Алгебра 2 2023 Кузнецов

1 Листок 1

1. Для каких натуральных n многочлен $\frac{x^n-1}{x-1} = 1+x+\ldots+x^{n-1}$ неприводим?

   По-видимому, имеется в виду неприводимость над полем $\mathbb{Q}$.

   Во-первых, заметим, что при $n = ab$ имеет место равенство

   $$1 + x + \ldots + x^{n-1} = (1 + x + \ldots + x^{a-1})(1 + x^a + \ldots + x^{a(b-1)}).$$

   Или без разложения:

   $$\frac{x^{ab} - 1}{x - 1} = \frac{x^a - 1}{x - 1}\frac{x^{ab} - 1}{x^a - 1}.$$

   Отсюда следует, что при составном n многочлен $\frac{x^n-1}{x-1}$ приводим.

   Теперь попробуем доказать, что при простом $n = p$ многочлен $\frac{x^n-1}{x-1}$ неприводим. Предположим, что

   $$\frac{x^p - 1}{x - 1} = u(x)v(x),$$

   где u, v — непостоянные многочлены с рациональными коэффициентами, причём будем считать, что их старшие коэффициенты равны 1, и u — непостоянный многочлен с рациональными коэффициентами наименьшей степени, делящий $\frac{x^p-1}{x-1}$. Тогда, что

   $$u(x) = (x - a_1) \ldots (x - a_k),$$

   где $a_1, \ldots, a_k$ — попарно различные нееединичные корни степени p из единицы. Поэтому все симметрические многочлены от $a_1, \ldots a_k$

   $$a_1 + \ldots + a_k,$$

   $$a_1a_2 + \ldots + a_{k-1}a_k,$$

   $$\ldots$$

   $$a_1 \ldots a_k$$

   рациональны — они являются коэффициентами многочлена u. Но тогда для любого натурального s

   $$u_s(x) = (x - a_1^s) \ldots (x - a_k^s)$$

— тоже многочлен с рациональными коэффициентами (поскольку все симметрические многочлены выражаются через элементарные), и он должен быть взаимно прост с u либо совпадать с u, ибо иначе наибольший общий делитель этих многочленов будет степени меньше степени u и будет делить многочлен $\frac{x^p-1}{x-1}$. Рассмотрим множество тех $s \in \{1, \dots, p-1\}$, для которых

$$\{a_1^s, \dots, a_k^s\} = \{a_1, \dots, a_k\}.$$

Это подгруппа мультипликатиной группы $\mathbb{F}_p$. Значит, она циклическая, и есть $h \in \{1, \dots, p-1\}$, таких, что она порождена h. Тогда

$$u(x) = (x-a)(x-a^h)(x-a^{h^2}) \dots (x-a^{h^t}).$$

Дальше я не знаю, как закончить это рассуждение. Поэтому будем решать по-другому. Попробуем применить критерий Эйзенштейна. $q(x) = \frac{x^p-1}{x-1}$ неприводим над $\mathbb{Q}$ тогда и только тогда, когда неприводим

$$q(x+1) = \frac{(x+1)^p - 1}{x} = x^{p-1} + C_p^{p-1} x^{p-2} + \dots + C_p^2 x + p.$$

И применим критерий Эйзенштейна.

2. $x^n f(\frac{1}{x}) = c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \dots + c_{n-1} x + c_n$ имеет с $f(x)$ общий корень — тот, который лежит на единичной окружности (если $|\alpha| = 1$ и $f(\alpha) = 0$, то $f(\frac{1}{\alpha}) = f(\overline{\alpha}) = 0$). Значит, эти многочлены не взаимно просты, и в силу неприводимости f должны иметь все корни общие. То есть эти многолены пропорциональны:

$$f(x) = t x^n f\left(\frac{1}{x}\right), t \in \mathbb{Q}.$$

Отсюда $c_k = t c_{n-k}$ для всех k. Отсюда $t^2 = 1$. Значит, $t = \pm 1$. Если $t = -1$, то многочлен f имеет корнем 1, что противоречит неприводимости. Значит, $t = 1$. Если n нечётно, $n = 2m+1$, то

$$f(x) = (x^{2m+1} + 1) + c_1(x^{2m} + x) + \dots,$$

и этот многочлен имеет корень -1, что тоже невозможно в силу его неприводимости. Всё доказано.

