})]} (h(s)-h(t))^2 \left| g\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - g\left(\frac{k}{2^n}\right)\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Выберем $\delta > 0$ так, что при любых $s, t \in [f(0), f(1)]$, для которых $|s-t| \leq \delta$, имеет место неравенство $|h(s)-h(t)| \leq \varepsilon$. Этот выбор возмолжен в силу непрерывности h. Разобъём интересующую нас сумму S_n на две части:

$$S_n = G_n + H_n.$$

К G_n отнесём те слагаемые, в которых $f(\frac{k+1}{2^n}) - f(\frac{k}{2^n}) > \delta$. К H_n отнесём те слагаемые, в которых $f(\frac{k+1}{2^n}) - f(\frac{k}{2^n}) \leq \delta$. По лемме 5, учитывая ограниченность функции h на отрезке $[f(0), f(1)]$, получаем $G_n \to 0 (n \to \infty)$. С другой стороны, ясно, что для H_n выполнена оценка $H_n \leq \varepsilon^2(g(1)-g(0))$. Следовательно,

$$\varlimsup_{n\to\infty} S_n \leq \varepsilon^2(g(1)-g(0)).$$

В силу произвольности ε получаем $\varlimsup\limits_{n\to\infty} S_n = 0$, что и завершает доказательство леммы. □

Определение 1. *Будем говорить, что семейство случайных величин $\gamma_{n,T}$ стохастически мало на бесконечности, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n \geq n_0 \ \exists T_0(n) \ \forall T \geq T_0(n) \colon P(\gamma_{n,T} > \varepsilon) < \varepsilon.$$

Определение 2. *Будем говорить, что семейство случайных величин $\gamma_{n,T}$ стохастически ограничено на бесконечности, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists C > 0 \ \exists n_0 \ \forall n \geq n_0 \ \exists T_0(n) \ \forall T \geq T_0(n) \colon P(\gamma_{n,T} > C) < \varepsilon.$$

Лемма 7. *Пусть $\xi_{n,T}$ стохастически мало на бесконечноости, $\eta_{n,T}$ стохастически ограничено на бесконечности. Тогда $\zeta_{n,T} = \eta_{n,T}\xi_{n,T}$ стохастически мало на бесконечности.*

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Выберем C, n_1, n_2 так, что

$$\forall n \geq n_1 \ \exists T_1(n) \ \forall T \geq T_1(n) \colon P(\xi_{n,T} > \varepsilon) < \varepsilon.$$

$$\forall n \geq n_2 \ \exists T_2(n) \ \forall T \geq T_2(n) \colon P(\eta_{n,T} > C) < \varepsilon.$$

Тогда при всех $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}, T \geq T_0(n) = \max\{T_1(n), T_2(n)\}$ имеет место

$$P(\zeta_{n,T} > C\varepsilon) < 2\varepsilon.$$

Лемма доказана. □

Лемма 8. *Если $\varlimsup\limits_{T\to\infty} \xi_T \leq \xi$ п.н., то при любом A*

$$\varlimsup_{T\to\infty} P(\xi_T \geq A) \leq P(\xi \geq A).$$

Доказательство. Если $\varlimsup\limits_{T\to\infty} a_T \leq a$, то

$$\varlimsup_{T\to\infty} \mathbb{1}_{a_T \geq A} \leq \mathbb{1}_{a \geq A}.$$

Итак,

$$\varlimsup_{T\to\infty} \mathbb{1}_{\xi_T \geq A} \leq \mathbb{1}_{\xi \geq A}.$$

В силу леммы Фату,

$$P(\xi \geq A) = \mathbb{E}\mathbb{1}_{\xi \geq A} \geq \mathbb{E} \varlimsup_{T\to\infty} \mathbb{1}_{\xi_T \geq A} \geq \varlimsup_{T\to\infty} \mathbb{E}\mathbb{1}_{\xi_T \geq A} = \varlimsup_{T\to\infty} P(\xi_T \geq A).$$

□

Лемма 9. *Пусть $(\xi^{(T)}, \eta^{(T)}) \xrightarrow[t\to\infty]{fd} (\xi, \eta)$, где ξ, η принимают значения в пространстве $\mathbb{D}[0,1]$ и с вероятностью 1 не имеют общих моментов скачка. Пусть $\varepsilon_0 > 0$ фиксировано,*

$$\gamma_{n,T} = \sum_{k=0}^{2^n-1} \mathbb{1}_{\sup\limits_{s,t\in[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]} |\xi^{(T)}(t) - \xi^{(T)}(s)| > \varepsilon_0} \left| \eta^{(T)}\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - \eta^{(T)}\left(\frac{k}{2^n}\right) \right|.$$

Тогда $\gamma_{n,T}$ — стохастически мало на бесконечности.

