

Вероятность — задачи

1 Kallenberg 2002 — Глава 4

- 1.
- 2.
- 3.

2 Kallenberg 2002 — Глава 5

- 1.
- 2.
- 3.

3 Kallenberg 2002 — Глава 6. Условное матожидание

Как доказать предложение 6.6 из Калленберга? В первую сторону: дано, что

$$P(H \mid \mathcal{F}, \mathcal{G}) = P(H \mid \mathcal{G}), H \in \mathcal{H}$$

Покажем, что

$$\mathcal{F} \Pi_{\mathcal{G}} \mathcal{H}.$$

Для этого надо показать, что при $F \in \mathcal{F}, H \in \mathcal{H}$

$$P^{\mathcal{G}}(F \cap H) = P^{\mathcal{G}}F \times P^{\mathcal{G}}H.$$

Иными словами,

$$\mathbb{E}(1_{F \cap H} \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(1_F \mid \mathcal{G}) \times \mathbb{E}(1_H \mid \mathcal{G}).$$

Имеем

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(1_{F \cap H} \mid \mathcal{G}) &= \mathbb{E}(1_F 1_H \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(1_F 1_H \mid \mathcal{F}, \mathcal{G}) \mid \mathcal{G}) = \\ &= \mathbb{E}(1_F \mathbb{E}(1_H \mid \mathcal{F}, \mathcal{G}) \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(1_F \mathbb{E}(1_H \mid \mathcal{G}) \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(1_H \mid \mathcal{G}) \times \mathbb{E}(1_F \mid \mathcal{G}).\end{aligned}$$

А в другую сторону?

1. Пусть дано $(\xi, \eta) =^d (\xi', \eta)$. Покажем, что

$$P(\xi \in B \mid \eta) = P(\xi' \in B \mid \eta).$$

Из равенства по распределению следует, что для любых измеримых A, B

$$P(\xi \in B, \eta \in A) = P(\xi' \in B, \eta \in A).$$

Пусть

$$\eta_1 = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\xi \in B} \mid \eta), \eta_2 = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\xi' \in B} \mid \eta).$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\eta_1 \mathbb{1}_{\eta \in A}) &= \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\xi \in B} \mathbb{1}_{\eta \in A}) = P(\xi \in B, \eta \in A) = \\ &= P(\xi' \in B, \eta \in A) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\xi' \in B} \mathbb{1}_{\eta \in A}) = \mathbb{E}(\eta_2 \mathbb{1}_{\eta \in A}).\end{aligned}$$

Итак, η_1 и η_2 — F_η -измеримые, причём интегралы от них по любому множеству из F_η совпадают. Значит, они совпадают почти наверное. Получаем

$$P(\xi \in B \mid \eta) = \eta_1 = \eta_2 = P(\xi' \in B \mid \eta) \text{ a.s.}$$

В другую сторону — примерно так же. Сначала переписываем

$$P(\xi \in B \mid \eta) = P(\xi' \in B \mid \eta)$$

как $\eta_1 = \eta_2$ a.s. Интегрируя по множеству $\mathbb{1}_{\eta \in A}$ из F_η , получаем

$$P(\xi \in B, \eta \in A) = P(\xi' \in B, \eta \in A).$$

А из этого равенства уже монотонным классом получаем равенство по распределению $(\xi, \eta) =^d (\xi', \eta)$.

2. Если $\mathbb{E}^F \xi = \mathbb{E}^G \xi$ для любой $\xi \in L_1$, то покажем, что $\overline{F} = \overline{G}$. В эту сторону это несложно. Мы для данного $A \in F$ воспользуемся тем, что

$$\mathbb{E}^F \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_A \text{ a.s.}$$

Значит,

$$\mathbb{E}^G 1_A = 1_A \text{ a.s.}$$

Но это значит, что множество $B \in G$ тех ω , где $\mathbb{E}^G 1_A$ принимает значение 1, отличается от A на множество меры 0:

$$B = \{\omega \mid \mathbb{E}^G 1_A(\omega) = 1\},$$

$$P(A \Delta B) = 0.$$

Это значит, что любое $A \in F$ можно приблизить множеством из G с точностью до множества меры 0. Но тогда любое $A \in \overline{F}$ тоже можно так приблизить множеством из G , и оно лежит в \overline{G} . Доказали.

