Вероятность — задачи

1 Kallenberg 2002 — Глава 4

1.
2.
3.

2 Kallenberg 2002 — Глава 5

1.
2.
3.

3 Kallenberg 2002 — Глава 6. Условное матожидание

Как доказать предложение 6.6 из Калленберга? В первую сторону: дано, что

$$P(H \mid \mathcal{F}, \mathcal{G}) = P(H \mid \mathcal{G}), H \in \mathcal{H}$$

Покажем, что

$$\mathcal{F} \perp\!\!\!\perp_{\mathcal{G}} \mathcal{H}.$$

Для этого надо показать, что при $F \in \mathcal{F}, H \in \mathcal{H}$

$$P^{\mathcal{G}}(F \cap H) = P^{\mathcal{G}}F \times P^{\mathcal{G}}H.$$

Иными словами,

$$\mathbb{E}(1_{F \cap H} \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(1_F \mid \mathcal{G}) \times \mathbb{E}(1_H \mid \mathcal{G}).$$

Имеем

$$\mathbb{E}(1_{F\cap H}\mid\mathcal{G})=\mathbb{E}(1_F1_H\mid\mathcal{G})=\mathbb{E}(\mathbb{E}(1_F1_H\mid\mathcal{F},\mathcal{G})\mid\mathcal{G})=$$
$$=\mathbb{E}(1_F\mathbb{E}(1_H\mid\mathcal{F},\mathcal{G})\mid\mathcal{G})=\mathbb{E}(1_F\mathbb{E}(1_H\mid\mathcal{G})\mid\mathcal{G})=\mathbb{E}(1_H\mid\mathcal{G})\times\mathbb{E}(1_F\mid\mathcal{G}).$$

А в другую сторону?

1. Пусть дано $(\xi,\eta)=^d(\xi',\eta)$. Покажем, что
$$P(\xi\in B\mid\eta)=P(\xi'\in B\mid\eta).$$
Из равенства по распределению следует, что для любых измеримых A,B
$$P(\xi\in B,\eta\in A)=P(\xi'\in B,\eta\in A).$$
Пусть
$$\eta_1=\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\xi\in B}\mid\eta),\eta_2=\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\xi'\in B}\mid\eta).$$
Тогда имеем
$$\mathbb{E}(\eta_1\mathbb{1}_{\eta\in A})=\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\xi\in B}\mathbb{1}_{\eta\in A})=P(\xi\in B,\eta\in A)=$$
$$=P(\xi'\in B,\eta\in A)=\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\xi'\in B}\mathbb{1}_{\eta\in A})=\mathbb{E}(\eta_2\mathbb{1}_{\eta\in A}).$$
Итак, η_1 и η_2 — F_η-измеримые, причём интегралы от них по любому множеству из F_η совпадают. Значит, они совпадают почти наверное. Получаем
$$P(\xi\in B\mid\eta)=\eta_1=\eta_2=P(\xi'\in B\mid\eta)\ \ a.s.$$
В другую сторону — примерно так же. Сначала переписываем
$$P(\xi\in B\mid\eta)=P(\xi'\in B\mid\eta)$$
как $\eta_1=\eta_2\ \ a.s.$ Интегрируя по множеству $\mathbb{1}_{\eta\in A}$ из F_η, получаем
$$P(\xi\in B,\eta\in A)=P(\xi'\in B,\eta\in A).$$
А из этого равенства уже монотонным классом получаем равенство по распределению $(\xi,\eta)=^d(\xi',\eta)$.

2. Если $\mathbb{E}^F\xi=\mathbb{E}^G\xi$ для любой $\xi\in L_1$, то покажем, что $\overline{F}=\overline{G}$. В эту сторону это несложно. Мы дляданного $A\in F$ воспользуемся тем, что
$$\mathbb{E}^F\mathbb{1}_A=1_A\ \ a.s.$$

Значит,
$$\mathbb{E}^G 1_A = 1_A \ \ a.s.$$
Но это значит, что множество $B \in G$ тех ω, где $\mathbb{E}^G 1_A$ принимает значение 1, отличается от A на множество меры 0:
$$B = \{\omega \mid \mathbb{E}^G 1_A(\omega) = 1\},$$
$$P(A \triangle B) = 0.$$
Это значит, что любое $A \in F$ можно приблизить множеством из G с точностью до множества меры 0. Но тогда любое $A \in \overline{F}$ тоже можно так приблизить множеством из G, и оно лежит в $\overline{G}$. Доказали.

Теперь в другую сторону. Известно, что
$$\overline{F} = \overline{G}.$$
Достаточно доказать, что для любой $\xi \in L_1$
$$\mathbb{E}^{\overline{F}} \xi = \mathbb{E}^F \xi \ \ a.s.$$
Как это доказать? Пусть
$$\eta = \mathbb{E}^F \xi.$$
Надо показать, что η может служить в роли $\mathbb{E}^{\overline{F}} \xi$. Для этого достаточно показать, что для любого множества $A \in \overline{F}$ выполнено
$$\mathbb{E}(1_A \eta) = \mathbb{E}(1_A \xi).$$
Но A отличается от некоторого $B \in F$ на множество нулевой меры:
$$P(A \triangle B) = 0.$$
Имеем, поскольку $B \in F$,
$$\mathbb{E}(1_B \eta) = \mathbb{E}(1_B \xi).$$
Но ясно, что
$$\mathbb{E}(1_A \eta) = \mathbb{E}(1_B \eta),$$
$$\mathbb{E}(1_A \xi) = \mathbb{E}(1_B \xi).$$
Из этих равенств получаем
$$\mathbb{E}(1_A \eta) = \mathbb{E}(1_A \xi),$$
что и требовалось.

3. Не хочу такое решать.

