Prediction, learning and games

1 Глава 2

1. Для iid последовательности $Y_1, Y_2, \ldots$ с $P(Y_i = 1) = p$. Будем ставить по большинству. $\hat{Y}_{n+1}$ положим равным тому значению из 0 и 1, которое принимается большим числом $Y_1, Y_2, \ldots Y_n$. Если поровну, то ставим 0. Проведём оценки для случая $p < \frac{1}{2}$. Случай $p > \frac{1}{2}$ рассматривается симметрично, а случай $p = \frac{1}{2}$ рассмотрим отдельно.

$$P(\hat{Y}_{n+1} \neq Y_{n+1}) = \sum_k P\left(\sum_{i=1}^n Y_i = k, \hat{Y}_{n+1} \neq Y_{n+1}\right) =$$
$$= P(Y_1 + \ldots + Y_n > n/2, Y_{n+1} = 0) + P(Y_1 + \ldots + Y_n \le n/2, Y_{n+1} = 1) =$$
$$= (1-p)P(Y_1 + \ldots + Y_n > n/2) + pP(Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n \le n/2) =$$
$$= (1-p)P(Y_1 + \ldots + Y_n > n/2) + p(1 - P(Y_1 + Y_2 + \ldots > n/2)) =$$
$$= p + (1-2p)P(Y_1 + \ldots + Y_n > n/2).$$

Имеем

$$P(Y_1 + \ldots + Y_n > n/2) \le \frac{\mathbb{E}e^{\alpha(Y_1 + \ldots + Y_n)}}{e^{\alpha n/2}} = \left(\frac{pe^\alpha + 1 - p}{e^{\alpha/2}}\right)^n.$$

При $\alpha = \ln\frac{1-p}{p}$ правая часть принимает значение $2\sqrt{p(1-p)}^n$. Матожидание регрета не превосходит

$$\sum_{k=0}^n (2\sqrt{p(1-p)})^n \le \frac{1}{1 - 2\sqrt{p(1-p)}}.$$

Итак, регрет имеет константное матожидание. В случае $p = \frac{1}{2}$ матожидание лосса есть pn, и такое же матожидание лосса каждого из экспертов. Самые сложные распределения при $p \approx \frac{1}{2}$.

2. Это несложная задача, хотя сначала казалась мне сложной. Тут всё формально легко получается. По определению, ψ — строго возрастающая. Имеем для любого i

$$\psi(\phi(R_{in})) \leq \psi\left(\sum_{i=1}^{N}\phi(R_{in})\right) = \Phi(R_n) \leq \Phi(0) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} C(r_i).$$

По условию, $C(r)$ ограничено, и мы можем сказать, что для некоторых констант $A, B > 0$

$$\psi(\phi(R_{in}))) \leq A + Bn, i = 1, \ldots, N.$$

Пусть $h(u) = \psi(\phi(u))$. По условию, h строго выпукла. Имеем

$$R_{in} \leq h^{-1}(A + Bn), i = 1, \ldots, N, n = 1, 2, 3, \ldots$$

По сути, осталось доказать, что h растёт быстрее, чем любая линейная (растёт суперлинейно). Это получатся из теории строго выпуклых функций. ψ, ϕ дифференцируемы, значит, h дифференцируема. И тогда (см. Optimization for data analysis)

$$f(y) \geq f(0) + f'(0)y + \frac{m}{2}y^2.$$

Итак, h растёт как минимум квадратично. Тогда ясно, что

$$h^{-1}(A + Bn) = o(n), n \to \infty.$$

Всё ясно.

3.

4.