Теперь в другую сторону. Известно, что

$$\overline{F} = \overline{G}.$$

Достаточно доказать, что для любой $\xi \in L_1$

$$\mathbb{E}^{\overline{F}} \xi = \mathbb{E}^F \xi \text{ a.s.}$$

Как это доказать? Пусть

$$\eta = \mathbb{E}^F \xi.$$

Надо показать, что η может служить в роли $\mathbb{E}^{\overline{F}} \xi$. Для этого достаточно показать, что для любого множества $A \in \overline{F}$ выполнено

$$\mathbb{E}(1_A \eta) = \mathbb{E}(1_A \xi).$$

Но A отличается от некоторого $B \in F$ на множество нулевой меры:

$$P(A \Delta B) = 0.$$

Имеем, поскольку $B \in F$,

$$\mathbb{E}(1_B \eta) = \mathbb{E}(1_B \xi).$$

Но ясно, что

$$\mathbb{E}(1_A \eta) = \mathbb{E}(1_B \eta),$$

$$\mathbb{E}(1_A \xi) = \mathbb{E}(1_B \xi).$$

Из этих равенств получаем

$$\mathbb{E}(1_A \eta) = \mathbb{E}(1_A \xi),$$

что и требовалось.

3. Не хочу такое решать.

4. Имеем

$$\xi_n \wedge \eta \rightarrow \xi \wedge \eta \in L_1.$$

Из свойства монотонной сходимости

$$\sup_n \mathbb{E}^F \xi_n \geq \sup_n \mathbb{E}^F (\xi_n \wedge \eta) \geq \lim_n \mathbb{E}^F (\xi_n \wedge \eta) = \mathbb{E}^F (\xi \wedge \eta) = \mathbb{E}^F \eta.$$

5. Пусть $\xi_n \uparrow \xi$. Покажем, что для нового определения условного матожидания

$$\mathbb{E}^F \xi_n \rightarrow \mathbb{E}^F \xi.$$

Во-первых, заметим, что новое матожидание монотонно: если

$$\xi \leq \eta \text{ a.s.}$$

то

$$\mathbb{E}^F \xi \leq \mathbb{E}^F \eta \text{ a.s.}$$

Далее, пусть

$$\xi_n \uparrow \xi \text{ a.s.}$$

Тогда

$$\mathbb{E}^F \xi \geq \mathbb{E}^F \xi_n \text{ a.s.}$$

для любого n , а потому

$$\mathbb{E}^F \xi \geq \lim_n \mathbb{E}^F \xi_n \text{ a.s.}$$

Осталось показать в обратную сторону:

$$\mathbb{E}^F \xi \leq \lim_n \mathbb{E}^F \xi_n \text{ a.s.}$$

Но это не так и сложно! Имеем

$$\xi_m \wedge m \uparrow \xi,$$

$$\eta = \xi \wedge n \leq \xi,$$

и мы находимся в условиях предыдущей задачи. Получаем из этой задачи

$$\mathbb{E}^F (\xi \wedge n) \leq \sup_m \mathbb{E}^F (\xi_m \wedge m) = \lim_m \mathbb{E}^F (\xi_m \wedge m) \text{ a.s.}$$

Однако

$$\mathbb{E}^F \xi = \sup_n \mathbb{E}^F (\xi \wedge n).$$

Значит,

$$\mathbb{E}^F \xi \leq \lim_m \mathbb{E}^F (\xi_m \wedge m) \leq \lim_m \mathbb{E}^F \xi_m \text{ a.s.}$$

Это и требовалось.

6. Потом.

7. Доказать:

$$\liminf_n \mathbb{E}^F \xi_n \geq \mathbb{E}^F \liminf_n \xi_n.$$

Просто повторим доказательство леммы Фату. Пусть

$$\eta_n = \inf_{m \geq n} \xi_m.$$

Тогда

$$\eta_n \uparrow \liminf_n \xi_n.$$

Но $\xi_n \geq \eta_n$, отсюда

$$\liminf_n \mathbb{E}^F \xi_n \geq \liminf_n \mathbb{E}^F \eta_n = \lim_n \mathbb{E}^F \eta_n = \mathbb{E}^F \lim_n \eta_n = \mathbb{E}^F \liminf_n \xi_n.$$

Мы воспользовались свойством монотонной сходимости для таких условных матожиданий (задача 5).

8. Аналог теоремы Лебега об ограниченной сходимости — доказывается аналогично. Пусть

$$\eta = \sup_n |\xi_n|.$$

Имеем по предыдущей задаче

$$\mathbb{E}^F \liminf_n (\eta - \xi_n) \leq \liminf_n \mathbb{E}^F (\eta - \xi_n),$$

$$\mathbb{E}^F \eta - \mathbb{E}^F \limsup_n \xi_n \leq \mathbb{E}^F \eta - \limsup_n \mathbb{E}^F \xi_n,$$

$$\limsup_n \mathbb{E}^F \xi_n \leq \mathbb{E}^F \limsup_n \xi_n.$$

Аналогично, получаем

$$\mathbb{E}^F \liminf_n (\eta + \xi_n) \leq \liminf_n \mathbb{E}^F (\eta + \xi_n),$$

$$\mathbb{E}^F \eta + \mathbb{E}^F \liminf_n \xi_n \leq \mathbb{E}^F \eta + \liminf_n \mathbb{E}^F \xi_n,$$

$$\liminf_n \mathbb{E}^F \xi_n \geq \mathbb{E}^F \liminf_n \xi_n.$$

Комбинируя, получаем

$$\mathbb{E}^F \liminf_n \xi_n \leq \liminf_n \mathbb{E}^F \xi_n \leq \limsup_n \mathbb{E}^F \xi_n \leq \mathbb{E}^F \limsup_n \xi_n.$$