4. Имеем
$$\xi_n \wedge \eta \to \xi \wedge \eta \in L_1.$$
Из свойства монотонной сходимости
$$\sup_n \mathbb{E}^F \xi_n \geq \sup_n \mathbb{E}^F (\xi_n \wedge \eta) \geq \lim_n \mathbb{E}^F (\xi_n \wedge \eta) = \mathbb{E}^F (\xi \wedge \eta) = \mathbb{E}^F \eta.$$

5. Пусть $\xi_n \uparrow \xi$. Покажем, что для нового определения условного матожидания
$$\mathbb{E}^F \xi_n \to \mathbb{E}^F \xi.$$
Во-первых, заметим, что новое матожидание монотонно: если
$$\xi \leq \eta \ \ a.s.$$
то
$$\mathbb{E}^F \xi \leq \mathbb{E}^F \eta \ \ a.s.$$
Далее, пусть
$$\xi_n \uparrow \xi \ \ a.s.$$
Тогда
$$\mathbb{E}^F \xi \geq \mathbb{E}^F \xi_n \ \ a.s.$$
для любого n, а потому
$$\mathbb{E}^F \xi \geq \lim_n \mathbb{E}^F \xi_n \ \ a.s.$$
Осталось показать в обратную сторону:
$$\mathbb{E}^F \xi \leq \lim_n \mathbb{E}^F \xi_n \ \ a.s.$$
Но это не так и сложно! Имеем
$$\xi_m \wedge m \uparrow \xi,$$
$$\eta = \xi \wedge n \leq \xi,$$
и мы находимся в условиях предыдущей задачи. Получаем из этой задачи
$$\mathbb{E}^F (\xi \wedge n) \leq \sup_m \mathbb{E}^F (\xi_m \wedge m) = \lim_m \mathbb{E}^F (\xi_m \wedge m) \ \ a.s.$$

Однако
$$\mathbb{E}^F\xi = \sup_n \mathbb{E}^F(\xi \wedge n).$$
Значит,
$$\mathbb{E}^F\xi \le \lim_m \mathbb{E}^F(\xi_m \wedge m) \le \lim_m \mathbb{E}^F\xi_m \ \ a.s.$$
Это и требовалось.

6. Потом.

7. Доказать:
$$\liminf_n \mathbb{E}^F\xi_n \ge \mathbb{E}^F \liminf_n \xi_n.$$
Просто повторим доказательство леммы Фату. Пусть
$$\eta_n = \inf_{m \ge n} \xi_m.$$
Тогда
$$\eta_n \uparrow \liminf_n \xi_n.$$
Но $\xi_n \ge \eta_n$, отсюда
$$\liminf_n \mathbb{E}^F\xi_n \ge \liminf_n \mathbb{E}^F\eta_n = \lim_n \mathbb{E}^F\eta_n = \mathbb{E}^F \lim_n \eta_n = \mathbb{E}^F \liminf_n \xi_n.$$
Мы воспользовались свойством монотонной сходимости для таких условных матожиданий (задача 5).

8. Аналог теоремы Лебега об ограниченной сходимости — доказывается аналогично. Пусть
$$\eta = \sup_n |\xi_n|.$$
Имеем по предыдущей задаче
$$\mathbb{E}^F \liminf_n(\eta - \xi_n) \le \liminf_n \mathbb{E}^F(\eta - \xi_n),$$
$$\mathbb{E}^F\eta - \mathbb{E}^F \limsup_n \xi_n \le \mathbb{E}^F\eta - \limsup_n \mathbb{E}^F\xi_n,$$
$$\limsup_n \mathbb{E}^F\xi_n \le \mathbb{E}^F \limsup_n \xi_n.$$
Аналогично, получаем
$$\mathbb{E}^F \liminf_n(\eta + \xi_n) \le \liminf_n \mathbb{E}^F(\eta + \xi_n),$$
$$\mathbb{E}^F\eta + \mathbb{E}^F \liminf_n \xi_n \le \mathbb{E}^F\eta + \liminf_n \mathbb{E}^F\xi_n,$$

$$\liminf_n \mathbb{E}^F \xi_n \geq \mathbb{E}^F \liminf_n \xi_n.$$

Комбинируя, получаем

$$\mathbb{E}^F \liminf_n \xi_n \leq \liminf_n \mathbb{E}^F \xi_n \leq \limsup_n \mathbb{E}^F \xi_n \leq \mathbb{E}^F \limsup_n \xi_n.$$

Но

$$\mathbb{E}^F \liminf_n \xi_n = \mathbb{E}^F \lim_n \xi_n = \mathbb{E}^F \limsup_n \xi_n \;\; a.s.$$

Отсюда получаем нужное соотношение.

9. Не будем решать, слишком известная задача.

10. Показать

$$\mathbb{E}(\xi \mid F, 1_A) = \frac{\mathbb{E}(\xi; A \mid F)}{P(A \mid F)}$$

почти наверное на A. В этой задаче мне самым сложным было понять, что такое $\mathbb{E}(\xi; A \mid F)$. Оказывается, это $\mathbb{E}(\xi 1_A \mid F)$. После того, как это понято, доказательство получается автоматически. Итак, наш кандидат на роль условного матожидания

$$\eta = \frac{\mathbb{E}(\xi 1_A \mid F)}{P(A \mid F)} 1_A + \frac{\mathbb{E}(\xi 1_{A^c} \mid F)}{P(A^c \mid F)} 1_{A^c}$$

Ясно, что η измерима относительно сигма-алгебры, порожденной F и A. Остается только проверить, что для любого множества B из этой сигма-алгебры

$$\mathbb{E}(\eta 1_B) = \mathbb{E}(\xi 1_B).$$

Достаточно проверить для множеств вида

$$U \cap A, U \cap A^c, U \in F.$$

Проверим для множеств

$$B = U \cap A, U \in F.$$

Имеем

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\eta 1_B = \mathbb{E}\left(\frac{\mathbb{E}(\xi 1_A \mid F)}{P(A \mid F)} 1_A 1_U\right) = \mathbb{E}\mathbb{E}\left(\frac{\mathbb{E}(\xi 1_A \mid F)}{P(A \mid F)} 1_A 1_U \mid F\right) = \\ = \mathbb{E}\left(\frac{\mathbb{E}(\xi 1_A \mid F)}{P(A \mid F)} 1_U \mathbb{E}(1_A \mid F)\right) = \mathbb{E}\left(\frac{\mathbb{E}(\xi 1_A \mid F)}{P(A \mid F)} 1_U P(A \mid F)\right) = \\ = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(\xi 1_A \mid F) 1_U\right) = \mathbb{E}\xi 1_A 1_U = \mathbb{E}\xi 1_B.\end{aligned}$$

Здесь мы пользовались F-измеримостью множества U. В общем, всё доказано.

