

Алгебра 2 2023 Кузнецов

1 Листок 1

1. Для каких натуральных n многочлен $\frac{x^n-1}{x-1} = 1+x+\dots+x^{n-1}$ неприводим?

По-видимому, имеется в виду неприводимость над полем \mathbb{Q} .

Во-первых, заметим, что при $n = ab$ имеет место равенство

$$1 + x + \dots + x^{n-1} = (1 + x + \dots + x^{a-1})(1 + x^a + \dots + x^{a(b-1)}).$$

Или без разложения:

$$\frac{x^{ab} - 1}{x - 1} = \frac{x^a - 1}{x - 1} \frac{x^{ab} - 1}{x^a - 1}.$$

Отсюда следует, что при составном n многочлен $\frac{x^n-1}{x-1}$ приводим.

Теперь попробуем доказать, что при простом $n = p$ многочлен $\frac{x^n-1}{x-1}$ неприводим. Предположим, что

$$\frac{x^p - 1}{x - 1} = u(x)v(x),$$

где u, v — непостоянные многочлены с рациональными коэффициентами, причём будем считать, что их старшие коэффициенты равны 1, и u — непостоянный многочлен с рациональными коэффициентами наименьшей степени, делящий $\frac{x^p-1}{x-1}$. Тогда, что

$$u(x) = (x - a_1) \dots (x - a_k),$$

где a_1, \dots, a_k — попарно различные неединичные корни степени p из единицы. Поэтому все симметрические многочлены от a_1, \dots, a_k

$$a_1 + \dots + a_k,$$

$$a_1 a_2 + \dots + a_{k-1} a_k,$$

$$\dots$$

$$a_1 \dots a_k$$

рациональны — они являются коэффициентами многочлена u . Но тогда для любого натурального s

$$u_s(x) = (x - a_1^s) \dots (x - a_k^s)$$

— тоже многочлен с рациональными коэффициентами (поскольку все симметрические многочлены выражаются через элементарные), и он должен быть взаимно прост с u либо совпадать с u , ибо иначе наибольший общий делитель этих многочленов будет степени меньше степени u и будет делить многочлен $\frac{x^p-1}{x-1}$. Рассмотрим множество тех $s \in \{1, \dots, p-1\}$, для которых

$$\{a_1^s, \dots, a_k^s\} = \{a_1, \dots, a_k\}.$$

Это подгруппа мультипликативной группы \mathbb{F}_p . Значит, она циклическая, и есть $h \in \{1, \dots, p-1\}$, таких, что она порождена h . Тогда

$$u(x) = (x-a)(x-a^h)(x-a^{h^2}) \dots (x-a^{h^t}).$$

Дальше я не знаю, как закончить это рассуждение. Поэтому будем решать по-другому. Попробуем применить критерий Эйзенштейна. $q(x) = \frac{x^p-1}{x-1}$ неприводим над \mathbb{Q} тогда и только тогда, когда неприводим

$$q(x+1) = \frac{(x+1)^p - 1}{x} = x^{p-1} + C_p^{p-1}x^{p-2} + \dots + C_p^2x + p.$$

И применим критерий Эйзенштейна.

2. $x^n f(\frac{1}{x}) = c_0x^n + c_1x^{n-1} + \dots + c_{n-1}x + c_n$ имеет с $f(x)$ общий корень — тот, который лежит на единичной окружности (если $|\alpha| = 1$ и $f(\alpha) = 0$, то $f(\frac{1}{\alpha}) = f(\bar{\alpha}) = 0$). Значит, эти многочлены не взаимно просты, и в силу неприводимости f должны иметь все корни общие. То есть эти многочлены пропорциональны:

$$f(x) = tx^n f\left(\frac{1}{x}\right), t \in \mathbb{Q}.$$

Отсюда $c_k = tc_{n-k}$ для всех k . Отсюда $t^2 = 1$. Значит, $t = \pm 1$. Если $t = -1$, то многочлен f имеет корнем 1, что противоречит неприводимости. Значит, $t = 1$. Если n нечётно, $n = 2m+1$, то

$$f(x) = (x^{2m+1} + 1) + c_1(x^{2m} + x) + \dots,$$

и этот многочлен имеет корень -1 , что тоже невозможно в силу его неприводимости. Всё доказано.