Но

$$\mathbb{E}^F \liminf_n \xi_n = \mathbb{E}^F \lim_n \xi_n = \mathbb{E}^F \limsup_n \xi_n \text{ a.s.}$$

Отсюда получаем нужное соотношение.

9. Не будем решать, слишком известная задача.

10. Показать

$$\mathbb{E}(\xi | F, 1_A) = \frac{\mathbb{E}(\xi; A | F)}{P(A | F)}$$

почти наверное на A . В этой задаче мне самым сложным было понять, что такое $\mathbb{E}(\xi; A | F)$. Оказывается, это $\mathbb{E}(\xi 1_A | F)$. После того, как это понято, доказательство получается автоматически. Итак, наш кандидат на роль условного матожидания

$$\eta = \frac{\mathbb{E}(\xi 1_A | F)}{P(A | F)} 1_A + \frac{\mathbb{E}(\xi 1_{A^c} | F)}{P(A^c | F)} 1_{A^c}$$

Ясно, что η измерима относительно сигма-алгебры, порожденной F и A . Остается только проверить, что для любого множества B из этой сигма-алгебры

$$\mathbb{E}(\eta 1_B) = \mathbb{E}(\xi 1_B).$$

Достаточно проверить для множеств вида

$$U \cap A, U \cap A^c, U \in F.$$

Проверим для множеств

$$B = U \cap A, U \in F.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \eta 1_B &= \mathbb{E} \left(\frac{\mathbb{E}(\xi 1_A | F)}{P(A | F)} 1_A 1_U \right) = \mathbb{E} \mathbb{E} \left(\frac{\mathbb{E}(\xi 1_A | F)}{P(A | F)} 1_A 1_U | F \right) = \\ &= \mathbb{E} \left(\frac{\mathbb{E}(\xi 1_A | F)}{P(A | F)} 1_U \mathbb{E}(1_A | F) \right) = \mathbb{E} \left(\frac{\mathbb{E}(\xi 1_A | F)}{P(A | F)} 1_U P(A | F) \right) = \\ &= \mathbb{E} (\mathbb{E}(\xi 1_A | F) 1_U) = \mathbb{E} \xi 1_A 1_U = \mathbb{E} \xi 1_B. \end{aligned}$$

Здесь мы пользовались F -измеримостью множества U . В общем, всё доказано.

11. Пусть $\eta_n = \mathbb{E}(\xi_n \wedge 1 \mid F_n)$. Тогда

$$\eta_n \xrightarrow{P} 0.$$

Отсюда и из $0 \leq \eta_n \leq 1$ следует

$$\mathbb{E}\eta_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Но $\mathbb{E}\eta_n = \mathbb{E}(\xi_n \wedge 1)$. Поэтому

$$\mathbb{E}(\xi_n \wedge 1) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Но последнее соотношение и означает

$$\xi_n \xrightarrow{P} 0, n \rightarrow \infty.$$

12.

13. По условию, (ξ, η) имеет плотность распределения $f(x, y)$,

$$F(y) = \int f(x, y) dx, g(x, y) = f(x, y)/F(y).$$

Покажем, что для фиксированного борелевского множества B случайная величина

$$H(\eta) = \int_B g(x, \eta) dx$$

годится на роль условного математического ожидания $P(\xi \in B \mid \eta)$. Для этого надо проверить, что для любого борелевского множества A

$$\mathbb{E}1_{\eta \in A} H(\eta) = P(\xi \in B, \eta \in A).$$

Пусть

$$G(y) = 1_{y \in A} H(y),$$
$$G(\eta) = 1_{\eta \in A} H(\eta) = 1_{\eta \in A} \int_B g(x, \eta) dx.$$

Нужно проверить:

$$\mathbb{E}G(\eta) = P(\xi \in B, \eta \in A).$$

Пусть p_η — плотность распределения η . Ясно, что $p_\eta = F$ (где по условию $F(y) = \int f(x, y)dx$). Имеем

$$\begin{aligned}\mathbb{E}G(\eta) &= \int_{\mathbb{R}} G(y)p_\eta(y)dy = \int_{\mathbb{R}} G(y)F(y)dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}} 1_{y \in A} \left(\int_B g(x, y)dx \right) F(y)dy = \\ &= \int_A \left(\int_B g(x, y)F(y)dx \right) dy = \int_{A \times B} g(x, y)F(y)dx dy = \\ &= \int_{A \times B} f(x, y)dx dy = P(\xi \in B, \eta \in A).\end{aligned}$$

