Функциональный анализ — задачи

1 Рудин — Глава 1

1.
2.
3.

2 Рудин — Глава 2. Полнота

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9. X, Y, Z банаховы, $B\colon X \times Y \to Z$ непрерывное билинейное. Докажем:

$$\|B(x, y)\| \leq M\|x\|\|y\||.$$

Во-первых, заметим, что для каждого $x \in X$ линейное отображение $l_x\colon Y \to Z$, определяемое $l_x(y) = B(x, y)$, непрерывно. Действительно, оно непрерывно по совокупности переменных, значит, и по одной y.

Во-вторых, отображение F_B из X в банахово пространство непрерывных линейных операторов из Y в Z, заданное формулой

$$F_B(x) = l_x,$$

ограничено. Действительно, покажем, что существует M такое, что если $\|x\| \le 1$, то

$$\|F_B(x)\| = \|l_x\| \le M.$$

Из непрерывности B следует, что найдутся $\delta_1, \delta_2 > 0$ такие, что $\|B(x,y)\| < 1$, как только $\|x\| < \delta_1, \|y\| < \delta_2$. Отсюда, ясно, вытекает, что $\|B(x,y)\| \le C$ при $\|x\| \le 1, \|y\| \le 1$. Рассмотрим семейство операторов l_x при всех x, таких, что $\|x\| \le 1$. Значения этих операторов в каждой точке $y \in Y$ ограничены:

$$\|l_x(y)\| = \|B(x,y)\| \le C\|y\|.$$

А значит, по теореме Банаха-Штейнгауза нормы всех этих операторов ограничены одним числом:

$$\|l_x\| \le M, \|x\| \le 1.$$

А это и означает, что оператор F_B ограничен: $\|F_B\| \le M$.

Значит, имеем

$$\|l_x\| \le M\|x\|, \|B(x,y)\| = \|l_x(y)\| \le \|l_x\|\|y\| \le M\|x\|\|y\|.$$

10.

3 Халмош

1.

2. Координатное доказательство леммы Рисса. Пусть l — непрерывный линейный функционал на H, его норма k. Пусть $c_i = l(e_i)$. Тогда

$$l(a_1e_1 + \ldots + a_ne_n) = a_1c_1 + \ldots + a_nc_n.$$

Нам надо показать, что $\sum\limits_k |c_k|^2 < \infty$. Для этого оценим

$$|c_1|^2 + \ldots + |c_n|^2.$$

Из неравенства $\|l\| \le K$ следует

$$|a_1c_1 + \ldots + a_nc_n| \le K\sqrt{|a_1|^2 + \ldots + |a_n|^2}.$$

Это что-то похожее на неравенство Коши-Буняковского, и левая часть максимальна при $a_i = c_i^*$. Подставляя $a_i = c_i^*$, получаем

$$\sqrt{|c_1|^2 + \ldots + |c_n|^2} \le K.$$

Вот и всё.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

9.

10.

11.

12.

13.

14.

15.

16.

17.

18.

19.

20. Элементарное доказательство теоремы Банаха-Штейнгауза.

Пусть есть совокупность линейных непрерывных операторов A_α на гильбертовом пространстве H, которая не ограничена по норме, но ограничена на каждом векторе. Построим вектор, на котором она неограничена, и тем самым получим противоречие. Построим по индукции последовательности $A_n \in \{A_\alpha\}$, $f_n \in H$ с такими свойствами:

(a) $\|f_n\| = m_n = \frac{1}{2^n(1+\max(\|A_1\|,\ldots,\|A_{n-1}\|))}$;

(b) $\|A_n f_n\| \geq 2^n + \|A_n(f_1 + \ldots + f_{n-1})\|$.
Такой A_n существует, ибо множество $\{\|A_\alpha(f_1 + \ldots + f_{n-1})\|\}$ ограничено, и, таким образом, правая часть

$$2^n + \|A_\alpha(f_1 + \ldots + f_{n-1})\|$$

ограничена (при фиксированном n), а левая часть

$$\sup_{\|f\|=m_n} \|A_\alpha f\|$$

неограничена в силу неограниченности норм A_α.

Имеем:

(a) Ряд $\sum\limits_n f_n$ сходится, ибо $\|f_n\| \leq \frac{1}{2^n}$. Пусть $f = \sum\limits_n f_n$.

(b) При $k > 0$ имеем

$$\|A_n f_{n+k}\| \leq \|A_n\| \|f_{n+k}\| \leq \frac{1}{2^{n+k}}.$$

Здесь мы воспользовались неравенством

$$\|f_{n+k}\| = m_{n+k} \leq \frac{1}{2^{n+k}\|A_n\|},$$

случай $A_n = 0$ нужно рассмотреть отдельно, но и в нём всё получается. Отсюда, учитывая непрерывность оператора A_n,

$$\|A_n \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|A_n f_k\| \leq \frac{1}{2^n}.$$

Итак,

$$\|A_n(f_1 + \ldots + f_n)\| \geq 2^n, \|A_n \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k\| \leq \frac{1}{2^n}.$$

В итоге,

$$\|A_n f\| \geq 2^n - \frac{1}{2^n}.$$

Итак, множество $\{A_n f\}_{n=1}^{\infty}$ неограничено.