

# Вероятность — задачи

## 1 Kallenberg 2002 — Глава 4

- 1.
- 2.
- 3.

## 2 Kallenberg 2002 — Глава 5

- 1.
- 2.
- 3.

## 3 Kallenberg 2002 — Глава 6. Условное матожидание

Как доказать предложение 6.6 из Калленберга? В первую сторону: дано, что

$$P(H \mid \mathcal{F}, \mathcal{G}) = P(H \mid \mathcal{G}), H \in \mathcal{H}$$

Покажем, что

$$\mathcal{F} \amalg_{\mathcal{G}} \mathcal{H}.$$

Для этого надо показать, что при  $F \in \mathcal{F}, H \in \mathcal{H}$

$$P^{\mathcal{G}}(F \cap H) = P^{\mathcal{G}}F \times P^{\mathcal{G}}H.$$

Иными словами,

$$\mathbb{E}(1_{F \cap H} \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(1_F \mid \mathcal{G}) \times \mathbb{E}(1_H \mid \mathcal{G}).$$

Имеем

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(1_{F \cap H} \mid \mathcal{G}) &= \mathbb{E}(1_F 1_H \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(1_F 1_H \mid \mathcal{F}, \mathcal{G}) \mid \mathcal{G}) = \\ &= \mathbb{E}(1_F \mathbb{E}(1_H \mid \mathcal{F}, \mathcal{G}) \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(1_F \mathbb{E}(1_H \mid \mathcal{G}) \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(1_H \mid \mathcal{G}) \times \mathbb{E}(1_F \mid \mathcal{G}).\end{aligned}$$

А в другую сторону?

1. Пусть дано  $(\xi, \eta) =^d (\xi', \eta)$ . Покажем, что

$$P(\xi \in B \mid \eta) = P(\xi' \in B \mid \eta).$$

Из равенства по распределению следует, что для любых измеримых  $A, B$

$$P(\xi \in B, \eta \in A) = P(\xi' \in B, \eta \in A).$$

Пусть

$$\eta_1 = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\xi \in B} \mid \eta), \eta_2 = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\xi' \in B} \mid \eta).$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\eta_1 \mathbb{1}_{\eta \in A}) &= \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\xi \in B} \mathbb{1}_{\eta \in A}) = P(\xi \in B, \eta \in A) = \\ &= P(\xi' \in B, \eta \in A) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\xi' \in B} \mathbb{1}_{\eta \in A}) = \mathbb{E}(\eta_2 \mathbb{1}_{\eta \in A}).\end{aligned}$$

Итак,  $\eta_1$  и  $\eta_2$  —  $F_\eta$ -измеримые, причём интегралы от них по любому множеству из  $F_\eta$  совпадают. Значит, они совпадают почти наверное. Получаем

$$P(\xi \in B \mid \eta) = \eta_1 = \eta_2 = P(\xi' \in B \mid \eta) \text{ a.s.}$$

В другую сторону — примерно так же. Сначала переписываем

$$P(\xi \in B \mid \eta) = P(\xi' \in B \mid \eta)$$

как  $\eta_1 = \eta_2$  a.s. Интегрируя по множеству  $\mathbb{1}_{\eta \in A}$  из  $F_\eta$ , получаем

$$P(\xi \in B, \eta \in A) = P(\xi' \in B, \eta \in A).$$

А из этого равенства уже монотонным классом получаем равенство по распределению  $(\xi, \eta) =^d (\xi', \eta)$ .

2. Если  $\mathbb{E}^F \xi = \mathbb{E}^G \xi$  для любой  $\xi \in L_1$ , то покажем, что  $\overline{F} = \overline{G}$ . В эту сторону это несложно. Мы для данного  $A \in F$  воспользуемся тем, что

$$\mathbb{E}^F \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_A \text{ a.s.}$$

Значит,

$$\mathbb{E}^G 1_A = 1_A \text{ a.s.}$$

Но это значит, что множество  $B \in G$  тех  $\omega$ , где  $\mathbb{E}^G 1_A$  принимает значение 1, отличается от  $A$  на множество меры 0:

$$B = \{\omega \mid \mathbb{E}^G 1_A(\omega) = 1\},$$

$$P(A \Delta B) = 0.$$

Это значит, что любое  $A \in F$  можно приблизить множеством из  $G$  с точностью до множества меры 0. Но тогда любое  $A \in \overline{F}$  тоже можно так приблизить множеством из  $G$ , и оно лежит в  $\overline{G}$ . Доказали.

