

# Функциональный анализ — задачи

## 1 Рудин — Глава 1

1.

2.

3.

4.

5. Объём понятия “ограниченное множество” не изменится. Доказательство основано на том, что каждая окрестность нуля содержит уравновешенную окрестность нуля (теорема 1.14). А для уравновешенной окрестности нуля  $V$  если

$$E \subset sV$$

для некоторого  $s > 0$ , то

$$E \subset tV$$

при всех  $t > s$ .

6. Покажем, что каждое неограниченное множество содержит счётное неограниченное подмножество. Пусть  $E$  неограничено. Найдётся окрестность нуля  $V$ , такая, что  $E$  не содержится в  $tV$  ни при каком  $t > 0$  (задача 5). Тогда при каждом натуральном  $n$  существует  $x_n \in E$ , такое, что  $x_n \notin nV$ . Тогда множество  $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$  неограничено (иначе оно содержалось бы во всех  $nV$  начиная с некоторого места).

7.

8.

9.

10.  $\Lambda: X \rightarrow Y$  линейно и сюръективно,  $Y$  конечномерно.

- (а)  $\Lambda$  открыто. Выберем  $e_1, \dots, e_n$  — базис в  $Y$  и  $x_1, \dots, x_n$  в  $X$  такие, что  $\Lambda x_i = e_i$ . Тогда из непрерывности сложения и умножения на скаляры в  $X$  следует, что существует число  $\varepsilon > 0$ , такое, что

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n \in V,$$

как только

$$|\alpha_i| < \varepsilon, i = 1, \dots, n.$$

Значит,

$$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n \in \Lambda V,$$

как только

$$|\alpha_i| < \varepsilon, i = 1, \dots, n.$$

Но

$$\{\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n \mid \max_{i=1, \dots, n} |\alpha_i| < \varepsilon\}$$

это окрестность нуля в  $Y$  (потому что все векторные топологии на  $Y$  одинаковы, в том числе и топология, порождённая нормой, равной максимуму координат в данном базисе). Вот мы и построили для данной окрестности нуля в  $X$  окрестность нуля в  $Y$ , содержащуюся в её образе. Отсюда следует открытость  $\Lambda$ .

- (b) Если ядро  $\Lambda$  замкнуто, то  $\Lambda$  непрерывно. Ну, это следует из непрерывности факторизации по замкнутому подпространству (пункт 1.41). Пусть  $N$  — ядро  $\Lambda$ . Тогда  $\Lambda$  представляется в виде композиции

$$\Lambda = T \circ \pi,$$

где  $\pi: X \rightarrow X/N$  — непрерывное факторотображение, а  $T: X/N \rightarrow Y$  — линейный изоморфизм конечномерных пространств, потому непрерывный.  $\Lambda$  получается непрерывным как композиция непрерывных отображений.

11. Допустим, есть не всюду плотное подпространство  $L^p, 0 < p < 1$  конечной коразмерности. Тогда его замыкание — замкнутое собственное подпространство  $N$  пространства  $L^p$  также конечной коразмерности (возможно, меньшей, чем у исходного подпространства). Ну и мы можем устроить факторотображение  $\pi: L^p \rightarrow L^p/N$ , оно линейно и непрерывно (теорема 1.41), и отображает  $L^p$  на конечномерное пространство положительной размерности. Но конечномерное пространство локально выпукло. Противоречие с пунктом 1.47 — такое отображение может быть только нулевым.

12.

13. (а)  $\tau$ -ограниченное множество является  $\sigma$ -ограниченным. Пусть  $A$  — некоторое  $\tau$ -ограниченное множество. Покажем, что оно  $\sigma$ -ограниченное. В силу задачи 6, можно считать, что  $A$  счётно. Фиксируем  $\varepsilon > 0$ . Пусть

$$H_M = \{t \in [0, 1] \mid |f(t)| \leq M \forall f \in A\}, M > 0.$$

В силу счётности  $A$ , множество  $H_M$  измеримо при любом  $M$ . В силу  $\tau$ -ограниченности  $A$  (которая в силу теоремы 1.37 равносильна “обычной” ограниченности множеств

$$U_t = \{|f(t)|, f \in A\}$$

для каждого  $t \in [0, 1]$ ) имеем

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n = [0, 1].$$

Значит, существует натуральное число  $N$ , такое, что

$$\mu(H_N) > 1 - \varepsilon,$$

где  $\mu$  — мера Лебега на  $[0, 1]$ .

Тогда имеем

$$\forall f \in A \quad \mu\{t \in [0, 1] \mid |f(t)| > N\} \leq \varepsilon.$$

Значит,

$$\int_0^1 \frac{|\varepsilon f(t)/N|}{1 + |\varepsilon f(t)/N|} dt \leq (1 - \varepsilon)\varepsilon + \varepsilon \leq 2\varepsilon.$$

Итак,

$$\forall f \in A \quad d\left(\frac{\varepsilon}{N}f, 0\right) \leq 2\varepsilon.$$

Значит,  $\frac{\varepsilon}{N}A$  содержится в  $3\varepsilon$ -окрестности нуля в  $\sigma$ -топологии.

В силу произвольности  $\varepsilon$ , с учётом задачи 5 это означает ограниченность  $A$  в  $\sigma$ -топологии. Доказали.

