

Функциональный анализ — задачи

1 Рудин — Глава 1

- 1.
- 2.
- 3.

2 Рудин — Глава 2. Полнота

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.
- 5.
- 6.
- 7.
- 8.

9. X, Y, Z банаховы, $B: X \times Y \rightarrow Z$ непрерывное билинейное. Докажем:

$$\|B(x, y)\| \leq M\|x\|\|y\|.$$

Во-первых, заметим, что для каждого $x \in X$ линейное отображение $l_x: Y \rightarrow Z$, определяемое $l_x(y) = B(x, y)$, непрерывно. Действительно, оно непрерывно по совокупности переменных, значит, и по одной y .

Во-вторых, отображение F_B из X в банахово пространство непрерывных линейных операторов из Y в Z , заданное формулой

$$F_B(x) = l_x,$$

ограничено. Действительно, покажем, что существует M такое, что если $\|x\| \leq 1$, то

$$\|F_B(x)\| = \|l_x\| \leq M.$$

Из непрерывности B следует, что найдутся $\delta_1, \delta_2 > 0$ такие, что $\|B(x, y)\| < 1$, как только $\|x\| < \delta_1, \|y\| < \delta_2$. Отсюда, ясно, вытекает, что $\|B(x, y)\| \leq C$ при $\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1$. Рассмотрим семейство операторов l_x при всех x , таких, что $\|x\| \leq 1$. Значения этих операторов в каждой точке $y \in Y$ ограничены:

$$\|l_x(y)\| = \|B(x, y)\| \leq C\|y\|.$$

А значит, по теореме Банаха-Штейнгауза нормы всех этих операторов ограничены одним числом:

$$\|l_x\| \leq M, \|x\| \leq 1.$$

А это и означает, что оператор F_B ограничен: $\|F_B\| \leq M$.

Значит, имеем

$$\|l_x\| \leq M\|x\|, \|B(x, y)\| = \|l_x(y)\| \leq \|l_x\|\|y\| \leq M\|x\|\|y\|.$$

10.

3 Халмош

1.

2. Координатное доказательство леммы Рисса. Пусть l — непрерывный линейный функционал на H , его норма k . Пусть $c_i = l(e_i)$. Тогда

$$l(a_1 e_1 + \dots + a_n e_n) = a_1 c_1 + \dots + a_n c_n.$$

Нам надо показать, что $\sum_k |c_k|^2 < \infty$. Для этого оценим

$$|c_1|^2 + \dots + |c_n|^2.$$

Из неравенства $\|l\| \leq K$ следует

$$|a_1c_1 + \dots + a_nc_n| \leq K\sqrt{|a_1|^2 + \dots + |a_n|^2}.$$

Это что-то похожее на неравенство Коши-Буняковского, и левая часть максимальна при $a_i = c_i^*$. Подставляя $a_i = c_i^*$, получаем

$$\sqrt{|c_1|^2 + \dots + |c_n|^2} \leq K.$$

Вот и всё.

- 3.
- 4.
- 5.
- 6.
- 7.
- 8.
- 9.
- 10.
- 11.
- 12.
- 13.
- 14.
- 15.
- 16.
- 17.
- 18.
- 19.

20. Элементарное доказательство теоремы Банаха-Штейнгауза.

Пусть есть совокупность линейных непрерывных операторов A_α на гильбертовом пространстве H , которая не ограничена по норме, но ограничена на каждом векторе. Построим вектор, на котором она неограничена, и тем самым получим противоречие. Построим по индукции последовательности $A_n \in \{A_\alpha\}$, $f_n \in H$ с такими свойствами:

$$(a) \|f_n\| = m_n = \frac{1}{2^n(1+\max(\|A_1\|, \dots, \|A_{n-1}\|))};$$

$$(b) \|A_n f_n\| \geq 2^n + \|A_n(f_1 + \dots + f_{n-1})\|.$$

Такой A_n существует, ибо множество $\{\|A_\alpha(f_1 + \dots + f_{n-1})\|\}$ ограничено, и, таким образом, правая часть

$$2^n + \|A_\alpha(f_1 + \dots + f_{n-1})\|$$

ограничена (при фиксированном n), а левая часть

$$\sup_{\|f\|=m_n} \|A_\alpha f\|$$

неограничена в силу неограниченности норм A_α .

Имеем:

$$(a) \text{ Ряд } \sum_n f_n \text{ сходится, ибо } \|f_n\| \leq \frac{1}{2^n}. \text{ Пусть } f = \sum_n f_n.$$

$$(b) \text{ При } k > 0 \text{ имеем}$$

$$\|A_n f_{n+k}\| \leq \|A_n\| \|f_{n+k}\| \leq \frac{1}{2^{n+k}}.$$

Здесь мы воспользовались неравенством

$$\|f_{n+k}\| = m_{n+k} \leq \frac{1}{2^{n+k}\|A_n\|},$$

случай $A_n = 0$ нужно рассмотреть отдельно, но и в нём всё получается. Отсюда, учитывая непрерывность оператора A_n ,

$$\|A_n \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|A_n f_k\| \leq \frac{1}{2^n}.$$

Итак,

$$\|A_n(f_1 + \dots + f_n)\| \geq 2^n, \|A_n \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k\| \leq \frac{1}{2^n}.$$

В итоге,

$$\|A_n f\| \geq 2^n - \frac{1}{2^n}.$$

Итак, множество $\{A_n f\}_{n=1}^\infty$ неограничено.

21.

22.

23.

24.

25.

26.

27.

28.

29.

30.

31.

32.

33.

34.

35.

36.

37.

38.

39.

40.

41. Нужно элементарное доказательство теоремы Банаха об обратном операторе. $A: H \rightarrow K$ взаимно однозначный. Надо показать, что он ограничен снизу.

Долго думал, но это просто. Я пробовал сначала построить последовательность векторов в H , которая по норме стремится к бесконечности, но образы которой сходятся (в K). Конечно, такую последовательность построить можно, но это ничего не даёт.

Решение было сразу найдено, когда я стал плясать не от оператора A , а от оператора A^{-1} . Всё сразу сводится к применению теоремы Банаха-Штейнгауза. Мы выбираем ортонормированный базис e_1, e_2, \dots в H и определяем операторы $B_n: K \rightarrow H$ таким образом: B_n переводит вектор $z \in K$ в проекцию вектора $A^{-1}z$ на линейную оболочку e_1, \dots, e_n . Так мы получаем совокупность линейных операторов $\{B_n\}$, которая ограничена на каждом векторе. Значит, она и вообще ограничена:

$$\|B_n z\| \leq C \|z\| \quad \forall n \forall z \in K.$$

Тогда в силу сходимости $B_n z \rightarrow A^{-1}z, n \rightarrow \infty$ получаем

$$\|A^{-1}z\| \leq C \|z\| \quad \forall z \in K.$$