Статистика

1 Оценка гауссовского среднего

Пусть $Y_1, \ldots, Y_n$ — независимые $N(\mu, 1)$ случайные величины. Исследуем вопрос нахождения оценки снизу на дисперсию оценки μ по $Y_1, \ldots, Y_n$, то есть

$$\sup_{\mu} \mathbb{E} \left(f(Y_1, \ldots, Y_n) - \mu \right)^2 ,$$

где $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — некоторая измеримая функция (нижняя оценка не должна зависеть от f). Иными словами, для независимых гауссовских $X_1, \ldots, X_n \sim N(0, 1)$ нужно оценить снизу

$$\sup_{\mu} \mathbb{E} \left(f(X_1 + \mu, \ldots, X_n + \mu) - \mu \right)^2 .$$

В случае несмещённой оценки это делается с помощью неравенства Рао-Крамера. Но нам нужно сделать это без предположения несмещённости, и кроме того, я не помню доказательства Рао-Крамера. Как оценивать супремум, сразу не ясно, но возникает идея проинтегрировать наше выражение

$$\sup_{\mu} \mathbb{E} \left(f(X_1 + \mu, \ldots, X_n + \mu) - \mu \right)^2$$

по некоторой плотности $p(\mu)$. Однако, проще, чем вычислять интегралы, сделать через вероятность. Пусть $U \sim N(0, 1)$ не зависит от вектора $X_1, \ldots, X_n$. Имеем

$$\sup_{\mu} \mathbb{E} \left(f(X_1 + \mu, \ldots, X_n + \mu) - \mu \right)^2 \geq \mathbb{E} \left(f(X_1 + U, \ldots, X_n + U) - U \right)^2 .$$

Найдём

$$\mathbb{E} \left(U \mid X_1 + U, \ldots, X_n + U \right).$$

Для этого найдём такое α, что

$$U - \alpha(X_1 + \ldots + X_n + nU)$$

не зависит от $X_1 + U, \ldots, X_n + U$. Имеем

$$\mathbb{E}(U - \alpha(X_1 + \ldots + X_n + nU))(X_1 + U) = 0,$$

$$1 - \alpha n - \alpha = 0,$$

$$\alpha = \frac{1}{n+1}.$$

Итак,

$$H = \mathbb{E}\left(U \mid X_1 + U, \dots, X_n + U\right) = \frac{1}{n+1}(X_1 + \ldots + X_n + nU).$$

Пусть

$$Z = U - H = U - \frac{1}{n+1}(X_1 + \ldots + X_n + nU) = \frac{1}{n+1}(U - X_1 - \ldots - X_n).$$

Z не зависит от вектора

$$(X_1 + U, \dots, X_n + U, H).$$

Имеем

$$\mathbb{E}\left(f(X_1 + U, \dots, X_n + U) - U\right)^2 = \mathbb{E}\left(f(X_1 + U, \dots, X_n + U) - (Z + H)\right)^2 =$$
$$= \mathbb{E}\left((f(X_1 + U, \dots, X_n + U) - H) - Z)\right)^2 \geq \mathbb{E}Z^2 = \frac{1}{n+1}.$$

Итак,

$$\sup_{\mu} \mathbb{E}\left(f(X_1 + \mu, \dots, X_n + \mu) - \mu\right)^2 \geq \frac{!}{n+1}.$$

Нельзя ли эту оценку улучшить? А мы возьмём $U \sim N(0, \sigma^2)$ не зависящую от $X_1, \dots, X_n$. Тогда всё то же, только

$$\mathbb{E}(U - \alpha(X_1 + \ldots + X_n + nU))(X_1 + U) = 0$$

перепишется как

$$\sigma^2 - \alpha n \sigma^2 - \alpha = 0,$$

$$\alpha = \frac{\sigma^2}{n\sigma^2 + 1}.$$

$$Z = \frac{1}{n\sigma^2 + 1} U - \frac{\sigma^2}{n\sigma^2 + 1}(X_1 + \ldots + X_n).$$

$$\mathbb{E}Z^2 = \frac{\sigma^2 + n\sigma^4}{(1 + n\sigma^2)^2} \to \frac{1}{n}, \sigma \to \infty.$$

Значит,

$$\sup_{\mu} \mathbb{E}\left(f(X_1 + \mu, \dots, X_n + \mu) - \mu\right)^2 \geq \frac{!}{n}.$$

А вот это уже улучшить нельзя - такое достигается для

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n).$$

Нельзя ли из этого доказательства получить Рао-Крамера? Видимо, нельзя, так как там нет супремума по μ.