Вероятность — задачи

1 Kallenberg 2002 — Глава 4

1.
2.
3.

2 Kallenberg 2002 — Глава 5

1.
2.
3.

3 Kallenberg 2002 — Глава 6. Условное матожидание

Как доказать предложение 6.6 из Калленберга? В первую сторону: дано, что

$$P(H \mid \mathcal{F}, \mathcal{G}) = P(H \mid \mathcal{G}), H \in \mathcal{H}$$

Покажем, что

$$\mathcal{F} \perp\!\!\!\perp_{\mathcal{G}} \mathcal{H}.$$

Для этого надо показать, что при $F \in \mathcal{F}, H \in \mathcal{H}$

$$P^{\mathcal{G}}(F \cap H) = P^{\mathcal{G}}F \times P^{\mathcal{G}}H.$$

Иными словами,

$$\mathbb{E}(1_{F \cap H} \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(1_F \mid \mathcal{G}) \times \mathbb{E}(1_H \mid \mathcal{G}).$$

Имеем

$$\mathbb{E}(1_{F\cap H} \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(1_F 1_H \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(1_F 1_H \mid \mathcal{F},\mathcal{G}) \mid \mathcal{G}) =$$
$$= \mathbb{E}(1_F \mathbb{E}(1_H \mid \mathcal{F},\mathcal{G}) \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(1_F \mathbb{E}(1_H \mid \mathcal{G}) \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(1_H \mid \mathcal{G}) \times \mathbb{E}(1_F \mid \mathcal{G}).$$

1.

2.

3.

4 Kallenberg 2002 — Глава 7

1.

2.

3.

5 Kallenberg 2002 — Глава 12

1.

2.

3.

6 Protter — Глава 2

1. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна за исключением одной точки, в которой у неё скачок. Показать, что $X_t = f(B_t)$ не семимартингал.

2.

3.