14. Теоремы о монотонной и ограниченной сходимости для условных матожиданий из соответствующих безусловных результатов с помощью условных распределений. Это хорошая задача! Дает прочувствовать условные матожидания. Пусть

$$\xi_n \uparrow \xi_0, \xi_n \geq 0.$$

В произведении пространств \mathbb{R}^∞ множество последовательностей

$$S = \{(x_0, x_1, x_2, x_3, \dots) \mid x_n \leq x_{n+1}, n \geq 1, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0\}$$

является борелевским множеством. Рассмотрим бесконечномерный случайный вектор

$$\zeta = (\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots).$$

Он принимает значения в борелевском пространстве \mathbb{R}^∞ . Поэтому существует регулярное условное распределение

$$\nu(\omega, \cdot) = P(\zeta \in \cdot \mid \mathcal{F}).$$

Из того, что $\zeta(\omega)$ лежит в S с вероятностью 1, следует, что с вероятностью 1 мера $\nu(\omega)$ сосредоточена на S . И теперь можно применить теорему о монотонной сходимости к функциям y_1, \dots, y_n, \dots как координатным функциям от $y \in S$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi_n \mid \mathcal{F}) &= \int_{\mathbb{R}^\infty} y_n(y)\nu(\omega, dy) = \\ &= \int_S y_n(y)\nu(\omega, dy) \rightarrow \int_S y_0(y)\nu(\omega, dy) = \mathbb{E}(\xi_0 \mid \mathcal{F}).\end{aligned}$$

Теорема об ограниченной сходимости получается аналогично, надо только заметить, что из интегрируемости мажоранты следует, что она интегрируема по мере $\nu(\omega)$ для почти всех ω .

15. $\mathbb{E}^{\mathcal{F}}\xi =^d \xi, \xi \in L_1$. Тогда ξ почти наверное \mathcal{F} -измерима. Так и сделаем, как предлагает подсказка. Выберем строго выпуклую f , такую, что

$$0 \leq f(x) \leq |x|, x \in \mathbb{R}.$$

Как это сделать? Выберем непрерывную функцию $h(x), x \geq 0$, которая монотонно строго возрастает на \mathbb{R}_+ и находится в пределах от 0 до 1 (например, сигмоида). Положим

$$f(x) = \begin{cases} \int_0^x h(y)dy, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ f(-x), & x < 0 \end{cases}$$

Ясно, что f выпукла.

Имеем по условию

$$\mathbb{E}f(\xi) = \mathbb{E}f(\mathbb{E}^{\mathcal{F}}\xi).$$

Но

$$\begin{aligned} \mathbb{E}f(\xi) &= \mathbb{E}\mathbb{E}(f(\xi) \mid \mathcal{F}) = \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}} f(x)\nu(\omega, dx) \geq \\ &\geq \mathbb{E}f\left(\int_{\mathbb{R}} x\nu(\omega, dx)\right) = \mathbb{E}f(\mathbb{E}^{\mathcal{F}}\xi). \end{aligned}$$

Здесь неравенство написано по Йенсену, и раз оно обращается в равенство, то мера $\nu(\omega)$ почти наверное сосредоточена в одной (случайной) точке, причём эта точка есть $\int_{\mathbb{R}} x\nu(\omega, dx)$. Отсюда получаем

$$\begin{aligned} P(\xi = \mathbb{E}^{\mathcal{F}}\xi) &= \mathbb{E}\mathbb{1}_{\xi = \mathbb{E}^{\mathcal{F}}\xi} = \mathbb{E}\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\xi = \mathbb{E}^{\mathcal{F}}\xi} \mid \mathcal{F}) = \\ &= \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{x = \mathbb{E}^{\mathcal{F}}\xi} \nu(\omega, dx) = \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{x = \int_{\mathbb{R}} x\nu(\omega, dx)} \nu(\omega, dx) = \\ &= \mathbb{E}\nu\left(\omega, \left\{\int_{\mathbb{R}} x\nu(\omega, dx)\right\}\right) = 1. \end{aligned}$$

Здесь мы применили теорему 6.4, взяв в роли функции $f(x, y) \mathbb{1}_{x=y}$. в роли ξ саму ξ , в роли η \mathcal{F} -измеримую случайную величину $\mathbb{E}^{\mathcal{F}}\xi$.

