Вероятность — задачи

1 Kallenberg 2002 — Глава 4

1.
2.
3.

2 Kallenberg 2002 — Глава 5

1.
2.
3.

3 Kallenberg 2002 — Глава 6. Условное матожидание

Как доказать предложение 6.6 из Калленберга? В первую сторону: дано, что

$$P(H \mid \mathcal{F}, \mathcal{G}) = P(H \mid \mathcal{G}), H \in \mathcal{H}$$

Покажем, что

$$\mathcal{F} \amalg_{\mathcal{G}} \mathcal{H}.$$

Для этого надо показать, что при $F \in \mathcal{F}, H \in \mathcal{H}$

$$P^{\mathcal{G}}(F \cap H) = P^{\mathcal{G}} F \times P^{\mathcal{G}} H.$$

Иными словами,

$$\mathbb{E}(1_{F \cap H} \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(1_F \mid \mathcal{G}) \times \mathbb{E}(1_H \mid \mathcal{G}).$$

Имеем

$$\mathbb{E}(1_{F\cap H} \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(1_F 1_H \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(1_F 1_H \mid \mathcal{F}, \mathcal{G}) \mid \mathcal{G}) =$$
$$= \mathbb{E}(1_F \mathbb{E}(1_H \mid \mathcal{F}, \mathcal{G}) \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(1_F \mathbb{E}(1_H \mid \mathcal{G}) \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(1_H \mid \mathcal{G}) \times \mathbb{E}(1_F \mid \mathcal{G}).$$

А в другую сторону?

1.

2.

3.

4 Kallenberg 2002 — Глава 7

1.

2.

3.

5 Kallenberg 2002 — Глава 12

1. $\{\sigma = \tau\} \in F_\sigma \cap F_\tau$. Достаточно показать, что

$$\{\sigma < \tau\} \in F_\sigma \cap F_\tau.$$

Отсюда с учётом аналогичного влючения для $\{\tau < \sigma\}$ будет следовать, что

$$\{\sigma \neq \tau\} \in F_\sigma \cap F_\tau.$$

Итак, имеем

$$\{\sigma < \tau\} \cap \{\tau \le t\} = \bigcup_{0<q<t, q\in\mathbb{Q}} (\{\sigma < q\} \cap \{q < \tau \le t\}) \in F_t.$$

Это верно для любого t, и по определению F_τ получаем

$$\{\sigma < \tau\} \in F_\tau.$$

Далее,

$$\{\sigma < \tau\} \cap \{\sigma \le t\} = \{\sigma < \tau, \tau \le t\} \cup \{\sigma \le t, \tau > t\}.$$

Но оба последних события лежат в F_t. Дейтвительно,

$$\{\sigma < \tau, \tau \le t\} \in F_t$$

мы доказали выше, а

$$\{\sigma \le t, \tau > t\} = \{\sigma \le t\} \cap \{\tau > t\} \in F_t.$$

Итак,

$$\{\sigma < \tau\} \cap \{\sigma \le t\} \in F_t$$

для любого t, и по определению F_σ получаем $\{\sigma < \tau\} \in F_\sigma$.

Далее, почему $F_\sigma = F_\tau$ на $\{\sigma = \tau\}$? Пусть $A \subseteq \{\sigma = \tau\}, A \in F_\sigma$. Покажем, что $A \in F_\tau$. Из $A \in F_\sigma$ следует, что для любого t

$$A \cap \{\sigma \le t\} \in F_t.$$

Поскольку на множестве A $\sigma = \tau$, то для любого t

$$A \cap \{\tau \le t\} = A \cap \{\sigma \le t\} \in F_t.$$

По определению F_τ, $A \in F_\tau$. Вот и доказали всё.

Осталось объяснить, почему F_τ может отличаться от F_∞ на $\{\tau = \infty\}$. Это ясно. Если $\tau = \infty$ всегда, то по определению F_τ, в F_τ входят все множества из сигма-алгебры A, а не только из F_∞.

2. Стандртная задача.

3. Пример слабо опционального, но не опционального момента. Возьмём, как предлагает Калленберг. Берём бернуллиевскую случайную величину $\xi, P(\xi = 1) = P(\xi = -1) = \frac{1}{2}$, и положим

$$F_0 = \{\emptyset, \Omega\}, F_t = \sigma(\xi), t > 0.$$

Пусть

$$\tau = \begin{cases} 0, \xi = -1, \\ 1, \xi = 1. \end{cases}$$

Тогда для $t > 0$ имеем

$$\{\tau < t\} = \begin{cases} \{\xi = -1\}, t \le 1, \\ \Omega, t > 1. \end{cases}$$

В любом случае, $\{\tau < t\} \in F_t = \sigma(\xi), t > 0$. Поэтому τ слабо опциональный. Но $\{\tau \le 0\} = \{\tau = 0\} = \{\xi = -1\} \notin F_0$. Поэтому τ не опциональный.

