

## MỞ ĐẦU

Cũng như mọi kết cấu công trình, *thân tàu thủy* cần phải có đủ độ bền, tức đủ khả năng chịu được các tải trọng tác dụng lên nó trong thời gian khai thác mà không bị hư hỏng và không bị biến đổi hình dáng, kích thước một cách đáng kể.

Trọng lượng của công trình, đáp ứng mọi yêu cầu về độ bền và độ cứng, phải là bé nhất. Lời giải của bài toán trên phụ thuộc vào việc áp đặt một cách đúng đắn các yêu cầu đối với kết cấu cũng như việc thiết kế kết cấu một cách đúng đắn. Trọng lượng thừa của vỏ tàu, ngoài việc làm lãng phí vật liệu, tăng giá thành sản phẩm, còn làm giảm trọng tải, tức giảm khả năng sinh lợi của con tàu trong suốt quá trình khai thác của nó.

Khoa học, cung cấp cho người kỹ sư đóng tàu các phương pháp tính toán kết cấu vỏ tàu về độ bền và độ cứng, gọi là *cơ kết cấu tàu thủy*.

Cơ kết cấu tàu thủy giải đáp ba vấn đề chính sau đây:

- Ứng suất và biến dạng nào xuất hiện trong kết cấu thân tàu khi nó chịu tác dụng của một hệ lực ngoài cho trước – tức *vấn đề nội lực*;

- Ngoại lực nào có thể tác dụng lên thân tàu trong quá trình khai thác của nó – *vấn đề ngoại lực*;

- Ứng suất và chuyển vị nào có thể cho phép xuất hiện trên kết cấu thân tàu trong quá trình khai thác, mà không gây hư hại về độ bền và độ cứng của nó – *vấn đề đánh giá độ bền*.

Cơ kết cấu tàu thủy, theo nghĩa đầy đủ, bao gồm 2 phần :

1. Cơ kết cấu tàu thủy và lý thuyết đàn hồi, giành cho các bài toán tĩnh của vấn đề nội lực

2. Sức bền và chấn động thân tàu, giải quyết các bài toán về ứng suất (vấn đề nội lực), về tải trọng tác dụng lên thân tàu ( vấn đề ngoại lực ) về đánh giá độ bền và về việc tính toán kết cấu thân tàu dưới tác dụng của tải trọng thay đổi theo thời gian (chấn động thân tàu).

Trong môn học này, ta đề cập đến những vấn đề về nội lực, mà nội dung của nó được xác định bởi các yêu cầu xuất hiện khi tính toán độ bền thân tàu. Đối tượng khảo sát là các sơ đồ lý tưởng hoá các kết cấu trong thành phần thân tàu. Vấn đề về vận dụng thực tế các sơ đồ nói trên nằm trong nội dung môn học *sức bền thân tàu*.

Chương 1 của giáo trình này giành cho vấn đề uốn dầm và hệ thanh đơn giản. Về thực chất, đây là các nội dung phát triển của những vấn đề đã trình bày trong môn học sức bền vật liệu.

Chương 2, bài toán uốn dầm trên nền đàn hồi được giải quyết.

Chương 3 trình bày các phương pháp tính các dầm tàu thủy.

Chương 4 giải quyết bài toán uốn dầm ghép.

Một nội dung khá quan trọng đối với kỹ sư trong việc tính toán kết cấu là các định lý về năng lượng, được trình bày trong chương 5.

Chương cuối – chương 6 – đề cập đến bài toán uốn phức hợp các dầm và tấm bị uốn cong theo mặt trụ, cũng như các vấn đề về ổn định của các thanh và dàn phẳng.

## *CHƯƠNG I*

# **UỐN CÁC THANH THẲNG VÀ HỆ THANH ĐƠN GIẢN**

## **&1. CÁC QUAN HỆ CƠ BẢN CỦA LÝ THUYẾT UỐN DẦM**

Thanh là yếu tố kết cấu phổ biến nhất trong các kết cấu thành phần của thân tàu. Trong kết cấu thân tàu, thanh có thể xuất hiện dưới dạng liên kết với các tấm, vỏ ở boong, đáy, mạn và vách ... của tàu cũng như có thể tồn tại độc lập như các cột chống, thanh chống.

*Thanh* là tên gọi dùng để chỉ vật thể mà một trong ba kích thước ( trong không gian 3 chiều của hình học Euclid ) của nó lớn hơn nhiều so với hai kích thước còn lại. Về mặt hình học, thanh chính là khoảng không gian bị chiếm chỗ khi ta di chuyển, không xoay, một hình phẳng, sao cho trọng tâm của hình phẳng luôn nằm trên một đường nào đó cho trước, đồng thời, bản thân hình này luôn vuông góc với tiếp tuyến của đường nói trên tại mọi vị trí. Đường này gọi là *trục của thanh*, còn hình phẳng nói trên tại mỗi vị trí chính là *tiết diện ngang của thanh* tại vị trí đó. Nếu trục của thanh là thẳng, thanh được gọi là *thanh thẳng*. Còn nếu như tiết diện ngang của thanh không thay đổi hình dáng và kích thước, thanh được gọi là *thanh có tiết diện ngang không đổi*. Thanh thẳng có tiết diện ngang không đổi chính là *thanh lạng trụ*.

Thanh, làm việc chủ yếu là uốn dưới tác dụng của các tải trọng ngang, được gọi là *dầm*.

Kết cấu thân tàu chủ yếu là các tấm, vỏ và dầm các loại. Trong tài liệu bàn về “*Lý thuyết dàn hồi, lý thuyết tấm, vỏ*” những vấn đề về tính toán tấm, vỏ trong thân tàu đã được xem xét <sup>1</sup>. Trong chương này, chúng ta đề cập đến các dầm trong thành phần các kết cấu thân tàu.

Lý thuyết kỹ thuật uốn dầm, được biết đến từ môn học *sức bền vật liệu* và được ứng dụng rộng rãi trong thực tế tính toán các kết cấu công trình, dựa trên các giả thuyết cơ bản sau đây:

- 1- Thừa nhận giả thuyết tiết diện phẳng, theo đó, các tiết diện ngang của dầm, ban đầu vốn phẳng và vuông góc với trục của dầm, vẫn còn phẳng và vuông góc với tiếp tuyến của đường đàn hồi của dầm ngay cả sau khi bị uốn. Như vậy là biến dạng uốn của dầm được khảo sát độc lập với biến dạng cắt, là biến dạng được gây nên do các ứng suất tiếp làm vênh các tiết diện ngang phẳng.
- 2- Bỏ qua ứng suất pháp trên các diện tích song song với trục dầm, vì chúng quá nhỏ. Nói cách khác, các lớp vật chất dọc dầm không tác dụng lên nhau.
- 3- Chỉ giới hạn khảo sát các dầm cứng, là dầm có độ võng nhỏ so với chiều cao tiết diện ngang của nó và có góc xoay tiết diện ngang là nhỏ khi so với đơn vị.

Cũng giả thiết thêm rằng trạng thái ứng suất trên tiết diện ngang của dầm chỉ phụ thuộc vào chỉ phụ thuộc vào hợp lực của các ứng lực tác dụng trên tiết diện ngang mà

---

<sup>1</sup> “Lý thuyết dàn hồi, lý thuyết tấm, vỏ”, Đại học GTVT Tp Hồ Chí Minh 2000.

không phụ thuộc gì vào cách thức tác dụng của tải trọng ngoài lên dầm. Điều này cũng có nghĩa rằng, ta giả thiết là tải trọng ngoài phân bố phù hợp với sự phân bố của ứng suất pháp và ứng suất tiếp trên tiết diện ngang của dầm.

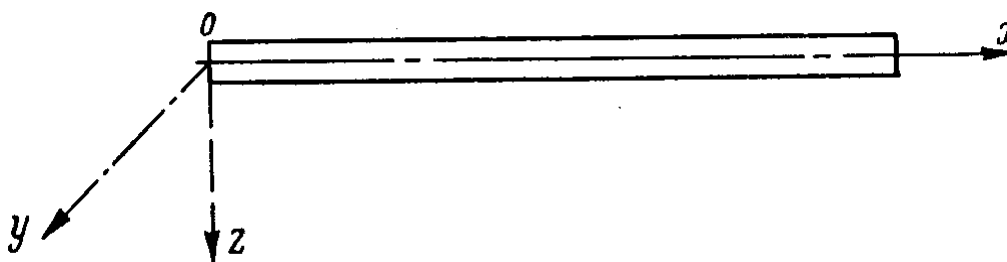
Các giả thuyết trên đây không cho phép sử dụng lý thuyết kỹ thuật uốn dầm vào việc tính các dầm có độ võng lớn cũng như xác định ứng suất tập trung tại từng dầm có tiết diện ngang thay đổi đột ngột hoặc tại khu vực đặt các lực tập trung.