11. Пусть $\eta_n = \mathbb{E}(\xi_n \wedge 1 \mid F_n)$. Тогда

$$\eta_n \xrightarrow{P} 0.$$

Отсюда и из $0 \le \eta_n \le 1$ следует

$$\mathbb{E}\eta_n \to 0, n \to \infty.$$

Но $\mathbb{E}\eta_n = \mathbb{E}(\xi_n \wedge 1)$. Поэтому

$$\mathbb{E}(\xi_n \wedge 1) \to 0, n \to \infty.$$

Но последнее соотношение и означает

$$\xi_n \xrightarrow{P} 0, n \to \infty.$$

12.

13. По условию, (ξ, η) имеет плотность распределения $f(x, y)$,

$$F(y) = \int f(x, y)dx, g(x, y) = f(x, y)/F(y).$$

Покажем, что для фиксированного борелевского множества B случайная величина

$$H(\eta) = \int\limits_B g(x, \eta)dx$$

годится на роль условного матожидания $P(\xi \in B \mid \eta)$. Для этого надо проверить, что для любого борелевского множества A

$$\mathbb{E}1_{\eta \in A} H(\eta) = P(\xi \in B, \eta \in A).$$

Пусть

$$G(y) = 1_{y \in A} H(y),$$

$$G(\eta) = 1_{\eta \in A} H(\eta) = 1_{\eta \in A} \int\limits_B g(x, \eta)dx.$$

Нужно проверить:

$$\mathbb{E}G(\eta) = P(\xi \in B, \eta \in A).$$

Пусть p_η — плотность распределения η. Ясно, что $p_\eta = F$ (где по условию $F(y) = \int f(x,y)dx$). Имеем

$$\mathbb{E}G(\eta) = \int\limits_{\mathbb{R}} G(y)p_\eta(y)dy = \int\limits_{\mathbb{R}} G(y)F(y)dy =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} 1_{y\in A} \left(\int\limits_{B} g(x,y)dx \right) F(y)dy =$$

$$= \int\limits_{A} \left(\int\limits_{B} g(x,y)F(y)dx \right) dy = \int\limits_{A\times B} g(x,y)F(y)dxdy =$$

$$= \int\limits_{A\times B} f(x,y)dxdy = P(\xi \in B, \eta \in A).$$

14. Теоремы о монотонной и ограниченной сходимости для условных матожиданий из соответствующих безусловных результатов с помощью условных распределений. Это хорошая задача! Дает прочувствовать условные матожидания. Пусть

$$\xi_n \uparrow \xi_0, \xi_n \geq 0.$$

В произведении пространств $\mathbb{R}^\infty$ множество последовательностей

$$S = \{(x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots) \mid x_n \leq x_{n+1}, n \geq 1, \lim_{n\to\infty} x_n = x_0\}$$

является борелевским множеством. Рассмотрим бесконечномерный случайный вектор

$$\zeta = (\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots).$$

Он принимает значения в борелевском пространстве $\mathbb{R}^\infty$. Поэтому существует регулярное условное распределение

$$\nu(\omega, \cdot) = P(\zeta \in \cdot \mid \mathcal{F}).$$

Из того, что $\zeta(\omega)$ лежит в S с вероятностью 1, следует, что с вероятностью 1 мера $\nu(\omega)$ сосредоточена на S. И теперь можно применить теорему о монотонной сходимости к функциям $y_1, \ldots, y_n, \ldots$ как координатным функциям от $y \in S$:

$$\mathbb{E}(\xi_n \mid \mathcal{F}) = \int\limits_{\mathbb{R}^\infty} y_n(y)\nu(\omega, dy) =$$

$$= \int\limits_{S} y_n(y)\nu(\omega, dy) \to \int\limits_{S} y_0(y)\nu(\omega, dy) = \mathbb{E}(\xi_0 \mid \mathcal{F}).$$

Теорема об ограниченной сходимости получается аналогично, надо только заметить, что из интегрируемости мажоранты следует, что она интегрируема по мере $\nu(\omega)$ для почти всех ω.

15. $\mathbb{E}^{\mathcal{F}}\xi =^d \xi, \xi \in L_1$. Тогда ξ почти наверное $\mathcal{F}$-измерима. Так и сделаем, как предлагает подсказка. Выберем строго выпуклую f, такую, что
$$0 \le f(x) \le |x|, x \in \mathbb{R}.$$
Как это сделать? Выберем непрерывную функцию $h(x), x \ge 0$, которая монотонно строго возрастает на $\mathbb{R}_+$ и находится в пределах от 0 до 1 (например, сигмоида). Положим
$$f(x) = \begin{cases} \int\limits_0^x h(y)dy, x > 0, \\ 0, x = 0, \\ f(-x), x < 0 \end{cases}$$
Ясно, что f выпукла.

Имеем по условию
$$\mathbb{E}f(\xi) = \mathbb{E}f\left(\mathbb{E}^{\mathcal{F}}\xi\right).$$
Но
$$\mathbb{E}f(\xi) = \mathbb{E}\mathbb{E}\left(f(\xi) \mid \mathcal{F}\right) = \mathbb{E}\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\nu(\omega, dx) \ge$$
$$\ge \mathbb{E}f\left(\int\limits_{\mathbb{R}} x\nu(\omega, dx)\right) = \mathbb{E}f\left(\mathbb{E}^{\mathcal{F}}\xi\right).$$
Здесь неравенство написано по Иенсену, и раз оно обращается в равенство, то мера $\nu(\omega)$ почти наверное сосредоточена в одной (случайной) точке, причём эта точка есть $\int\limits_{\mathbb{R}} x\nu(\omega, dx)$. Отсюда получаем
$$P\left(\xi = \mathbb{E}^{\mathcal{F}}\xi\right) = \mathbb{E}\mathbb{1}_{\xi=\mathbb{E}^{\mathcal{F}}\xi} = \mathbb{E}\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\xi=\mathbb{E}^{\mathcal{F}}\xi} \mid \mathcal{F}\right) =$$
$$= \mathbb{E}\int\limits_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{x=\mathbb{E}^{\mathcal{F}}\xi}\nu(\omega, dx) = \mathbb{E}\int\limits_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{x=\int\limits_{\mathbb{R}} x\nu(\omega,dx)}\nu(\omega, dx) =$$
$$= \mathbb{E}\nu\left(\omega, \left\{\int\limits_{\mathbb{R}} x\nu(\omega, dx)\right\}\right) = 1.$$
Здесь мы применили теорему 6.4, взяв в роли функции $f(x, y)$ $\mathbb{1}_{x=y}$. в роли ξ саму ξ, в роли η $\mathcal{F}$-измеримую случайную величину $\mathbb{E}^{\mathcal{F}}\xi$.