Теперь в другую сторону. Известно, что

$$\overline{F} = \overline{G}.$$

Достаточно доказать, что для любой  $\xi \in L_1$

$$\mathbb{E}^{\overline{F}} \xi = \mathbb{E}^F \xi \text{ a.s.}$$

Как это доказать? Пусть

$$\eta = \mathbb{E}^F \xi.$$

Надо показать, что  $\eta$  может служить в роли  $\mathbb{E}^{\overline{F}} \xi$ . Для этого достаточно показать, что для любого множества  $A \in \overline{F}$  выполнено

$$\mathbb{E}(1_A \eta) = \mathbb{E}(1_A \xi).$$

Но  $A$  отличается от некоторого  $B \in F$  на множество нулевой меры:

$$P(A \Delta B) = 0.$$

Имеем, поскольку  $B \in F$ ,

$$\mathbb{E}(1_B \eta) = \mathbb{E}(1_B \xi).$$

Но ясно, что

$$\mathbb{E}(1_A \eta) = \mathbb{E}(1_B \eta),$$

$$\mathbb{E}(1_A \xi) = \mathbb{E}(1_B \xi).$$

Из этих равенств получаем

$$\mathbb{E}(1_A \eta) = \mathbb{E}(1_A \xi),$$

что и требовалось.

3. Не хочу такое решать.

4. Имеем

$$\xi_n \wedge \eta \rightarrow \xi \wedge \eta \in L_1.$$

Из свойства монотонной сходимости

$$\sup_n \mathbb{E}^F \xi_n \geq \sup_n \mathbb{E}^F (\xi_n \wedge \eta) \geq \lim_n \mathbb{E}^F (\xi_n \wedge \eta) = \mathbb{E}^F (\xi \wedge \eta) = \mathbb{E}^F \eta.$$

5. Пусть  $\xi_n \uparrow \xi$ . Покажем, что для нового определения условного матожидания

$$\mathbb{E}^F \xi_n \rightarrow \mathbb{E}^F \xi.$$

Во-первых, заметим, что новое матожидание монотонно: если

$$\xi \leq \eta \text{ a.s.}$$

то

$$\mathbb{E}^F \xi \leq \mathbb{E}^F \eta \text{ a.s.}$$

Далее, пусть

$$\xi_n \uparrow \xi \text{ a.s.}$$

Тогда

$$\mathbb{E}^F \xi \geq \mathbb{E}^F \xi_n \text{ a.s.}$$

для любого  $n$ , а потому

$$\mathbb{E}^F \xi \geq \lim_n \mathbb{E}^F \xi_n \text{ a.s.}$$

Осталось показать в обратную сторону:

$$\mathbb{E}^F \xi \leq \lim_n \mathbb{E}^F \xi_n \text{ a.s.}$$

Но это не так и сложно! Имеем

$$\xi_m \wedge m \uparrow \xi,$$

$$\eta = \xi \wedge n \leq \xi,$$

и мы находимся в условиях предыдущей задачи. Получаем из этой задачи

$$\mathbb{E}^F (\xi \wedge n) \leq \sup_m \mathbb{E}^F (\xi_m \wedge m) = \lim_m \mathbb{E}^F (\xi_m \wedge m) \text{ a.s.}$$

Однако

$$\mathbb{E}^F \xi = \sup_n \mathbb{E}^F (\xi \wedge n).$$

Значит,

$$\mathbb{E}^F \xi \leq \lim_m \mathbb{E}^F (\xi_m \wedge m) \leq \lim_m \mathbb{E}^F \xi_m \text{ a.s.}$$

Это и требовалось.

6. Потом.

