Вербицкий — задачи

1 Вербицкий — функциональный анализ

1. 1.1. Конечная группа G свободно действует на хаусдорфовом многообразии M. Тогда фактор M/G — многообразие. Надо проверить, что у каждой точки в M/G есть окрестность, гомеоморфная $\mathbb{R}^n$. Возьмём некоторую точку $y \in M/G$. Пусть её прообразы при факторотображении

   $$y_1, \ldots, y_m, m = |G|, y_i \in M, G = \{g_1, \ldots, g_m\}.$$

   У точки y_1 выберем окрестность U_1 так, чтобы

   $$\forall i \neq j \;\; g_i U_1 \cap g_j U_1 = \emptyset.$$

   Почему такую окрестность можно выбрать? Потому что пространство M хаусдорфово, мы у каждой точки $g_i y_1, i = 1, 2, \ldots, m$, выберем окрестность W_i, так, что

   $$W_i \cap W_j = \emptyset, i \neq j.$$

   Тогда искомая окрестность U_1 точки y_1 есть

   $$U_1 = \bigcap_{i=1}^{m} g_i^{-1} W_i.$$

   Теперь выберем окрестность V_1 точки y_1, гомеоморную $\mathbb{R}^n$, так, что её замыкание лежит в U_1:

   $$\overline{V_1} \subseteq U_1.$$

   Тогда $g_i V_1$ — окрестности, гомеоморфные $\mathbb{R}^n$, и их замыкания попарно не пересекаются. Тогда образ gV_1 при факторотображении и есть искомая окрестность $y \in M/G$.

   1.2.

2. 2.1.

2 Вербицкий — теория меры

1.

2.

3.

4. 4.1.

   4.2.

   4.3.

   4.4.

   4.5.

   4.6.

   4.7. Из $\nu \ll \mu$ и $\nu(S) < \infty$ следует, что для любого $\delta > 0$ найдётся $\varepsilon > 0$, такое, что из $\mu(V) < \varepsilon$ вытекает $\nu(V) < \delta$. Допустим, это не так. Тогла для некоторого $\delta > 0$, каким бы ни выбрать ε, найдётся множество V такое, что $\mu(V) < \varepsilon, \nu(V) \geq \delta$. Выберем такие V_n, что
$$\mu(V_n) < \frac{1}{2^n}, \nu(V_n) \geq \delta.$$
Пусть A_n — множество тех $\omega \in S$, которые принадлежат не менее чем n множествам V_i. Ясно, что
$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots$$
Покажем, что $\nu(A_n) \geq \delta$ для всех n. Допустим, это не так. Найдём N такое, что $\nu(A_N) < \delta$. Пусть
$$\delta' = \delta - \mu(A_N) > 0.$$
Рассмотрим множества
$$W_n = V_n \setminus A_N.$$
Ясно, что
$$\forall n \;\; \nu(W_n) \geq \nu(V_n) - \nu(A_N) \geq \delta - \mu(A_N) = \delta' > 0.$$
Но каждая точка множества S теперь принадлежит не более чем N множествам W_i. Пусть B_n — множество тех точек из S, которые принадлежат не менее чем n множествам W_i. Имеем
$$\sum_{n=1}^{\infty} \nu(W_n) = \nu(B_1) + \nu(B_2) + \ldots + \nu(B_N).$$
Левая часть равенства бесконечна, правая конечна. Противоречие. Итак,
$$\forall n \;\; \nu(A_n) \geq \delta.$$
Поэтому $\nu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) \geq \delta > 0$. Но ясно, что $\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = 0$, поскольку $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(V_n) < \infty$, и
$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(V_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n),$$

откуда следует, что
$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty,$$
и
$$\mu(A_n) \to 0, n \to \infty.$$
Но
$$\nu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) > 0, \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$$
противоречит абсолютной непрерывностью $\nu \ll \mu$. Всё доказано.

4.8.