Комбинаторика — задачи

Исходная мотивировка для решения задач по комбинаторике — научиться быстро доказывать лемму Сауэра.

1 Олимпиадные задачи

1. Задача 96.100 из петербургских мат олимпиад. Будем строить множество B, по очереди добавляя в него точки из A_i. На i-м шаге мы добавляем точки из A_i в количестве

$$i - |A_i \cap (\cup_{k=1}^{i-1} A_k)|.$$

При этом все добавляемые точки мы выбираем так, чтобы они не лежали в

$$A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_{i+k(i)},$$

где $k(i) = \frac{i^2-i}{2}$. Почему таких точек найдётся хотя бы i? Потому что в пересечении A_i с указанными множествами не более

$$2(1 + 2 + \ldots + (i-1)) + 2ik(i)$$

элементов. Необходимо, чтобы

$$2(1 + 2 + \ldots + (i-1)) + 2ik(i) \leq i^3 - i,$$

$$(i-1)i + 2ik(i) \leq i^3 - i,$$

$$i - 1 + 2k(i) \leq i^2 - 1,$$

$$k(i) \leq \frac{i^2 - i}{2}.$$

Что остаётся проверить? Что на каждом этапе, когда мы проходим множество A_p, количество точек, которые уже выбраны в A_p, то есть количество выбранных точек в

$$A_p \cap (\cup_{i=1}^{p-1} A_i),$$

не превосходит p. При этом, если $i+k(i) \geq p$, $i < p$, то те точки, что мы выбирали на i-м шаге, когда рассматривали A_i, в A_p не лежат. Значит, остаётся проверить, что количество уже выбранных точек в

$$\cup_{i=1}^{s} A_i$$

не превосходит p, где s—максимальное целое, такое, что

$$s + k(s) = \frac{s^2 + s}{2} < p.$$

Но количество выбранных точек в A_i есть i, и общее количесво выбранных точек в

$$\cup_{i=1}^{s} A_i$$

не превосходит

$$1 + 2 + \ldots + s = \frac{s^2 + s}{2},$$

а это меньше p по выбору s. Всё доказано.