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть

$$\gamma_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} \mathbb{1}_{|\xi(\frac{k+1}{2^n})-\xi(\frac{k}{2^n})|\geq\varepsilon_0/2} \left|\eta\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - \eta\left(\frac{k}{2^n}\right)\right|.$$

Тогда $\gamma_n \to 0$ п.н. в силу леммы 5. Выберем n_0 так, что при $n \geq n_0$ $P(\gamma_n \geq \varepsilon) < \varepsilon$. Теперь при $n \geq n_0$ рассуждаем так: для $(\xi^{(T)}(\frac{k}{2^n}), \eta^{(T)}(\frac{k}{2^n}), 0 \leq k \leq 2^n - 1)$ и $(\xi(\frac{k}{2^n}), \eta(\frac{k}{2^n}), 0 \leq k \leq 2^n - 1)$ существует представление Скорохода, реализующее сходимость п.н.:

$$\left(\xi^{(T)}\left(\frac{k}{2^n}\right), \eta^{(T)}\left(\frac{k}{2^n}\right), 0 \leq k \leq 2^n - 1\right) \stackrel{d}{=} \left(\tilde{\xi}^{(T)}\left(\frac{k}{2^n}\right), \tilde{\eta}^{(T)}\left(\frac{k}{2^n}\right), 0 \leq k \leq 2^n - 1\right),$$

$$\left(\xi\left(\frac{k}{2^n}\right), \eta\left(\frac{k}{2^n}\right), 0 \leq k \leq 2^n - 1\right) \stackrel{d}{=} \left(\tilde{\xi}\left(\frac{k}{2^n}\right), \tilde{\eta}\left(\frac{k}{2^n}\right), 0 \leq k \leq 2^n - 1\right),$$

и при фиксированном n

$$\left(\tilde{\xi}^{(T)}\left(\frac{k}{2^n}\right), \tilde{\eta}^{(T)}\left(\frac{k}{2^n}\right), 0 \leq k \leq 2^n - 1\right) \xrightarrow[T\to\infty]{} \left(\tilde{\xi}\left(\frac{k}{2^n}\right), \tilde{\eta}\left(\frac{k}{2^n}\right), 0 \leq k \leq 2^n - 1\right) \text{п.н.}$$

Значит, при фиксированном $n \geq n_0$

$$\varlimsup_{T\to\infty} \tilde{\gamma}_{n,T} \leq \tilde{\gamma}_n,$$

и потому в силу леммы 8

$$\varlimsup_{T\to\infty} P(\gamma_{n,T} \geq \varepsilon) \leq P(\gamma_n \geq \varepsilon).$$

Следовательно, для данного фиксированного $n \geq n_0$ имеем при достаточно больших T:

$$P(\gamma_{n,T} > 2\varepsilon) \leq P(\gamma_n \geq \varepsilon) < \varepsilon.$$

Это и доказывает лемму. $\square$

Лемма 10. *Пусть $\xi^{(T)}, \eta^{(T)}$ — неубывающие неотрицательные процессы, $(\xi^{(T)}, \eta^{(T)}) \xrightarrow[T\to\infty]{fd} (\xi, \eta)$, где ξ, η принимают значения в пространстве $\mathbb{D}[0,1]$ и с вероятностью 1 не имеют общих моментов скачка. $\beta_{n,T}$ —винеровские процессы.*

$$\gamma_{n,T} = \sum_{k=0}^{2^n-1} \sup_{s,t\in[\xi^{(T)}(\frac{k}{2^n}),\xi^{(T)}(\frac{k+1}{2^n})]} |\beta_{n,T}(t) - \beta_{n,T}(s)|^2 \left(\eta^{(T)}\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - \eta^{(T)}\left(\frac{k}{2^n}\right)\right).$$

Тогда $\gamma_{n,T}$ стохастически мало на бесконечности.

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Выберем $C > 0$ так, что

$$P\left(\xi^{(T)}(1) > C\right) < \varepsilon, T > T_0.$$

Выберем $\delta > 0$ так, что для винеровского процесса β

$$P\left(\sup_{s,t\in[0,C],|s-t|\leq\delta} |\beta(t) - \beta(s)| > \varepsilon\right) < \varepsilon.$$

Обозначим

$$G_{n,T}=\sum_{k=0}^{2^n-1}\mathbb{1}_{\xi^{(T)}(\frac{k+1}{2^n})-\xi^{(T)}(\frac{k}{2^n})>\delta}\sup_{s,t\in[\xi^{(T)}(\frac{k}{2^n}),\xi^{(T)}(\frac{k+1}{2^n})]}|\beta_{n,T}(t)-\beta_{n,T}(s)|^2\left(\eta^{(T)}\left(\frac{k+1}{2^n}\right)-\eta^{(T)}\left(\frac{k}{2^n}\right)\right),$$

$$H_{n,T}=\sum_{k=0}^{2^n-1}\mathbb{1}_{\xi^{(T)}(\frac{k+1}{2^n})-\xi^{(T)}(\frac{k}{2^n})\le\delta}\sup_{s,t\in[\xi^{(T)}(\frac{k}{2^n}),\xi^{(T)}(\frac{k+1}{2^n})]}|\beta_{n,T}(t)-\beta_{n,T}(s)|^2\left(\eta^{(T)}\left(\frac{k+1}{2^n}\right)-\eta^{(T)}\left(\frac{k}{2^n}\right)\right).$$

