Упрощённое изложение интеграла Лебега

Изложим интеграл Лебега очень просто. Для этого будем считать, что пространство X с мерой μ имеет меру 1:

$$\mu(X) = 1,$$

а функция $f\colon X \to \mathbb{R}$, которую мы собираемся интегрировать, ограничена. Тогда основные теоремы об интеграле Лебега докажутся очень просто. На самом деле, сложности возникают именно из-за случаев пространств с бесконечной мекрой и неограниченных функций.

Определим интеграл Лебега $\int\limits_X f d\mu$ для простых функций стандартным образом. Обозначим (для простых f)

$$If = \int\limits_X f d\mu.$$

Рассмотрим нормированное пространство F ограниченных на X функций $f\colon X \to \mathbb{R}$ с нормой $\|f\| = \sup\limits_{x \in X} |f(x)|$. Линейных оператор I определён на множестве простых ограниченных функций и имеет норму 1 на этом множестве. Значит, он продолжается до линейного оператора с нормой 1 на замыкании множества простых ограниченных функций в F. В этом замыкании лежат все ограниченные измеримые функции (стандартная лемма). Вот и всё, определили интеграл от ограниченных измеримых функций.

Теорема 0.1. *(Теорема Лебега об ограниченной сходимости, упрощённый вариант) Если $f_n \to f$ поточечно на X и существует $C > 0$, такое, что*

$$\forall x \in X \ \ \forall n \in \mathbb{N} \ \ |f_n(x)| \le C,$$

то

$$\int\limits_X f_n d\mu \to \int\limits_X f d\mu, n \to \infty.$$

В силу линейности оператора I, достаточно показать, что если $f_n \to 0$ поточечно на X и $\forall x \in X \ \ \forall n \in \mathbb{N} \ \ |f_n(x)| \le C$, то

$$\int\limits_X f_n d\mu \to 0, n \to \infty.$$

В силу поточечной сходимости $f_n \to 0$ для произвольного $\varepsilon > 0$ существует n_0, такое, что при $n > n_0$

$$\mu(\{x \in X \colon |f_n(x)| > \varepsilon\}) < \varepsilon.$$

Тогда при таких n

$$\left| \int\limits_X f_n d\mu \right| \le C\varepsilon + \varepsilon.$$

Вот и всё.