7. Доказать:

$$\liminf_n \mathbb{E}^F \xi_n \geq \mathbb{E}^F \liminf_n \xi_n.$$

Просто повторим доказательство леммы Фату. Пусть

$$\eta_n = \inf_{m \geq n} \xi_m.$$

Тогда

$$\eta_n \uparrow \liminf_n \xi_n.$$

Но  $\xi_n \geq \eta_n$ , отсюда

$$\liminf_n \mathbb{E}^F \xi_n \geq \liminf_n \mathbb{E}^F \eta_n = \lim_n \mathbb{E}^F \eta_n = \mathbb{E}^F \lim_n \eta_n = \mathbb{E}^F \liminf_n \xi_n.$$

Мы воспользовались свойством монотонной сходимости для таких условных матожиданий (задача 5).

8. Аналог теоремы Лебега об ограниченной сходимости — доказывается аналогично. Пусть

$$\eta = \sup_n |\xi_n|.$$

Имеем по предыдущей задаче

$$\mathbb{E}^F \liminf_n (\eta - \xi_n) \leq \liminf_n \mathbb{E}^F (\eta - \xi_n),$$

$$\mathbb{E}^F \eta - \mathbb{E}^F \limsup_n \xi_n \leq \mathbb{E}^F \eta - \limsup_n \mathbb{E}^F \xi_n,$$

$$\limsup_n \mathbb{E}^F \xi_n \leq \mathbb{E}^F \limsup_n \xi_n.$$

Аналогично, получаем

$$\mathbb{E}^F \liminf_n (\eta + \xi_n) \leq \liminf_n \mathbb{E}^F (\eta + \xi_n),$$

$$\mathbb{E}^F \eta + \mathbb{E}^F \liminf_n \xi_n \leq \mathbb{E}^F \eta + \liminf_n \mathbb{E}^F \xi_n,$$

$$\liminf_n \mathbb{E}^F \xi_n \geq \mathbb{E}^F \liminf_n \xi_n.$$

Комбинируя, получаем

$$\mathbb{E}^F \liminf_n \xi_n \leq \liminf_n \mathbb{E}^F \xi_n \leq \limsup_n \mathbb{E}^F \xi_n \leq \mathbb{E}^F \limsup_n \xi_n.$$

Но

$$\mathbb{E}^F \liminf_n \xi_n = \mathbb{E}^F \lim_n \xi_n = \mathbb{E}^F \limsup_n \xi_n \text{ a.s.}$$

Отсюда получаем нужное соотношение.

9. Не будем решать, слишком известная задача.

10. Показать

$$\mathbb{E}(\xi | F, 1_A) = \frac{\mathbb{E}(\xi; A | F)}{P(A | F)}$$

почти наверное на  $A$ . В этой задаче мне самым сложным было понять, что такое  $\mathbb{E}(\xi; A | F)$ . Оказывается, это  $\mathbb{E}(\xi 1_A | F)$ . После того, как это понято, доказательство получается автоматически. Итак, наш кандидат на роль условного матожидания

$$\eta = \frac{\mathbb{E}(\xi 1_A | F)}{P(A | F)} 1_A + \frac{\mathbb{E}(\xi 1_{A^c} | F)}{P(A^c | F)} 1_{A^c}$$

Ясно, что  $\eta$  измерима относительно сигма-алгебры, порожденной  $F$  и  $A$ . Остается только проверить, что для любого множества  $B$  из этой сигма-алгебры

$$\mathbb{E}(\eta 1_B) = \mathbb{E}(\xi 1_B).$$

Достаточно проверить для множеств вида

$$U \cap A, U \cap A^c, U \in F.$$

Проверим для множеств

$$B = U \cap A, U \in F.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \eta 1_B &= \mathbb{E} \left( \frac{\mathbb{E}(\xi 1_A | F)}{P(A | F)} 1_A 1_U \right) = \mathbb{E} \mathbb{E} \left( \frac{\mathbb{E}(\xi 1_A | F)}{P(A | F)} 1_A 1_U | F \right) = \\ &= \mathbb{E} \left( \frac{\mathbb{E}(\xi 1_A | F)}{P(A | F)} 1_U \mathbb{E}(1_A | F) \right) = \mathbb{E} \left( \frac{\mathbb{E}(\xi 1_A | F)}{P(A | F)} 1_U P(A | F) \right) = \\ &= \mathbb{E} (\mathbb{E}(\xi 1_A | F) 1_U) = \mathbb{E} \xi 1_A 1_U = \mathbb{E} \xi 1_B. \end{aligned}$$

Здесь мы пользовались  $F$ -измеримостью множества  $U$ . В общем, всё доказано.