Заметим, что

$$G_{n,T}\le 4\sup_{t\in[0,\xi^{(T)}(1)]}|\beta_{n,T}(t)|^2\sum_{k=0}^{2^n-1}\mathbb{1}_{\xi^{(T)}(\frac{k+1}{2^n})-\xi^{(T)}(\frac{k}{2^n})>\delta}\left(\eta^{(T)}\left(\frac{k+1}{2^n}\right)-\eta^{(T)}\left(\frac{k}{2^n}\right)\right).$$

Тогда $G_{n,T}$ стохастически мало на бесконечности в силу лемм 7, 9 и стохастической ограниченности на бесконечности $\sup\limits_{t\in[0,\xi^{(T)}(1)]}|\beta_{n,T}(t)|^2$. Для $H_{n,T}$ имеем при $T>T_0$:

$$P\left(H_{n,T}>\varepsilon^2\left(\eta^{(T)}(1)-\eta^{(T)}(0)\right)\right)\le P\left(\xi^{(T)}(1)>C\right)+$$
$$+P\left(\sup_{s,t\in[0,C],|s-t|\le\delta}|\beta_{n,T}(t)-\beta_{n,T}(s)|>\varepsilon\right)<2\varepsilon.$$

Поэтому и $\gamma_{n,T}=G_{n,T}+H_{n,T}$ стохастически мало на бесконечности в силу произвольности ε. □

Лемма 11. *Пусть $\eta^{(T)}$ — неубывающие неотрицательные процессы, $(\xi^{(T)},\eta^{(T)})\xrightarrow[t\to\infty]{fd}(\xi,\eta)$, где ξ,η принимают значения в пространстве $\mathbb{D}[0,1]$ и с вероятностью 1 не имеют общих моментов скачка,*

$$\gamma_{n,T}=\sum_{k=0}^{2^n-1}\sup_{s,t\in[\frac{k}{2^n}),\frac{k+1}{2^n}]}\left|\xi^{(T)}(t)-\xi^{(T)}(s)\right|\left(\eta^{(T)}\left(\frac{k+1}{2^n}\right)-\eta^{(T)}\left(\frac{k}{2^n}\right)\right).$$

Тогда $\gamma_{n,T}$ стохастически мало на бесконечности.

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon>0$. Обозначим

$$G_{n,T}=\sum_{k=0}^{2^n-1}\mathbb{1}_{\exists s,t\in[\frac{k}{2^n}),\frac{k+1}{2^n}]:\,|\xi(t)-\xi(s)|\ge\varepsilon}\sup_{s,t\in[\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}]}\left|\xi^{(T)}(t)-\xi^{T}(s)\right|^2\left(\eta^{(T)}\left(\frac{k+1}{2^n}\right)-\eta^{(T)}\left(\frac{k}{2^n}\right)\right),$$

$$H_{n,T}=\sum_{k=0}^{2^n-1}\mathbb{1}_{\forall s,t\in[\frac{k}{2^n}),\frac{k+1}{2^n}]:\,|\xi(t)-\xi(s)|\le\varepsilon}\sup_{s,t\in[\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}]}\left|\xi^{(T)}(t)-\xi^{(T)}(s)\right|^2\left(\eta^{(T)}\left(\frac{k+1}{2^n}\right)-\eta^{(T)}\left(\frac{k}{2^n}\right)\right).$$

Тогда $G_{n,T}$ стохастически мало на бесконечности в силу лемм 7, 9 и стохастической ограниченности $\sup\limits_{s\in[0,1]}|\xi^{(T)}(s)|$.

Для $H_{n,T}$ имеем при $T>T_0$

$$H_{n,T}\le\varepsilon^2\left(\eta^{(T)}(1)-\eta^{(T)}(0)\right).$$

Поэтому и $\gamma_{n,T}=G_{n,T}+H_{n,T}$ стохастически мало на бесконечности в силу произвольности ε. □

Лемма 12. *Пусть ξ — случайный процесс со значениями в $\mathbb{D}[0,1]$ без фиксированных моментов скачка, η — семимартингал с траекториями в $\mathbb{D}[0,1]$. Тогда сумма*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \xi\left(\frac{k}{n}\right)\left(\eta\left(\frac{k+1}{n}\right) - \eta\left(\frac{k}{n}\right)\right)$$

сходится по вероятности к $\int\limits_0^1 \xi(s-)d\eta(s)$.

Доказательство. Эта сходимость выполняется в силу теоремы об ограниченной сходимости для стохастических интегралов (см. [2], глава 8). Поясним более детально. Согласно [1], теорема 26.4, выполнено соотношение: если X — семимартингал, $V_n \to 0$ и $|V_n| \le V$, где все процессы V_n, V — предсказуемые и локально ограниченные, то

$$\sup_{t\in[0,1]} \int\limits_0^t V_n(s)dX(s) \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0.$$

Положим

$$X(s) = \eta(s), s \ge 0,$$
$$H_n(s) = \xi\left(\frac{[ns]}{n}\right),$$
$$G_n(s) = \xi(s-),$$

$$V_n(s) = G_n(s) - H_n(s).$$

В силу непрерывности слева процесса $\xi(s-)$, имеем

$$\xi\left(\frac{[ns]}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi(s).$$