Lý thuyết dầm áp dụng cho các dầm thỏa mãn những giả thuyết vừa nêu mang tên gọi là lý thuyết kỹ thuật về uốn dầm hay còn gọi là thuyết dầm Bernoulli – Euler (Bernoulli-Euler beam theory)<sup>2</sup>.

Trong thực tế còn tồn tại những thuyết về dầm khác thuyết vừa nêu. Một trong những thuyết ra đời muộn hơn là thuyết của Timoshenko, theo đó giả thuyết thứ hai không cần được giữ lại khi xem xét dầm<sup>3</sup>.

Dầm được nghiên cứu ở đây là dầm thẳng, làm từ vật liệu đồng chất.

Trước tiên, ta ấn định hệ trục tọa độ gắn vào dầm theo qui định sau: trục  $Ox$  trùng với trục dầm còn các trục  $Oy$  và  $Oz$  sẽ là các trục quán tính chính xuyên tâm (gọi tắt là trục quán tính tâm chính) của tiết diện ngang. Trường hợp trục dầm không thẳng, trục  $Ox$  quy ước đi qua trọng tâm các tiết diện ngang hai đầu dầm.  $Oxyz$  làm thành một tam diện thuận (H1.1).



H1.1

Ứng lực trên tiết diện ngang của dầm được đặc trưng bởi vector chính và moment chính của tất cả các lực đặt vào phần bên trái, tác dụng lên phần dầm bên phải của dầm thông qua tiết diện khảo sát.

Hình chiếu của vector tơ chính của các ứng lực trên tiết diện ngang của dầm lên trục  $Ox$  sẽ được gọi là tải trọng dọc trục, còn hình chiếu lên mặt phẳng vuông góc với trục  $Ox$  – là lực cắt.

Hình chiếu moment chính của các ứng lực lên trục  $Oy$  được gọi là moment uốn và ký hiệu bởi  $M_y$ .

<sup>2</sup> Cách gọi để ghi công lao hai nhà toán học người Thụy sĩ, Jean Bernoulli (1667 – 1748), thầy của nhà khoa học thứ hai Leonhard Euler (1707 – 1783). Theo đánh giá của nhiều nhà nghiên cứu, Euler thuộc một trong các nhà toán học, cơ học lớn nhất thế kỷ XVIII.

<sup>3</sup> Stephen P. Timoshenko, (1878 – 1972), nhà cơ học gốc Nga, làm việc chủ yếu tại USA, người có ảnh hưởng rất lớn đến phát triển bộ môn cơ học kết cấu, sức bền vật liệu của thế kỷ XX.

Ta giới hạn xem xét uốn dầm trong mặt phẳng xOz. Điều này sẽ xảy ra nếu như tải trọng tác dụng nằm trong mặt phẳng, song song với mặt phẳng xOz, và hợp lực của tải trọng này, tại mỗi tiết diện, đi qua điểm, được gọi là *tâm uốn* của tiết diện đó (xem &4).

Tất cả các phần trình bày sau này tuân thủ các qui ước sau đây về dấu:

- 1- độ võng và tải trọng phân bố (lực rải) được coi là dương, nếu như chúng trùng với chiều dương của trục Oz.
- 2- góc xoay tiết diện ngang là dương, nếu như xoay theo chiều kim đồng hồ.
- 3- moment uốn là dương trong trường hợp nó gây ra tác dụng làm cong dầm về phía âm của trục Oz, tức giãn thớ âm và nén thớ dương dọc theo trục này.

4- lực cắt được coi là dương khi nó có tác dụng xoay phần bên phải của dầm ngược chiều kim đồng hồ, khi nhìn từ phía dương của trục Oy.

Chiều dương của tải trọng ngang, moment uốn và lực cắt được biểu thị trên hình H.

1.2.

Ta ký hiệu chuyển vị bé của dầm khi uốn trong mặt phẳng xOz bởi  $w$ . Khi đó, có thể xác định độ giãn dài tương đối  $\varepsilon_x$  của thớ dầm cách trục trung hoà của dầm một khoảng  $z$  nhờ các giả thuyết cơ bản trên đây và các quan hệ hình học đơn giản.

Trục trung hoà của dầm là tên gọi quí tích các điểm mà tại đó, biến dạng đường khi uốn bằng zero.

Trên cơ sở giả thuyết thứ 3 suy ra rằng độ

cong của đường đàn hồi do

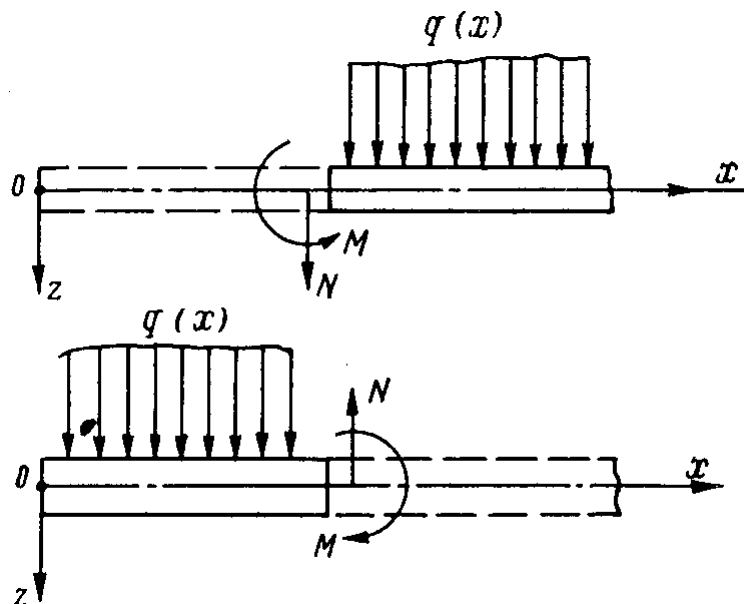
uốn dầm là bé và khi đó, dựa trên giả thuyết tiết diện phẳng ta có:

$$\varepsilon_x = -z \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{dx}$$

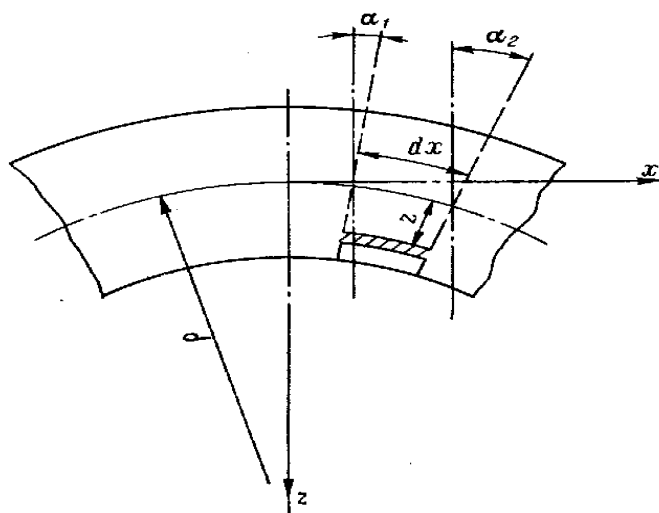
trong đó  $\alpha_1, \alpha_2$  - là các góc xoay tiết diện ngang tại  $x$

và  $x+dx$  ( H.1.3).

Vì



H.1.2



$$\alpha_1 = \frac{dw}{dx} \quad \& \quad \alpha_2 = \frac{dw}{dx} + \frac{d^2w}{dx^2} dx; \text{ nên ta có: } \varepsilon_x = -z \frac{d^2w}{dx^2} \quad (1.1)$$

### H.1.3

Công thức (1.1), đã có từ sức bền vật liệu. Để có được công thức này, có thể xuất phát từ biểu thức xác định độ giãn dài tương đối  $\varepsilon_x = -\frac{z}{\rho}$ , với  $\rho$  - bán kính cong đường đàn

hồi. Mặt khác bán kính này được tính bằng công thức  $\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2w}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}$ , còn đại lượng

$\left(\frac{dw}{dx}\right)^2$  áp dụng cho dầm cứng sẽ vô cùng nhỏ, do vậy có quyền viết  $\frac{1}{\rho} \approx \frac{d^2w}{dx^2}$  và từ đó thu

được công thức cần tìm  $\varepsilon_x = -\frac{z \cdot d^2w}{dx^2}$ . Ứng suất pháp tuyến, theo định luật Hooke, được xác định nhờ công thức:

$$\sigma_x = -Ez \frac{d^2w}{dx^2} \quad (1.2)$$

Công thức (1.2) cho thấy, với dầm được làm từ vật liệu đồng chất, ứng suất pháp khi uốn thay đổi tuyến tính dọc theo chiều cao của dầm

Nếu chúng ta xét dầm trong trường hợp không chịu tác động lực dọc trục, thì tổng ứng suất của toàn mặt cắt ngang chỉ bằng 0:

$$\iint_A \sigma_x dydz = -Ez \frac{d^2w}{dx^2} \iint_A z dydz = 0; \quad (1.3)$$

trong đó A – diện tích mặt cắt ngang của dầm.