16. По задаче 12, имеем

$$P(\xi \in B \mid \eta) =^d P(\xi \in B \mid \zeta).$$

По задаче 15,

$$P(\xi \in B \mid \eta) = P(\xi \in B \mid \zeta) \ \ a.s.$$

По предложению 6.6, из выполняения для всех B равенства

$$P(\xi \in B \mid \eta, \zeta) = P(\xi \in B \mid \eta) \ \ a.s.$$

следует, что $\xi \perp\!\!\!\perp_\eta \zeta$.

17.

18. Дано: $\xi \perp\!\!\!\perp_\eta \zeta$, $\gamma \perp\!\!\!\perp (\xi, \eta, \zeta)$. Показать:

$$\xi \perp\!\!\!\perp_{\eta,\gamma} \zeta, \xi \perp\!\!\!\perp_\eta (\zeta, \gamma).$$

По предложению 6.6,

$$P(\xi \in A \mid \eta, \zeta) = P(\xi \in A \mid \eta).$$

Используя это и независимость γ от (ξ, η, ζ), получаем

$$\begin{aligned} P(\xi \in A, \gamma \in B \mid \eta, \zeta) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\xi\in A, \gamma \in B} \mid \eta, \zeta) = \\ = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\xi\in A}\mathbb{1}_{\gamma\in B} \mid \eta, \xi, \zeta) \mid \eta, \zeta) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\xi\in A}\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\gamma\in B} \mid \eta, \xi, \zeta) \mid \eta, \zeta) = \\ = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\xi\in A} P(\gamma \in B) \mid \eta, \zeta) = P(\gamma \in B) P(\xi \in A \mid \eta, \zeta) = \\ = P(\gamma \in B) P(\xi \in A \mid \eta). \end{aligned}$$

Анадогично (вместо ζ — единица) показываем, что

$$P(\xi \in A, \gamma \in B \mid \eta) = P(\gamma \in B) P(\xi \in A \mid \eta).$$

Из этих двух равенств получаем

$$P(\xi \in A, \gamma \in B \mid \eta, \zeta) = P(\xi \in A, \gamma \in B \mid \eta).$$

С помощью леммы о монотонном классе показываем, что для любого борелевского H

$$P((\xi, \gamma) \in H \mid \eta, \zeta) = P((\xi, \gamma) \in H \mid \eta).$$

По предложению 6.6, это означает, что

$$\xi, \gamma \perp\!\!\!\perp_\eta \zeta.$$

По предложению 6.8, отсюда следует

$$\xi \perp\!\!\!\perp_{\eta,\gamma} \zeta.$$

Но есть более короткий способ! Имеем

$$P(\gamma \in A \mid \eta, \xi, \zeta) = P(\gamma \in A) = P(\gamma \in A \mid \eta, \zeta).$$

Отсюда по предложению 6.6 получаем

$$\gamma \perp\!\!\!\perp_{\eta,\zeta} \xi.$$

С учётом $\xi \perp\!\!\!\perp_\eta \zeta$ получаем отсюда по предожению 6.8

$$\xi \perp\!\!\!\perp_\eta \zeta, \gamma.$$

А отюда по предложению 6.8 получаем и

$$\xi \perp\!\!\!\perp_{\eta,\gamma} \zeta.$$

Всё доказано. Кстати,

$$\gamma \perp\!\!\!\perp_{\eta,\zeta} \xi$$

можно получить проще с помощью предложения 6.8. Имеем

$$\gamma \perp\!\!\!\perp \xi, \eta, \zeta,$$

$$\gamma \perp\!\!\!\perp_1 \xi, \eta, \zeta,$$

$$\gamma \perp\!\!\!\perp_{1,\eta,\zeta} \xi,$$

$$\gamma \perp\!\!\!\perp_{\eta,\zeta} \xi.$$

Ведь условная независимость — частный случай обычной!

19.

20. $\eta = P(\xi \in \cdot \mid F)$. Я понимаю это так, что η — это совокупность случайных элементов

$$P(\xi \in B \mid F)$$

для всевозможных борелевских B. Надо показать, что $\xi \perp\!\!\!\perp_\eta F$. Это проще, чем кажется! По предложению 6.6, достаточно показать, что

$$P(H \mid F, \sigma(\eta)) = P(H \mid \sigma(\eta))$$

для всех $H \in \sigma(\xi)$). Но все такие H имеют вид $\mathbb{1}_{\xi \in A}$ для борелевских A. Итак, достаточно показать, что

$$P(\xi \in A \mid F, \sigma(\eta)) = P(\xi \in A \mid \sigma(\eta)).$$

Но $\sigma(\eta) \subseteq F$. Поэтому надо показать, что

$$P(\xi \in A \mid F) = P(\xi \in A \mid \sigma(\eta)).$$

Но матожидание можно брать сначала по более широкой, потом по более узкой сигма-алгебре, и

$$P(\xi \in A \mid \sigma(\eta)) = \mathbb{E}(P(\xi \in A \mid F) \mid \sigma(\eta)) = P(\xi \in A \mid F),$$

ибо $P(\xi \in A \mid F)$ измерима относительно $\sigma(\eta)$. Всё доказано.

21. Воспользуемся указанием. В указании приведено полное решение, но надо дописать комментарии — ссылки на теоремы.

    Первый шаг: существуют f и θ со свойством

    $$(f(\eta, \theta), \eta) =^d (\xi, \eta).$$

    Это получается применением теоремы 6.10 (трансфер) к ξ и $\eta =^d \eta$.

    Второй шаг: существует случайный вектор $(\gamma, \tilde{\eta}) =^d (\theta, \eta)$ со свойством

    $$(\xi, \eta) = (f(\tilde{\eta}, \gamma), \tilde{\eta}) \ \ a.s.$$

    Это получается применением следствия 6.11 (стохастические уравнения) к случайным элементам (ξ, η) и (η, θ), связанным соотношением

    $$(\xi, \eta) =^d g(\eta, \theta).$$

    Здесь $g(x, y) = (f(x, y), x)$. По 6.11 как раз и получаем существование случайного вектора $(\tilde{\eta}, \gamma) =^d (\eta, \theta)$ со свойством

    $$(\xi, \eta) = g(\tilde{\eta}, \gamma) \ \ a.s.$$

    Осталось понять, почему γ не завиит от η.
    Да потому что $\eta = \tilde{\eta} \ \ a.s.$, а γ не зависит от $\tilde{\eta}$ в силу $(\gamma, \tilde{\eta}) =^d (\theta, \eta)$.
    Вот и всё.