(Заметим, что с вероятностью 1 процесс ξ вообще не имеет разрывов в рациональных точках, и потому с вероятностью 1 сходимость имеет место для всех s). Отсюда заключаем, что с вероятностью 1 имеет место

$$V_n \to 0, n \to \infty.$$

В роли мажорирующего процесса возьмём

$$V(t) = 2 \sup_{s\in[0,t]} |\xi(s-)|.$$

Этот процесс является непрерывным слева, а потому предсказуемым и локально ограниченным. □

Теорема 1. *Пусть $\xi^{(T)}, \eta^{(T)}$ — непрерывные семимартингалы на $[0,1]$ относительно общей фильтрации, причём*

$$\left(\xi^{(T)}, \eta^{(T)}, \left\langle \xi^{(T)} \right\rangle, \left\langle \eta^{(T)} \right\rangle\right) \xrightarrow[T\to\infty]{fd} (\xi, \eta, \zeta_1, \zeta_2),$$

где ξ, η принимают значения в пространстве $\mathbb{D}[0,1]$; ζ_1, ζ_2 принимают значения в пространстве $\mathbb{D}[0,1]$ и с вероятностью 1 не имеют общих моментов скачка.

$$\int\limits_0^1 \xi^{(T)}(s)d\eta^{(T)}(s) \xrightarrow[T\to\infty]{d} \int\limits_0^1 \xi(s-)d\eta(s).$$

Доказательство. Пусть

$$\gamma_{n,T} = \int\limits_0^1 \xi^{(T)}(s)d\eta^{(T)}(s) - \sum_{k=0}^{2^n-1} \xi^{(T)}\left(\frac{k}{2^n}\right)\left(\eta^{(T)}\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - \eta^{(T)}\left(\frac{k}{2^n}\right)\right).$$

Тогда

$$\gamma_{n,T} = \sum_{k=0}^{2^n-1} \int\limits_{\frac{k}{2^n}}^{\frac{k+1}{2^n}} \left(\xi^{(T)}(s) - \xi^{(T)}\left(\frac{k}{2^n}\right)\right) d\eta^{(T)}(s) = w_{n,T}\left(\sum_{k=0}^{2^n-1} \int\limits_{\frac{k}{2^n}}^{\frac{k+1}{2^n}} \left(\xi^{(T)}(s) - \xi^{(T)}\left(\frac{k}{2^n}\right)\right)^2 d\left\langle \eta^{(T)}\right\rangle_s\right),$$

где $w_{n,T}$ — некоторые винеровские процессы. Пусть $\beta_{n,T}$ — ассоциированные с $\xi^{(T)}$ винеровские процессы. Имеем

$$\mu_{n,T} = \sum_{k=0}^{2^n-1} \int\limits_{\frac{k}{2^n}}^{\frac{k+1}{2^n}} \left(\xi^{(T)}(s) - \xi^{(T)}\left(\frac{k}{2^n}\right)\right)^2 d\left\langle \eta^{(T)}\right\rangle_s \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{2^n-1} \sup_{s,t\in[\left\langle \xi^{(T)}\right\rangle(\frac{k}{2^n}), \left\langle \xi^{(T)}\right\rangle(\frac{k+1}{2^n})]} |\beta_{n,T}(t) - \beta_{n,T}(s)|^2 \left(\left\langle \eta^{(T)}\right\rangle\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - \left\langle \eta^{(T)}\right\rangle\left(\frac{k}{2^n}\right)\right).$$

За счёт леммы 10 $\mu_{n,T}$ стохастически мало на бесконечности. Тогда и $\gamma_{n,T} = w_{n,T}(\mu_{n,T})$ стохастически мало на бесконечности. За счёт лемм 1, 12 получаем нужное утверждение. □

Теорема 2. *Пусть $(\xi^{(T)}, \eta^{(T)}, \left\langle \xi^{(T)}\right\rangle, \left\langle \eta^{(T)}\right\rangle) \xrightarrow[T\to\infty]{fd} (\xi, \eta, \zeta_1, \zeta_2)$, где ξ, η принимают значения в пространстве $\mathbb{D}[0,1]$; ζ_1, ζ_2 принимают значения в пространстве $\mathbb{D}[0,1]$ и с вероятностью 1 не имеют общих моментов скачка. Тогда*

$$\int\limits_0^1 \xi^{(T)}(s)^2 d\left\langle \eta^{(T)}\right\rangle(s) \xrightarrow[T\to\infty]{d} \int\limits_0^1 \xi(s-)^2 d\left\langle \zeta_2\right\rangle(s).$$

Доказательство. Пусть

$$\gamma_{n,T} = \int\limits_0^1 \xi^{(T)}(s)^2 d\left\langle \eta^{(T)}\right\rangle(s) - \sum_{k=0}^{2^n-1} \xi^{(T)}\left(\frac{k}{2^n}\right)^2 \left(\left\langle \eta^{(T)}\right\rangle\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - \left\langle \eta^{(T)}\right\rangle\left(\frac{k}{2^n}\right)\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{2^n-1} \int\limits_{\frac{k}{2^n}}^{\frac{k+1}{2^n}} \left(\xi^{(T)}(s)^2 - \xi^{(T)}\left(\frac{k}{2^n}\right)^2\right) d\left\langle \eta^{(T)}\right\rangle(s).$$