3. а) Кажется, это известная теорема. Воспользуемсяя тем, что мультипликативная группа поля $\mathbb{F}_p$ циклическая. Значит, она порождается неким $g \in \mathbb{F}_p$. Тогда $\left(\frac{-1}{p}\right) = 1$ тогда и только тогда, когда для некоторого $s, 0 < s < p-1$ имеет место

$$g^{2s} = -1.$$

Из этого равенства следует $g^{4s} = 1$, и получаем:
$2s$ не делится на $p-1$, $4s$ делится на $p-1$.
Отсюда следует, что $p-1$ делится на 4. Пусть, напротив, $p-1$ делится на 4. Тогда возьмём $h = g^{\frac{p-1}{2}}$. Отсюда $h^2 = 1$. Поэтому $h = \pm 1$. Но $h = 1$ быть не может. так как g — первообразный корень.
б) Очевидно. следующие утверждения равносильны:

- $\left(\frac{-3}{p}\right) = 1$
- Многочлен $x^2 + 3$ приводим над $\mathbb{F}_p$
- Многочлен $(x+1)^2 + 3 = x^2 + 2x + 4$ приводим над $\mathbb{F}_p$
- Многочлен $(x-2)(x^2+2x+4) = x^3 - 8$ разложим над $\mathbb{F}_p$
- Существует $\varepsilon \in \mathbb{F}_p, \varepsilon \neq 1$, такое, что $\varepsilon^3 = 1$ (поделить на 2 корни уравнения из предыдущего пункта)

Но мультипликативная группа поля $\mathbb{F}_p$ циклическая. Значит, она порождается неким $g \in \mathbb{F}_p$. Тогда $\varepsilon = g^s, 0 < s < p-1$. Но тогда $g^{3s} = 1$, и $3s \vdots p-1$. Если $p-1$ не делится на 3, то s делится на $p-1$, а такое невозможно в силу $0 < s < p-1$. Значит, $p-1$ делится на 3.

И обратно — если $p-1$ делится на 3, то можно положить

$$\varepsilon = g^{\frac{p-1}{3}}.$$

Звдача решена.

4. K содержит примитивный корень из 1 степени 8. Пусть это корень g. Ясно, что тогда $g^4 = -1, g^2 = -1/g^2$. Рассмотрев пример поля комплексных чисел, я подобрал такое:

$$(g + 1/g)^2 = g^2 + 2 + 1/g^2 = g^2 + 2 - g^2 = 2.$$

Теперь рассмотрим 3 случая:

- $p \equiv \pm 1 (\mod 8)$. Тогда существует примитивный корень из 1 степени 8. Почему? Как мы помним, мультипликативная группа конечного поля $\mathbb{F}_p$ циклическая. Она порождена элементом $t \in \mathbb{F}_p$. Тогда $t^{\frac{p\pm1}{8}}$ и есть первообразный корень из 1 степени 8.
- $p \equiv -3 (\mod 8)$. Предположим,

  $$s^2 \equiv 2 (\mod p).$$

  По задаче 3а есть $j \in \mathbb{F}_p$, такое, что

  $$j^2 \equiv -1 (\mod p).$$

  Рассмотрим $z = s\frac{1+j}{2}$. Тогда

  $$z^2 = s^2\frac{j}{2} = j.$$

  Отсюда ясно, что z — первообразный корень из 1 степени 8. Мультипликативная группа поля $\mathbb{F}_p$ циклическая. Она порождена элементом $t \in \mathbb{F}_p$. Тогда $z = t^k, 0 < k < p-1$. Отсюда $t^{8k} = 1$, $8k$ делится на $p-1$. Но $p-1$ не делится на 8. Значит, $4k$ делится на $p-1$, и $z^4 = 1$. Противоречие с первообразностью p.
- $p \equiv 3 (\mod 8)$.