Домашняя работа 1 — Кузнецов

1 Задание 1

1. C9. 2-SAT лежит в классе P.
   Иными словами, нужно построить полиномиальный алгоритм, который будет определять, выполнима ли данная КНФ. Пусть в 2-КНФ участвуют переменные $x_1, \ldots, x_n$. Можно считать, что каждый дизъюнкт содержит ровно две переменные (иначе для выполнимости значения переменных, которые входят в некоторые конъюнкты в единственом числе, определены). Построим по данной 2-КНФ ориентированный граф таким образом. Вершинами графа будут точки, соответствующие $x_1, \ldots, x_n, \neg x_1, \ldots, \neg x_n$ (всего $2n$ вершин). Далее, каждый дизъюнкт $a \vee b$ можно переписать как $\neg a \to b$ и $\neg b \to a$ (например, дизъюнкт $x_5 \vee \neg x_8$ можно записать в виде $\neg x_5 \to x_8$ и $x_8 \to x_5$). Поэтому для каждого дизъюнкта $a \vee b$ проведём ориентированные рёбра из $\neg a$ в b и из $\neg b$ в a (мы считаем $\neg\neg x_i = x_i$). Ясно, что если в построенном графе имеется путь из a в b, то из истинности a следует истинность b. Поэтому, если есть путь из x_i в $\neg x_i$, то x_i не может быть истинной, а если есть путь из $\neg x_i$ в x_i, то x_i не может быть ложной. Следовательно, если для некоторой x_i существует путь из x_i в $\neg x_i$ и из $\neg x_i$ в x_i, то 2-КНФ невыполнима.

   Покажем, что если ни для какого i нет путей одновременно из x_i в $\neg x_i$ и из $\neg x_i$ в x_i, то формула выполнима. Покажем это индукцией по числу переменных. Для одной переменной очевидно. Выполним индукционный переход от всех, меньших $n+1$, к $n+1$. Допустим, для x_{n+1} нет пути из x_{n+1} в $\neg x_{n+1}$ (случай, когда нет пути из $\neg x_{n+1}$ в x_{n+1}, рассматривается аналогично). Тогда положим $x_{n+1} = 1$ (мы считаем, что 0 - это Ложь, 1 - это Истина). Также положим равными 1 значения всех точек, достижимых из x_{n+1} (если $\neg x_i$ достижима из x_{n+1}, то полагаем $x_i = 0$). Мы не можем одновременно положить $x_p = 1$ и $x_p = 0$, потому что иначе есть пути из x_{n+1} в x_p и из x_{n+1} в $\neg x_p$. Но если есть путь из x_{n+1} в

x_p, то, как легко видеть, есть и путь из $\neg x_p$ в $\neg x_{n+1}$. Поэтому есть путь из x_{n+1} в $\neg x_{n+1}$ — противоречие. Итак, для всех достижимых из x_{n+1} точек определены значения. Но если a достижима из x_{n+1} и входит в дизъюнкцию $a \vee b$, то эту дизъюнкцию можно откинуть, поскольку при $a = 1$ она истинна независимо от b. Если же a входит в дизъюнкцию $\neg a \vee b$, то b достижима из x_{n+1}, и эта дизъюнкция тоже автоматически становится истинной, и её тоже можно отбросить. Так мы приходим к 2-КНФ с меньшим числом переменных, в которой каждый дизъюнкт имеет ширину 2 (и для которо1 выполнено предположение, что ни для какого i нет путей одновременно из x_i в $\neg x_i$ и из $\neg x_i$ в x_i). Итак, наше утверждение доказано.

Осталось заметить, что выяснить, можно ли пройти из одной точки в другую в ориентированном графе, можно за полиномиальное время (нужно просто завести список вершин, которые достижимы за не более k шагов из данной вершины, и увеличивать k, пока этот список не стабилизируется).