Имеем

$$|\gamma_{n,T}| \le \sum_{k=0}^{2^n-1} \sup_{s,t\in[\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}]} \left|\xi^{(T)}(t)^2 - \xi^{(T)}(s)^2\right| \left(\langle\eta^{(T)}\rangle\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - \langle\eta^{(T)}\rangle\left(\frac{k}{2^n}\right)\right).$$

За счёт леммы 11 $\gamma_{n,T}$ стохастически мало на бесконечности. За счёт леммы 1 получаем нужное утверждение. □

2. Процессы, порождённые винеровским процессом

Определение 3. *Пусть β — винеровский процесс. Семейством процессов $\mathcal{U}$, порождённым β, будем называть семейство всех процессов вида*

$$\int \dots \int d\eta_1 \dots d\eta_n,$$

где $d\eta_k(s) = d\beta(s)$ или $d\eta_k(s) = ds$ при каждом k. В частности, процессы $\xi_1(t) = t$, $\xi_2(t) = \beta(t), \xi_3(t) = \int\limits_0^t \beta(s)d\beta(s)$, $\xi_4(t) = \int\limits_0^t \beta(s)d\beta(s), \xi_5(t) = \int\limits_0^t \xi_2(s)ds$ входят в семейство $\mathcal{U}$. Ясно, что все процессы, порождённые β, являются непрерывными семимартингалами относительно фильтрации, порождённой β.

Лемма 13. *Если L — процесс, порождённый процессом β, то при любом $n \ge 0$*

$$X_t = \int\limits_0^t \beta^n(s)dL_s$$

представляется в виде $X = F(\beta)$, где F — некоторое непрерывное отображение

$$F\colon C[0,\infty) \to C[0,\infty).$$

В частности, при $n = 0$ получаем, что сам процесс L представляется в таком виде.

Доказательство. Доказательство проведём индукцией по минимальной длине цепочки процессов, порождающей L. Проверим, что X представляется в виде $F(\beta)$. Два случая

- $X_t = \int\limits_0^t Y_s ds$, и Y — процесс, порождённый β, для которого утверждение леммы доказано. Тогда

  $$\int\limits_0^t \beta^n(s)dX_s = \int\limits_0^t \beta^n(s)Y_s ds,$$

  и ясно, что это — непрерывный функционал от β.

- $X_t = \int\limits_0^t Y_s d\beta(s)$, и для Y утверждение доказано. Тогда

$$\int\limits_0^t \beta^n(s) dX_s = \int\limits_0^t \beta^n(s) Y_s d\beta(s) = \frac{1}{n}\int\limits_0^t Y_s d\beta^n(s) - \frac{n-1}{2}\int\limits_0^t \beta(s)^{n-2} Y_s ds =$$

$$= \frac{1}{n} Y_t \beta^n(t) - \frac{1}{n}\int\limits_0^t \beta^n(s) dY_s - \frac{1}{n}\left\langle Y, \beta^n \right\rangle_t - \frac{n-1}{2}\int\limits_0^t \beta(s)^{n-2} Y_s d.$$

  Для всех слагаемых, кроме $\frac{1}{n}\left\langle Y, \beta^n \right\rangle_t$, ясно, что они являются непрерывными функционалами от β. Для Y возможны 2 случая:

  - $Y_t = \int\limits_0^t Q_s ds$, и в этом случае $\left\langle Y, \beta^n \right\rangle_t = 0$;
  - $Y_t = \int\limits_0^t Q_s d\beta(s)$, и в этом случае $\frac{1}{n}\left\langle Y, \beta^n \right\rangle_t = \int\limits_0^t \beta(s)^{n-1} Q_s ds$, и ясно, что это — непрерывный функционал от β.

  Лемма доказана.

$\square$

3. Асимптотика инвариантов Васильева

Определение 4. *Пусть $Y_1^{(T)}, \ldots, Y_n^{(T)}$ — семейства непрерывных семимартингалов относительно общей (при каждом фиксированном T) фильтрации. Назовём совокупностью семейств процессов, порождаемой $Y_1, \ldots, Y_n$, наименьшую совокупность S, такую, что*

- *при любом $k = 1, \ldots, n$: $Y_k^{(T)} \in S, \left\langle Y_k^{(T)} \right\rangle \in S$;*
- *если $U^{(T)} \in S$, то при любом k семейства $V^{(T)}, Q^{(T)}$, определяемые равенствами*

$$V_t^{(T)} = \int\limits_0^t U^{(T)}(s) dY_k^{(T)}(s), t \geq 0$$

$$Q_t^{(T)} = \int\limits_0^t U^{(T)}(s) d\left\langle Y_k^{(T)} \right\rangle(s), t \geq 0,$$

  лежат в S: $V^{(T)} \in S, Q^{(T)} \in S$.