11. Пусть  $\eta_n = \mathbb{E}(\xi_n \wedge 1 \mid F_n)$ . Тогда

$$\eta_n \xrightarrow{P} 0.$$

Отсюда и из  $0 \leq \eta_n \leq 1$  следует

$$\mathbb{E}\eta_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Но  $\mathbb{E}\eta_n = \mathbb{E}(\xi_n \wedge 1)$ . Поэтому

$$\mathbb{E}(\xi_n \wedge 1) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Но последнее соотношение и означает

$$\xi_n \xrightarrow{P} 0, n \rightarrow \infty.$$

## 4 Kallenberg 2002 — Глава 7. Мартингалы

1.  $\{\sigma = \tau\} \in F_\sigma \cap F_\tau$ . Достаточно показать, что

$$\{\sigma < \tau\} \in F_\sigma \cap F_\tau.$$

Отсюда с учётом аналогичного включения для  $\{\tau < \sigma\}$  будет следовать, что

$$\{\sigma \neq \tau\} \in F_\sigma \cap F_\tau.$$

Итак, имеем

$$\{\sigma < \tau\} \cap \{\tau \leq t\} = \bigcup_{0 < q < t, q \in \mathbb{Q}} (\{\sigma < q\} \cap \{q < \tau \leq t\}) \in F_t.$$

Это верно для любого  $t$ , и по определению  $F_\tau$  получаем

$$\{\sigma < \tau\} \in F_\tau.$$

Далее,

$$\{\sigma < \tau\} \cap \{\sigma \leq t\} = \{\sigma < \tau, \tau \leq t\} \cup \{\sigma \leq t, \tau > t\}.$$

Но оба последних события лежат в  $F_t$ . Действительно,

$$\{\sigma < \tau, \tau \leq t\} \in F_t$$

мы доказали выше, а

$$\{\sigma \leq t, \tau > t\} = \{\sigma \leq t\} \cap \{\tau > t\} \in F_t.$$

Итак,

$$\{\sigma < \tau\} \cap \{\sigma \leq t\} \in F_t$$

для любого  $t$ , и по определению  $F_\sigma$  получаем  $\{\sigma < \tau\} \in F_\sigma$ .

Далее, почему  $F_\sigma = F_\tau$  на  $\{\sigma = \tau\}$ ? Пусть  $A \subseteq \{\sigma = \tau\}, A \in F_\sigma$ . Покажем, что  $A \in F_\tau$ . Из  $A \in F_\sigma$  следует, что для любого  $t$

$$A \cap \{\sigma \leq t\} \in F_t.$$

Поскольку на множестве  $A$   $\sigma = \tau$ , то для любого  $t$

$$A \cap \{\tau \leq t\} = A \cap \{\sigma \leq t\} \in F_t.$$

По определению  $F_\tau$ ,  $A \in F_\tau$ . Вот и доказали всё.

Осталось объяснить, почему  $F_\tau$  может отличаться от  $F_\infty$  на  $\{\tau = \infty\}$ . Это ясно. Если  $\tau = \infty$  всегда, то по определению  $F_\tau$ , в  $F_\tau$  входят все множества из сигма-алгебры  $A$ , а не только из  $F_\infty$ .