2. C10. Полиномиальный алгоритм проверки выполнимости Хорновской формулы.
   Если в каждом дизъюнкте есть переменная с отрицанием, то формула выполнима — можно положить все переменные равными 0. Если есть дизъюнкт, в котором нет переменных с отрицанием, то там по условию только одна переменная, и она должна быть истинной. Фиксируем значение этой переменной и сводим задачу к задаче с меньшим числом переменных и меньшим числом дизъюнктов (при этом формула остаётся Хорновской). Легко видеть, что этот алгоритм полиномиален.

3. C1. б) Проверить, что число единиц в строке из 0 и 1 делится на 3.

   Для одноленточной машины Тьюринга:
   $q_0, 0 \to q_0, 0, \to$
   $q_0, 1 \to q_1, 1, \to$
   $q_1, 0 \to q_1, 0, \to$
   $q_1, 1 \to q_2, 1, \to$
   $q_2, 0 \to q_2, 0, \to$
   $q_2, 1 \to q_0, 1, \to$
   $q_0, \_ \to q_{yes}, \_, \leftarrow$
   $q_1, \_ \to q_{no}, \_, \leftarrow$
   $q_2, \_ \to q_{no}, \_, \leftarrow$

q_{no}, q_{yes} — финальные состояния (q_{yes} — число единиц делится на 3, q_{no} — не делится).

в) $a-1$, если $a>0$, иначе 0. Пусть q — начальное состояние, q_f — финальное. Построим одноленточную машину Тьюринга. (Предполагаем, что лента бесконечна в одну сторону, и головка вначале стоит на начале ленты, и двоичное число написано тоже сначала ленты).
$q, 0 \to q_f, 0, \to$
$q, 1 \to q_1, 1, \to$
$q_0, 0 \to q_0, 0, \to$
$q_0, 1 \to q_1, 1, \to$
$q_1, 0 \to q_0, 0, \to$
$q_1, 1 \to q_1, 1, \to$
$q_1, \_ \to q_3, \_, \leftarrow$
$q_3, 1 \to q_f, 0, \to$
$q_0, \_ \to q_2, \_, \leftarrow$
$q_2, 0 \to q_2, 1, \leftarrow$
$q_2, 1 \to q_f, 0, \to$

Недостатком данного решения является то, что, например, для $a = 1000_2$ ответ будет выведен в виде 0111_2. Также не учтены отрицательныые числа.

4. C5. Язык из $P/poly \setminus P$.

   Сделаем вычислимую нумерацию всех машин Тьюринга и построим их в такой ряд:

   $$T_1, T_1, T_2, T_1, T_2, T_3, T_1, T_2, T_3, T_4, \ldots$$

   Построим язык, принадлежность к которому слова определяется лишь длиной слова. Тогда, очевидно, этот язык будет лежать в $P/poly$. Строим этот язык таким способом: запускаем n-ю машину Тьюринга на входе 0^n, и если она выводит за n^n шагов ответ (0 или 1), мы для всех слов длины n выводим противоположный ответ. Если она не останавливается за это число шагов, то для всех слов длины n выводим 0.

   От машины Тьюринга, работающей время не более Cn^K, наш ответ отличается на входе 0^n при большом n. Поскольку каждая машина Тьюринга в нашей нумерации встречается как угодно далеко, то наша функция не вычисляется никакой машиной Тьюринга, работающей время не более Cn^K. Следовательно, наш язык не входит в

P, хотя принадлежность к этому языку определяется вычислимой функцией.