Теорема 3. *Пусть $Y^{(T)}$ — семейство непрерывных локальных мартингалов, такое, что*

$$Y^{(T)}(t) = \beta^{(T)}\left(\left\langle Y^{(T)} \right\rangle_t\right),$$

и для любых $t_1, \ldots, t_k$ случайные элементы

$$(\beta^{(T)}, \left\langle Y^{(T)} \right\rangle(t_1), \ldots, \left\langle Y^{(T)} \right\rangle(t_k)) \in C[0,\infty) \times \mathbb{R}^k$$

сходятся по распределению при $T \to \infty$. Пусть S — совокупность семейств, порождённых $Y^{(T)}$. Тогда для любого семейства $U^{(T)} \in S$:

$$(Y^{(T)}, U_1^{(T)}, \dots, U_k^{(T)})$$

имеет предел в смысле конечномерных распределений:

$$\left(Y^{(T)}, \left\langle Y^{(T)} \right\rangle, U_1^{(T)}, \dots, U_m^{(T)}\right) \xrightarrow[T\to\infty]{fd} (Y, Q, U_1, \dots, U_k),$$

и все точки разрыва процессов $Y, U_1, \dots, U_k$ с вероятностью 1 лежат среди точек разрыва процесса Q.

Доказательство. Из леммы 13 следует, что все процессы из указанной совокупности представляются в виде

$$U^{(T)} = F(\beta^{(T)})(\langle Y^{(T)} \rangle),$$

где $F\colon C[0,\infty) \to C[0,\infty)$ — непрерывный функционал от винеровского процесса. Отсюда всё сразу следует. □

Теорема 4. *Пусть $X^{(T)}, Y^{(T)}$ — непрерывные семимартингалы относительно общей (при каждом фиксированном T) фильтрации, причём*

$$(X^{(T)}, Y^{(T)}) \xrightarrow[T\to\infty]{d} (X, Y),$$

а процессы X, Y с вероятностью 1 не имеют общих моментов скачка. Пусть также семейство $Y^{(T)}$ удовлетворяет условиям теоремы 3. Обозначим

$$L_0^{(T)}(t) = Y^{(T)}(t),$$

$$L_{k+1}^{(T)}(t) = \int\limits_0^t L_k^{(T)}(s) dY^{(T)}(s).$$

Тогда при любом k для любых семейств $U^{(T)}$ из совокупности, порождённой $Y^{(T)}$ (см. теорему 3), конечномерные распределения процессов

$$\int\limits_0^t L_k^{(T)}(s) U^{(T)}(s) dY^{(T)}(s), \int\limits_0^t L_k^{(T)}(s) U^{(T)}(s) d\left\langle Y^{(T)} \right\rangle(s)$$

сходятся при $T \to \infty$ совместно с $Y^{(T)}$, причём все скачки предельных процессов совпадают со скачками процесса Y.

Доказательство. Проведём доказательство индукцией по k. База индукции проверяется за счёт теорем 1, 2. Шаг индукции: пусть утверждение теоремы проверено для k, проверим для $k+1$. Обозначим $V^{(T)}(t) = \int\limits_0^t U_k^{(T)}(s) dY_k^{(T)}(s)$, $Q_t = \int\limits_0^t U_k^{(T)}(s) d\left\langle Y_k^{(T)} \right\rangle(s)$. Ясно, что процессы $V^{(T)}, Q^{(T)}$ имеют пределы в смысле сходимости конечномерных распределений. Имеем

$$L_{k+1}^{(T)}(t) = \int\limits_0^t L_k^{(T)}(s) dY^{(T)}(s),$$

$$\int_0^t L_{k+1}^{(T)}(s)U^{(T)}(s)dY^{(T)}(s) = \int_0^t L_{k+1}^{(T)}(s)dV^{(T)}(s) = L_{k+1}^{(T)}(t)V^{(T)}(t)-$$

$$-\int_0^t L_k^{(T)}(s)V^{(T)}(s)dY^{(T)}(s) - \left\langle L_{k+1}^{(T)}, V^{(T)}\right\rangle_t = \int_0^t L_{k+1}^{(T)}(s)dV^{(T)}(s) =$$

$$= L_{k+1}^{(T)}(t)V^{(T)}(t) - \int_0^t L_k^{(T)}(s)V^{(T)}(s)dY^{(T)}(s) - \int_0^t L_k^{(T)}(s)U^{(T)}(s)d\left\langle Y^{(T)}\right\rangle_s,$$

и по предположению индукции имеем сходимость конечномерных распределений для

$$\int_0^t L_{k+1}^{(T)}(s)U^{(T)}(s)dY^{(T)}(s).$$

Далее,

$$\int_0^t L_{k+1}^{(T)}(s)U^{(T)}(s)d\left\langle Y^{(T)}\right\rangle(s) = \int_0^t L_{k+1}^{(T)}(s)dQ^{(T)}(s) = L_{k+1}^{(T)}(t)Q^{(T)}(t)-$$

$$-\int_0^t L_k^{(T)}(s)Q^{(T)}(s)dY^{(T)}(s) - \left\langle L_{k+1}^{(T)}, V^{(T)}\right\rangle_t = \int_0^t L_{k+1}^{(T)}(s)dV^{(T)}(s) =$$

$$= L_{k+1}^{(T)}(t)V^{(T)}(t) - \int_0^t L_k^{(T)}(s)V^{(T)}(s)dY^{(T)}(s) - \int_0^t L_k^{(T)}(s)U^{(T)}(s)d\left\langle Y^{(T)}\right\rangle_s,$$

