

Математические мысли

1 Мысли по функциональному анализу

1. Какая категория у $C[0, 1]$ в $L_2[0, 1]$? По Рудину, можно сделать хитроумное доказательство, что первая. Рассмотрим функционалы на $L_2[0, 1]$, вот такие:

$$F_n(f) = n \int_0^{1/n} f(t) dt.$$

На любой $f \in C[0, 1]$ эти функционалы ограничены, и

$$F_n(f) \rightarrow f(0), n \rightarrow \infty.$$

Но на функции $g(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{t}}$

$$F_n(g) \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty.$$

Поэтому $C[0, 1]$ не может иметь вторую категорию.

2. Кстати, вложение $C[0, 1]$ в $L_2[0, 1]$ компактно? Замыкание образа единичного шара — все функции с essential supremum модуля не более 1. А это множество компактно? Нет, там функции Радемахера образуют “плохое” множество попарно ортогональных единичной нормы, и поэтому компактности нет. Да можно и синусы взять, они тоже по модулю не больше единицы. Хорошо, значит, вложение $C[0, 1]$ в $L_2[0, 1]$ некомпактно. А как этот образ единичного шара представить в виде счётного объединения нигде не плотных? Да он же сам замкнут и не содержит внутренних точек! А можно представить его в виде счётного объединения компактов?

2 Мысли по вероятности

1. Закон повторного логарифма для винеровского процесса. Давай докажем нижнюю оценку ЗПЛ для винеровского в нуле:

$$\limsup_{t \rightarrow 0} \frac{w(t)}{\sqrt{2t \ln \ln t^{-1}}} \geq 1.$$

Рассмотрим монотонно убывающую к нулю последовательность t_n . Тогда случайные величины

$$w(t_n) - \frac{t_n}{t_{n-1}} w(t_{n-1})$$

как легко видеть, независимы в совокупности. Можно применить лемму Бореля-Кантелли для событий

$$\left\{ w(t_n) - \frac{t_n}{t_{n-1}} w(t_{n-1}) > C \sqrt{2t_n \ln \ln t_n^{-1}} \right\}$$

где $C > 0$ — некоторая константа, выберем её потом. Ясно, что удобно положить $t_n = q^n$, где $0 < q < 1$. Случайная величина

$$w(t_n) - \frac{t_n}{t_{n-1}} w(t_{n-1}) = w(t_n) - q w(t_{n-1})$$

имеет дисперсию $t_n - 2qt_n + q^2 t_{n-1} = t_n - qt_n = t_n(1 - q)$. Поэтому её распределение есть $N(0, t_n(1 - q))$. Имеем

$$\begin{aligned} P\left(w(t_n) - q w(t_{n-1}) > C \sqrt{2t_n \ln \ln t_n^{-1}}\right) &= \\ &= P(N(0, t_n(1 - q)) > C \sqrt{2t_n \ln \ln t_n^{-1}}) = \\ &= P(N(0, 1) > A \sqrt{\ln \ln t_n^{-1}}) = \\ &= P(N(0, 1) > A \sqrt{\ln n + \ln \ln q^{-1}}), \end{aligned}$$

где $A = \frac{C\sqrt{2}}{\sqrt{1-q}}$. А эти вероятности можно оценить через известное неравенство

$$P(N(0, 1) > y) > \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y^3}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}.$$

Легко видеть, что отсюда следует, что в нашем случае ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(N(0, 1) > A \sqrt{\ln n + \ln \ln q^{-1}})$$

расходится при $A^2/2 < 1$, то есть при $A < \sqrt{2}$. Это соответствует $C < \sqrt{1-q}$. Итак, по лемме Бореля-Кантелли, при $C < \sqrt{1-q}$ с вероятностью 1 происходит бесконечно много событий

$$\left\{ w(t_n) - q w(t_{n-1}) > C \sqrt{2t_n \ln \ln t_n^{-1}} \right\}.$$

Теперь надо отсюда вытащить оценку на $w(t_n)$. Тут, наверное, надо использовать верхнюю оценку для ЗП.Л в нуле (ясно, что она проще доказывается — там достаточно простой леммы Бореля-Кателли, без независимости). А именно, при фиксированном $\varepsilon > 0$ с вероятностью 1 с некоторого места ($n > n_0$)

$$w(t_{n-1}) > -(1 + \varepsilon) \sqrt{2t_{n-1} \ln \ln t_{n-1}^{-1}}.$$

Объединяя с предыдущим, получаем, что бесконечно часто

$$w(t_n) > C \sqrt{2t_n \ln \ln t_n^{-1}} - q(1 + \varepsilon) \sqrt{2t_{n-1} \ln \ln t_{n-1}^{-1}}.$$

q можно выбрать сколь угодно близким к нулю, ε тоже, C сколь угодно близко к 1, и отсюда всё следует. Более формально,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q(1 + \varepsilon) \sqrt{2t_{n-1} \ln \ln t_{n-1}^{-1}}}{C \sqrt{2t_n \ln \ln t_n^{-1}}} = \frac{\sqrt{q}(1 + \varepsilon)}{C}.$$

Это отношение может быть сделано сколь угодно близким к нулю, и отсюда всё следует.