- (b) Отображение  $\text{id}: (C, \tau) \rightarrow (C, \sigma)$  разрывно (хотя секвенциально непрерывно). Ну так это очевидно. Для непрерывности отображения  $\text{id}$  нам надо, чтоб для любой  $\sigma$ -окрестности нуля существовала

$\tau$ -окрестность нуля внутри неё. Ну так возьмём такую  $\sigma$ -окрестность нуля:

$$U_\sigma = \left\{ f \in C \mid \int_0^1 \frac{|f(t)|}{1 + |f(t)|} dt < \frac{1}{2} \right\}.$$

Каждая  $\tau$ -окрестность нуля содержит подокрестность вида

$$U_{t_1, \dots, t_n, \varepsilon} = \{f \in C \mid |f(t_i)| < \varepsilon, i = 1, \dots, n\}.$$

Ясно, что существует непрерывная неотрицательная функция, которая в точках  $t_1, \dots, t_n$  принимает значение 0, но равна 100 на множестве меры больше 0.99. Тогда эта функция лежит в  $U_{t_1, \dots, t_n, \varepsilon}$ , но не лежит в  $U_\sigma$ . Вот и доказали разрывность  $\text{id}$ .

Надо ещё показать непосредственно, что в  $(C, \tau)$  не существует счётной локальной базы. Ну, это очевидно примерно из тех же соображений. Надо показать, что не существует счётного набора окрестностей нуля, такого, что любая окрестность нуля содержит окрестность из этого набора. Допустим, такой набор существует. Каждая окрестность из этого набора содержит окрестность вида

$$U_{t_1, \dots, t_n, \varepsilon} = \{f \in C \mid |f(t_i)| < \varepsilon, i = 1, \dots, n\}.$$

Точек  $t_i$ , которые входят в определение какой-то из окрестностей этого набора, счётное число. Возьмём точку  $t \in [0, 1]$ , не совпадающую ни с одной из них. Тогда для этой точки окрестность

$$\left\{ f \in C \mid |f(t)| < \frac{1}{2} \right\}$$

не содержит ни одной из выбранных окрестностей. Вот и всё.

- (с) Представление линейных непрерывных функционалов на  $(C, \tau)$ . Пусть  $\Lambda$  — линейный непрерывный функционал на  $(C, \tau)$ . Существует окрестность нуля вида

$$U_{t_1, \dots, t_n, \varepsilon} = \{f \in C \mid |f(t_i)| < \varepsilon, i = 1, \dots, n\},$$

такая, что из  $f \in U_{t_1, \dots, t_n, \varepsilon}$  следует  $|\Lambda f| < 1$ . Ясно, что тогда имеет место неравенство

$$\forall f \in C \quad |\Lambda f| \leq \frac{1}{\varepsilon} \max\{|f(t_1)|, \dots, |f(t_n)|\}.$$

Отсюда следует, что если  $f \in C$  такова, что

$$f(t_1) = \dots = f(t_n) = 0,$$

то  $\Lambda f = 0$ . Значит, если  $f, g \in C$  совпадают на  $t_1, \dots, t_n$ , то  $\Lambda f = \Lambda g$ . Осталось выбрать функции  $h_i \in C$ , такие, что

$$h_i(t_j) = \delta_{ij}, 1 \leq i, j \leq n.$$

Пусть  $c_i = \Lambda(h_i)$ . Тогда

$$\Lambda f = \Lambda \left( \sum_{i=1}^n f(t_i) h_i \right) = \sum_{i=1}^n f(t_i) \Lambda(h_i) = \sum_{i=1}^n c_i f(t_i).$$

Это и нужно было доказать.

- (d)  $(C, \sigma)$  не содержит выпуклых открытых множеств, отличных от  $\emptyset$  и  $C$ . Надо показать, что для любой функции  $h \in C$  и любого  $\varepsilon > 0$  существует натуральное  $N$  и функции  $h_1, \dots, h_N \in C$ , такие, что

$$h = h_1 + \dots + h_N$$

и мера носителя каждой  $h_i$  меньше  $\varepsilon$ . Если мы построили такие  $h_i$ , то

$$h = \frac{Nh_1 + \dots + Nh_N}{N},$$

$$\forall i \quad d(Nh_i, 0) < \varepsilon,$$

и мы получаем, что выпуклая оболочка  $\varepsilon$ -окрестности нуля в  $d$  содержит  $h$ . В силу произвольности  $h$ , выпуклая оболочка  $\varepsilon$ -окрестности нуля совпадает с  $C$ . Осталось пояснить, как строить  $h_i$ .

- (e) Отображение  $\text{id}: (C, \sigma) \rightarrow (C, \tau)$  разрывно. Ну, теперь это ясно. Рассмотрим окрестность  $U_1$  в  $\tau$ -топологии

$$U_1 = \left\{ f \in C \mid \left| f\left(\frac{1}{2}\right) \right| < 1 \right\}.$$

Если  $\text{id}$  непрерывно, то  $U_1$  в  $\sigma$ -топологии должна быть открытой и выпуклой. Но в  $(C, \sigma)$  нет открытых выпуклых множеств, отличных от  $\emptyset$  и  $C$ . Вот и всё.  $U_1$  не открыта в  $(C, \sigma)$ .