и по предположению индукции имеем сходимость конечномерных распределений для

$$\int_0^t L_{k+1}^{(T)}(s)U^{(T)}(s)d\left\langle Y^{(T)}\right\rangle(s).$$

□

Теорема 5. *Пусть $Y_1^{(T)}, \dots, Y_n^{(T)}$ — семейства непрерывных локальных мартингалов относительно общей (при каждом фиксированном T) фильтрации, такие, что*

$$(Y_1^{(T)}, \dots, Y_n^{(T)}) \xrightarrow[T\to\infty]{fd} (Y_1, \dots, Y_n),$$

причём с вероятностью 1 процессы $Y_1, \dots, Y_n$ попарно не имеют общих моментов скачка, и при любом k выполнено хотя бы одно из двух условий

- *семейство $Y_k^{(T)}$ удовлетворяет условиям теоремы 3;*
- *предельный процесс Y_k не имеет точек разрыва с вероятностью 1, а характеристики $\left\langle Y_k^{(T)}\right\rangle$ совпадают с характеристиками $\left\langle Y_l^{(T)}\right\rangle$ при некотором $l \neq k$, причём семейство $Y_l^{(T)}$ удовлетворяет условиям теоремы 3.*

Пусть S — совокупность семейств процессов, порождаемая $Y_1, \dots, Y_n$. Тогда для любых $X_1, \dots, X_k \in S$ случайный вектор

$$(X_1^{(T)}, \dots, X_k^{(T)})$$

сходится при $T \to \infty$ в смысле сходимости конечномерных распределений.

Доказательство. Следует из теоремы 4. $\square$

Пусть $Z_k(t), t \geq 1$ — двумерные броуновские движения, выходящее из попарно различных точек плоскости. Пусть $Z_{kl}(t) = \|Z_k(t) - Z_l(t)\|, R_{kl}(t) = |Z_{kl}(t)|$, θ_{kl} — угол обхода процесса Z_{kl} вокруг начала координат к моменту времени t, $\theta_{kl}(1) = 0$. Введём, следуя [3], процессы X_{kl} с помощью экспоненциальной замены времени для Z_{kl}:

$$X_{kl}(t) = e^{-t/2} Z_{kl}(e^t), t \geq 0.$$

Тогда $X_{kl}(t)$ — двумерный процесс Орнштейна-Уленбека. Пусть $\alpha_{kl}(t) = \theta_{kl}(e^t)$ — угол обхода процесса X_{kl} вокруг начала координат к моменту времени t. Пусть

$$\phi_{kl}^{(T)}(t) = \frac{\alpha_{kl}(tT)}{T/2}, r_{kl}^{(T)} = \frac{\ln R_{kl}(e^{tT})}{T/2}, T > 0.$$

Имеют место сходимости в смысле конечномерных распределений

$$\phi_{kl}^{(T)} \xrightarrow[T\to\infty]{fd} \xi, r_{kl}^{(T)} \xrightarrow[T\to\infty]{fd} \eta,$$

где ξ — процесс Коши, $\eta(t) = t$. Применим теорему 5 к семействам непрерывных локальных мартингалов $\phi_{kl}^{(T)}, r_{kl}^{(T)}$.

Теорема 6. *Пусть $\mathfrak{S}$ — совокупность семейств процессов, порождаемая*

$$\phi_{kl}^{(T)}, r_{kl}^{(T)}, 1 \leq k < l \leq n,$$

Тогда для любых $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{S}$ случайный вектор

$$(X_1^{(T)}, \dots, X_k^{(T)})$$

сходится при $T \to \infty$ в смысле сходимости конечномерных распределений

4. Асимптотика инварианта второго порядка с идентификацией предельного процесса

Воспользуемся результатом предыдущего раздела для идентификации предельного распределения.

Пусть $\theta(t)$ — угол обхода вокруг начала координат броуновского движения, выходящего из точки $(1,0)$ в момент 1, к моменту времени t, $\theta(1) = 0$. Обозначим

$$\alpha(t) = \theta(e^t), \phi_T(t) = \frac{\alpha(tT)}{T}.$$

Мы знаем, что конечномерные распределения процесса ϕ_T сходятся при $T \to \infty$ к конечномерным распределениям процесса Коши C:

$$\phi_T \xrightarrow[T\to\infty]{fd} C.$$

Покажем теперь, что для независимых процессов $\phi^{(1)}, \phi^{(2)}$ имеет место сходимость конечномерных распределений

$$\int\limits_0^t \phi_T^{(1)}(s)d\phi_T^{(2)}(s) \xrightarrow[T\to\infty]{fd} \int\limits_0^t C_1(s-)dC_2(s),$$

где C_1, C_2 — независимые процессы Коши.

Для начала проверим, что интеграл

$$\int\limits_0^t C_1(s-)dC_2(s)$$

корректно определён.

