

Топология — задачи

1 Прасолов-1

1. 1.1.

2. 2.1. Отображения

$$f(A, B) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, g(A, B) = \begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

гомотопны как отображения $GL(n, \mathbb{R}) \times GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(2n, \mathbb{R})$.
Докажем в несколько этапов.

Лемма 1.1. *Отображения*

$$f(A, B) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, h_1(A, B) = \begin{pmatrix} A & AB \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

гомотопны.

Доказательство осуществляется гомотопией

$$F_{1t}(A, B) = \begin{pmatrix} A & tAB \\ 0 & B \end{pmatrix}, t \in [0, 1].$$

Лемма 1.2. *Отображения*

$$h_1(A, B) = \begin{pmatrix} A & AB \\ 0 & B \end{pmatrix}, h_2(A, B) = \begin{pmatrix} 0 & AB \\ -I & B \end{pmatrix}$$

гомотопны.

Доказательство осуществляется гомотопией

$$F_{2t}(A, B) = \begin{pmatrix} A - tA & AB \\ -tI & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - tAB \times B^{-1} & AB \\ -tB \times B^{-1} & B \end{pmatrix}, t \in [0, 1].$$

Ясно, что у матрицы

$$\begin{pmatrix} A - tAB \times B^{-1} & AB \\ -tB \times B^{-1} & B \end{pmatrix}$$

определитель тот же, что у

$$\begin{pmatrix} A & AB \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

поэтому мы не выходим за рамки матриц с ненулевым определителем.

Лемма 1.3. *Отображения*

$$h_2(A, B) = \begin{pmatrix} 0 & AB \\ -I & B \end{pmatrix}, h_3(A, B) = \begin{pmatrix} 0 & AB \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

гомотопны.

Доказательство осуществляется гомотопией

$$F_{3t}(A, B) = \begin{pmatrix} 0 & AB \\ -I & B - tB \end{pmatrix}, t \in [0, 1].$$

Лемма 1.4. *Отображения*

$$h_3(A, B) = \begin{pmatrix} 0 & AB \\ -I & 0 \end{pmatrix}, h_4(A, B) = \begin{pmatrix} 0 & AB \\ -I & I \end{pmatrix}$$

гомотопны.

Доказательство осуществляется гомотопией

$$F_{4t}(A, B) = \begin{pmatrix} 0 & AB \\ -I & tI \end{pmatrix}, t \in [0, 1].$$

Лемма 1.5. *Отображения*

$$h_4(A, B) = \begin{pmatrix} 0 & AB \\ -I & I \end{pmatrix}, h_5(A, B) = \begin{pmatrix} AB & AB \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

гомотопны.

Доказательство осуществляется гомотопией

$$F_{5t}(A, B) = \begin{pmatrix} tAB & AB \\ -I + tI & I \end{pmatrix}, t \in [0, 1].$$

Лемма 1.6. *Отображения*

$$h_5(A, B) = \begin{pmatrix} AB & AB \\ 0 & I \end{pmatrix}, g(A, B) = \begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

гомотопны.

Доказательство осуществляется гомотопией

$$F_{6t}(A, B) = \begin{pmatrix} AB & AB - tAB \\ 0 & I \end{pmatrix}, t \in [0, 1].$$

Эти леммы в совокупности дают доказательство.

2.2. Неинтересно.

2.3. Неинтересно.

2.4. Неинтересно.

2.5. Неинтересно.

2.6. Линейная связность пространств матриц. Это интересно, будем решать.