14. Известно, что два семейства полунорм  $\{p_\alpha\}$  и  $\{q_\beta\}$  на векторном пространстве  $X$  эквивалентны (то есть задают одну и ту же топологию), если для любой полунормы  $p_\alpha$  из первого семейства найдутся полунормы  $q_{\beta_1}, q_{\beta_2}, \dots, q_{\beta_m}$  из второго семейства и константа  $C > 0$ , такие, что

$$\forall x \in X \quad p_\alpha(x) \leq C(q_{\beta_1}(x) + \dots + q_{\beta_m}(x)),$$

и для любой полунормы  $q_\beta$  из второго семейства найдутся полунормы  $p_{\alpha_1}, \dots, p_{\alpha_n}$  из первого семейства и константа  $D > 0$ , такие, что

$$\forall x \in X \quad q_\beta(x) \leq D(p_{\alpha_1}(x) + \dots + p_{\alpha_n}(x)).$$

(Это стандартный факт, он описан, например, у Саймона-Рида). Проверим такие неравенства для наших трёх семейств полунорм. Имеем

$$\int_0^1 |D^n f(x)| dx \leq \left( \int_0^1 |D^n f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \leq \sup_{x \in [0,1]} |D^n f(x)|.$$

Осталось оценить полунормы  $\sup_{x \in [0,1]} |D^n f(x)|$  через полунормы  $\int_0^1 |D^n f(x)| dx$ . Имеем

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [0,1]} |D^n f(x)| &= \max_{x \in [0,1]} |D^n f(x)| \leq \min_{x \in [0,1]} |D^n f(x)| + \int_0^1 |D^{n+1} f(x)| dx \leq \\ &\leq \int_0^1 |D^n f(x)| dx + \int_0^1 |D^{n+1} f(x)| dx. \end{aligned}$$

Вот всё и доказали.

15. Пространство  $C(\Omega)$  не обладает свойством Гейне-Бореля. Обозначим для компакта  $K$ :  $C_K$  — подпространство  $C(\Omega)$ , состоящее из функций, носители которых лежат в  $K$ .  $C_{K_2}$  не обладает свойством Гейне-Бореля (внутренность  $K_2$  непустая — в ней содержится  $K_1$ ). В  $C_{K_2}$  есть ограниченное, но не вполне ограниченное множество. Оно же будет таковым в  $C(\Omega)$ . Или, чуть по-другому, мы можем взять множество

$$H = \{f \in C_{K_2} : \sup_{t \in K_2} |f(t)| \leq 1\}.$$

Это множество  $H$  замкнуто и ограничено в  $C(\Omega)$ , но не компактно. Кстати, почему  $H$  замкнуто? Да потому что если  $|g(t_0)| > 1, t_0 \in K_2$ , то у  $g$  есть окрестность  $U$ , в которой

$$|h(t_0)| > 1, h \in U.$$

Ну а ограниченность  $H$  следует из того, что на  $H$  все полунормы  $p_n$  ограничены единицей.

16. Топология  $C(\Omega)$  не зависит от выбора  $K_n$ . Ну если есть две системы компактов  $K_n$  и  $K'_n$ , то для любого  $n$  можно выбрать  $m$  так, что

$$K_n \subseteq K'_m.$$

Это следует из того, что компакт  $K_n$  покрыт внутренностями компактов  $K'_s$ , и можно выбрать конечное подпокрытие. Ну а дальше можно воспользоваться тем же критерием эквивалентности систем полунорм, которым мы пользовались в задаче 14. Для  $C^\infty(\Omega)$  доказательство аналогичное.

17.

18.

19.

20.

## 2 Рудин — Глава 2. Полнота

1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

9.  $X, Y, Z$  банаховы,  $B: X \times Y \rightarrow Z$  непрерывное билинейное. Докажем:

$$\|B(x, y)\| \leq M\|x\|\|y\|.$$

Во-первых, заметим, что для каждого  $x \in X$  линейное отображение  $l_x: Y \rightarrow Z$ , определяемое  $l_x(y) = B(x, y)$ , непрерывно. Действительно, оно непрерывно по совокупности переменных, значит, и по одной  $y$ .

Во-вторых, отображение  $F_B$  из  $X$  в банахово пространство непрерывных линейных операторов из  $Y$  в  $Z$ , заданное формулой

$$F_B(x) = l_x,$$

ограничено. Действительно, покажем, что существует  $M$  такое, что если  $\|x\| \leq 1$ , то

$$\|F_B(x)\| = \|l_x\| \leq M.$$

Из непрерывности  $B$  следует, что найдутся  $\delta_1, \delta_2 > 0$  такие, что  $\|B(x, y)\| < 1$ , как только  $\|x\| < \delta_1, \|y\| < \delta_2$ . Отсюда, ясно, вытекает, что  $\|B(x, y)\| \leq C$  при  $\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1$ . Рассмотрим семейство операторов  $l_x$  при всех  $x$ , таких, что  $\|x\| \leq 1$ . Значения этих операторов в каждой точке  $y \in Y$  ограничены:

$$\|l_x(y)\| = \|B(x, y)\| \leq C\|y\|.$$

А значит, по теореме Банаха-Штейнгауза нормы всех этих операторов ограничены одним числом:

$$\|l_x\| \leq M, \|x\| \leq 1.$$

А это и означает, что оператор  $F_B$  ограничен:  $\|F_B\| \leq M$ .

