# Prediction, learning and games

## 1 Глава 2

1. Для iid последовательности $Y_1, Y_2, \ldots$ с $P(Y_i = 1) = p$. Будем ставить по большинству. $\hat{Y}_{n+1}$ положим равным тому значению из 0 и 1, которое принимается большим числом $Y_1, Y_2, \ldots Y_n$. Если поровну, то ставим 0. Проведём оценки для случая $p < \frac{1}{2}$. Случай $p > \frac{1}{2}$ рассматривается симметрично, а случай $p = \frac{1}{2}$ рассмотрим отдельно.

$$\begin{aligned}
P(\hat{Y}_{n+1} \neq Y_{n+1}) = \sum_k P\left(\sum_{i=1}^n Y_i = k, \hat{Y}_{n+1} \neq Y_{n+1}\right) = \\
= P(Y_1 + \ldots + Y_n > n/2, Y_{n+1} = 0) + P(Y_1 + \ldots + Y_n \le n/2, Y_{n+1} = 1) = \\
= (1-p)P(Y_1 + \ldots + Y_n > n/2) + pP(Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n \le n/2) = \\
= (1-p)P(Y_1 + \ldots + Y_n > n/2) + p(1 - P(Y_1 + Y_2 + \ldots > n/2)) = \\
= p + (1-2p)P(Y_1 + \ldots + Y_n > n/2).
\end{aligned}$$

Имеем

$$P(Y_1 + \ldots + Y_n > n/2) \le \frac{\mathbb{E}e^{\alpha(Y_1 + \ldots + Y_n)}}{e^{\alpha n/2}} = \left(\frac{pe^{\alpha} + 1 - p}{e^{\alpha/2}}\right)^n.$$

При $\alpha = \ln\frac{1-p}{p}$ правая часть принимает значение $2\sqrt{p(1-p)}^n$. Матожидание регрета не превосходит

$$\sum_{k=0}^{n} (2\sqrt{p(1-p)})^n \le \frac{1}{1 - 2\sqrt{p(1-p)}}.$$

Итак, регрет имеет константное матожидание. В случае $p = \frac{1}{2}$ матожидание лосса есть $pn$, и такое же матожидание лосса каждого из экспертов. Самые сложные распределения при $p \approx \frac{1}{2}$.

2. Это несложная задача, хотя сначала казалась мне сложной. Тут всё формально легко получается. По определению, $\psi$ — строго возрастающая. Имеем для любого $i$

$$\psi(\phi(R_{in})) \leq \psi\left(\sum_{i=1}^{N} \phi(R_{in})\right) = \Phi(R_n) \leq \Phi(0) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} C(r_i).$$

По условию, $C(r)$ ограничено, и мы можем сказать, что для некоторых констант $A, B > 0$

$$\psi(\phi(R_{in}))) \leq A + Bn, i = 1, \ldots, N.$$

Пусть $h(u) = \psi(\phi(u))$. По условию, $h$ строго выпукла. Имеем

$$R_{in} \leq h^{-1}(A + Bn), i = 1, \ldots, N, n = 1, 2, 3, \ldots$$

По сути, осталось доказать, что $h$ растёт быстрее, чем любая линейная (растёт суперлинейно). Это получатся из теории строго выпуклых функций. $\psi, \phi$ дифференцируемы, значит, $h$ дифференцируема. И тогда (см. Optimization for data analysis)

$$f(y) \geq f(0) + f'(0)y + \frac{m}{2}y^2.$$

Итак, $h$ растёт как минимум квадратично. Тогда ясно, что

$$h^{-1}(A + Bn) = o(n), n \to \infty.$$

Всё ясно.

3.

4. Воспользуемся указанием. Надо просто обратить неравенства в доказательстве теоремы 2.2. Для первого неравенства имеем

$$\ln\frac{W_n}{W_0} \leq \ln\left(N \max_{1\leq i\leq N} e^{-\eta L_{i,n}}\right) - \ln N = -\eta \min_{i=1,\ldots,N} L_{i,n}.$$

Второе неравенство доказывается сложнее. Имеем

$$\ln\frac{W_i}{W_{i-1}} = \ln\frac{\sum\limits_{i=1}^{N} w_{i,t-1}e^{-\eta|f_{i,t}-y_t|}}{\sum\limits_{j=1}^{N} w_{j,t-1}} \geq \ln e^{-\eta|\hat{p}_t - y_t|} = -\eta l(\hat{p}_t, y_t).$$

Неравенство написано в силу выпуклости функции

$$f(x) = e^{-\eta|x-y|}$$

на $D = [0, 1]$ как при $y = 0$, так и при $y = 1$ (а у нас всегда $y_t = 0$ или $y_t = 1$ по условию). Ну и всё. Эти неравенства суммируем, получаем

$$\ln \frac{W_n}{W_0} \geq -\eta \hat{L}_n.$$

И сопоставляя с первым неравенством, получаем

$$\hat{L}_n \geq \min_{i=1,\ldots,N} L_{i,n}.$$

Тем самым, задача решена.