

Математические мысли

1 Мысли по функциональному анализу

1. Какая категория у $C[0, 1]$ в $L_2[0, 1]$? По Рудину, можно сделать хитроумное доказательство, что первая. Рассмотрим функционалы на $L_2[0, 1]$, вот такие:

$$F_n(f) = n \int_0^{1/n} f(t) dt.$$

На любой $f \in C[0, 1]$ эти функционалы ограничены, и

$$F_n(f) \rightarrow f(0), n \rightarrow \infty.$$

Но на функции $g(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{t}}$

$$F_n(g) \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty.$$

Поэтому $C[0, 1]$ не может иметь вторую категорию.

2. Кстати, вложение $C[0, 1]$ в $L_2[0, 1]$ компактно? Замыкание образа единичного шара — все функции с essential supremum модуля не более 1. А это множество компактно? Нет, там функции Радемахера образуют “плохое” множество попарно ортогональных единичной нормы, и поэтому компактности нет. Да можно и синусы взять, они тоже по модулю не больше единицы. Хорошо, значит, вложение $C[0, 1]$ в $L_2[0, 1]$ некомпактно. А как этот образ единичного шара представить в виде счётного объединения нигде не плотных? Да он же сам замкнут и не содержит внутренних точек! А можно представить его в виде счётного объединения компактов?