Значит, имеем

$$\|l_x\| \leq M\|x\|, \|B(x, y)\| = \|l_x(y)\| \leq \|l_x\|\|y\| \leq M\|x\|\|y\|.$$

10.

### 3 Халмош

1.



2. Координатное доказательство леммы Рисса. Пусть  $l$  — непрерывный линейный функционал на  $H$ , его норма  $k$ . Пусть  $c_i = l(e_i)$ . Тогда

$$l(a_1 e_1 + \dots + a_n e_n) = a_1 c_1 + \dots + a_n c_n.$$

Нам надо показать, что  $\sum_k |c_k|^2 < \infty$ . Для этого оценим

$$|c_1|^2 + \dots + |c_n|^2.$$

Из неравенства  $\|l\| \leq K$  следует

$$|a_1 c_1 + \dots + a_n c_n| \leq K \sqrt{|a_1|^2 + \dots + |a_n|^2}.$$

Это что-то похожее на неравенство Коши-Буняковского, и левая часть максимальна при  $a_i = c_i^*$ . Подставляя  $a_i = c_i^*$ , получаем

$$\sqrt{|c_1|^2 + \dots + |c_n|^2} \leq K.$$

Вот и всё.

- 3.
- 4.
- 5.
- 6.
- 7.
- 8.
- 9.
- 10.
- 11.
- 12.
- 13.
- 14.
- 15.

16.

17.

18.

19.

20. Элементарное доказательство теоремы Банаха-Штейнгауза.

Пусть есть совокупность линейных непрерывных операторов  $A_\alpha$  на гильбертовом пространстве  $H$ , которая не ограничена по норме, но ограничена на каждом векторе. Построим вектор, на котором она неограничена, и тем самым получим противоречие. Построим по индукции последовательности  $A_n \in \{A_\alpha\}$ ,  $f_n \in H$  с такими свойствами:

$$(a) \|f_n\| = m_n = \frac{1}{2^n(1+\max(\|A_1\|, \dots, \|A_{n-1}\|))};$$

$$(b) \|A_n f_n\| \geq 2^n + \|A_n(f_1 + \dots + f_{n-1})\|.$$

Такой  $A_n$  существует, ибо множество  $\{\|A_\alpha(f_1 + \dots + f_{n-1})\|\}$  ограничено, и, таким образом, правая часть

$$2^n + \|A_n(f_1 + \dots + f_{n-1})\|$$

ограничена (при фиксированном  $n$ ), а левая часть

$$\sup_{\|f\|=m_n} \|A_\alpha f\|$$

неограничена в силу неограниченности норм  $A_\alpha$ .

Имеем:

(a) Ряд  $\sum_n f_n$  сходится, ибо  $\|f_n\| \leq \frac{1}{2^n}$ . Пусть  $f = \sum_n f_n$ .

(b) При  $k > 0$  имеем

$$\|A_n f_{n+k}\| \leq \|A_n\| \|f_{n+k}\| \leq \frac{1}{2^{n+k}}.$$

Здесь мы воспользовались неравенством

$$\|f_{n+k}\| = m_{n+k} \leq \frac{1}{2^{n+k} \|A_n\|},$$

случай  $A_n = 0$  нужно рассмотреть отдельно, но и в нём всё получается. Отсюда, учитывая непрерывность оператора  $A_n$ ,

$$\|A_n \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|A_n f_k\| \leq \frac{1}{2^n}.$$

Итак,

$$\|A_n(f_1 + \dots + f_n)\| \geq 2^n, \|A_n \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k\| \leq \frac{1}{2^n}.$$

В итоге,

$$\|A_n f\| \geq 2^n - \frac{1}{2^n}.$$

Итак, множество  $\{A_n f\}_{n=1}^{\infty}$  неограничено.

21.

22.

23.

24.

25.

26.

27.

28.

29.

30.

31.

32.

33.

34.

35.

36.

37.

38.

39.

40.

41. Нужно элементарное доказательство теоремы Банаха об обратном операторе.  $A: H \rightarrow K$  взаимно однозначный. Надо показать, что он ограничен снизу.

Я пробовал сначала построить последовательность векторов в  $H$ , которая по норме стремится к бесконечности, но образы которой сходятся (в  $K$ ). Конечно, такую последовательность построить можно, но это ничего не даёт.

Идея нашлась, когда я стал плясать не от оператора  $A$ , а от оператора  $A^{-1}$ . Всё сразу сводится к применению теоремы Банаха-Штейнгауза. Мы выбираем ортонормированный базис  $e_1, e_2, \dots$  в  $H$  и определяем операторы  $B_n: K \rightarrow H$  таким образом:  $B_n$  переводит вектор  $z \in K$  в проекцию вектора  $A^{-1}z$  на линейную оболочку  $e_1, \dots, e_n$ . Так мы получаем совокупность линейных операторов  $\{B_n\}$ , которая ограничена на каждом векторе. Значит, она и вообще ограничена:

$$\|B_n z\| \leq C \|z\| \quad \forall n \forall z \in K.$$

Тогда в силу сходимости  $B_n z \rightarrow A^{-1}z, n \rightarrow \infty$  получаем

$$\|A^{-1}z\| \leq C \|z\| \quad \forall z \in K.$$

Но это рассуждение неполное. Мы не показали, что  $B_n$  являются ограниченными операторами. На самом деле, это непонятно как показывать.