3. а) Кажется, это известная теорема. Воспользуемся тем, что мультипликативная группа поля \mathbb{F}_p циклическая. Значит, она порождается неким $g \in \mathbb{F}_p$. Тогда $\left(\frac{-1}{p}\right) = 1$ тогда и только тогда, когда для некоторого $s, 0 < s < p-1$ имеет место

$$g^{2s} = -1.$$

Из этого равенства следует $g^{4s} = 1$, и получаем:

$2s$ не делится на $p-1$, $4s$ делится на $p-1$.

Отсюда следует, что $p-1$ делится на 4. Пусть, напротив, $p-1$ делится на 4. Тогда возьмём $h = g^{\frac{p-1}{2}}$. Отсюда $h^2 = 1$. Поэтому $h = \pm 1$. Но $h = 1$ быть не может, так как g — первообразный корень.

- б) Очевидно, следующие утверждения равносильны:

- $\left(\frac{-3}{p}\right) = 1$
- Многочлен $x^2 + 3$ приводим над \mathbb{F}_p
- Многочлен $(x+1)^2 + 3 = x^2 + 2x + 4$ приводим над \mathbb{F}_p
- Многочлен $(x-2)(x^2 + 2x + 4) = x^3 - 8$ разложим над \mathbb{F}_p
- Существует $\varepsilon \in \mathbb{F}_p, \varepsilon \neq 1$, такое, что $\varepsilon^3 = 1$ (поделить на 2 корни уравнения из предыдущего пункта)

Но мультипликативная группа поля \mathbb{F}_p циклическая. Значит, она порождается неким $g \in \mathbb{F}_p$. Тогда $\varepsilon = g^s, 0 < s < p-1$. Но тогда $g^{3s} = 1$, и $3s \mid p-1$. Если $p-1$ не делится на 3, то s делится на $p-1$, а такое невозможно в силу $0 < s < p-1$. Значит, $p-1$ делится на 3. И обратно — если $p-1$ делится на 3, то можно положить

$$\varepsilon = g^{\frac{p-1}{3}}.$$

Задача решена.

4. K содержит примитивный корень из 1 степени 8. Пусть это корень g . Ясно, что тогда $g^4 = -1, g^2 = -1/g^2$. Рассмотрев пример поля комплексных чисел, я подобрал такое:

$$(g + 1/g)^2 = g^2 + 2 + 1/g^2 = g^2 + 2 - g^2 = 2.$$

Теперь рассмотрим 4 случая:

- $p \equiv 1 \pmod{8}$. Тогда существует примитивный корень из 1 степени 8. Почему? Как мы помним, мультипликативная группа конечного поля \mathbb{F}_p циклическая. Она порождена элементом $t \in \mathbb{F}_p$. Тогда $t^{\frac{p-1}{8}}$ и есть первообразный корень из 1 степени 8.
- $p \equiv -1 \pmod{8}$. Это более сложный случай. По задаче 3а, -1 является квадратичным невычетом в F_p . Значит, многочлен $x^2 + 1$ неприводим над F_p , и фактор $G = F_p[x]/(x^2 + 1)$ является полем из p^2 элементов. Обозначим в этом поле элемент x как i , $i^2 = -1$. Итак, $G = \{a + bi \mid a, b \in F_p\}$. Пусть g — первообразный корень в G (то есть порождающий элемент мультипликативной группы поля G). Положим

$$h = g^{(p^2-1)/8}.$$

Тогда $h^4 = -1$, h — примитивный корень из 1 степени 8 (но, к сожалению, он лежит не в поле F_p , а в его расширении).

Утверждение 1.1. Или $h + 1/h$, или $h - 1/h$ лежит в F_p .

