

# Алгебра 3 2023 Кузнецов

## 1 Листок 1

1. Существует ли функтор из  $\text{Gr}$  в  $\text{Ab}$ , переводящий группу в её центр? Покажем, что нет такого функтора. Предположим, что это функтор  $\mathcal{F}$ . Рассмотрим группы  $G = S_2$  и  $H = S_n$  с таким  $n$ , что центр  $S_n$  тривиален (например,  $n = 5$ ). Рассмотрим гомоморфизмы  $g: G \rightarrow H$ , являющийся просто вложением, и  $h: H \rightarrow G$ , переводящий чётные перестановки в  $e$ , а нечётные в  $(12)$ . Тогда  $hg = id_G$ . Отсюда

$$\mathcal{F}(h)\mathcal{F}(g) = id_{\mathcal{F}(G)}.$$

Но  $\mathcal{F}(G)$  — это центр группы  $G$ , то есть в нашем случае вся  $G$ . А  $\mathcal{F}(g)$  действует из  $G$  в центр  $H$ , то есть обязана быть тривиальным гомоморфизмом (всё в  $e$ ). Но тогда

$$\mathcal{F}(h)\mathcal{F}(g)$$

тоже обязано всё переводить в  $e$ , а это не так ( $id_{\mathcal{F}(G)}$  тождественно, а не переводит всё в  $e$ ).