22. А эта задача легко получается из предыдущей. По предыдущей задаче, существуют борелевская функция f и случайная величина $\gamma \perp\!\!\!\perp \xi$ с распределением $U(0,1)$, такие, что

    $$\eta = f(\xi, \gamma) \ \ a.s.$$

Выберем случайную величину $\theta \perp\!\!\!\perp (\xi, \gamma)$ с распределением $U(0,1)$. Тогда

$$\tilde{\eta} = f(\xi, \theta)$$

есть искомый случайный элемент. Соотношение

$$\tilde{\eta} \perp\!\!\!\perp_{\xi} \eta$$

выполняется по предложению 6.13. Ведь $\tilde{\eta} = f(\xi, \theta)$ и $\theta \perp\!\!\!\perp (\xi, \eta)$.

4 Kallenberg 2002 — Глава 7. Мартингалы

1. $\{\sigma = \tau\} \in F_\sigma \cap F_\tau$. Достаточно показать, что

$$\{\sigma < \tau\} \in F_\sigma \cap F_\tau.$$

Отсюда с учётом аналогичного влючения для $\{\tau < \sigma\}$ будет следовать, что

$$\{\sigma \neq \tau\} \in F_\sigma \cap F_\tau.$$

Итак, имеем

$$\{\sigma < \tau\} \cap \{\tau \leq t\} = \bigcup_{0<q<t, q \in \mathbb{Q}} (\{\sigma < q\} \cap \{q < \tau \leq t\}) \in F_t.$$

Это верно для любого t, и по определению F_τ получаем

$$\{\sigma < \tau\} \in F_\tau.$$

Далее,

$$\{\sigma < \tau\} \cap \{\sigma \leq t\} = \{\sigma < \tau, \tau \leq t\} \cup \{\sigma \leq t, \tau > t\}.$$

Но оба последних события лежат в F_t. Дейтвительно,

$$\{\sigma < \tau, \tau \leq t\} \in F_t$$

мы доказали выше, а

$$\{\sigma \leq t, \tau > t\} = \{\sigma \leq t\} \cap \{\tau > t\} \in F_t.$$

Итак,

$$\{\sigma < \tau\} \cap \{\sigma \leq t\} \in F_t$$

для любого t, и по определению F_σ получаем $\{\sigma < \tau\} \in F_\sigma$.

Далее, почему $F_\sigma = F_\tau$ на $\{\sigma = \tau\}$? Пусть $A \subseteq \{\sigma = \tau\}, A \in F_\sigma$. Покажем, что $A \in F_\tau$. Из $A \in F_\sigma$ следует, что для любого t

$$A \cap \{\sigma \le t\} \in F_t.$$

Поскольку на множестве A $\sigma = \tau$, то для любого t

$$A \cap \{\tau \le t\} = A \cap \{\sigma \le t\} \in F_t.$$

По определению F_τ, $A \in F_\tau$. Вот и доказали всё.

Осталось объяснить, почему F_τ может отличаться от F_∞ на $\{\tau = \infty\}$. Это ясно. Если $\tau = \infty$ всегда, то по определению F_τ, в F_τ входят все множества из сигма-алгебры A, а не только из F_∞.

2. Стандартная задача.

3. Пример слабо опционального, но не опционального момента. Возьмём, как предлагает Калленберг. Берём бернуллиевскую случайную величину $\xi, P(\xi = 1) = P(\xi = -1) = \frac{1}{2}$, и положим

$$F_0 = \{\emptyset, \Omega\}, F_t = \sigma(\xi), t > 0.$$

Пусть

$$\tau = \begin{cases} 0, \xi = -1, \\ 1, \xi = 1. \end{cases}$$

Тогда для $t > 0$ имеем

$$\{\tau < t\} = \begin{cases} \{\xi = -1\}, t \le 1, \\ \Omega, t > 1. \end{cases}$$

В любом случае, $\{\tau < t\} \in F_t = \sigma(\xi), t > 0$. Поэтому τ слабо опциональный. Но $\{\tau \le 0\} = \{\tau = 0\} = \{\xi = -1\} \notin F_0$. Поэтому τ не опциональный.

4. Скучно решать это.

5. Задача про прогрессивные процессы. Прогрессивность — это измеримость относительно соответствующей сигма-алгебры. Итак, сначала покажем, что класс множеств $A \in \Omega \times \mathbb{R}_+$, таких, что процесс 1_A прогрессивен, образует сигма-алгебру. Да это вроде очевидно! Прогрессивность 1_A означает, что для любого t

$$A \cap (\Omega \times [0, t]) \in F_t \otimes \mathcal{B}[0, t].$$

Ясно, что это свойство сохраняется счётным объединением. И для перехода к дополнению всё тоже очевидно. Итак, да, сигма-алгебра.

Почему прогрессивность процесса равносильна его измеримости относительно этой сигма-алгебры? Допустим, процесс X прогрессивен. Покажем, что он измерим относительно этой сигма-алгебры. Нужно проверить, что для любого a множество $\{X > a\}$ лежит в прогрессивной сигма-алгебре. А оно там лежит, если для любого t

$$\{X > a\} \cap (\Omega \times [0,t]) \in F_t \otimes \mathcal{B}[0,t].$$

А это так, если X прогрессивен. И в другую сторону аналогично. Короче, пусть Калленберг сам решает такие задачи! Одни проверки.