Согласно [1], соответствующий интеграл определён, если $C_1(s-)$ является локально ограниченным процессом, а C_2 — семимартиннгал. Проверим, что это так.

Утверждение 1. *Процесс $X(s) = C(s-)$, где C — процесс Коши, является локально ограниченным.*

Доказательство. Нам нужно проверить существование последовательности моментов остановки $\tau_n \to \infty$, такой, что процессы X^{τ_n} являются ограниченными. Выберем

$$\tau_n = \inf\{s\colon |X(s)| > n\}.$$

Ясно, что $|X^{\tau_n}| \le n$, поскольку процесс X непрерывен слева.

Более общо, можно сказать, что любой непрерывный слева ограниченный с вероятностью 1 на каждом конечном интервале случайный процесс является локально ограниченным. □

Утверждение 2. *Процесс Коши $C(s)$ является семимартингалом.*

Доказательство. Согласно [1], семимартингалом является непрерывный справа согласованный случайный процесс X, допускающий представление

$$X = M + A,$$

где M — локальный мартингал, A — процесс локально конечной вариации, $A(0) = 0$. Выделим из процесса Коши C все скачки величины более 1 и объединим их в процесс A. Тогда $C - A$ будет локальным мартингалом с ограниченными скачками, и потому даже локально квадратично интегрируемым мартингалом. Процесс A имеет конечно много скачков на каждом конечном интервале, поэтому, взяв моменты остановки $\tau_n = n$, получим: A^{τ_n} — имеет локально конечную вариацию (мы не говорим “локально ограниченную”!) □

Утверждение 3. *Сумма*

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_1\left(\frac{k}{n}\right)\left(C_2\left(\frac{k+1}{n}\right) - C_2\left(\frac{k}{n}\right)\right)$$

сходится по вероятности к $\int\limits_0^1 C_1(s-)dC_2(s)$.

Доказательство. Эта сходимость выполняется в силу теоремы об ограниченной сходимости для стохастических интегралов (см. Мейер). Поясним более детально. Согласно [1], теорема 26.4, выполнено соотношение: если X — семимартингал, $V_n \to 0$ и $|V_n| \leq V$, где все процессы V_n, V — предсказуемые и локально ограниченные, то

$$\sup_{t\in[0,1]} \int\limits_0^t V_n(s)dX(s) \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0.$$

Положим

$$X(s) = C_2(s), s \geq 0,$$
$$H_n(s) = C_1\left(\frac{[ns]}{n}\right),$$
$$G_n(s) = C_1(s-),$$

$$V_n(s) = G_n(s) - H_n(s).$$

В силу непрерывности слева процесса $C_1(s-)$, имеем

$$C_1\left(\frac{[ns]}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} C_1(s).$$

(Заметим, что с вероятностью 1 процесс C_1 вообще не имеет разрывов в рациональных точках, и потому с вероятностью 1 сходимость имеет место для всех s). Отсюда заключаем, что с вероятнсотью 1 имеет место

$$V_n \to 0 (n \to \infty).$$

В роли мажорирующего процесса возьмём

$$V(t) = 2 \sup_{s\in[0,t]} |C_1(s-)|.$$

Этот процесс является непрерывным слева, а потому предсказуемым и локально ограниченным. □

Утверждение 4. *Имеет место сходимость*

$$\int\limits_0^1 \phi_T^{(1)}(s)d\phi_T^{(2)}(s) \xrightarrow[T\to\infty]{d} \int\limits_0^1 C_1(s-)dC_2(s).$$

Доказательство. Применим лемму **??**. Положим

$$\xi(T) = \int\limits_0^1 \phi_T^{(1)}(s) d\phi_T^{(2)}(s),$$

$$\eta_n(T) = \sum_{k=0}^{n-1} \phi_T^{(1)}\left(\frac{k}{n}\right)\left(\phi_T^{(2)}\left(\frac{k+1}{n}\right) - \phi_T^{(2)}\left(\frac{k}{n}\right)\right),$$

$$\eta_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_1\left(\frac{k}{n}\right)\left(C_2\left(\frac{k+1}{n}\right) - C_2\left(\frac{k}{n}\right)\right).$$

По лемме **??** получаем, что $\xi(T) \xrightarrow[T\to\infty]{d} \xi_0$, и (что позволяет нам идентифицировать предел) $\eta_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} \xi_0$.

По утверждению 3, получаем

$$\eta_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} \int\limits_0^1 C_1(s-) dC_2(s).$$

Таким образом,

$$\xi(T) \xrightarrow[T\to\infty]{d} \int\limits_0^1 C_1(s-) dC_2(s).$$

□

Список литературы

[1] Kallenberg O. Foundations of modern probability. — Springer, 2002. — 638 p.

[2] Dellacherie, Meyer, J. P. Probabilities and potential B. Theory of martingales. — North-Holland Publishing Company, 1982. — 482 p.

[3] Jean Bertoin, Wendelin Werner. Asymptotic windings of planar brownian motion revisited via the Ornstein-Uhlenbeck process // Seminaire de probabilites de Strasbourg (1994),Vol. 28, pp. 138–152.