Từ biểu thức cuối có thể thấy rằng moment tĩnh mặt cắt, so với trục trung hoà bằng 0, và như vậy có thể phát biểu rằng trục trung hoà đi qua trọng tâm mặt cắt ngang của dầm.

Moment của nội lực xuất hiện trong dầm, lấy đối với trục trung hoà sẽ phải bằng moment ngoại lực M tác động lên phần dầm tương ứng, và do đó, có thể viết:

$$M_y = - \iint_A \sigma_x z dydz = E \frac{d^2w}{dx^2} \iint_A z^2 dydz = M \quad (1.4)$$

Moment nội lực lấy đối với trục Oz tính theo cách tương tự:

$$M_z = \iint_A \sigma_x y dydz = -E \frac{d^2w}{dx^2} \iint_A zy dydz = 0$$

Moment này bằng 0 vì gốc toạ độ O là trọng tâm của mặt cắt ngang của dầm.

Từ biểu thức (1.4) ta có thể viết công thức cơ bản uốn dầm như sau:

$$EI \frac{d^2 w}{dx^2} = M \quad (1.5)$$

trong đó  $I = \iint_A z^2 dydz$  - moment quán tính mặt cắt ngang.

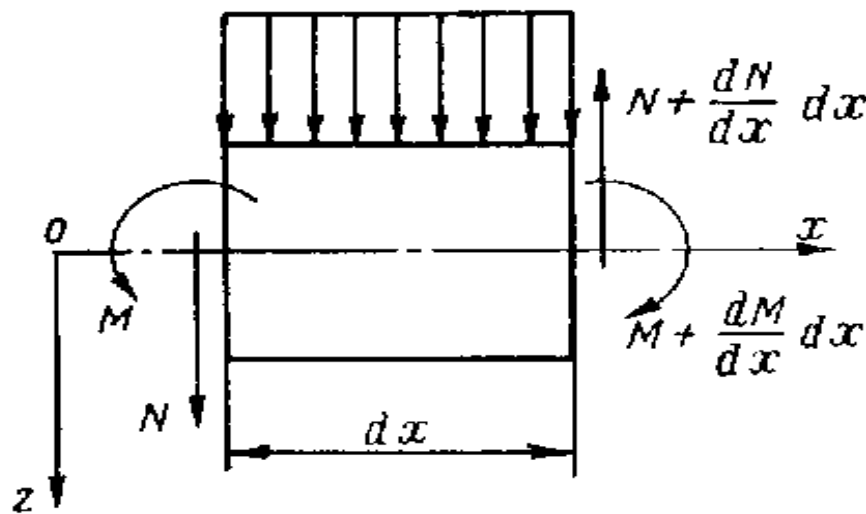
Từ (1.2), (1.4) và (1.5) có thể viết biểu thức xác định ứng suất tại mặt cắt đang xem xét của dầm chịu uốn:

$$\sigma_x = - \frac{M(x).z}{I(x)} \quad (1.6)$$

Công thức (1.6) áp dụng cho uốn dầm đóng vai trò quan trọng trong sức bền vật liệu. Trong chương trình học của chúng ta công thức này còn được nhắc lại nhiều lần.

Giữa moment uốn, lực cắt và cường độ tải trọng ngang tồn tại một mối quan hệ quan trọng và là nội dung của định lý Juravsy-Shvedler nổi tiếng.

Để thiết lập mối quan hệ này, ta hãy khảo sát một đoạn dầm vô cùng ngắn, gọi là phân tố dầm, với chiều dài  $dx$ , chịu tác dụng của tải trọng ngang có cường độ  $q$ , của các moment uốn và lực cắt, thay cho tác dụng của các phần còn lại của dầm lên phân tố khảo sát, tại các tiết diện hai đầu phân tố (H.1.4).



H.1.4

Nếu như tại tiết diện bên trái của phân tố, tiết diện  $x$ , có các lực cắt  $N$  và moment uốn  $M$  thì tại tiết diện bên phải, tiết diện  $x+dx$ , các yếu tố nội lực tương ứng sẽ là

$$N + \frac{dN}{dx} dx \quad \& \quad M + \frac{dM}{dx} dx.$$

Điều kiện cân bằng của phân tố khảo sát có thể được viết dưới dạng:

$$N(x) - [N(x) + \frac{dN}{dx} dx] + q(x)dx = 0.$$

$$M(x) - [M(x) + \frac{dM}{dx} dx] + N(x)dx + q \frac{dx^2}{2} = 0;$$

Cho qua giới hạn,  $dx \rightarrow 0$ , các biểu thức trên trở thành:

$$\frac{dN}{dx} = q(x); \quad (1.7)$$

$$\frac{dM}{dx} = N(x) \quad (1.8)$$

Từ (1.7) và (1.8) có thể viết:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = q \quad (1.9)$$

Công thức (1.7) đến (1.9) xác lập nội dung của định lý Juravsky- Shvedler, theo đó lực cắt  $N$  là đạo hàm bậc một còn lực cường độ tải trọng ngang phân bố,  $q(x)$ , là đạo hàm bậc hai của moment nội lực uốn dầm  $M$ .

Bằng việc tích phân các biểu thức (1.7) và (1.8) từ tiết diện nút bên trái có tọa độ  $x_0$  đến tiết diện  $x$ , ta thu được biểu thức tổng quát của lực cắt và moment uốn dưới dạng:

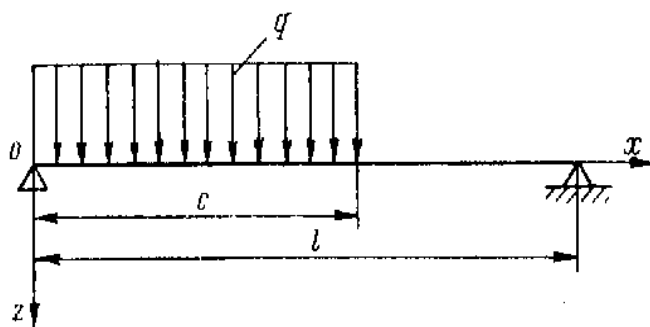
$$N(x) = \int_{x_0}^x q(x)dx + N_0 \quad (1.10)$$

$$M(x) = \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x q(x)dx dx + N_0(x - x_0) + M_0 \quad (1.11)$$

trong đó,  $N_0$ ,  $M_0$  tương ứng là moment uốn và lực cắt tại tiết diện đầu nút bên trái,  $x = x_0$ .

Các công thức (1.10) và (1.11) có thể dùng để tính cách dầm tĩnh định một nhịp, là dầm mà các phản lực gối đỡ tác dụng lên nó có thể xác định được chỉ trên cơ sở các phương trình cân bằng tĩnh học.

Để làm ví dụ, ta hãy xác định moment uốn và lực cắt trên dầm một nhịp chịu tác dụng của tải trọng ngang phân bố rải đều, với cường độ  $q$ , trên một phần chiều dài dầm (H. 1.5)



H.1.5

Trong trường hợp đang khảo sát, để cho tiện lợi, việc xác định moment uốn và lực cắt được tiến hành riêng biệt trên hai đoạn dầm.

Trên đoạn thứ 1  $0 \leq x \leq c$

$$N_0 = -qc \left( 1 - \frac{c}{2l} \right); \quad M_0 = 0; \quad q(x) = q = \text{const.}$$

theo công thức (1.10) và (1.11) với  $x_0 = 0$  ta được

$$N_x = qx - qc \left( 1 - \frac{c}{2l} \right);$$

$$M_x = \frac{qx^2}{2} - qc \left( 1 - \frac{c}{2l} \right)x.$$

Trên đoạn thứ 2 :  $c \leq x \leq l$

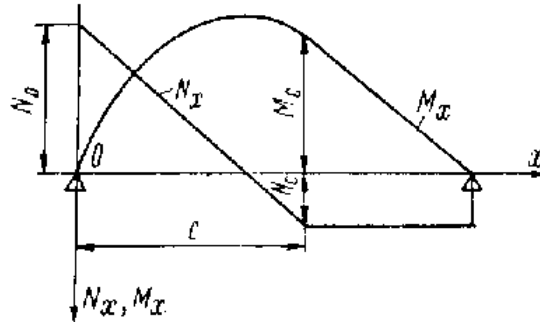
$$N_c = \frac{qc^2}{2l}; \quad M_c = \frac{qc^2}{2} \left( \frac{c}{l} - 1 \right); \quad q(x) = 0.$$

theo các công thức (1.10) và (1.11), tại  $x = c$  ta có

$$N_x = N_c = \frac{qc^2}{2l}; \quad M_x = N_c(x - c) + M_c = -\frac{qc^2}{2} \left( 1 - \frac{x}{l} \right).$$

H.1.6

Biểu đồ moment uốn và lực cắt cho trên H.1.6



## &2- PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN UỐN DẦM VÀ TÍCH PHÂN CỦA NÓ

Có thể viết lại phương trình (1.4) dưới dạng:

$$M = EIw'' \quad (2.1)$$

trong đó, dấu "''" biểu thị đạo hàm bậc hai theo  $x$ .