9. $X^1, X^2, \ldots$ — субмартингалы, причём $X = \sup_n X^n$ интегрируем. Покажем, что X — тоже субмартингал. Фиксируем $t > s$. Имеем

$$\forall n \;\; X(t) \geq X_n(t),$$

$$\forall n \;\; \mathbb{E}(X(t) \mid F_s) \geq \mathbb{E}(X_n(t) \mid F_s) \geq X_n(s),$$

а поскольку это для любого n, то

$$\mathbb{E}(X(t) \mid F_s) \geq \sup_n X_n(s) = X(s).$$

Вот и доказали. Дальше сложнее. Покажем, что если $\sup_n |X_n|$ интегрируем, то и $\limsup_n X_n$ — субмартингал. Фиксируем $s < t$. Пусть

$$\xi_n = \sup(X_n(t), X_{n+1}(t), X_{n+2}(t), \ldots),$$

$$\eta_n = \sup(X_n(s), X_{n+1}(s), X_{n+2}(s), \ldots).$$

Пусть также $\xi = \sup_n |X_n(t)|, \eta = \limsup_n X_n(s)$. Имеем

$$\lim_{n\to\infty} \xi_n = \limsup_n X_n(t) \;\; a.s., |\xi_n| \leq \xi \;\; a.s..$$

По условию, ξ интегрируема. Значит, по теореме Лебега об ограниченной сходимости,

$$\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{L_1} \limsup_n X_n(t).$$

Условное матожидание при условии F_s — ограниченный оператор на $L_1(F_t)$, см. начало предыдущей главы. Поэтому

$$\zeta_n = \mathbb{E}(\xi_n \mid F_s) \xrightarrow[n\to\infty]{L_1} \mathbb{E}(\limsup_n X_n(t) \mid F_s) = \zeta.$$

Из условия субмаритингальности,

$$\eta_n \le \mathbb{E}(\xi_n \mid F_s) = \zeta_n.$$

Но аналогичные рассуждения для момента s

$$\eta_n \xrightarrow[n\to\infty]{L_1} \limsup_n X_n(s) = \eta.$$

Итак, имеем две последовательности случайных величин $\zeta_n \ge \eta_n$, и обе сходятся в L_1:

$$\zeta_n \xrightarrow[n\to\infty]{L_1} \zeta, \eta_n \xrightarrow[n\to\infty]{L_1} \eta.$$

Покажем, что

$$\zeta \ge \eta \ \ a.s.$$

Действительно,

$$\zeta_n - \eta_n \ge 0, \zeta_n - \eta_n \xrightarrow[n\to\infty]{L_1} \zeta - \eta.$$

Но L_1-предел неотрицательных случайных величин неотрицателен почти наверное. Действительно, если λ_n — неотрицательные случайные величины и

$$\lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{L_1} \lambda,$$

$$A = \{\omega \in \Omega \mid \lambda(\omega) < 0\},$$

то при $P(A) > 0$ имеем $\mathbb{E}\lambda_n \mathbb{1}_A \to \mathbb{E}\lambda\mathbb{1}_A < 0$, противоречие. Кстати, откуда следует сходимость $\mathbb{E}\lambda_n\mathbb{1}_A \to \mathbb{E}\lambda\mathbb{1}_A, n \to \infty$?
Эта сходимость следует из

$$|\mathbb{E}\lambda_n\mathbb{1}_A - \mathbb{E}\lambda\mathbb{1}_A| \le \mathbb{E}|(\lambda_n - \lambda)\mathbb{1}_A| \le \mathbb{E}|\lambda_n - \lambda| \to 0, n \to \infty.$$

Вот всё и доказали. Неравенство $\zeta \ge \eta \ a.s.$ и есть нужное нам неравенство

$$\mathbb{E}(\limsup_n X_n(t) \mid F_s) \ge \limsup_n X_n(s),$$

показывающее субмартингальность процесса $\limsup_n X_n$.

10. Разложение Дуба интегрируемой случайной последовательности $X = (X_n)$ зависит от фильтрации. Возьмём

$$F_n = \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n), G_n = \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}) = F_{n+1}.$$

Тогда X согласован и с фильтрацией F_n, и с фильтрацией G_n. Относительно фильтрации G_n X является предсказуемой последовательностью, и разложение Дуба имеет вид

$$X_n = X_0 + (X_n - X_0).$$

Когда у X относительно фильтрации F_n такое же разложение Дуба? Если оно то же, то $X_n - X_0$ должно быть при каждом $n \geq 1$ F_{n-1}-измеримым. Тогда и X_n при каждом $n \geq 1$ F_{n-1}-измеримо. Но тогда при каждом $n \geq 1$

$$\sigma(X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}) = \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n),$$

$$F_{n-1} = F_n.$$

Тогда все сигма-алгебры F_n совпадают, и при каждом n X_n является X_0-измеримой величиной.

11.

12.

13.

14. Доказательство леммы 4.15 дословно переносится на случай, когда ξ_n — мартингал-разность для L_2-интегрируемого мартингала M. Итак, для L_2-ограниченного мартингала имеет место неравенство Колмогорова
$$P(\sup_n |M_n| > r) \leq r^{-2} \sup_n \mathbb{E} M_n^2.$$
Но можно такое вывести и из леммы 7.15. Эта лемма даёт для субмартингала X

$$rP(\sup_t |X_t| \geq r) \leq 3 \sup_t \mathbb{E}|X_t|.$$

Мы можем взять в качестве X субмартингал M^2 (квадрат мартингала — субмартингал). Имеем тогда из этого неравенства

$$r^2 P(\sup_n |M_n| \geq r) = r^2 P(\sup_n X_n \geq r^2) \leq 3 \sup_n \mathbb{E}|X_n| = 3 \sup_n \mathbb{E} M_n^2.$$

А теперь мы можем имитировать доказательство леммы 4.16. Пусть n фиксировано, построим случайный процесс $X^{(n)}$ на $\mathbb{Z}_+$,

$$X_k^{(n)} = (M_{n+k} - M_n)^2, k \geq 0.$$

Тогда $X^{(n)}$ — субмартингал. Имеем для него из 7.15

$$P(\sup_{k\geq 0} X_k^{(n)} \geq \epsilon^2) \leq 3\epsilon^{-2}\sup_{k\geq 0}\mathbb{E}|X_k^{(n)}| = 3\epsilon^{-2}\mathbb{E}(M_{n+k}-M_n)^2 \leq$$
$$\leq 3\epsilon^{-2}\sum_{k\geq 0}\mathbb{E}(M_{n+k+1}-M_{n+k})^2 \to 0, n\to\infty.$$

Отсюда
$$P(\sup_{k\geq 0}(M_{n+k}-M_n)^2 > \epsilon^2) \to 0, n\to\infty$$
для любого $\epsilon > 0$. Итак,
$$\sup_{k\geq n}|M_k - M_n| \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0.$$

