Топология — задачи

1 Прасолов-1

1. 1.1.

2. 2.1. Отображения

$$f(A,B)=\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}, g(A,B)=\begin{pmatrix}AB & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}$$

гомотопны как отображения $GL(n,\mathbb{R})\times GL(n,\mathbb{R})\to GL(2n,\mathbb{R})$. Докажем в несколько этапов.

Лемма 1.1. *Отображения*

$$f(A,B)=\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}, h_1(A,B)=\begin{pmatrix}A & AB\\ 0 & B\end{pmatrix}$$

гомотопны.

Доказательство осущетвляется гомотопией

$$F_{1t}(A,B)=\begin{pmatrix}A & tAB\\ 0 & B\end{pmatrix}, t\in[0,1].$$

Лемма 1.2. *Отображения*

$$h_1(A,B)=\begin{pmatrix}A & AB\\ 0 & B\end{pmatrix}, h_2(A,B)=\begin{pmatrix}0 & AB\\ -I & B\end{pmatrix}$$

гомотопны.

Доказательство осущетвляется гомотопией

$$F_{2t}(A,B)=\begin{pmatrix}A-tA & AB\\ -tI & B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A-tAB\times B^{-1} & AB\\ -tB\times B^{-1} & B\end{pmatrix}, t\in[0,1].$$

Ясно, что у матрицы

$$\begin{pmatrix}A-tAB\times B^{-1} & AB\\ -tB\times B^{-1} & B\end{pmatrix}$$

определитель тот же, что у

$$\begin{pmatrix}A & AB\\ 0 & B\end{pmatrix},$$

поэтому мы не выходим за рамки матриц с ненулевым определителем. Почему? Да потому, что мы прибавляем к первым n столбцам нашей матрицы линейные комбинации последних n столбцов, а такие операции не меняют определитель.

Лемма 1.3. *Отображения*

$$h_2(A,B) = \begin{pmatrix} 0 & AB \\ -I & B \end{pmatrix}, h_3(A,B) = \begin{pmatrix} 0 & AB \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

гомотопны.

Доказательство осуществляется гомотопией

$$F_{3t}(A,B) = \begin{pmatrix} 0 & AB \\ -I & B - tB \end{pmatrix}, t \in [0,1].$$

Лемма 1.4. *Отображения*

$$h_3(A,B) = \begin{pmatrix} 0 & AB \\ -I & 0 \end{pmatrix}, h_4(A,B) = \begin{pmatrix} 0 & AB \\ -I & I \end{pmatrix}$$

гомотопны.

Доказательство осуществляется гомотопией

$$F_{4t}(A,B) = \begin{pmatrix} 0 & AB \\ -I & tI \end{pmatrix}, t \in [0,1].$$

Лемма 1.5. *Отображения*

$$h_4(A,B) = \begin{pmatrix} 0 & AB \\ -I & I \end{pmatrix}, h_5(A,B) = \begin{pmatrix} AB & AB \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

гомотопны.

Доказательство осуществляется гомотопией

$$F_{5t}(A,B) = \begin{pmatrix} tAB & AB \\ -I + tI & I \end{pmatrix}, t \in [0,1].$$

Лемма 1.6. *Отображения*

$$h_5(A,B) = \begin{pmatrix} AB & AB \\ 0 & I \end{pmatrix}, g(A,B) = \begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

гомотопны.

Доказательство осуществляется гомотопией

$$F_{6t}(A,B) = \begin{pmatrix} AB & AB - tAB \\ 0 & I \end{pmatrix}, t \in [0,1].$$

Эти леммы в совокупности дают доказательство.

2.2. Неинтересно.

2.3. Неинтересно.

2.4. Неинтересно.

2.5. Неинтересно.

2.6. Линейная связность пространств матриц. Это интересно, будем решать.