2. Стандартная задача.
3. Пример слабо опционального, но не опционального момента. Возьмём, как предлагает Калленберг. Берём бернуллиевскую случайную величину  $\xi$ ,  $P(\xi = 1) = P(\xi = -1) = \frac{1}{2}$ , и положим

$$F_0 = \{\emptyset, \Omega\}, F_t = \sigma(\xi), t > 0.$$

Пусть

$$\tau = \begin{cases} 0, \xi = -1, \\ 1, \xi = 1. \end{cases}$$

Тогда для  $t > 0$  имеем

$$\{\tau < t\} = \begin{cases} \{\xi = -1\}, t \leq 1, \\ \Omega, t > 1. \end{cases}$$

В любом случае,  $\{\tau < t\} \in F_t = \sigma(\xi), t > 0$ . Поэтому  $\tau$  слабо опциональный. Но  $\{\tau \leq 0\} = \{\tau = 0\} = \{\xi = -1\} \notin F_0$ . Поэтому  $\tau$  не опциональный.

4. Скучно решать это.



5. Задача про прогрессивные процессы. Прогрессивность — это измеримость относительно соответствующей сигма-алгебры. Итак, сначала покажем, что класс множеств  $A \in \Omega \times \mathbb{R}_+$ , таких, что процесс  $1_A$  прогрессивен, образует сигма-алгебру. Да это вроде очевидно! Прогрессивность  $1_A$  означает, что для любого  $t$

$$A \cap (\Omega \times [0, t]) \in F_t \otimes \mathcal{B}[0, t].$$

Ясно, что это свойство сохраняется счётным объединением. И для перехода к дополнению всё тоже очевидно. Итак, да, сигма-алгебра.

Почему прогрессивность процесса равносильна его измеримости относительно этой сигма-алгебры? Допустим, процесс  $X$  прогрессивен. Покажем, что он измерим относительно этой сигма-алгебры. Нужно проверить, что для любого  $a$  множество  $\{X > a\}$  лежит в прогрессивной сигма-алгебре. А оно там лежит, если для любого  $t$

$$\{X > a\} \cap (\Omega \times [0, t]) \in F_t \otimes \mathcal{B}[0, t].$$

А это так, если  $X$  прогрессивен. И в другую сторону аналогично. Короче, пусть Калленберг сам решает такие задачи! Одни проверки.

9.  $X^1, X^2, \dots$  — субмартингалы, причём  $X = \sup_n X^n$  интегрируем. Покажем, что  $X$  — тоже субмартингал. Фиксируем  $t > s$ . Имеем

$$\forall n \quad X(t) \geq X_n(t),$$

$$\forall n \quad \mathbb{E}(X(t) \mid F_s) \geq \mathbb{E}(X_n(t) \mid F_s) \geq X_n(s),$$

а поскольку это для любого  $n$ , то

$$\mathbb{E}(X(t) \mid F_s) \geq \sup_n X_n(s) = X(s).$$

Вот и доказали. Дальше сложнее. Покажем, что если  $\sup_n |X_n|$  интегрируем, то и  $\limsup_n X_n$  — субмартингал. Фиксируем  $s < t$ . Пусть

$$\xi_n = \sup(X_n(t), X_{n+1}(t), X_{n+2}(t), \dots),$$

$$\eta_n = \sup(X_n(s), X_{n+1}(s), X_{n+2}(s), \dots).$$

Пусть также  $\xi = \sup_n |X_n(t)|$ ,  $\eta = \limsup_n X_n(s)$ . Имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \limsup_n X_n(t) \text{ a.s.}, |\xi_n| \leq \xi \text{ a.s.}$$

По условию,  $\xi$  интегрируема. Значит, по теореме Лебега об ограниченной сходимости,

$$\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L_1} \limsup_n X_n(t).$$

Условное матожидание при условии  $F_s$  — ограниченный оператор на  $L_1(F_t)$ , см. начало предыдущей главы. Поэтому

$$\zeta_n = \mathbb{E}(\xi_n \mid F_s) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L_1} \mathbb{E}(\limsup_n X_n(t) \mid F_s) = \zeta.$$

Из условия субмаритингальности,

$$\eta_n \leq \mathbb{E}(\xi_n \mid F_s) = \zeta_n.$$

Но аналогичные рассуждения для момента  $s$

$$\eta_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L_1} \limsup_n X_n(s) = \eta.$$

Итак, имеем две последовательности случайных величин  $\zeta_n \geq \eta_n$ , и обе сходятся в  $L_1$ :

$$\zeta_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L_1} \zeta, \eta_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L_1} \eta.$$