Proof. h является корнем многочлена $x^4 + 1$. Вот 4 корня этого многочлена: $h, -h, 1/h, -1/h$. Легко видеть, что они все разные (если, например, $h = -1/h$, то $h^2 = -1$, а это противоречит равенству $h^4 = -1$). Итак,

$$x^4 + 1 = (x - h)(x + h)(x - 1/h)(x + 1/h).$$

Но $F_p[h]$ — поле, которое строго больше F_p , но содержится в G . Значит, оно совпадает с G , ведь нет поля характеристики p с количеством элементов между p и p^2 . Значит, любой элемент поля G представляется в виде $\alpha h + \beta, \alpha, \beta \in F_p$. Поэтому

$$h^2 = \alpha h + \beta, \alpha, \beta \in F_p.$$

Значит, многочлены $x^4 + 1$ и $x^2 - \alpha x - \beta$ не взаимно просты. Поэтому $x^4 + 1$ делится на какой-то многочлен степени 2 с коэффициентами в F_p . Возможны лишь такие разложения $x^4 + 1$ в произведение многочленов второй степени (с коэффициентами из F_p):

$$\begin{aligned} x^4 + 1 &= (x^2 - h^2)(x^2 - 1/h^2), \\ x^4 + 1 &= (x^2 - (h + 1/h)x + 1)(x^2 + (h + 1/h)x + 1), \\ x^4 + 1 &= (x^2 - (h - 1/h)x - 1)(x^2 + (h - 1/h)x - 1). \end{aligned}$$

Первый вариант не подходит, поскольку h^2 не может лежать в F_p , ведь его квадрат равен -1 . Во втором и третьем вариантах либо $h + 1/h$, либо $h - 1/h$ лежит в F_p . Выяснить, какой же из этих вариантов реализуется, у нас получится позже. \square

Покажем, что не может быть $h - 1/h \in F_p$. Пусть $g = u + vi, u, v \in F_p$. Тогда

$$\frac{1}{g} = \frac{u - vi}{u^2 + v^2}.$$

Имеем

$$h - 1/h = (u + vi)^{(p^2-1)/8} - \frac{(u - vi)^{(p^2-1)/8}}{(u^2 + v^2)^{(p^2-1)/8}}.$$

Пусть $h = U + Vi = (u + vi)^{(p^2-1)/8}, U, V \in F_p$. Тогда

$$h - 1/h = U + Vi - \frac{U - Vi}{(u^2 + v^2)^{(p^2-1)/8}} = U + Vi + \frac{-U + Vi}{(u^2 + v^2)^{(p^2-1)/8}}.$$

Это может лежать в F_p , только если

$$V + \frac{V}{(u^2 + v^2)^{(p^2-1)/8}} = 0.$$

$V = 0$ быть не может, ведь $U + Vi = h$, а h не лежит в F_p — потому что $h^4 = -1$, а -1 у нас квадратичный невычет. Значит, на V можно сократить, и

$$(u^2 + v^2)^{(p^2-1)/8} = -1.$$

Но у нас $(p^2 - 1)/8$ чётное, и из этого равенства следует, что -1 — квадратичный вычет по модулю p . А это неверно. Итак, $h - 1/h$ не может лежать в F_p , и остаётся $h + 1/h \in F_p$. Поскольку

$$(h + 1/h)^2 = 2,$$

то всё доказано.

- $p \equiv -3 \pmod{8}$. Предположим,

$$s^2 \equiv 2 \pmod{p}.$$

По задаче 3а есть $j \in \mathbb{F}_p$, такое, что

$$j^2 \equiv -1 \pmod{p}.$$

Рассмотрим $z = s^{\frac{1+j}{2}}$. Тогда

$$z^2 = s^{\frac{1+j}{2}} = j.$$

Отсюда ясно, что z — первообразный корень из 1 степени 8. Мультипликативная группа поля \mathbb{F}_p циклическая. Она порождена элементом $t \in \mathbb{F}_p$. Тогда $z = t^k$, $0 < k < p-1$. Отсюда $t^{8k} = 1$, $8k$ делится на $p-1$. Но $p-1$ не делится на 8. Значит, $4k$ делится на $p-1$, и $z^4 = 1$. Противоречие с первообразностью p .