## 4 Пирковский

1. Задача о функциональном исчислении.

- 1.1. Условие  $M \supset \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  необходимо для разрешимости задачи функционального исчисления с  $A = F(M)$ . Допустим,  $\lambda_k \notin M$ . Нам нужно показать, что не существует гомоморфизма из

алгебры всех функций на  $M$  в алгебру операторов, который переводит многочлены куда надо. Допустим, такой гомоморфизм  $\gamma_A$  существует. Имеем

$$\gamma_A(\lambda_k - t)\gamma_A\left(\frac{1}{\lambda_k - t}\right) = \gamma_A(1) = 1_E,$$

$$(\lambda_k - A)\gamma_A\left(\frac{1}{\lambda_k - t}\right) = 1_E.$$

Но оператор  $\lambda_k - A$  необратим. Противоречие.

1.2.

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Не существует оператора  $S$  с  $S^2 = T$ . Допустим,  $S^2 = T$ . Тогда  $\ker S$  — это не всё  $\mathbb{C}^2$  и не 0 (в первом случае оператор  $S$  был бы нулевым, во втором невырожденным, и оба этих случая противоречат равенству  $S^2 = T$ ). Значит,  $\ker S$  одномерно. Аналогично,  $\operatorname{Im} S$  одномерно. Если  $\ker S = \operatorname{Im} S$ , то  $S^2 = 0$ , противоречие. Значит,  $\ker S$  и  $\operatorname{Im} S$  — это разные одномерные подпространства  $\mathbb{C}^2$ . Пусть  $v \in \operatorname{Im} S$  — ненулевой вектор. Тогда  $Sv$  — ненулевой вектор и  $Sv \in \operatorname{Im} S$ . Отсюда получаем

$$Sv = \alpha v, \alpha \neq 0.$$

Но тогда

$$S^4 v = \alpha^4 v \neq 0.$$

Однако  $S^4 = T^2 = 0$ . Противоречие.

Есть и другой, более алгебраический, способ это доказывать. У оператора  $S$  есть характеристический многочлен  $p$  второй степени:

$$p(S) = 0.$$

С другой стороны,  $S^4 = T^2 = 0$ . Поделив над полем  $\mathbb{C}$  многочлен  $t^4$  с остатком на  $p(t)$ , получим два случая

- В остатке получается некоторый ненулевой многочлен степени не выше первой. Тогда  $S$  пропорционален единичному оператору. Это противоречит равенству  $S^2 = T$ .
- Многочлен  $t^4$  делится на  $p(t)$  нацело. Это может быть, только если  $p(t) = t^2$ . Но тогда  $S^2 = 0$ , что противоречит равенству  $S^2 = T$ .

2) То же самое верно для любого  $n \geq 2$ : не существует  $S$  со свойством  $S^n = T$ . Для этого можно доказать более общее утверждение: если  $S: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  нильпотентен,  $S^n = 0$ , то  $S^2 = 0$ . Оба способа доказательства из предыдущего пункта тривиально обобщаются.

3) Для  $A = C(\mathbb{R})$  задача построения функционального исчисления от оператора  $T$  неразрешима. Действительно, иначе имеем

$$\gamma_A(\sqrt[3]{t})^3 = \gamma_A(t) = T.$$

Это противоречит пункту 2).

1.3. 1) Для  $f \in C^1(U)$  положим

$$\gamma_A(f) = f(0) + f'(0)T.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \gamma_A(fg) &= f(0)g(0) + (f(0)g'(0) + f'(0)g(0))T = \\ &= (f(0) + f'(0)T)(g(0) + g'(0)T) = \gamma_A(f)\gamma_A(g) \end{aligned}$$

в силу  $T^2 = 0$ .

2) Перейдём в базис, в котором наш оператор  $T$  представляется в жордановой форме. Тогда в этом базисе  $T = D + N$ , где  $D$  диагональный,  $N^n = 0$ , и вдобавок  $D$  и  $N$  коммутируют. Положим для  $f \in C^{n-1}(U)$

$$f(T) = f(D) + f'(D)N + \dots + \frac{f^{(n-1)}(D)}{(n-1)!}N^{n-1}.$$

Здесь  $f^{(k)}(D)$  определяются как обычно для диагонального оператора. Легко проверить, что

$$(fg)(T) = f(T)g(T).$$

Вот и построили функциональное исчисление.