Phương trình (2.1) vi phân uốn dầm cơ bản và cho phép tìm được đường đàn hồi của dầm tĩnh định. Cần lưu ý một điều là theo qui ước dấu đã nêu, moment uốn dương biểu thị dầm bị uốn võng lên trên (với trục Oz hướng xuống dưới), tương ứng với giá trị  $w''$  dương, vì trong trường hợp này, khi  $x$  tăng,  $w'$  tăng theo.

Chú ý đến các công thức (1.8) và (1.9), ta thu được:

$$(EIw'')' = N; \quad (2.2)$$

$$(EIw'')'' = q. \quad (2.3)$$

Đối với dầm lẳng trụ, moment quán tính tiết diện ngang không thay đổi theo chiều dài, ta có:

$$EIw''' = N; \quad (2.4)$$

$$EIw^{IV} = q. \quad (2.5)$$



Phương trình (2.3) và (2.5) là phương trình vi phân uốn dầm cơ bản cần tìm. Khác với phương trình (2.1), các phương trình này cho phép tìm đường đàn hồi cho cả dầm siêu tĩnh, và đây là điều rất được quan tâm.

Tích phân phương trình vi phân (2.5), một cách tuần tự, 4 lần (với giả thiết là hoành độ tiết diện ngang đầu mút bên trái là  $x = x_0$ ), ta thu được:

$$\begin{aligned} N &= EIw''' = \int_{x_0}^x q dx + N_0 \\ M &= EIw'' = \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x q dx dx + N_0(x - x_0) + M_0; \\ w' &= \frac{1}{EI} \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x q dx dx dx + \frac{N_0}{2EI}(x - x_0)^2 + \frac{M_0}{EI}(x - x_0) + \theta_0; \\ w &= \frac{1}{EI} \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x q dx dx dx dx + \frac{N_0}{6EI}(x - x_0)^3 + \frac{M_0}{2EI}(x - x_0)^2 + \theta_0(x - x_0) + f_0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Trong đó,  $N_0$ ,  $M_0$ ,  $\theta_0$ ,  $f_0$  - tương ứng, là lực cắt, moment uốn, góc xoay và độ dịch chuyển trọng tâm tiết diện ngang đầu mút bên trái, và là các hằng số tự do của các phép tích phân vừa thực hiện.

Để xác định 4 hằng số tích phân, có tên thường gọi là *các tham số đầu*,  $N_0$ ,  $M_0$ ,  $\theta_0$ ,  $f_0$ , ta luôn có thể thiết lập 4 điều kiện (4 mối quan hệ ràng buộc – 2 cho mỗi đầu dầm), gọi là *các điều kiện biên*.

*Tựa bản lề cứng* và *ngàm cứng* là hai hình thức liên kết đầu dầm đơn giản nhất. Trong hình thức tựa bản lề cứng, độ võng tại tiết diện đế tựa bằng 0 và moment uốn tại tiết diện này cũng bằng 0, tức:

$$\begin{aligned} w &= 0; \\ EIw'' &= 0 \text{ hay } w'' = 0. \end{aligned}$$

Với đầu mút ngàm cứng, độ võng và góc xoay tại tiết diện ngàm bằng 0, tức

$$\begin{aligned} w &= 0; \\ w' &= 0. \end{aligned}$$

Khi đầu dầm hoàn toàn tự do, điều kiện biên tương ứng thể hiện lực cắt và moment uốn tại tiết diện ngang tương ứng cùng bằng 0, tức

$$\begin{aligned} EIw'' &= 0 \text{ hay } w'' = 0; \\ EIw''' &= 0 \text{ hay } w''' = 0. \end{aligned}$$

Trường hợp liên kết đầu dầm là *đế đỡ đàn hồi* hoặc *ngàm đàn hồi*, điều kiện biên phức tạp hơn chút ít.

Đế đỡ đàn hồi là đế mà độ lún  $f$  của đế tỉ lệ thuận với phản lực  $R$  của đế.

$$F = AR$$

Hệ số  $A$  được gọi là *hệ số mềm đế đỡ*.

Công thức trên tuân theo qui ước là: phản lực dương hướng ngược chiều dương của trục Oz (tức từ dưới lên) còn độ lún thì ngược lại. Vì tại đầu dầm tựa đàn hồi, độ võng của dầm chính bằng độ lún của đế (tức  $w = f = AR$ ) còn phản lực đế tựa, về trị số, bằng lực cắt, nên ta có thể xác lập điều kiện biên trong trường hợp này như sau:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Đối với mút dầm bên trái, tức tại } x = l: \quad w = -AEIw''' \\ \text{Đối với đầu dầm bên phải, } x = l: \quad w = AEIw''' \end{array} \right\} \quad (2.9)$$

Ở đây, cần nhắc lại là, theo qui ước về dấu đã nêu, tại *đế bên trái*, độ võng dương trùng hướng với lực cắt âm! Và cũng dễ thấy rằng đế bản lề cứng chỉ là một trường hợp riêng của đế tựa đàn hồi, khi  $A = 0$ .

Trường hợp đầu mút dầm chịu *liên kết ngàm đàn hồi*, là liên kết mà moment của phản lực liên kết tỉ lệ thuận với góc xoay của tiết diện liên kết, với lưu ý rằng moment tác dụng lên ngàm, về trị số, bằng moment uốn trên tiết diện ngang dầm, ta có thể viết điều kiện liên kết dưới dạng sau:

$$w' = UM.$$

Hệ số  $U$  có tên là *hệ số mềm ngàm*.

Đổ chiếu với các qui ước dấu, ta có thể viết điều kiện biên trong trường hợp ngàm đàn hồi như sau:

$$w' = \pm U EIw'' \quad (2.10)$$

Dấu dương ứng với đầu mút bên trái, dấu âm – đầu mút bên phải.

Trong khuôn khổ của tài liệu này, ta chỉ đề cập đến trường hợp đế đàn hồi tuyến tính và ngàm đàn hồi tuyến tính, là khi mà các hệ số mềm lún và hệ số mềm xoay là các hằng số.

Việc xem xét phương trình vi phân (2.5) và tất cả các điều kiện biên của nó cho phép ta có một kết luận quan trọng: *phương trình vi phân uốn dầm và các điều kiện biên là tuyến tính đối với hàm độ võng và các đạo hàm của nó cũng như đối với tải trọng ngang tác dụng lên dầm*.

Từ kết luận trên, có ngay một hệ quả ứng dụng là, nếu như dầm chịu tác dụng của đồng thời nhiều tải trọng ngang, thì các yếu tố về uốn của dầm này có thể tính bằng tổng uốn của chính dầm nói trên, dưới tác dụng của từng tải trọng thành phần. Qui tắc này có tên là qui tắc *cộng tác dụng* và được sử dụng hết sức rộng rãi trong thực tế tính toán.

Để làm ví dụ minh họa cho việc sử dụng biểu thức (2.6), ta hãy xác định đường đàn hồi của dầm chịu tác dụng của các moment tập trung  $M_0$  và  $M_1$  tại các đầu mút cùng với tải trọng ngang phân bố đều.

Ta ký hiệu độ dịch chuyển của các tiết diện đầu mút dầm là  $f_0$  – cho mút trái và  $f_1$  – cho mút phải, cường độ tải trọng phân bố là  $q$ . Khi đó, từ quan hệ (2.6), với  $q = \text{const}$  và  $x_a = 0$  ta thu được:

$$w = f_0 + \theta_0 x + \frac{M_0 x^2}{2EI} + \frac{N_0 x^3}{6EI} + \frac{qx^4}{24EI}. \quad (2.11)$$

Ta viết được điều kiện biên của dầm này như sau:

$$\begin{aligned} \text{tại } x = 0 \quad 1/ \quad w &= f_0 \quad 2/ \quad EIw'' = M_0 \\ \text{tại } x = l \quad 3/ \quad w &= f_1 \quad 4/ \quad EIw'' = M_1' \end{aligned}$$

Trong phương trình (2.11), chỉ có các hằng số  $\theta_0$  và  $N_0$  là chưa biết.