16. По задаче 12, имеем

$$P(\xi \in B \mid \eta) =^d P(\xi \in B \mid \zeta).$$

По задаче 15,

$$P(\xi \in B \mid \eta) = P(\xi \in B \mid \zeta) \text{ a.s.}$$

По предложению 6.6, из выполнения для всех B равенства

$$P(\xi \in B \mid \eta, \zeta) = P(\xi \in B \mid \eta) \text{ a.s.}$$

следует, что $\xi \perp\!\!\!\perp_{\eta} \zeta$.

4 Kallenberg 2002 — Глава 7. Мартингалы

1. $\{\sigma = \tau\} \in F_{\sigma} \cap F_{\tau}$. Достаточно показать, что

$$\{\sigma < \tau\} \in F_{\sigma} \cap F_{\tau}.$$

Отсюда с учётом аналогичного включения для $\{\tau < \sigma\}$ будет следовать, что

$$\{\sigma \neq \tau\} \in F_{\sigma} \cap F_{\tau}.$$

Итак, имеем

$$\{\sigma < \tau\} \cap \{\tau \leq t\} = \bigcup_{0 < q < t, q \in \mathbb{Q}} (\{\sigma < q\} \cap \{q < \tau \leq t\}) \in F_t.$$

Это верно для любого t , и по определению F_{τ} получаем

$$\{\sigma < \tau\} \in F_{\tau}.$$

Далее,

$$\{\sigma < \tau\} \cap \{\sigma \leq t\} = \{\sigma < \tau, \tau \leq t\} \cup \{\sigma \leq t, \tau > t\}.$$

Но оба последних события лежат в F_t . Действительно,

$$\{\sigma < \tau, \tau \leq t\} \in F_t$$

мы доказали выше, а

$$\{\sigma \leq t, \tau > t\} = \{\sigma \leq t\} \cap \{\tau > t\} \in F_t.$$

Итак,

$$\{\sigma < \tau\} \cap \{\sigma \leq t\} \in F_t$$

для любого t , и по определению F_σ получаем $\{\sigma < \tau\} \in F_\sigma$.

Далее, почему $F_\sigma = F_\tau$ на $\{\sigma = \tau\}$? Пусть $A \subseteq \{\sigma = \tau\}, A \in F_\sigma$. Покажем, что $A \in F_\tau$. Из $A \in F_\sigma$ следует, что для любого t

$$A \cap \{\sigma \leq t\} \in F_t.$$

Поскольку на множестве A $\sigma = \tau$, то для любого t

$$A \cap \{\tau \leq t\} = A \cap \{\sigma \leq t\} \in F_t.$$

По определению F_τ , $A \in F_\tau$. Вот и доказали всё.

Осталось объяснить, почему F_τ может отличаться от F_∞ на $\{\tau = \infty\}$. Это ясно. Если $\tau = \infty$ всегда, то по определению F_τ , в F_τ входят все множества из сигма-алгебры A , а не только из F_∞ .

2. Стандартная задача.
3. Пример слабо опционального, но не опционального момента. Возьмём, как предлагает Калленберг. Берём бернуллиевскую случайную величину ξ , $P(\xi = 1) = P(\xi = -1) = \frac{1}{2}$, и положим

$$F_0 = \{\emptyset, \Omega\}, F_t = \sigma(\xi), t > 0.$$

Пусть

$$\tau = \begin{cases} 0, & \xi = -1, \\ 1, & \xi = 1. \end{cases}$$

Тогда для $t > 0$ имеем

$$\{\tau < t\} = \begin{cases} \{\xi = -1\}, & t \leq 1, \\ \Omega, & t > 1. \end{cases}$$

В любом случае, $\{\tau < t\} \in F_t = \sigma(\xi), t > 0$. Поэтому τ слабо опциональный. Но $\{\tau \leq 0\} = \{\tau = 0\} = \{\xi = -1\} \notin F_0$. Поэтому τ не опциональный.

4. Скучно решать это.

5. Задача про прогрессивные процессы. Прогрессивность — это измеримость относительно соответствующей сигма-алгебры. Итак, сначала покажем, что класс множеств $A \in \Omega \times \mathbb{R}_+$, таких, что процесс 1_A прогрессивен, образует сигма-алгебру. Да это вроде очевидно! Прогрессивность 1_A означает, что для любого t

$$A \cap (\Omega \times [0, t]) \in F_t \otimes \mathcal{B}[0, t].$$

Ясно, что это свойство сохраняется счётным объединением. И для перехода к дополнению всё тоже очевидно. Итак, да, сигма-алгебра.

