Матлогика

1 Шень - Языки и исчисления

24. Вывести формулу

$$(A \to (B \to C)) \to ((A \wedge B) \to C).$$

Имеем

$$A \to (B \to C), A \wedge B \vdash A, B, A \to (B \to C) \vdash C.$$

Значит, по лемме о дедукции

$$A \to (B \to C) \vdash (A \wedge B) \to C.$$

Ну и дальше второе применение леммы о дедукции заканчивает рассуждение. Теперь докажем выводимость формулы

$$((A \wedge B) \to C) \to (A \to (B \to C)).$$

Имеем: по аксиоме 5, выводимо $A \to (B \to (A \wedge B))$. Поэтому

$$(A \wedge B) \to C, A \vdash B \to (A \wedge B), (A \wedge B) \to C \vdash B \to C.$$

Отсюда двойным применением леммы о дедукции всё получается. Мы воспользовались задачей 21 о цепочке выводов. Докажем теперь выводимость формулы

$$(A \wedge B) \to (B \wedge A).$$

По аксиомам 3 и 4, из $A \wedge B$ выводятся A и B, а из них по аксиоме 5 выводится $B \wedge A$. Вот и всё.

25. Имеем $A, (A \vee B) \to C \vdash C$, поскольку есть аксиома $A \to (A \vee B)$, и $A \vdash (A \vee B)$. Значит,

$$(A \vee B) \to C \vdash A \to C.$$

Аналогично

$$(A \vee B) \to C \vdash B \to C.$$

А отсюда уже по предыдущему (см. теорию в книге)

$$(A \vee B) \to C \vdash (A \to C) \wedge (B \to C).$$

В другую сторону. sЗдесь нужно применить аксиому

$$((A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C)).$$

Из этой аксиомы получаем

$$A \to C, B \to C \vdash (A \vee B) \to C.$$

Но

$$(A \to C) \wedge (B \to C) \vdash A \to C, B \to C \vdash (A \vee B) \to C,$$

и по лемме о дедукции

$$((A \to C) \wedge (B \to C)) \to ((A \vee B) \to C).$$

Далее,

$$A \wedge C \vdash A, C \vdash (A \vee B), C \vdash (A \vee B) \wedge C.$$

Аналогично,

$$B \wedge C \vdash B, C \vdash (A \vee B), C \vdash (A \vee B) \wedge C.$$

Отсюда

$$(A \wedge C) \vee (B \wedge C) \vdash (A \vee B) \wedge C.$$

А отсюда уже (лемма о дедукции!) следует формула

$$((A \wedge C) \vee (B \wedge C)) \to ((A \vee B) \wedge C).$$

В другую сторону. Имеем

$$A, C \vdash A \wedge C \vdash (A \wedge C) \vee (B \wedge C).$$

Аналогично,
$$B, C \vdash (A \wedge C) \vee (B \wedge C).$$
Итак, взяв $\Gamma = \{C\}$, имеем
$$A \vee B, C \vdash (A \wedge C) \vee (B \wedge C).$$
Отсюда
$$(A \vee B) \wedge C \vdash (A \wedge C) \vee (B \wedge C).$$
Последние равенства не буду доказывать.

26. По аксиоме 9,
$$\neg A \to (A \to B).$$
Поэтому для любой формулы B
$$A, \neg A \vdash B.$$
Отсюда следует
$$A, \neg A \vdash B, \neg B.$$
Отсюда, взяв $\Gamma = \{A\}$, получаем
$$A \vdash \neg\neg A.$$
Итак, доказали, что
$$A \to \neg\neg A.$$
Дальше, по только что доказанному
$$\neg\neg\neg A, A \vdash \neg\neg A, \neg\neg\neg A.$$
Для $B = \neg\neg A$ это даёт противоречие. Значит,
$$\neg\neg\neg A \vdash \neg A.$$

27.

28.