Sử dụng điều kiện biên thứ 3, ta có:

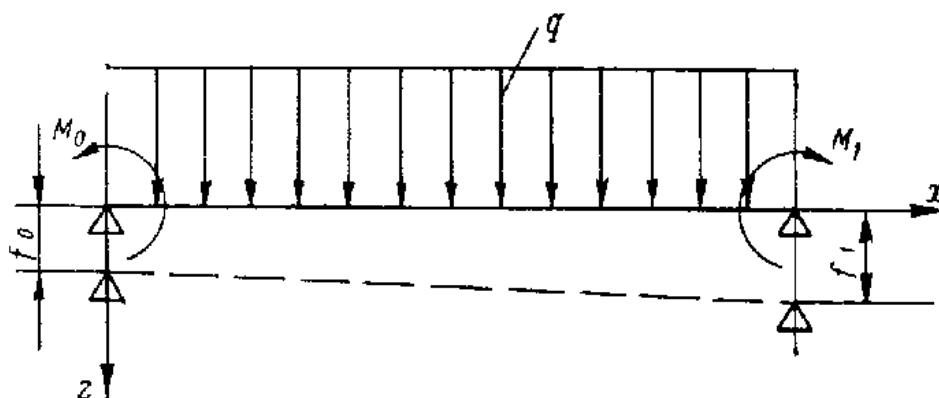
$$f_1 = f_0 + \theta_0 l + \frac{M_0 l^2}{2EI} + \frac{N_0 l^3}{6EI} + \frac{ql^4}{24EI} \quad (2.12)$$

Sử dụng điều kiện biên thứ 4 ta thu được:

$$M_1 = M_0 + N_0 l + \frac{ql^2}{2} \quad (2.13)$$

Từ (2.13), ta có:

$$N_0 = \frac{M_1 - M_0}{l} - \frac{ql}{2} \quad (2.14)$$



H.1.7

Thực ra, quan hệ này cũng có thể tìm được từ điều kiện cân bằng dầm.

Từ phương trình (2.12), trên cơ sở (2.14), ta tìm được:

$$\theta_0 = \frac{f_1 - f_0}{l} - \frac{M_0 l}{3EI} - \frac{M_1 l}{6EI} + \frac{ql^3}{24EI} \quad (2.15)$$

Thay các quan hệ (2.14) và (2.15) vào (2.11), ta thu được:

$$\begin{aligned} w = & f_0 \left(1 - \frac{x}{l}\right) + f_1 \frac{x}{l} - \frac{M_0 l^2}{6EI} \frac{x}{l} \left(2 - 3\frac{x}{l} + \frac{x^2}{l^2}\right) \\ & - \frac{M_1 l^2}{6EI} \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right) + \frac{ql^4}{24EI} \frac{x}{l} \left(1 - 2\frac{x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3}\right). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Bằng cách lấy đạo hàm hàm  $w$ , xác định theo (2.6), ta có được biểu thức góc xoay tiết diện ngang của dầm:

$$w' = \frac{f_1 - f_0}{l} - \frac{M_0 l}{6EI} \left( 2 - 6 \frac{x}{l} + 3 \frac{x^2}{l^2} \right) + \frac{ql^3}{24EI} \left( 1 - 6 \frac{x}{l} + 4 \frac{x^3}{l^3} \right) \quad (2.18)$$

Thay  $x = l$  vào (2.18) ta thu được công thức xác định góc xoay tại tiết diện đế bên phải dầm, và dễ dàng thấy rằng, kết quả này trùng với công thức (2.15) đã có trên đây.

Các công thức (2.16) và (2.17) thu bên trên đều thể hiện rất rõ nguyên lý cộng tác dụng, theo đó, các yếu tố uốn tổng cộng, do tác dụng đồng thời của các moment đầu dầm và tải trọng ngang, bằng tổng các yếu tố uốn tương ứng, do các moment này và tải trọng ngang gây ra khi chúng tác dụng riêng rẽ lên dầm này.

Tích phân tổng quát (2.6) của phương trình vi phân uốn dầm có thể áp dụng trực tiếp cho dầm một nhịp, trong trường hợp tải trọng ngang tác dụng lên dầm là *một hàm* biểu thị được bởi *một biểu thức giải tích* trên suốt chiều dài dầm.

Trong trường hợp, khi mà tải trọng ngang chỉ có thể biểu thị bởi các biểu thức giải tích khác nhau trên các đoạn khác nhau của dầm, thì đường đàn hồi dầm có thể tìm được nhờ một phương pháp rất tiện lợi, đó là *phương pháp tham số đầu*.

Về thực chất phương pháp tham số đầu chỉ là một hệ quả của công thức (2.6). Thực vậy, từ (2.6) ta có nhận xét là đường đàn hồi trên một đoạn dầm, mà trên đó, cường độ tải trọng ngang  $q$  có thể biểu thị bằng một biểu thức giải tích, hoàn toàn được xác định nhờ 4 tham số, đó là các giá trị độ võng, góc xoay, moment uốn, lực cắt tại tiết diện ngang đầu mút bên trái của đoạn dầm nói trên,  $w_a, w'_a, M_a, N_a$  ( $a$  là ký hiệu tiết diện đầu mút đoạn đang xét).

Nếu như trên đoạn dầm  $0 \leq x \leq a_1$ , biểu thức tải trọng ngang là  $q(x) = q_1(x)$ ; trên đoạn kế tiếp theo,  $a_1 \leq x \leq a_2$ , biểu thức tải trọng ngang là  $q(x) = q_2(x)$ , trên cơ sở của (2.5) có thể viết phương trình vi phân uốn dầm cho các đoạn dầm tương ứng như sau:

$$EI w_1^{IV} = q_1(x); \quad EI w_2^{IV} = q_2(x); \dots \quad (2.19)$$

Tích phân của phương trình đầu của (2.19) có thể viết dưới dạng (2.6), với  $x_0 = 0$ , còn phương trình thứ 2, về nguyên tắc cũng có thể làm như thế. Tuy nhiên khi đó, có một điều bất tiện là cần phải xác định tổng cộng là  $4n$  hằng số cho dầm có  $n$  đoạn. Vấn đề sẽ được giải quyết một cách khác hơn chút ít để có được kết quả tiện lợi hơn, bằng cách sử dụng không chỉ các điều kiện biên như trên đây, mà còn cả các điều kiện tiếp giáp giữa các đoạn dầm.

Sẽ rất tiện lợi, nếu như ta biểu diễn đường đàn hồi, trên toàn bộ chiều dài dầm, chứ không phải chỉ trên mỗi đoạn, dưới dạng sau đây:

$$w = w_1 + \mathbb{I}_{x>a_1} \delta_1 w + \mathbb{I}_{x>a_2} \delta_2 w + \dots \quad (2.20)$$

trong đó, biểu thức phía sau 2 dấu sổ đứng sẽ được tính đến nếu như điều kiện dưới chân dấu hiệu này được thỏa mãn, tức khi  $x > a_1$  hoặc/và  $x > a_2 \dots$  và do đó, tất nhiên là ta có thể viết:

$$w_2 = w_1 + \delta_1 w; \quad w_3 = w_1 + \delta_1 w + \delta_2 w \dots$$

và như vậy, các đại lượng bổ sung  $\delta_1 w, \delta_2 w \dots$  có thể xác định được trên cơ sở của (2.19) nhờ các phương trình vi phân sau:

$$\left. \begin{aligned} EI(\delta_1 w)^{IV} &= q_2(x) - q_1(x) = \delta_1 q(x); \\ EI(\delta_2 w)^{IV} &= q_3(x) - q_2(x) = \delta_2 q(x); \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

Cần nhắc lại rằng, trên mỗi đoạn, tải trọng ngoài được biểu thị bằng một biểu thức giải tích, xác định từ đầu đến cuối đoạn.

Biểu thức tổng quát cho  $\delta_1 w$  có thể viết dưới dạng (2.6) với  $x_a = a_1$ ,  $q = q_1 - q_2$  còn  $N_a, M_a, \theta_a, f_a$  mang ý nghĩa là bước nhảy (sự thay đổi) của lực cắt, của moment uốn, của góc xoay và của độ võng tại tiết diện tiếp giáp  $x = a_1$  và.v.v.

Ví dụ: Nếu như, trên đoạn  $0 \leq x \leq a_1$ , tác dụng một lực rải đều  $q(x)$ , tại tiết diện  $x = a_2$  tác dụng một lực tập trung  $P$ , còn tại tiết diện  $x = a_3$  tác dụng moment tập trung  $M$  thì ta có thể viết như sau:  $q(x) = q$ ;  $q_2(x) = q_3(x) = q_4(x) = 0$ . Vì thế cho nên,  $\delta_1 q = -q$ ;  $\delta_2 q = \delta_3 q = 0$ . Ngoài ra, tại các điểm tiếp giáp còn có các điều kiện sau:  $N_{a1} = 0$ ;  $M_{a1} = 0$ ;  $\theta_{a1} = 0$ ;  $f_{a1} = 0$ ;  $N_{a2} = P$ ;  $M_{a2} = 0$ ;  $\theta_{a2} = 0$ ;  $f_{a2} = 0$ ;  $N_{a3} = 0$ ;  $M_{a3} = M$ ;  $\theta_{a3} = 0$ ;  $f_{a3} = 0$ .