5. C6. а) Вероятностная булева схема C' с $n + m'$ входами. Возьмём $N = Kp(n)$ (K выберем позже) одинаковых схем C и объединим их случайные биты в одну случайную строку r' длины Nm. Тогда с большой вероятностью (по строке r') для каждого фиксированного x большая часть ответов наших N схем C будет совпадать с правильными. Действительно, рассмотрим (для фиксированного x) ответы наших схем как независимые бернуллиевские случайные величины с вероятностью успеха $p \geq \frac{2}{3}$. Тогда из неравенства Чернова (см. стр. 18 книги Roman Vershynin "High-dimensional probability") получаем ($\mu = pN, t = N/2$, S_N — количество верных ответов):
$$P\{S_N \leq N/2\} \leq e^{-\mu}\left(\frac{e\mu}{N/2}\right)^{N/2},$$
$$P\{S_N \leq N/2\} \leq e^{-pN}\left(\frac{epN}{N/2}\right)^{N/2},$$
$$P\{S_N \leq N/2\} \leq e^{-pN}(2ep)^{N/2},$$
$$P\{S_N \leq N/2\} \leq (\sqrt{2e}\sqrt{pe^{-2p}})^N.$$
Рассмотрим функцию $h(x) = xe^{-2x}$. $h'(x) = (1-2x)e^{-2x}$, поэтому h убывает при $x \geq \frac{1}{2}$. Отсюда, поскольку $p \geq \frac{2}{3} > \frac{1}{2}$:
$$\sqrt{2e}\sqrt{pe^{-2p}} \leq \sqrt{2e}\sqrt{\frac{2}{3}e^{-4/3}} = u < 1.$$
Выберем K так, чтобы
$$u^{Kp(n)} < 2^{-p(n)},$$
то есть $u^K < \frac{1}{2}$. Итак, с вероятнотою больше $1-2^{-p(n)}$ большая часть ответов наших схем C правильные. Теперь достроим нашу схему так, чтобы ответом схемы был ответ, который выдают большая часть схем C. Это можно сделать, имитируя сортировку "пузырьком". Так, у нас есть строка из N чисел 0 или 1, и нам надо вывести тот ответ, который встречается в этой строке наибольшее число раз. Для этого достроим некоторое количество строк, в каждой из которых будет находиться $N/2$ пар операторов "максимум-минимум", применённых к соседним числам в предыдущей строке, причём в строках с нечётными номерами мы будем применять операторы

к парам чисел на местах $(1,2)$, $(3,4)$, ..., а в строках с чётными номерами — к парам чисел $(2,3)$, $(4,5)$,... Ясно, что за некоторое (полиномиально ограниченное) количество таких строк мы получим отсортированную исходную строку из 0 и 1. И остаётся вывести в виде ответа число, которое стоит на середине этой строки.

6. C7. Забывчивая машина Тьюринга. Для построения забывчивой машины Тьюринга нам понадобится больше лент. Для каждой ленты из наших k лент заведём две новых ленты, на одной из которых (доп. лента-1) будем запоминать состояние машины Тьюринга, а на другой (доп. лента-2) - ставить единицу в нужные моменты (см. далее), и также заведём ленту L, где с самого начала запишем $T(n)$ единиц подряд (тут пробел в рассуждении — не очевидно, что существует машина Тьюринга, которая с самого начала пишет $T(n)$ единиц подряд).

   Двигаясь по ленте, мы будем каждый раз проходить расстояние $T(n)$ слева направо, а затем справа налево (чтобы понять, что мы прошли нужное расстояние и пора остановиться, надо посмотреть на ленту L). При этом мы будем записывать на каждой из k дополнительных лент-2 единичку в том месте, где исходная машина Тьюринга должна была сделать соответствующую данному шагу операцию, и если направление смещения головки совпадало с тем направлением, куда должна была переместиться головка у исходной машины Тьюринга, то мы выполняем эту операцию, а записываем на доп. ленту-2 единицу в месте, соответствующем уже новому положению исходной головки, и на доп. ленте-1 записываем это новое состояние исходной машины Тьюринга. А если направление смещения головки было противоположным исходной машине, то мы записываем единицу на соответствующее место доп. ленты-2 (и запоминаем состояние на доп. ленте-1) и оставляем выполнение этой операции на следующий проход (новой) машины Тьюринга в противоположном направлении.