4. Скучно решать это.

5. Задача про прогрессивные процессы. Прогрессивность — это измеримость относительно соответствующей сигма-алгебры. Итак, сначала покажем, что класс множеств $A \in \Omega \times \mathbb{R}_+$, таких, что процесс 1_A прогрессивен, образует сигма-алгебру. Да это вроде очевидно! Прогрессивность 1_A означает, что для любого t

$$A \cap (\Omega \times [0,t]) \in F_t \otimes \mathcal{B}[0,t].$$

   Ясно, что это свойство сохраняется счётным объединением. И для перехода к дополнению всё тоже очевидно. Итак, да, сигма-алгебра.

   Почему прогрессивность процесса равносильна его измеримости относительно этой сигма-алгебры? Допустим, процесс X прогрессивен. Покажем, что он измерим относительно этой сигма-алгебры. Нужно проверить, что для любого a множество $\{X > a\}$ лежит в прогрессивной сигма-алгебре. А оно там лежит, если для любого t

$$\{X > a\} \cap (\Omega \times [0,t]) \in F_t \otimes \mathcal{B}[0,t].$$

   А это так, если X прогрессивен. И в другую сторону аналогично. Короче, пусть Калленберг сам решает такие задачи! Одни проверки.

6.

6 Protter — Глава 2

1. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна за исключением одной точки, в которой у неё скачок. Показать, что $X_t = f(B_t)$ не семимартингал.

   Решение задачи опирается на то, что в окрестности момента достижения любого уровня броуновское движение бесконечно много раз проходит через этот уровень.

   Фиксируем $t > 0$ и покажем, что X^t — не тотальный семимартингал. Пусть a — точка скачка f. Пусть

$$\tau_a = \inf\{t > 0\colon B_t = a\}.$$

   Для $\epsilon > 0$ определим последовательность моментов остановки τ_n^ϵ следующим образом:

$$\tau_0^\epsilon = \inf\{t > 0\colon B_t = a - \epsilon\},$$

$$\tau^{\epsilon}_{2n+1} = \inf\{t > \tau^{\epsilon}_{2n} \colon B_t = a + \epsilon\},$$
$$\tau^{\epsilon}_{2n} = \inf\{t > \tau^{\epsilon}_{2n-1} \colon B_t = a - \epsilon\}.$$

Из свойств броуновского движения

$$\max\{n > 0 \colon \tau_n^{1/m} < t\} \xrightarrow[m\to\infty]{a.s.} \infty$$

на множестве $\{\tau_a < t\}$. Пусть $h_m \to \infty$ такая детерминированная последовательность, что

$$0 < h_m < \sqrt{m}$$

и

$$P(\max\{n > 0 \colon \tau_n^{1/m} < t\} > h_m) \geq \frac{1}{2} P\{\tau_a < t\}.$$

Определим случайные процессы H_m таким образом:

$$H_m(t) = \begin{cases} 0, t \leq \tau_0^{1/\sqrt[3]{h_m}}, \\ \frac{(-1)^n}{\sqrt{h_m}}, t \in (\tau_n^{1/\sqrt[3]{h_m}}, \tau_{n+1}^{1/\sqrt[3]{h_m}}], n < m, \\ 0, t > \tau_m^{1/\sqrt[3]{h_m}} \end{cases}.$$

Тогда

$$|I_{X^t}(H_m)| \geq \frac{1}{h_m^{5/6}} \left(m \wedge \max\{n > 0 \colon \tau_n^{1/m} < t\}\right) - \frac{1}{\sqrt{h_m}} |\sup_{s\in[0,t]} f(B_s) - \inf_{s\in[0,t]} f(B_s)|.$$

С вероятностью не меньше, чем $\frac{1}{2}P\{\tau_a < t\} = const > 0$ имеем

$$\max\{n > 0 \colon \tau_n^{1/m} < t\} > h_m,$$

$$|I_{X^t}(H_m)| > h_m^{1/6} - \frac{1}{\sqrt{h_m}} |\sup_{s\in[0,t]} f(B_s) - \inf_{s\in[0,t]} f(B_s)| \xrightarrow[m\to\infty]{a.s.} \infty.$$

Это противоречит сходимости по вероятности

$$I_{X^t}(H_m) \xrightarrow[m\to\infty]{P} 0.$$

Значит, X^t — не тотальный семимартингал, а X — не семимартингал.

2.

3.