Và ta có thể viết được biểu thức xác định đường đàn hồi của cả dầm, sau khi tích phân (2.21) với các điều kiện đầu và điều kiện chuyển tiếp trên đây, dưới dạng sau:

$$w = \frac{qx^4}{24EI} + \frac{N_0 x^3}{6EI} + \frac{M_0 x^2}{2EI} + \theta_0 x + f_0 + \left\|_{x \geq a_1} - \frac{q(x-a_1)^4}{24EI} + \right\|_{x \geq a_2} \frac{P(x-a_2)^3}{6EI} + \left\|_{x \geq a_3} \frac{M(x-a_3)^2}{2EI} \quad (2.22)$$

trong đó,  $N_0, M_0, \theta_0, f_0$  cần được xác định từ điều kiện biên đầu dầm bên trái.

Trong các tính toán thực tế, để xác định đường đàn hồi của *dầm một nhịp*, không cần phải dùng đến phương pháp trên đây, vì trong trường hợp này, người ta đã lập sẵn *các bảng uốn dầm*, cho gần như tất cả các trường hợp tải trọng thường gặp. Việc sử dụng các bảng nói trên cho phép có được các kết quả nhanh hơn nhiều so với việc áp dụng công thức (2.22). Một trong các giá trị áp dụng quan trọng của các *bảng uốn dầm một nhịp tĩnh định* là nó cho phép khử siêu tĩnh của các dầm siêu tĩnh, một nhịp cũng như nhiều nhịp, thông qua việc áp dụng qui tắc cộng tác dụng mà ta sẽ nghiên cứu trong mục tiếp theo dưới đây.

### &3- ÁP DỤNG QUY TẮC CỘNG TÁC DỤNG TRONG TÍNH TOÁN UỐN DẦM

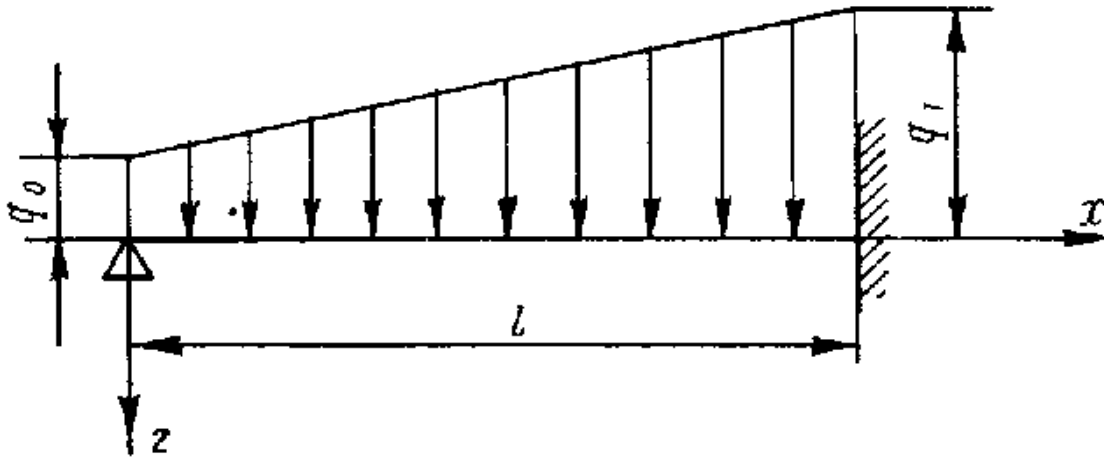
Để xác định các yếu tố uốn dầm, chịu tác dụng của một tải trọng phức tạp hoặc của một số các tải trọng đơn giản cũng như khi cần thiết phải tính toán dầm siêu tĩnh một nhịp, qui tắc cộng tác dụng tỏ ra rất hữu hiệu.

Các tải trọng phức tạp cần được tách ra thành các thành phần đơn giản sao cho đối với chúng, có thể sử dụng các bảng uốn dầm cho trước trong các sổ tay. Sau đó, dùng các bảng uốn dầm, xác định tất cả các yếu tố uốn cần thiết đối với từng tải trọng thành phần, rồi cộng các kết quả tương ứng lại để có được các kết quả cần tìm.

Khi cần phải xác định các yếu tố uốn dầm một nhịp, siêu tĩnh, tác dụng của các liên kết “thừa” được thay bằng một *phản lực chưa biết*. Tiếp đến, sử dụng bảng uốn dầm, xác định độ võng và /hoặc góc xoay của tiết diện dầm tại chỗ phát sinh phản lực chưa biết (có

thể là lực hoặc moment) , do các tải trọng ngoài đã biết và do cả phản lực “thừa” chưa biết gây ra. Tổng các chuyển vị tương ứng, do tất cả các ngoại lực cho trước và các phản lực chưa biết, cần phải thoả mãn điều kiện liên kết và điều này phép ta thiết lập được các phương trình xác định chính các phản lực chưa biết. Từ các phương trình nói trên, xác định các phản lực chưa biết, và sau đó, các yếu tố uốn của dầm khảo sát tìm được dưới dạng tổng của các yếu tố uốn tương ứng , do các tải trọng ngoài và do cả các phản lực vừa tìm được gây ra.

**Ví dụ 1.** Xác định đường đàn hồi của dầm, chịu tải trọng phân bố tuyến tính, với cường độ  $q_0$  tại đầu mút bên trái và cường độ  $q_1$  tại đầu mút bên phải. Đầu mút trái dầm tựa tự do trong khi đầu mút phải là ngàm cứng(H1.8).



H.1.8

Tải trọng cho trước có thể coi là tổng của hai tải trọng:

- Tải trọng rải đều với cường độ  $q_0$ .
- Tải trọng rải hình tam giác với cường độ lớn nhất  $q = q_1 - q_0$  tại mút bên phải dầm.

Thay liên kết ngàm cứng bằng đế tựa tự do cùng với phản lực “thừa” tương ứng là moment ngàm  $m$  . Tất cả các tải trọng trên đây đều là đơn giản và có trong bảng uốn dầm một nhịp tĩnh định. Điều kiện liên kết tại đầu mút dầm bên phải có nghĩa là góc xoay của tiết diện này phải bằng 0.

Sử dụng các kết quả cho từ bảng uốn dầm ta có phương trình xác định moment ngàm  $m$  từ điều kiện liên kết tại đầu mút phải của dầm:

$$-\frac{qx^3}{45EI} - \frac{q_0 l^3}{24EI} + \frac{ml}{3EI} = 0$$

Từ đó,

$$m = \frac{q_0 l^2}{8} + \frac{ql^2}{15} \quad (3.1)$$

Đường đàn hồi của dầm khảo sát được xác định bằng tổng do ba thành phần tải trọng gây ra

$$w = \frac{q_0 l^4}{24EI} \frac{x}{l} \left( 1 - 2 \frac{x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3} \right) + \frac{ql^4}{360EI} \left( 7 \frac{x}{l} - 10 \frac{x^3}{l^3} + 3 \frac{x^5}{l^5} \right) - \frac{ml^2}{6EI} \left( \frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3} \right).$$

Thay  $m$  từ (3.1) vào biểu thức trên, ta được:

$$w = \frac{q_0 l^4}{48EI} \left( \frac{x}{l} - 3 \frac{x^3}{l^3} + 2 \frac{x^4}{l^4} \right) + \frac{ql^4}{120EI} \left( \frac{x}{l} - 2 \frac{x^3}{l^3} + \frac{x^5}{l^5} \right) \quad (3.2)$$

**Ví dụ 2.** Tìm đường đàn hồi của dầm chịu tải trọng rải đều với cường độ  $q$ , liên kết theo kiểu ngàm đàn hồi trên đế cứng với hệ số mềm ngàm  $\mathcal{U}$ .

Từ điều kiện đối xứng, suy ra moment tại các đế là bằng nhau. Đối chiếu góc xoay tại, chẳng hạn, tiết diện đế phải của dầm, trên cơ sở phương trình (2.15), ta có

$$\mathcal{U}M = -\frac{Ml}{3EI} - \frac{Ml}{6EI} + \frac{ql^3}{24EI}$$

Từ đó, có

$$M = \frac{ql^2}{12 \left( 1 + \frac{2\mathcal{U}EI}{l} \right)}. \quad (3.3)$$

Trường hợp đầu dầm ngàm cứng,  $\mathcal{U} = 0$ , và  $M_{ng} = \frac{ql^2}{12}$ .

