Домашняя работа 4 — Кузнецов

1 Задание 4

1. C31. $SAT \leq_p 3 - SAT$ с сохранением числа выполняющих наборов.

   Пусть имеется некоторая КНФ, не являющаяся 3-КНФ. Выполним такое преобразование: возьмём её дизъюнкт $a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_n$ с $n > 3$ и заменим на

   $$(a_1 \vee \ldots \vee a_{n-2} \vee b) \wedge (\neg b \vee a_{n-1} \vee a_n) \wedge (b \vee \neg a_{n-1}) \wedge (b \vee \neg a_n),$$

   где b — новая переменная, не входящая в исходную КНФ.

   Если $a_1 = t_1, \ldots, a_n = t_n, \ldots$ был выполняющий набор для исходной КНФ, то

   $$a_1 = t_1, \ldots, a_n = t_n, b = t_{n-1} \vee t_n, \ldots$$

   — выполняющий набор для новой КНФ. Наоборот, если

   $$a_1 = t_1, \ldots, a_n = t_n, b = t, \ldots$$

   — выполняющий набор для новой КНФ, то с необходимостью из того, что

   $$(\neg b \vee a_{n-1} \vee a_n) \wedge (b \vee \neg a_{n-1}) \wedge (b \vee \neg a_n)$$

   выполнено при $b = t, a_{n-1} = t_{n-1}, a_n = t_n$, следует $t = t_{n-1} \vee t_n$ (действительно, если t истинно, то одно из t_{n-1}, t_n истинно; если t ложно, то оба t_{n-1}, t_n ложны), и

   $$a_1 = t_1, \ldots, a_n = t_n, \ldots$$

   — выполняющий набор для исходной КНФ. Такким образом, наши операции не меняют количества выполняющих наборов. За некоторое количество таких операций сведём нашу КНФ к 3-КНФ.

2. C17. a) Язык USAT coNP-трудный.
   Язык выполнимых 3-SAT NP-полный, значит, язык невыполнимых 3-SAT coNP-полный. Сведём его к USAT. Пусть $F(x_1, \ldots, x_n)$ — некоторая $3-SAT$. Построим по ней формулу

   $$A(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n) \vee F(x_1, \ldots, x_n) \vee F(\neg x_1, \ldots, \neg x_n).$$

   Ясно, что F невыполнима тогда и только тогда, когда A имеет единственный выполняющий набор $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$. Формулу A можно записать в КНФ, поскольку

   $$(a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c),$$

   то есть И и ИЛИ ведут себя как сложение и умножение, и для них выполнен дистрибутивный закон. Раскроем скобки в "произведении" (дизъюнкции) трёх "сумм" (конъюнкций) для A — и получим 7-КНФ. Тем самым построено сведение 3-SAT к USAT.