Покажем, что

$$\zeta \geq \eta \text{ a.s.}$$

Действительно,

$$\zeta_n - \eta_n \geq 0, \zeta_n - \eta_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L_1} \zeta - \eta.$$

Но  $L_1$ -предел неотрицательных случайных величин неотрицателен почти наверное. Действительно, если  $\lambda_n$  — неотрицательные случайные величины и

$$\lambda_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L_1} \lambda,$$

$$A = \{\omega \in \Omega \mid \lambda(\omega) < 0\},$$

то при  $P(A) > 0$  имеем  $\mathbb{E}\lambda_n \mathbb{1}_A \rightarrow \mathbb{E}\lambda \mathbb{1}_A < 0$ , противоречие. Кстати, откуда следует сходимость  $\mathbb{E}\lambda_n \mathbb{1}_A \rightarrow \mathbb{E}\lambda \mathbb{1}_A, n \rightarrow \infty$ ?

Эта сходимость следует из

$$|\mathbb{E}\lambda_n \mathbb{1}_A - \mathbb{E}\lambda \mathbb{1}_A| \leq \mathbb{E}|(\lambda_n - \lambda) \mathbb{1}_A| \leq \mathbb{E}|\lambda_n - \lambda| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Вот всё и доказали. Неравенство  $\zeta \geq \eta$  a.s. и есть нужное нам неравенство

$$\mathbb{E}(\limsup_n X_n(t) \mid F_s) \geq \limsup_n X_n(s),$$

показывающее субмаритингальность процесса  $\limsup_n X_n$ .

10. Разложение Дуба интегрируемой случайной последовательности  $X = (X_n)$  зависит от фильтрации. Возьмём

$$F_n = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n), G_n = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n, X_{n+1}) = F_{n+1}.$$

Тогда  $X$  согласован и с фильтрацией  $F_n$ , и с фильтрацией  $G_n$ . Относительно фильтрации  $G_n$   $X$  является предсказуемой последовательностью, и разложение Дуба имеет вид

$$X_n = X_0 + (X_n - X_0).$$

Когда у  $X$  относительно фильтрации  $F_n$  такое же разложение Дуба? Если оно то же, то  $X_n - X_0$  должно быть при каждом  $n \geq 1$   $F_{n-1}$ -измеримым. Тогда и  $X_n$  при каждом  $n \geq 1$   $F_{n-1}$ -измеримо. Но тогда при каждом  $n \geq 1$

$$\sigma(X_0, X_1, \dots, X_{n-1}) = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n),$$

$$F_{n-1} = F_n.$$

Тогда все сигма-алгебры  $F_n$  совпадают, и при каждом  $n$   $X_n$  является  $X_0$ -измеримой величиной.

11.

12.

13.

14. Доказательство леммы 4.15 дословно переносится на случай, когда  $\xi_n$  — мартингал-разность для  $L_2$ -интегрируемого мартингала  $M$ . Итак, для  $L_2$ -ограниченного мартингала имеет место неравенство Колмогорова

$$P(\sup_n |M_n| > r) \leq r^{-2} \sup_n \mathbb{E} M_n^2.$$

Но можно такое вывести и из леммы 7.15. Эта лемма даёт для субмартингала  $X$

$$rP(\sup_t |X_t| \geq r) \leq 3 \sup_t \mathbb{E} |X_t|.$$

Мы можем взять в качестве  $X$  субмартингал  $M^2$  (квадрат мартингала — субмартингал). Имеем тогда из этого неравенства

$$r^2 P(\sup_n |M_n| \geq r) = r^2 P(\sup_n X_n \geq r^2) \leq 3 \sup_n \mathbb{E} |X_n| = 3 \sup_n \mathbb{E} M_n^2.$$