## 2. Спектр.

2.1. У обратимого элемента есть лишь один обратный. Допустим, у элемента  $a$  два обратных,  $b$  и  $c$ . Имеем

$$ab = ba = 1, ac = ca = 1.$$

Тогда

$$c = 1 \times c = (ba)c = b(ac) = b.$$

- 2.2. 1)  $a$  обратим слева.  $a_l^{-1}$  не обязательно единственно. Например, рассмотрим  $l_2$  и алгебру всех ограниченных линейных операторов на нём. Пусть оператор  $a$  действует сдвигом:

$$a(x_0, x_1, x_2, \dots) = (0, x_0, x_1, x_2, \dots).$$

Тогда любой оператор  $b_\alpha, \alpha \in \mathbb{C}$  вида

$$b_\alpha(x_0, x_1, x_2, \dots) = (\alpha x_0 + x_1, x_2, x_3, \dots)$$

является левым обратным для  $a$ :

$$b_\alpha a = 1.$$

- 2) Если  $a$  обратим слева и справа, то он обратим.

$$a_r^{-1} = (a_l^{-1} a) a_r^{-1} = a_l^{-1} (a a_r^{-1}) = a_l^{-1}.$$

Итак,  $a_r^{-1} = a_l^{-1}$ , и всё ясно.

- 3) Если  $A$  конечномерна и  $a \in A$  обратим слева, то он обратим. Для любого элемента  $b \in A$ ,  $bA$  — это линейное подпространство в  $A$ . Это подпространство совпадает с  $A$  тогда и только тогда, когда его размерность равна размерности  $A$ . Наш  $a$  обратим слева. Пусть  $h$  — левый обратный для  $a$ . Если размерность  $aA$  меньше размерности  $A$ , то размерность  $haA$  тем более не выше. Но этого быть не может, так как  $haA = A$ . Значит,  $aA = A$ . Итак, в виде  $ax$  можно представить любой элемент  $A$ , поскольку  $aA = A$ . Тогда существует  $y \in A$ , такое, что  $ay = 1$ . Значит,  $y$  — левый обратный для  $a$ . По предыдущему пункту,  $a$  обратим.

- 4) Для произвольной алгебры  $A$  это неверно, пример тот же, что в пункте 1). Там оператор  $a$  имеет левый обратный, но правого обратного не имеет.

- 2.3. Для произвольного нормированного пространства из биективности не следует обратимость. Возьмём в роли  $E$  подпространство  $l_2$ , состоящее из всех финитных последовательностей

$$(x_1, \dots, x_m, 0, 0, \dots).$$

На этом пространстве оператор  $A$ , заданный равенством

$$A(x_1, \dots, x_m, 0, 0, \dots) = (x_1, x_2/2, x_3/3, \dots, x_m/m, 0, 0, \dots)$$

ограничен и биективен, но необратим. Его обратный в теоретико-множественном смысле неограничен.

## 5 Кириллов-Гвишиани

119. Утверждение очевидно для открытых множеств. Достаточно доказать для замкнутых, потому что каждое измеримое можно приблизить изнутри замкнутыми (регулярность меры), и отсюда легко получить нужное утверждение. Дальше считаем, что  $X$  замкнуто.

Сначала покажу неправильное решение. Оно с помощью леммы, но лемма не доказывается.

**Лемма 5.1.** *Для любого  $N > 0$  существуют  $C = C(N) > 0, \varepsilon_0 > 0$  такие, что при любом  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$*

$$\mu\{x \in X \mid \mu\{y \notin X : |y - x| < \varepsilon\} > \varepsilon/N\} < C\varepsilon.$$

*Proof.* Рассмотрим функции

$$h_\varepsilon(x) = \frac{\mu\{y \notin X : |y - x| < \varepsilon\}}{2\varepsilon}$$

. Ясно, что

$$\begin{aligned} \int_0^1 h_\varepsilon(x) dx &= \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^1 dx \int_0^1 \mathbb{1}_{y \notin X} \mathbb{1}_{|y-x| < \varepsilon} dy = \\ &= \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^1 \mathbb{1}_{y \notin X} dy \int_0^1 \mathbb{1}_{|y-x| < \varepsilon} dx \leq \int_0^1 \mathbb{1}_{y \notin X} dy = \mu([0, 1] \setminus X). \end{aligned}$$

Также ясно, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_\varepsilon(x) = 1, x \in [0, 1] \setminus X$$

(здесь мы воспользовались открытостью  $[0, 1] \setminus X$ ). Поэтому

$$\int_{[0,1] \setminus X} h_\varepsilon(x) dx \rightarrow \mu([0, 1] \setminus X), \varepsilon \rightarrow 0.$$

Вычитая полученные равенства, получаем

$$\int_X h_\varepsilon(x) dx \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0.$$



Это, в частности, означает

$$\mu\{x \in X : h_\varepsilon(x) > 1/(2N)\} \leq 2N \int_X h_\varepsilon(x) dx = No(1), \varepsilon \rightarrow 0.$$

Но нам этой оценки не хватает, нам нужна скорость сходимости.  $\square$

Как из леммы вывести задачу? Пусть дано некоторое  $\alpha, 0 < \alpha < 1$ . Выберем  $N$  так, что

$$1/N < \alpha/2.$$

Фиксируем  $q, q_0 < q < 1$ , где

$$2(1/q_0 - 1) = \alpha/2.$$

Тогда

$$2(1/q - 1) \leq \alpha/2.$$

Выберем  $\varepsilon_1 > 0$  так, чтобы при  $\varepsilon \leq \varepsilon_1$  было

$$\mu\{x \in X \mid \mu\{y \notin X : |y - x| < \varepsilon\} > \varepsilon/N\} < C\varepsilon,$$

где  $C = C(N)$  из леммы не зависит от  $\varepsilon_1$  (мы можем уменьшать  $\varepsilon_1$ , не меняя  $C$ ).