Почему прогрессивность процесса равносильна его измеримости относительно этой сигма-алгебры? Допустим, процесс X прогрессивен. Покажем, что он измерим относительно этой сигма-алгебры. Нужно проверить, что для любого a множество $\{X > a\}$ лежит в прогрессивной сигма-алгебре. А оно там лежит, если для любого t

$$\{X > a\} \cap (\Omega \times [0, t]) \in F_t \otimes \mathcal{B}[0, t].$$

А это так, если X прогрессивен. И в другую сторону аналогично. Короче, пусть Калленберг сам решает такие задачи! Одни проверки.

9. X^1, X^2, \dots — субмартингалы, причём $X = \sup_n X^n$ интегрируем. Покажем, что X — тоже субмартингал. Фиксируем $t > s$. Имеем

$$\forall n \quad X(t) \geq X_n(t),$$

$$\forall n \quad \mathbb{E}(X(t) \mid F_s) \geq \mathbb{E}(X_n(t) \mid F_s) \geq X_n(s),$$

а поскольку это для любого n , то

$$\mathbb{E}(X(t) \mid F_s) \geq \sup_n X_n(s) = X(s).$$

Вот и доказали. Дальше сложнее. Покажем, что если $\sup_n |X_n|$ интегрируем, то и $\limsup_n X_n$ — субмартингал. Фиксируем $s < t$. Пусть

$$\xi_n = \sup(X_n(t), X_{n+1}(t), X_{n+2}(t), \dots),$$

$$\eta_n = \sup(X_n(s), X_{n+1}(s), X_{n+2}(s), \dots).$$

Пусть также $\xi = \sup_n |X_n(t)|$, $\eta = \limsup_n X_n(s)$. Имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \limsup_n X_n(t) \text{ a.s.}, |\xi_n| \leq \xi \text{ a.s.}$$

По условию, ξ интегрируема. Значит, по теореме Лебега об ограниченной сходимости,

$$\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L_1} \limsup_n X_n(t).$$

Условное матожидание при условии F_s — ограниченный оператор на $L_1(F_t)$, см. начало предыдущей главы. Поэтому

$$\zeta_n = \mathbb{E}(\xi_n \mid F_s) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L_1} \mathbb{E}(\limsup_n X_n(t) \mid F_s) = \zeta.$$

Из условия субмаритингальности,

$$\eta_n \leq \mathbb{E}(\xi_n \mid F_s) = \zeta_n.$$

Но аналогичные рассуждения для момента s

$$\eta_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L_1} \limsup_n X_n(s) = \eta.$$

Итак, имеем две последовательности случайных величин $\zeta_n \geq \eta_n$, и обе сходятся в L_1 :

$$\zeta_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L_1} \zeta, \eta_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L_1} \eta.$$

Покажем, что

$$\zeta \geq \eta \text{ a.s.}$$

Действительно,

$$\zeta_n - \eta_n \geq 0, \zeta_n - \eta_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L_1} \zeta - \eta.$$

Но L_1 -предел неотрицательных случайных величин неотрицателен почти наверное. Действительно, если λ_n — неотрицательные случайные величины и

$$\lambda_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L_1} \lambda,$$

$$A = \{\omega \in \Omega \mid \lambda(\omega) < 0\},$$

то при $P(A) > 0$ имеем $\mathbb{E}\lambda_n \mathbb{1}_A \rightarrow \mathbb{E}\lambda \mathbb{1}_A < 0$, противоречие. Кстати, откуда следует сходимость $\mathbb{E}\lambda_n \mathbb{1}_A \rightarrow \mathbb{E}\lambda \mathbb{1}_A, n \rightarrow \infty$?

Эта сходимость следует из

$$|\mathbb{E}\lambda_n \mathbb{1}_A - \mathbb{E}\lambda \mathbb{1}_A| \leq \mathbb{E}|(\lambda_n - \lambda) \mathbb{1}_A| \leq \mathbb{E}|\lambda_n - \lambda| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Вот всё и доказали. Неравенство $\zeta \geq \eta$ a.s. и есть нужное нам неравенство

$$\mathbb{E}(\limsup_n X_n(t) \mid F_s) \geq \limsup_n X_n(s),$$

показывающее субмаритингальность процесса $\limsup_n X_n$.

10. Разложение Дуба интегрируемой случайной последовательности $X = (X_n)$ зависит от фильтрации. Возьмём

$$F_n = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n), G_n = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n, X_{n+1}) = F_{n+1}.$$

Тогда X согласован и с фильтрацией F_n , и с фильтрацией G_n . Относительно фильтрации G_n X является предсказуемой последовательностью, и разложение Дуба имеет вид

$$X_n = X_0 + (X_n - X_0).$$

Когда у X относительно фильтрации F_n такое же разложение Дуба? Если оно то же, то $X_n - X_0$ должно быть при каждом $n \geq 1$ F_{n-1} -измеримым. Тогда и X_n при каждом $n \geq 1$ F_{n-1} -измеримо. Но тогда при каждом $n \geq 1$

$$\sigma(X_0, X_1, \dots, X_{n-1}) = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n),$$

$$F_{n-1} = F_n.$$

Тогда все сигма-алгебры F_n совпадают, и при каждом n X_n является X_0 -измеримой величиной.