А теперь мы можем имитировать доказательство леммы 4.16. Пусть  $n$  фиксировано, построим случайный процесс  $X^{(n)}$  на  $\mathbb{Z}_+$ ,

$$X_k^{(n)} = (M_{n+k} - M_n)^2, k \geq 0.$$

Тогда  $X^{(n)}$  — субмартингал. Имеем для него из 7.15

$$\begin{aligned} P(\sup_{k \geq 0} X_k^{(n)} \geq \epsilon^2) &\leq 3\epsilon^{-2} \sup_{k \geq 0} \mathbb{E}|X_k^{(n)}| = 3\epsilon^{-2} \mathbb{E}(M_{n+k} - M_n)^2 \leq \\ &\leq 3\epsilon^{-2} \sum_{k \geq 0} \mathbb{E}(M_{n+k+1} - M_{n+k})^2 \rightarrow 0, n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Отсюда

$$P(\sup_{k \geq 0} (M_{n+k} - M_n)^2 > \epsilon^2) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

для любого  $\epsilon > 0$ . Итак,

$$\sup_{k \geq n} |M_k - M_n| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0.$$

Значит, для некоторой подпоследовательности  $n_s$

$$\sup_{k \geq n_s} |M_k - M_{n_s}| \xrightarrow[s \rightarrow \infty]{a.s.} 0.$$

Но если  $\sup_{k \geq n_s} |M_k - M_{n_s}| \leq \epsilon$ , то

$$\sup_{k_1, k_2 \geq n_s} |M_{k_1} - M_{k_2}| \leq 2\epsilon.$$

Отсюда следует, что последовательность  $\{M_n\}$  фундаментальна почти наверное. Значит, сходится почти наверное. Ну а сходимость в  $L_2$  по сравнению с этим тривиальна и следует из фундаментальности в  $L_2$  последовательности  $M_n$ :

$$\sup_{k \geq 0} \mathbb{E}(M_{n+k} - M_n)^2 \leq \sum_{k \geq 0} \mathbb{E}(M_{n+k+1} - M_{n+k})^2 \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

15. Мартингал, который  $L^1$ -ограничен, но не равномерно интегрируем. Это известный пример. Берём последовательность независимых случайных величин  $\xi_n$ , каждая из которых принимает значения 0 и 2 с равными вероятностями  $\frac{1}{2}$ . Пусть

$$X_n = \xi_1 \xi_2 \dots \xi_n.$$

Тогда  $\mathbb{E}|X_n| = \mathbb{E}X_n = 1$ , но  $X_n$  не равномерно интегрируем. А в непрерывном времени пример? Это экспоненциальные мартингалы.

$$X_t = e^{w_t - t/2}.$$

Ясно, что  $\mathbb{E}X_t = \mathbb{E}X_0 = 1$ . Почему  $X_t$  не равномерно интегрируем? Потому что

$$X_t \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{a.s.} 0.$$

Если бы  $X_t$  был равномерно интегрируем, то сходимость к 0 была бы и в  $L^1$ , а её нет, потому что

$$\mathbb{E}X_t = 1 \neq 0.$$

16. Это просто. Фиксируем  $G \in \mathcal{G}, H \in \mathcal{H}$ . Имеем

$$P(G \cap H \mid \mathcal{F}_n) = P(G \mid \mathcal{F}_n)P(H \mid \mathcal{F}_n) \text{ a.s.}$$

Оказывается, обе части этого равенства сходятся почти наверное при  $n \rightarrow \infty$ . Действительно, из теоремы 7.23 имеем сходимость

$$P(G \mid \mathcal{F}_n) \rightarrow P(G \mid \mathcal{F}_\infty) \text{ a.s.},$$

$$P(H \mid \mathcal{F}_n) \rightarrow P(H \mid \mathcal{F}_\infty) \text{ a.s.},$$

$$P(G \cap H \mid \mathcal{F}_n) \rightarrow P(G \cap H \mid \mathcal{F}_\infty) \text{ a.s.}$$

Отсюда всё получается, просто переходим к пределу в обеих частях равенства

$$P(G \cap H \mid \mathcal{F}_n) = P(G \mid \mathcal{F}_n)P(H \mid \mathcal{F}_n) \text{ a.s.}$$

## 5 Kallenberg 2002 — Глава 12

- 1.
- 2.
- 3.

## 6 Protter — Глава 2

1.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна за исключением одной точки, в которой у неё скачок. Показать, что  $X_t = f(B_t)$  не семимартингал.