Значит, для некоторой подпоследовательности n_s
$$\sup_{k\geq n_s}|M_k - M_{n_s}| \xrightarrow[s\to\infty]{a.s.} 0.$$

Но если $\sup_{k\geq n_s}|M_k - M_{n_s}| \leq \epsilon$, то
$$\sup_{k_1,k_2\geq n_s}|M_{k_1} - M_{k_2}| \leq 2\epsilon.$$

Отсюда следует, что последовательность $\{M_n\}$ фундаментальна почти наверное. Значит, сходится почти наверное. Ну а сходимость в L_2 по сравнению с этим тривиальна и следует из фундаментальности в L_2 последовательности M_n:
$$\sup_{k\geq 0}\mathbb{E}(M_{n+k}-M_n)^2 \leq \sum_{k\geq 0}\mathbb{E}(M_{n+k+1}-M_{n+k})^2 \to 0, n\to\infty.$$

15. Мартингал, который L^1-ограничен, но не равномерно интегрируем. Это известный пример. Берём последовательность независимых случайных величин ξ_n, каждая из которых принимает значения 0 и 2 с равными вероятностями $\frac{1}{2}$. Пусть
$$X_n = \xi_1\xi_2\ldots\xi_n.$$
Тогда $\mathbb{E}|X_n| = \mathbb{E}X_n = 1$, но X_n не равномерно интегрируем. А в непрерывном времени пример? Это экспоненциальные мартингалы.
$$X_t = e^{w_t - t/2}.$$

Ясно, что $\mathbb{E}X_t = \mathbb{E}X_0 = 1$. Почему X_t не равномерно интегрируем? Потому что

$$X_t \xrightarrow[t\to\infty]{a.s.} 0.$$

Если бы X_t был равномерно интегрируем, то сходимость к 0 была бы и в L^1, а её нет, потому что

$$\mathbb{E}X_t = 1 \neq 0.$$

16. Это просто. Фиксируем $G \in \mathcal{G}, H \in \mathcal{H}$. Имеем

$$P(G \cap H \mid \mathcal{F}_n) = P(G \mid \mathcal{F}_n) P(H \mid \mathcal{F}_n) \ \ a.s.$$

Оказывается, обе части этого равенства сходятся почти наверное при $n \to \infty$. Действительно, из теоремы 7.23 имеем сходимость

$$P(G \mid \mathcal{F}_n) \to P(G \mid \mathcal{F}_\infty) \ \ a.s.,$$

$$P(H \mid \mathcal{F}_n) \to P(H \mid \mathcal{F}_\infty) \ \ a.s.,$$

$$P(G \cap H \mid \mathcal{F}_n) \to P(G \cap H \mid \mathcal{F}_\infty) \ \ a.s.$$

Отсюда всё получается, просто переходим к пределу в обеих частях равенства

$$P(G \cap H \mid \mathcal{F}_n) = P(G \mid \mathcal{F}_n) P(H \mid \mathcal{F}_n) \ \ a.s.$$

5 Kallenberg 2002 — Глава 12

1.

2.

3.

6 Kallenberg 2002 — Глава 17. стохастический интеграл

1. Воспользуемся леммой 17.1. Пусть

$$\tau_n = \begin{cases} +\infty, |\xi| \leq n, \\ 0, |\xi| > n \end{cases}$$

Ясно, что $\tau_n \uparrow \infty$. Также ясно, что

$$N^{\tau_n}(t) = (\xi M)^{\tau_n}(t) = \mathbb{1}_{|\xi|\le n}\xi M(t) + M_0\mathbb{1}_{|\xi|>n} = M_0 + \mathbb{1}_{|\xi|\le n}\xi(M(t) - M_0),$$

и N^{τ_n} является локальным мартингалом (с той же локализирующей последовательностью моментов остановки, что и M). По лемме 17.1, N — тоже локальный мартингал.

2. Пусть $\tau_m \uparrow \infty$ — такая последовательность моментов остановки, что $M_{t\wedge\tau_m} - M_0$ — мартингалы. Тогда, поскольку M_0 интегрируема, $M_{t\wedge\tau_m}$— также мартингалы. Отсюда для любого $t > 0$

$$\mathbb{E}M_{t\wedge\tau_m} = \mathbb{E}M_0.$$

В силу леммы Фату,

$$\mathbb{E}M_t = \mathbb{E}\lim_{m\to\infty} M_{t\wedge\tau_m} \le \underline{\lim}_{m\to\infty} \mathbb{E}M_{t\wedge\tau_m} = \mathbb{E}M_0.$$

Итак, M — интегрируемый процесс. Фиксируем $s < t$. Имеем

$$\mathbb{E}^{F_s}M_{t\wedge\tau_m} = M_{s\wedge\tau_m}.$$

По лемме Фату для условных матожиданий (задача 7 главы 6),

$$\mathbb{E}^{F_s}M_t = \mathbb{E}^{F_s}\underline{\lim}_{m\to\infty} M_{t\wedge\tau_m} \le \underline{\lim}_{m\to\infty} \mathbb{E}^{F_s}M_{t\wedge\tau_m} = \underline{\lim}_{m\to\infty} M_{s\wedge\tau_m} = M_s.$$

Это и показывает, что M — супермартингал.

3.

4. Просто применяем предложение 17.6 к последовательности локальных мартингалов $M_n^{\tau_n}$. Для стохастически интегралов аналог получается из леммы 17.12.

5.

6. Воспользуемся указанием. Применяя лемму 7.29 к B и $-B$ с ограниченным моментом остановки $\sigma = n \in \mathbb{N}$, получаем

$$\mathbb{E}(B_n \mid F_\tau) = B_{\tau\wedge n}.$$

Отсюда следует

$$\mathbb{E}B_{\tau\wedge n} = 0$$

при всех n. Хочется перейти к пределу. Для применения теоремы Лебега об ограниченной сходимости нужна мажоранта. В качестве мажоранты возьмём

$$\sup_{0 \le s \le \tau} |B_s| = (B^\tau)^*.$$

Надо показать, что у этого выражения конечное матожидание. Воспользуемся теоремой 17.7. Применим её к локальному мартингалу $B_{t \wedge \tau}$, $p = 1$. Получим

$$\mathbb{E} \sup_{0 \le s \le \tau} |B_s| \le c_1 \mathbb{E} \langle B \rangle_\tau^{\frac{1}{2}} = c_1 \mathbb{E} \tau^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