Выберем последовательность  $\varepsilon_2 = q\varepsilon_1, \varepsilon_3 = q^2\varepsilon_1, \dots$ . Для каждого  $\varepsilon_n$  имеем

$$\mu\{x \in X \mid \mu\{y \notin X : |y - x| < \varepsilon_n\} > \varepsilon_n/N\} < C\varepsilon_n.$$

Отсюда, суммируя геометрическую прогрессию,

$$\mu\{x \in X \mid \exists n \in \mathbb{N} : \mu\{y \notin X : |y - x| < \varepsilon_n\} > \varepsilon_n/N\} < \frac{C\varepsilon_1}{1 - q}.$$

Пусть

$$A = \{x \in X \mid \exists n \in \mathbb{N} : \mu\{y \notin X : |y - x| < \varepsilon_n\} > \varepsilon_n/N\}.$$

Тогда по доказанному

$$\mu(A) \leq \frac{C\varepsilon_1}{1 - q}.$$

Пусть  $x \in X \setminus A$ . Рассмотрим произвольное  $\varepsilon < \varepsilon_1$ . Найдём  $n$  такое, что

$$\varepsilon_{n+1} \leq \varepsilon < \varepsilon_n.$$

Имеем

$$\begin{aligned}\mu\{y \notin X : |y - x| < \varepsilon\} &\leq \mu\{y \notin X : |y - x| < \varepsilon_{n+1}\} + 2(\varepsilon - \varepsilon_{n+1}) \leq \\ &\leq \varepsilon_{n+1}/N + 2(\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}) = (1/N + 2(1/q - 1))\varepsilon_{n+1} \leq \\ &\leq (1/N + 2(1/q - 1))\varepsilon \leq \alpha\varepsilon.\end{aligned}$$

Итак, мы доказали:

$$\mu\{x \in X \mid \exists \varepsilon < \varepsilon_1 : \mu\{y \notin X : |y - x| < \varepsilon\} > \alpha\varepsilon\} \leq \frac{C\varepsilon_1}{1 - q}.$$

При этом  $\varepsilon_1$  можно выбрать сколь угодно малым. Это значит, что

$$\mu\{x \in X \mid \exists \varepsilon < \varepsilon_1 : \mu\{y \notin X : |y - x| < \varepsilon\} > \alpha\varepsilon\} = 0.$$

Значит,

$$\mu\left\{x \in X \mid \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mu\{y \notin X : |y - x| < \varepsilon\}}{2\varepsilon} > \frac{\alpha}{2}\right\} = 0.$$

В силу произвольности  $\alpha$ , это означает, что

$$\mu\left\{x \in X \mid \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mu\{y \notin X : |y - x| < \varepsilon\}}{2\varepsilon} > 0\right\} = 0.$$

А это уже есть то, что нам нужно. Только опирается оно на неправильную лемму. Что же делать?

Я пробовал также рассуждения с множеством  $X_\varepsilon$  —  $\varepsilon$ -окрестностью  $X$ . Но эти рассуждения упираются в доказательство сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(X_{q^k} \setminus X)$$

для  $0 < q < 1$ , а эту сходимость доказать не удаётся.

Кажется, можно доказать проще. Пусть  $0 < \alpha < 1$ . Оценим меру подмножества  $X$ , на котором

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mu\{y \notin X : |y - x| < \varepsilon\}}{2\varepsilon} > \alpha.$$

Пусть

$$A = \left\{x \in X \mid \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mu\{y \notin X : |y - x| < \varepsilon\}}{2\varepsilon} > \alpha\right\}.$$

Выберем некоторое  $\varepsilon > 0$ . Пусть

$$X_\varepsilon = \bigcup_{x \in X} (x - \varepsilon, x + \varepsilon).$$

Построим покрытие  $A$  интервалами следующим образом. У каждой точки  $x \in A$  выберем окрестность  $(x - \delta, x + \delta)$  меры меньше  $\varepsilon$ , т.е.  $2\delta < \varepsilon$ , такую, что

$$\frac{\mu\{y \notin X : |y - x| < \delta\}}{2\delta} > \alpha.$$

Заметим, что  $A$  не обязано быть замкнутым, поэтому выбрать конечное подпокрытие мы не можем. Надо рассуждать тоньше. Мы зато можем выбрать счётное подпокрытие (за счёт существования счётной базы топологии), что и сделаем. Итак, пусть наше покрытие есть

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} (x - \delta_i, x + \delta_i).$$