Решение задачи опирается на то, что в окрестности момента достижения любого уровня броуновское движение бесконечно много раз проходит через этот уровень.

Фиксируем  $t > 0$  и покажем, что  $X^t$  — не тотальный семимартингал. Пусть  $a$  — точка скачка  $f$ . Пусть

$$\tau_a = \inf\{t > 0: B_t = a\}.$$

Для  $\epsilon > 0$  определим последовательность моментов остановки  $\tau_n^\epsilon$  следующим образом:

$$\begin{aligned}\tau_0^\epsilon &= \inf\{t > 0: B_t = a - \epsilon\}, \\ \tau_{2n+1}^\epsilon &= \inf\{t > \tau_{2n}^\epsilon: B_t = a + \epsilon\}, \\ \tau_{2n}^\epsilon &= \inf\{t > \tau_{2n-1}^\epsilon: B_t = a - \epsilon\}.\end{aligned}$$

Из свойств броуновского движения

$$\max\{n > 0: \tau_n^{1/m} < t\} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{a.s.} \infty$$

на множестве  $\{\tau_a < t\}$ . Пусть  $h_m \rightarrow \infty$  такая детерминированная последовательность, что

$$0 < h_m < \sqrt{m}$$

и

$$P(\max\{n > 0: \tau_n^{1/m} < t\} > h_m) \geq \frac{1}{2}P\{\tau_a < t\}.$$

Определим случайные процессы  $H_m$  таким образом:

$$H_m(t) = \begin{cases} 0, & t \leq \tau_0^{1/\sqrt[3]{h_m}}, \\ \frac{(-1)^n}{\sqrt{h_m}}, & t \in (\tau_n^{1/\sqrt[3]{h_m}}, \tau_{n+1}^{1/\sqrt[3]{h_m}}], n < m, \\ 0, & t > \tau_m^{1/\sqrt[3]{h_m}} \end{cases}.$$

Тогда

$$|I_{X^t}(H_m)| \geq \frac{1}{h_m^{5/6}} (m \wedge \max\{n > 0: \tau_n^{1/m} < t\}) - \frac{1}{\sqrt{h_m}} \left| \sup_{s \in [0, t]} f(B_s) - \inf_{s \in [0, t]} f(B_s) \right|.$$

С вероятностью не меньше, чем  $\frac{1}{2}P\{\tau_a < t\} = \text{const} > 0$  имеем

$$\max\{n > 0: \tau_n^{1/m} < t\} > h_m,$$

$$|I_{X^t}(H_m)| > h_m^{1/6} - \frac{1}{\sqrt{h_m}} \left| \sup_{s \in [0, t]} f(B_s) - \inf_{s \in [0, t]} f(B_s) \right| \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{a.s.} \infty.$$

Это противоречит сходимости по вероятности

$$I_{X^t}(H_m) \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{P} 0.$$

Значит,  $X^t$  — не тотальный семимартингал, а  $X$  — не семимартингал.

2.

3.

## 7 Revuz-Yor — Глава 2. Мартингалы

1.20.

$$P \left( \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{|B_{s+h} - B_s|}{\sqrt{2h \log_2 1/h}} = 1 \text{ for } \mu - a.e. \ s \right) = 1.$$

Рассмотрим случайную величину  $\tau \geq 0$ , не зависящую от  $B$ , с распределением  $\mu$ :

$$P(\tau \leq a) = \mu([0, a]), a \geq 0.$$

Тогда, как легко видеть,

$$\xi(h) = B(\tau + h) - B(\tau), h \geq 0$$

есть винеровский процесс. Как это увидеть? Если не напрямую, то можно воспользоваться строго марковским свойством винеровского процесса. Для этого надо фильтрации  $F_t$  расширить с помощью сигма-алгебры, порождённой моментом  $\tau$ . Винеровский процесс  $B$  останется винеровским и относительно расширенной фильтрации. А  $\tau$  станет моментом остановки относительно новой фильтрации. Останется применить строго марковское свойство. Теперь осталось применить к процессу  $\xi$  теорему 1.9 (закон повторного логарифма).