После этого по теореме Лебега об ограниченной сходимости получаем

$$\mathbb{E} B_\tau = \lim_{n \to \infty} \mathbb{E} B_{\tau \wedge n} = 0.$$

Равенство

$$\mathbb{E} B_\tau^2 = \mathbb{E} \tau$$

доказывается аналогично, только надо рассмотреть мартингал $B_t^2 - t$, применить к нему лемму 7.29 и получить

$$\mathbb{E}(B_n^2 - n \mid F_\tau) = (B(t)^2 - t)_{t = \tau \wedge n}.$$

Отсюда

$$\mathbb{E}(B(t)^2 - t)_{t = \tau \wedge n} = 0$$

при всех n. Итак,

$$\mathbb{E} B^2(\tau \wedge n) = \mathbb{E} \tau \wedge n.$$

Ясно, что $\mathbb{E} \tau \wedge n \to \mathbb{E} \tau, n \to \infty$. Осталось показать, что

$$\mathbb{E} B^2(\tau \wedge n) \to \mathbb{E} B^2(\tau), n \to \infty.$$

Для этого опять нужна мажоранта, и в её качестве мы возьмём

$$\sup_{0 \le s \le \tau} B_s^2.$$

По теореме 17.7 для локального мартингала $B_{t \wedge \tau}$, $p = 2$

$$\mathbb{E} \sup_{0 \le s \le \tau} B_s^2 \le c_2 \mathbb{E} \langle B \rangle_\tau = c_2 \mathbb{E} \tau < +\infty.$$

Итак, есть интегрируемая мажоранта, можно применять теорему Лебега об ограниченной сходимости. Всё доказано.

7.

8. Достаточно показать для непрерывных локальных мартингалов. Имеем по предложению 17.9
$$[X,Y] \le [X]^{\frac{1}{2}}[Y]^{\frac{1}{2}},$$
$$[X+Y] = [X]+[Y]+2[X,Y] \le [X]+[Y]+2[X]^{\frac{1}{2}}[Y]^{\frac{1}{2}} = ([X]^{\frac{1}{2}}+[Y]^{\frac{1}{2}})^2.$$
Отсюда всё получается (надо только извлечь квадратный корень).

7 Protter — Глава 2

1. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна за исключением одной точки, в которой у неё скачок. Показать, что $X_t = f(B_t)$ не семимартингал.

   Решение задачи опирается на то, что в окрестности момента достижения любого уровня броуновское движение бесконечно много раз проходит через этот уровень.

   Фиксируем $t > 0$ и покажем, что X^t — не тотальный семимартингал. Пусть a — точка скачка f. Пусть
$$\tau_a = \inf\{t > 0\colon B_t = a\}.$$
   Для $\epsilon > 0$ определим последовательность моментов остановки τ_n^ϵ следующим образом:
$$\tau_0^\epsilon = \inf\{t > 0\colon B_t = a - \epsilon\},$$
$$\tau_{2n+1}^\epsilon = \inf\{t > \tau_{2n}^\epsilon\colon B_t = a + \epsilon\},$$
$$\tau_{2n}^\epsilon = \inf\{t > \tau_{2n-1}^\epsilon\colon B_t = a - \epsilon\}.$$
   Из свойств броуновского движения
$$\max\{n > 0\colon \tau_n^{1/m} < t\} \xrightarrow[m\to\infty]{a.s.} \infty$$
   на множестве $\{\tau_a < t\}$. Пусть $h_m \to \infty$ такая детерминированная последовательность, что
$$0 < h_m < \sqrt{m}$$
   и
$$P(\max\{n > 0\colon \tau_n^{1/m} < t\} > h_m) \ge \frac{1}{2}P\{\tau_a < t\}.$$

Определим случайные процессы H_m таким образом:

$$H_m(t) = \begin{cases} 0, t \le \tau_0^{1/\sqrt[3]{h_m}}, \\ \frac{(-1)^n}{\sqrt{h_m}}, t \in (\tau_n^{1/\sqrt[3]{h_m}}, \tau_{n+1}^{1/\sqrt[3]{h_m}}], n < m, \\ 0, t > \tau_m^{1/\sqrt[3]{h_m}} \end{cases} .$$

Тогда

$$|I_{X^t}(H_m)| \ge \frac{1}{h_m^{5/6}} \left(m \wedge \max\{n > 0\colon \tau_n^{1/m} < t\}\right) - \frac{1}{\sqrt{h_m}} |\sup_{s\in[0,t]} f(B_s) - \inf_{s\in[0,t]} f(B_s)|.$$

С вероятностью не меньше, чем $\frac{1}{2}P\{\tau_a < t\} = const > 0$ имеем

$$\max\{n > 0\colon \tau_n^{1/m} < t\} > h_m,$$

$$|I_{X^t}(H_m)| > h_m^{1/6} - \frac{1}{\sqrt{h_m}} |\sup_{s\in[0,t]} f(B_s) - \inf_{s\in[0,t]} f(B_s)| \xrightarrow[m\to\infty]{a.s.} \infty.$$

Это противоречит сходимости по вероятности

$$I_{X^t}(H_m) \xrightarrow[m\to\infty]{P} 0.$$

Значит, X^t — не тотальный семимартингал, а X — не семимартингал.

2.

3.

8 Revuz-Yor — Глава 2. Мартингалы

1.20.

$$P\left(\limsup_{h\to 0} \frac{|B_{s+h} - B_s|}{\sqrt{2h \log_2 1/h}} = 1 \text{ for } \mu - a.e.\ s\right) = 1.$$

Рассмотрим случайную величину $\tau \ge 0$, не зависящую от B, с распределением μ:

$$P(\tau \le a) = \mu([0, a]), a \ge 0.$$

Тогда, как легко видеть,

$$\xi(h) = B(\tau + h) - B(\tau), h \ge 0$$

есть винеровский процесс. Как это увидеть? Если не напрямую, то можно воспользоваться строго марковским свойством винеровского процесса.

Для этого надо фильтрации F_t расширить с помощью сигма-алгебры, порождённой моментом τ. Винеровский процесс B останется винеровским и относительно расширенной фильтрации. А τ станет моментом остановки относительно новой фильтрации. Останется применить строго марковское свойство. Теперь осталось применить к процессу ξ теорему 1.9 (закон повторного логарифма).