11.

12.

13.

14. Доказательство леммы 4.15 дословно переносится на случай, когда ξ_n — мартингал-разность для L_2 -интегрируемого мартингала M . Итак, для L_2 -ограниченного мартингала имеет место неравенство Колмогорова

$$P(\sup_n |M_n| > r) \leq r^{-2} \sup_n \mathbb{E} M_n^2.$$

Но можно такое вывести и из леммы 7.15. Эта лемма даёт для субмартингала X

$$rP(\sup_t |X_t| \geq r) \leq 3 \sup_t \mathbb{E} |X_t|.$$

Мы можем взять в качестве X субмартингал M^2 (квадрат мартингала — субмартингал). Имеем тогда из этого неравенства

$$r^2 P(\sup_n |M_n| \geq r) = r^2 P(\sup_n X_n \geq r^2) \leq 3 \sup_n \mathbb{E} |X_n| = 3 \sup_n \mathbb{E} M_n^2.$$

А теперь мы можем имитировать доказательство леммы 4.16. Пусть n фиксировано, построим случайный процесс $X^{(n)}$ на \mathbb{Z}_+ ,

$$X_k^{(n)} = (M_{n+k} - M_n)^2, k \geq 0.$$

Тогда $X^{(n)}$ — субмартингал. Имеем для него из 7.15

$$\begin{aligned} P(\sup_{k \geq 0} X_k^{(n)} \geq \epsilon^2) &\leq 3\epsilon^{-2} \sup_{k \geq 0} \mathbb{E}|X_k^{(n)}| = 3\epsilon^{-2} \mathbb{E}(M_{n+k} - M_n)^2 \leq \\ &\leq 3\epsilon^{-2} \sum_{k \geq 0} \mathbb{E}(M_{n+k+1} - M_{n+k})^2 \rightarrow 0, n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Отсюда

$$P(\sup_{k \geq 0} (M_{n+k} - M_n)^2 > \epsilon^2) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

для любого $\epsilon > 0$. Итак,

$$\sup_{k \geq n} |M_k - M_n| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0.$$

Значит, для некоторой подпоследовательности n_s

$$\sup_{k \geq n_s} |M_k - M_{n_s}| \xrightarrow[s \rightarrow \infty]{a.s.} 0.$$

Но если $\sup_{k \geq n_s} |M_k - M_{n_s}| \leq \epsilon$, то

$$\sup_{k_1, k_2 \geq n_s} |M_{k_1} - M_{k_2}| \leq 2\epsilon.$$

Отсюда следует, что последовательность $\{M_n\}$ фундаментальна почти наверное. Значит, сходится почти наверное. Ну а сходимость в L_2 по сравнению с этим тривиальна и следует из фундаментальности в L_2 последовательности M_n :

$$\sup_{k \geq 0} \mathbb{E}(M_{n+k} - M_n)^2 \leq \sum_{k \geq 0} \mathbb{E}(M_{n+k+1} - M_{n+k})^2 \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

15. Мартингал, который L^1 -ограничен, но не равномерно интегрируем. Это известный пример. Берём последовательность независимых случайных величин ξ_n , каждая из которых принимает значения 0 и 2 с равными вероятностями $\frac{1}{2}$. Пусть

$$X_n = \xi_1 \xi_2 \dots \xi_n.$$

Тогда $\mathbb{E}|X_n| = \mathbb{E}X_n = 1$, но X_n не равномерно интегрируем. А в непрерывном времени пример? Это экспоненциальные мартингалы.

$$X_t = e^{w_t - t/2}.$$

Ясно, что $\mathbb{E}X_t = \mathbb{E}X_0 = 1$. Почему X_t не равномерно интегрируем? Потому что

$$X_t \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{a.s.} 0.$$

Если бы X_t был равномерно интегрируем, то сходимость к 0 была бы и в L^1 , а её нет, потому что

$$\mathbb{E}X_t = 1 \neq 0.$$

16. Это просто. Фиксируем $G \in \mathcal{G}, H \in \mathcal{H}$. Имеем

$$P(G \cap H \mid \mathcal{F}_n) = P(G \mid \mathcal{F}_n)P(H \mid \mathcal{F}_n) \text{ a.s.}$$

Оказывается, обе части этого равенства сходятся почти наверное при $n \rightarrow \infty$. Действительно, из теоремы 7.23 имеем сходимость

$$P(G \mid \mathcal{F}_n) \rightarrow P(G \mid \mathcal{F}_\infty) \text{ a.s.},$$

$$P(H \mid \mathcal{F}_n) \rightarrow P(H \mid \mathcal{F}_\infty) \text{ a.s.},$$

$$P(G \cap H \mid \mathcal{F}_n) \rightarrow P(G \cap H \mid \mathcal{F}_\infty) \text{ a.s.}$$

Отсюда всё получается, просто переходим к пределу в обеих частях равенства

$$P(G \cap H \mid \mathcal{F}_n) = P(G \mid \mathcal{F}_n)P(H \mid \mathcal{F}_n) \text{ a.s.}$$

5 Kallenberg 2002 — Глава 12

- 1.
- 2.
- 3.