Фиксируем  $s > 0$ . Выберем  $N$  так, чтобы

$$\bigcup_{i=1}^N (x_i - \delta_i, x_i + \delta_i)$$

покрывало всё множество  $A$ , за исключением, быть может, множества меры  $s$ . Из этих  $N$  интервалов  $(x_i - \delta_i, x_i + \delta_i)$ ,  $1 \leq i \leq N$  выкинем некоторые так, чтобы каждая точка была покрыта не более чем двумя интервалами, а покрываемое множество осталось без изменений (это можно сделать, т.к. как только некоторая точка покрыта тремя интервалами, один из этих интервалов содержится в объединении двух других, и его можно выкинуть, не меняя покрываемого множества). Новое полученное множество интервалов будем обозначать

$$\{(x'_i - \delta'_i, x'_i + \delta'_i), 1 \leq i \leq N'\}, N' \leq N.$$

Имеем

$$\mu(A) - s \leq \sum_{i=1}^{N'} 2\delta'_i,$$

$$\alpha(\mu(A) - s) \leq \alpha \sum_{i=1}^{N'} 2\delta'_i \leq \sum_{i=1}^{N'} \mu\{y \notin X : |y - x'_i| < \delta'_i\} \leq 2\mu(X_\varepsilon \setminus X).$$

В силу произвольности  $s$ , для замкнутого  $X$  в силу  $\bigcap_{\varepsilon>0} X_\varepsilon = X$  получаем

$$\alpha\mu(A) \leq 2\mu(X_\varepsilon \setminus X).$$

В силу произвольности выбора  $\varepsilon$

$$\mu(A) = 0.$$

А это и есть то, что нам нужно. Для замкнутых  $X$  доказали, а для всех остальных применяем регулярность меры.

134. Предположим, что

$$\sup_{A \in \mathfrak{A}} \mu A = +\infty.$$

Рассмотрим следующее свойство заряда  $\mu$ . У любого множества  $A \in \mathfrak{A}$ , для которого  $\sup_{B \subseteq A} \nu B = +\infty$ , для любого  $C > 0$  существует  $A_1 \subseteq A$  такое, что  $\nu A_1 > C$  и  $\sup_{B \subseteq A_1} \nu B = +\infty$ . Выполнено это свойство или нет? Если выполнено, то мы можем, пользуясь им, по индукции построить вложенную последовательность множеств

$$X = A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots, \nu A_{i+1} > \max(\nu A_i, 2^i), \sup_{B \subseteq A_i} \nu B = +\infty.$$

Но для такой последовательности множеств

$$\nu(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \nu A_1 - \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i \setminus A_{i+1}) = \lim_{i \rightarrow \infty} \nu A_i = +\infty,$$

что противоречит определению заряда. Значит, рассматриваемое свойство не выполнено. Существует  $A \in \mathfrak{A}$  и некоторое  $C > 0$ , такие, что

$$\sup_{B \subseteq A} \nu B = +\infty, \forall A_1 \subseteq A \ \nu A_1 > C \Rightarrow \sup_{B \subseteq A_1} \nu B < +\infty.$$

Но тогда мы можем выбрать бесконечную последовательность непересекающихся  $A_1, A_2, A_3, \dots$ , лежащих в  $A$ , такую, что  $\nu A_i > C$ . Действительно, если мы уже выбрали  $A_1, \dots, A_n$ , то можно выбрать и  $A_{n+1}$ , поскольку существует  $B \subseteq A$  сколь угодно большого заряда, но  $\nu(B \cap A_i)$  ограничены, то  $\nu(B \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n))$  может быть сколь угодно большим. А значит, может быть больше  $C$ . Для такого  $B$  мы берём  $A_{n+1} = B \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n)$ . Вот и доказали: если такая последовательность  $A_1, A_2, A_3, \dots$  есть, то  $\nu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$  может быть только бесконечным. Снова противоречие с определением заряда.

135. Задача пахнет леммой Бореля-Кантелли! Зададим на сигма-алгебре  $\mathfrak{A}$  функции

$$\nu_+(A) = \sup_{B \subseteq A} \nu(B), \nu_-(A) = - \inf_{B \subseteq A} \nu(B).$$

Нетрудно показать, что  $\nu_+, \nu_-$  — меры на  $\mathfrak{A}$ , причём конечные в силу предыдущей задачи. Выберем последовательность множеств  $A_n$  таким образом, что

$$\nu(A_n) > \sup_{B \subseteq X} \nu(B) - \frac{1}{2^n}.$$

Ясно, что

$$\nu_+(A_n) \geq \nu_+(X) - \frac{1}{2^n}, \nu_+(X \setminus A_n) \leq \frac{1}{2^n}, \nu_-(A_n) \leq \frac{1}{2^n}.$$

Тогда в силу леммы Бореля-Кантелли,

$$\nu_+(\varliminf A_n) = \nu_+(X) - \nu_+(\overline{\varliminf (X \setminus A_n)}) = \nu_+(X), \nu_-(\varliminf A_n) = 0.$$

Ну, отсюда и следует, что

$$\nu(\varliminf A_n) = \sup_{B \subseteq X} \nu(B).$$

Вот и доказали, что супремум достигается.

В решении из Кириллова-Гвишиани другая идея: если у нас есть множество положительного заряда, то мы можем удалять из него любые множества отрицательного заряда, и это не уменьшит его заряд. Значит, правильно организовав процедуру удаления, мы можем получить “чисто положительное” множество  $A$ , у которого все подмножества имеют неотрицательный заряд, а заряд самого  $A$  строго положителен. Ясно, что за такими множествами и производится охота. То есть можно взять “чисто положительное” множество максимального заряда и показать, что если задача не решена, то его можно чуть увеличить — за счёт описанной конструкции.