- $p \equiv 3 \pmod{8}$. Это самый сложный случай. Поначалу можно рассуждать, как в случае $p \equiv -1 \pmod{8}$. По задаче 3а, -1 — квадратичный невычет в F_p . Поэтому так же рассматриваем расширение $G = F_p[x]/(x^2 + 1)$. В нём выбираем элемент g , порождающий мультипликативную группу G . Полагаем

$$h = g^{(p^2-1)/8}.$$

Как и раньше, $h^4 = -1$. Снова получаем, что либо $h + 1/h$, либо $h - 1/h$ лежит в F_p . И нам надо показать, что в этом случае $h - 1/h \in F_p$ (тогда получается, что -2 — квадратичный вычет в F_p , а раз -1 — невычет, то 2 — невычет).

Итак, покажем, что $h + 1/h \notin F_p$.

Пусть $g = u + vi$, $u, v \in F_p$. Тогда

$$\frac{1}{g} = \frac{u - vi}{u^2 + v^2}.$$

Имеем

$$h + 1/h = (u + vi)^{(p^2-1)/8} + \frac{(u - vi)^{(p^2-1)/8}}{(u^2 + v^2)^{(p^2-1)/8}}.$$

Пусть $h = U + Vi = (u + vi)^{(p^2-1)/8}$, $U, V \in F_p$. Тогда

$$h + 1/h = U + Vi + \frac{U - Vi}{(u^2 + v^2)^{(p^2-1)/8}}.$$

Это может лежать в F_p , только если

$$V - \frac{V}{(u^2 + v^2)^{(p^2-1)/8}} = 0.$$

$V = 0$ быть не может, ведь $U + Vi = h$, а h не лежит в F_p — потому что $h^4 = -1$, а -1 у нас квадратичный невычет. Значит, на V можно сократить, и

$$(u^2 + v^2)^{(p^2-1)/8} = 1.$$

На первый взгляд, тут нет никакого противоречия. Но добавим ещё такое замечание: $u^2 + v^2$ должно быть первообразным корнем в F_p . Действительно, в поле G норма $\|a + bi\| = a^2 + b^2 \in F_p$ мультипликативна (легко проверить). Чтобы порождать мультипликативную группу поля G , $g = u + vi$ должно обладать таким свойством, что $(u^2 + v^2)^k, k \geq 0$ должно пробегать все элементы в F_p вида $a^2 + b^2, a, b \in F_p$. Поскольку $a^2 + b^2, a, b \in F_p$ пробегает все вычеты $\bmod p$ (см. утверждение ниже), то $u^2 + v^2$ — порождает мультипликативную группу F_p . А тогда $(u^2 + v^2)^{(p-1)/2} = -1$, и в силу нечётности $\frac{p+1}{4}$

$$(u^2 + v^2)^{(p^2-1)/8} = -1.$$

Противоречие.

Утверждение 1.2. $a^2 + b^2, a, b \in F_p$ пробегает все элементы F_p .

Proof. Ясно, что в виде $a^2 + b^2$ можно представить любой квадратичный вычет в F_p (надо взять $b = 0$). Осталось показать, что в таком виде можно представить хотя бы один квадратичный невычет $s \in F_p$ — ведь любой другой квадратичный невычет представляется в виде $cz^2, z \in F_p$ (потому что частное двух квадратичных невычетов — квадратичный вычет). Ясно, что есть квадратичный вычет s , такой, что $s + 1$ — квадратичный невычет (если бы это было не так, то по индукции бы получили, что $0, 1, 2, \dots, p-1$ — все квадратичные вычеты, что неправда). Тогда $s = a^2, s + 1 = a^2 + 1$, и мы представили квадратичный невычет s в виде суммы двух квадратов. Доказательство окончено. \square

5. Ясно, что $K(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \subseteq K(\sqrt{a}, \sqrt{b})$. Покажем, что

$$K(\sqrt{a}, \sqrt{b}) \subseteq K(\sqrt{a} + \sqrt{b}).$$

Имеем

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \in K(\sqrt{a} + \sqrt{b}).$$