Nếu gọi tỉ số giữa moment ngàm đàn hồi và moment ngàm cứng tương ứng là hệ số ngàm hoặc hệ số moment, và ký hiệu bằng chữ  $x$  ta có:

$$\chi = \frac{M}{M_{ng}} = \frac{1}{1 + \frac{2\mathcal{U}EI}{l}} \quad (3.4)$$

Thay momen đầu dầm trong momentt thức (2.16)  $M_o = M_1 = M_{ng}\chi = \frac{ql^2}{12}\chi$ , từ công thức này ta có được công thức tổng quát hơn, sau một vài biến đổi cần thiết:

$$w = \frac{ql^4}{24EI} \frac{x}{l} \left[ 1 - 2 \frac{x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3} - \chi \left( 1 - \frac{x}{l} \right) \right]. \quad (3.5)$$

Trường hợp ngàm cứng,  $x = 1$ , tải trọng ngang rải đều, ta có:

$$w_{ng} = \frac{ql^4}{24EI} \frac{x^2}{l^2} \left( 1 - 2 \frac{x}{l} + \frac{x^2}{l^2} \right) \quad (3.6)$$

Thay cho (3.35), có thể biểu diễn đường đàn hồi của dầm ngàm đàn hồi dưới dạng

$$w = w_{td}(1 - \chi) + w_{ng} \quad (3.37)$$

trong đó,  $w_{td}$  – là đường đàn hồi của dầm tựa tự do hai đầu, chịu tải rải đều, được xác định với  $f_0 = f_1 = M_0 = 0$ , theo công thức (2.16)

$$w_{td} = \frac{ql^4}{24EI} \frac{x}{l} \left( 1 - 2 \frac{x^2}{l^2} - \frac{x^3}{l^3} \right), \quad (3.8)$$

trong đó,  $w_{ng}$  – là moment ngàm cứng, xác định theo CT (3.6).

#### &4- XÁC ĐỊNH ỨNG SUẤT TIẾP TRONG UỐN DẦM.

Giả thuyết tiết diện phẳng, làm cơ sở cho lý thuyết uốn dầm kỹ thuật, cho rằng, sau khi dầm bị biến dạng uốn, tiết diện ngang của nó vẫn còn phẳng và vuông góc với trục dầm.

Kết hợp với giả thuyết thứ 2, rằng giữa các lớp vật chất dọc trục dầm không có tương tác với nhau, dẫn đến kết luận là, sau khi dầm bị uốn, các phần tử dọc và ngang trục dầm vẫn bảo toàn góc vuông giữa chúng như trước khi bị uốn. Nói cách khác, biến dạng cắt, trên toàn tiết diện, bằng 0.

Điều vừa nêu khiến cho không thể xác định ứng suất cắt, xuất hiện khi uốn dầm, dựa vào định luật Hooke, như trước đây đã làm khi xác định ứng suất pháp.

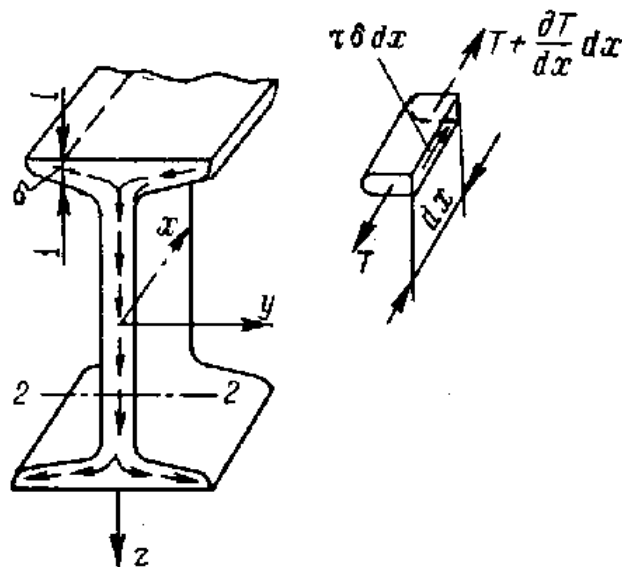
Mặt khác, dễ thấy rằng, sự tồn tại của ứng suất tiếp là hiển nhiên, vì nó chính là yếu tố tương đương tĩnh học với lực cắt trên tiết diện, cũng như các ứng suất pháp tương đương tĩnh học, trên toàn tiết diện, với moment uốn trên tiết diện.

Ta giả định rằng, khi uốn tất cả các tiết diện ngang, tạo thành từ các giải chữ nhật hoặc gần như chữ nhật, ứng suất tiếp trên mỗi giải này phân bố đều theo chiều dày và luôn song song với cạnh của hình bao tiết diện, không phụ thuộc gì vào phương tác dụng của lực cắt trên tiết diện.

Ta khảo sát một tiết diện hở, thành mỏng (H.1.9).

Để xác định ứng suất tiếp, ta tách từ thanh ra một phần tử nhờ mặt cắt 1-1 và hai tiết diện ngang song song, vô cùng gần nhau, và xác định điều kiện cân bằng tĩnh của phần tử được tách ra này.

Trên tiết diện ngang của phần tử khảo sát có các ứng suất pháp tuyến tác dụng. Ứng suất này là có trị số biến đổi cùn với sự biến đổi của moment uốn theo chiều dài dầm. Còn trên tiết diện dọc, có ứng suất tiếp. *Ứng suất tiếp được qui ước là dương khi nó tác dụng trên tiết diện dọc có pháp tuyến ngoài trùng với chiều của một trục tọa độ nào đó, còn bản thân ứng suất này hướng theo chiều dương của một trong hai trục còn lại.*



H.1.9



Nếu phân tố được tách ra có pháp tuyến ngoài trùng với hướng dương của các trục tọa độ thì phương trình cân bằng của nó theo trục Ox có thể viết dưới dạng:

$$T + \frac{dT}{dx}dx - T + \tau \delta dx = 0, \quad (4.1)$$

trong đó,  $T = \int_F \sigma_x df$  - là ứng lực dọc tác dụng lên phân tố;

$\delta$  - chiều dày thành tiết diện tại phân tố đang xét.

Tính đến (1.6), ta có

$$T = - \frac{MS_y}{I_y},$$

trong đó,  $S_y = \int_F z df$  - là moment tĩnh của phần tiết diện của phân tố, lấy đối với trục Oy.

Thay biểu thức của  $T$  vào (4.1) với giả thiết là  $\frac{d}{dx} \frac{S_y}{I_y} = 0$  (tức tiết diện của dầm khảo sát không biến đổi theo chiều dài), còn  $\frac{dM}{dx} = N_x$ , ta thu được

$$\tau = \frac{N_x S_y}{I_y \delta} \quad (4.2)$$

trong đó,  $N_x$  - là lực cắt tác dụng trên tiết diện khảo sát.

Vì moment tĩnh của tiết diện phân tố là âm nên với lực cắt dương, ứng suất tiếp tính được trong công thức (4.2) sẽ là âm, (theo qui ước dấu đã nêu từ đầu môn học), và điều này phù hợp với qui ước dấu ứng suất tiếp nêu ra trên đây: trên tiết diện dọc có pháp tuyến ngoài theo hướng một trục tọa độ, ứng suất tiếp dương khi hướng theo chiều dương của một trong hai trục tọa độ còn lại.

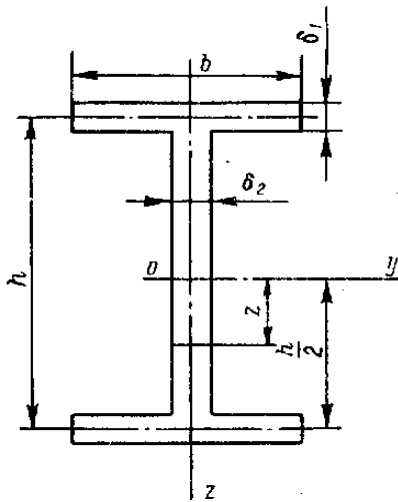
Với tiết diện dọc 2-2, cách làm tương tự cũng cho kết quả như trên.

Công thức (4.2) xác định ứng suất tiếp trên tiết diện dọc của thanh. Trên cơ sở của nguyên lý “*tương thích ứng suất tiếp*” đã biết, có thể kết luận rằng, trên tiết diện ngang của dầm tồn tại ứng suất tiếp, ứng suất này cũng được xác định bằng chính công thức (4.2).