6 Protter — Глава 2

1. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна за исключением одной точки, в которой у неё скачок. Показать, что $X_t = f(B_t)$ не семимартингал.

Решение задачи опирается на то, что в окрестности момента достижения любого уровня броуновское движение бесконечно много раз проходит через этот уровень.

Фиксируем $t > 0$ и покажем, что X^t — не тотальный семимартингал. Пусть a — точка скачка f . Пусть

$$\tau_a = \inf\{t > 0: B_t = a\}.$$

Для $\epsilon > 0$ определим последовательность моментов остановки τ_n^ϵ следующим образом:

$$\begin{aligned}\tau_0^\epsilon &= \inf\{t > 0: B_t = a - \epsilon\}, \\ \tau_{2n+1}^\epsilon &= \inf\{t > \tau_{2n}^\epsilon: B_t = a + \epsilon\}, \\ \tau_{2n}^\epsilon &= \inf\{t > \tau_{2n-1}^\epsilon: B_t = a - \epsilon\}.\end{aligned}$$

Из свойств броуновского движения

$$\max\{n > 0: \tau_n^{1/m} < t\} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{a.s.} \infty$$

на множестве $\{\tau_a < t\}$. Пусть $h_m \rightarrow \infty$ такая детерминированная последовательность, что

$$0 < h_m < \sqrt{m}$$

и

$$P(\max\{n > 0: \tau_n^{1/m} < t\} > h_m) \geq \frac{1}{2}P\{\tau_a < t\}.$$

Определим случайные процессы H_m таким образом:

$$H_m(t) = \begin{cases} 0, & t \leq \tau_0^{1/\sqrt[3]{h_m}}, \\ \frac{(-1)^n}{\sqrt{h_m}}, & t \in (\tau_n^{1/\sqrt[3]{h_m}}, \tau_{n+1}^{1/\sqrt[3]{h_m}}], n < m, \\ 0, & t > \tau_m^{1/\sqrt[3]{h_m}} \end{cases}.$$

Тогда

$$|I_{X^t}(H_m)| \geq \frac{1}{h_m^{5/6}} (m \wedge \max\{n > 0: \tau_n^{1/m} < t\}) - \frac{1}{\sqrt{h_m}} \left| \sup_{s \in [0, t]} f(B_s) - \inf_{s \in [0, t]} f(B_s) \right|.$$

С вероятностью не меньше, чем $\frac{1}{2}P\{\tau_a < t\} = \text{const} > 0$ имеем

$$\max\{n > 0: \tau_n^{1/m} < t\} > h_m,$$

$$|I_{X^t}(H_m)| > h_m^{1/6} - \frac{1}{\sqrt{h_m}} \left| \sup_{s \in [0, t]} f(B_s) - \inf_{s \in [0, t]} f(B_s) \right| \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{a.s.} \infty.$$

Это противоречит сходимости по вероятности

$$I_{X^t}(H_m) \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{P} 0.$$

Значит, X^t — не тотальный семимартингал, а X — не семимартингал.

2.

3.

7 Revuz-Yor — Глава 2. Мартингалы

1.20.

$$P \left(\limsup_{h \rightarrow 0} \frac{|B_{s+h} - B_s|}{\sqrt{2h \log_2 1/h}} = 1 \text{ for } \mu - a.e. \ s \right) = 1.$$

Рассмотрим случайную величину $\tau \geq 0$, не зависящую от B , с распределением μ :

$$P(\tau \leq a) = \mu([0, a]), a \geq 0.$$

Тогда, как легко видеть,

$$\xi(h) = B(\tau + h) - B(\tau), h \geq 0$$

есть винеровский процесс. Как это увидеть? Если не напрямую, то можно воспользоваться строго марковским свойством винеровского процесса. Для этого надо фильтрации F_t расширить с помощью сигма-алгебры, порождённой моментом τ . Винеровский процесс B останется винеровским и относительно расширенной фильтрации. А τ станет моментом остановки относительно новой фильтрации. Останется применить строго марковское свойство. Теперь осталось применить к процессу ξ теорему 1.9 (закон повторного логарифма).