Ну а тогда

$$\sqrt{a} = \frac{1}{2}((\sqrt{a} + \sqrt{b}) + (\sqrt{a} - \sqrt{b})) \in K(\sqrt{a} + \sqrt{b}).$$

И аналогично для \sqrt{b} . А всё потому, что в поле характеристики, отличной от 2, элемент 2 обратим. А если характеристика поля равна 2, то это не обязательно так. Пример:

2 Листок 2

1. Не буду решать.
2. Степень расширения $[\mathbb{Q}[\sqrt{n_1}, \dots, \sqrt{n_m}] : \mathbb{Q}]$ равна произведению степеней $[\mathbb{Q}[\sqrt{n_1}, \dots, \sqrt{n_{s+1}}] : \mathbb{Q}[\sqrt{n_1}, \dots, \sqrt{n_s}]]$. А каждая из этих степеней —

1 или 2. Поэтому степень расширения $[\mathbb{Q}[\sqrt{n_1}, \dots, \sqrt{n_m}] : \mathbb{Q}]$ — это степень двойки. Если бы там был $\sqrt[3]{2}$, то было бы

$$[\mathbb{Q}[\sqrt{n_1}, \dots, \sqrt{n_m}] : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}[\sqrt{n_1}, \dots, \sqrt{n_m}] : \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]] [\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] : \mathbb{Q}].$$

Но $[\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] : \mathbb{Q}]$ — это 3. А слева степень двойки, она на 3 не делится. Противоречие.

3. Работаем в поле разложения многочлена $x^3 - x - a$. Имеем

$$x^3 - x - a = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma).$$

Отсюда, приравнявая коэффициенты, получаем

$$\alpha + \beta + \gamma = 0,$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma = -1,$$

$$\alpha\beta\gamma = a.$$

Далее, из предыдущих равенств

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma) = 2,$$

$$\alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2 = (\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma)^2 - 2\alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma) = 1.$$

Теперь имеем

$$(3\alpha^2 - 1)(3\beta^2 - 1)(3\gamma^2 - 1) = 27\alpha^2\beta^2\gamma^2 - 9(\alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2) + 3(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - 1 = 27a^2 - 4.$$

Из равенств $\alpha\beta\gamma = a$, $\alpha^3 - \alpha = a$ получаем

$$\alpha\beta\gamma = \alpha^3 - \alpha,$$

$$\beta\gamma = \alpha^2 - 1.$$

Аналогично, $\alpha\beta = \gamma^2 - 1$, $\alpha\gamma = \beta^2 - 1$. Имеем

$$(\alpha - \beta)(\beta - \gamma) = \alpha\beta - \beta^2 - \alpha\gamma + \beta\gamma = (\alpha + \gamma)\beta - \beta^2 - \alpha\gamma = -2\beta^2 - \alpha\gamma = -2\beta^2 - (\beta^2 - 1) = 1 - 3\beta^2.$$

Аналогично, $(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha) = 1 - 3\gamma^2$, $(\gamma - \alpha)(\alpha - \beta) = 1 - 3\alpha^2$. Итак,

$$4 - 27a^2 = (1 - 3\alpha^2)(1 - 3\beta^2)(1 - 3\gamma^2) = (\alpha - \beta)^2(\beta - \gamma)^2(\gamma - \alpha)^2.$$

Осталось показать, что $(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)$ лежит в F_p . Рассмотрим в поле разложения многочлена $x^3 - x - a$, то есть $F_p[\alpha, \beta, \gamma]$, автоморфизм Фробениуса $x \rightarrow x^p$. Как известно, он оставляет на местах элементы F_p и только их. Кроме того, ясно, что корни многочлена $x^3 - x - a$ переходят в его же корни, поэтому α, β, γ переставляются этим автоморфизмом. Но поскольку эти корни не лежат в F_p , ни один из них не переходит в себя. А все перестановки множества из трёх элементов, не оставляющие на месте ни один из них, чётные. Поэтому наш автоморфизм производит чётную перестановку α, β, γ , а значит, переводит $(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)$ в себя. А кто переходит в себя, тот лежит в F_p . Всё доказано.