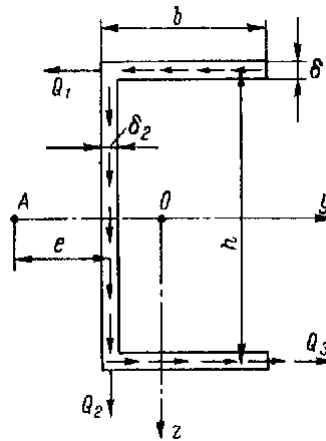
Như vậy là trên tiết diện ngang của thanh cũng sẽ chịu tác dụng của ứng suất tiếp và chiều của ứng suất này, ứng với lực cắt  $N_x$  dương, được biểu thị trên hình vẽ H.1.9 bởi các mũi tên

Ta hãy xem xét hợp lực tất cả ứng suất tiếp trên tiết diện ngang với trục Ox và moment của các ứng lực này. Để xác định hợp lực này, cần lấy tổng chỉ của ứng lực tiếp trên thành đứng, xác định theo công thức (4.2).

Đối với tiết diện ngang cho ở H.1.10, bỏ qua chiều dày của thành tiết diện khi so với chiều cao và chiều rộng tiết diện, việc xác định hợp lực các ứng lực tiếp tuyến trên thành đứng, trên cơ sở công thức (4.2), cho ta



H1.10



H1.11

$$R_z = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau \delta_2 dz = \frac{N_x}{I_y} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left[ b \delta_1 \frac{h}{2} + \left( \frac{h}{2} - z \right) \delta_2 \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{h}{2} + z \right) \right] dz.$$

Sau khi thực hiện tích phân trên, ta thu được:

$$R_z = \frac{N_x}{I_y} \left[ \frac{bh^2}{2} \delta_1 + \frac{h^3 \delta_2}{12} \right] = N_x \quad (4.3)$$

[vì biểu thức trong dấu ngoặc vuông chính là moment quán tính tiết diện ngang đối với trục trung hoà].

Như vậy là, hợp lực các ứng suất tiếp trên bản thành của tiết diện ngang thanh thành mỏng, có bản cánh nằm ngang, *tương đương tĩnh học* với lực cắt trên tiết diện.

Khi uốn thanh có tiết diện ngang không đối xứng, chẳng hạn như trên hình H1.11, tổng moment các ứng lực tiếp đối với điểm O không bằng 0. Vì thế cho nên, nếu như mặt phẳng tác dụng của tải trọng ngoài trùng với trục xOz, thì sự uốn dầm luôn kèm theo xoắn dầm.

Trên tiết diện ngang dầm tồn tại một điểm, sao cho moment các ứng lực tiếp đối với nó bằng 0. Điểm đó gọi là *tâm uốn* của tiết diện ngang. Để uốn không kèm theo xoắn, mặt phẳng tác dụng của lực ngoài phải song song với mặt toạ độ xOz và đi qua quỹ tích tâm uốn của các tiết diện ngang của dầm. Để xác định vị trí tâm uốn, cần viết điều kiện bằng 0 của moment ứng lực tiếp trên tiết diện ngang đối với điểm chưa biết.

Trường hợp tiết diện ngang đối xứng qua trục nằm ngang, phép tính trên là đơn giản nhất. Tâm uốn sẽ nằm trên trục đối xứng này và cách thành đứng một đoạn  $e$ , xác định theo điều kiện

$$Q_{2e} = (Q_1 + Q_3) \left( \frac{h}{2} \right), \quad (4.4)$$

trong đó,

$Q_2 = N_x$  – là hợp lực của ứng lực pháp tuyến trên thành của tiết diện ngang;

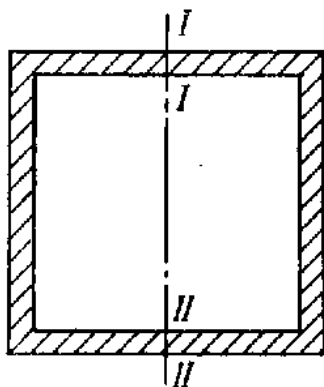
$Q_1$  và  $Q_3$  – là hợp lực ứng lực pháp tuyến trên dải nằm của tiết diện ngang, xác định theo công thức (4.2)

$$Q_1 = Q_3 = \frac{N_x}{I} \int_0^b (b-y) \frac{h}{2} \delta_1 dy = \frac{N_x}{I} \frac{b^2 h \delta_1}{4}.$$

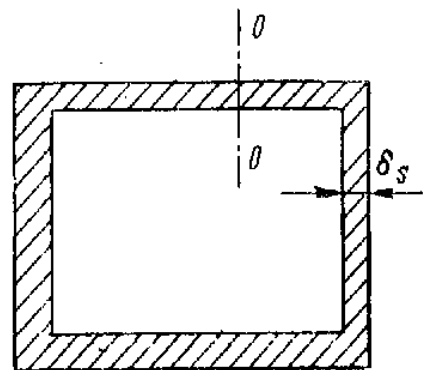
Thay  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $Q_3$  phương trình (4.4), ta tìm được

$$e = \frac{b^2 h^2 \delta_1}{4I}.$$

Như vậy là tâm uốn nằm về phía lưng của tiết diện hình chữ – tại điểm A.



H.1.13

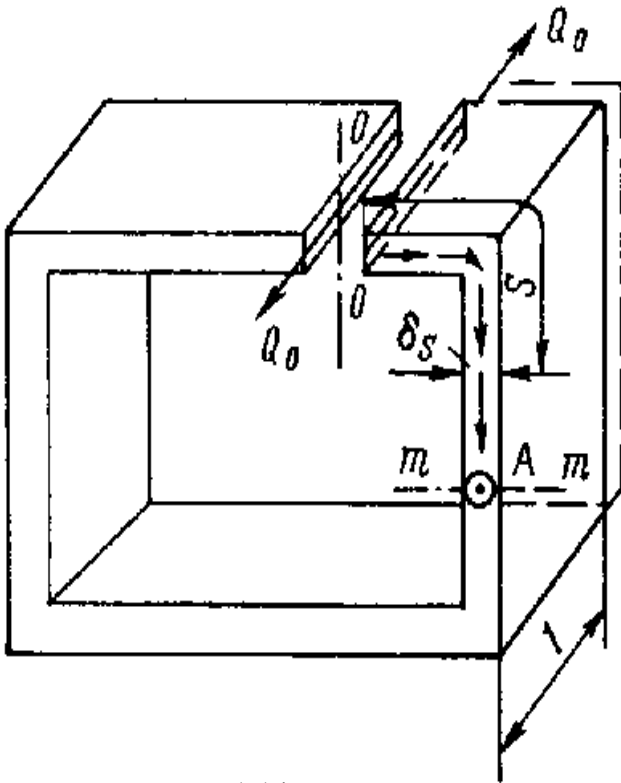


H.1.12

Bây giờ ta tiến hành khảo sát việc xác định ứng suất tiếp trên tiết diện thanh thành mỏng tiết diện kín. Có thể gặp nhiều loại tiết diện thanh thành mỏng dạng kín khác nhau. Chẳng hạn như trong trường hợp tiết diện ngang đối xứng qua mặt phẳng tác dụng của tải trọng ngang (H1.12), ứng suất tiếp tuyến tại mặt cắt dọc  $I-I$  và  $II-II$ , trùng với mặt phẳng đối xứng, không tồn tại. Theo qui tắc tương thích ứng suất tiếp, có thể suy ra rằng, cả trên tiết diện ngang, ứng suất tiếp tại mặt đối xứng cũng bằng 0. Như vậy là, tiết diện thanh thành mỏng đối xứng có thể coi là ghép của 2 tiết nửa tiết diện hở, độc lập, giống hệt nhau, chỉ có điều khác biệt duy nhất là việc uốn các tiết diện biệt lập này không kèm theo xoắn. Việc xác định ứng suất tiếp trên các tiết diện ngang kín loại này tiến hành giống như với tiết diện ngang hở, theo công thức (4.12).

Trong trường hợp uốn tiết diện ngang đơn, kín, không đối xứng, như trên hình H1.13, việc tính ứng suất tiếp trên diện ngang được tiến hành bằng cách đưa vào một mặt cắt dọc tại một điểm bất kỳ nào đó trên chu tuyến, chẳng hạn tại điểm O-O (H1.13) và đặt vào mặt cắt cặp ứng lực chưa biết  $Q_0$ , hướng ngược chiều nhau (H1.14). Đại lượng lực chưa biết này được xác định từ điều kiện chuyển vị dọc tương đối của 2 điểm trên tiết diện ngang, tiếp giáp với mặt cắt dọc, phải bằng 0. Chuyển vị này thể hiện biến dạng cắt gây ra từ ứng lực

tiếp tuyến  $Q_0$  tác dụng trên mép cắt và ứng lực cắt  $\tau_s \delta$  xuất hiện do uốn, tác động trên tiết diện hở, do bị cắt dọc, và được xác định nhờ công thức (4.2).



H1.14

Điều kiện loại trừ chuyển dịch tương đối, theo chiều dọc, giữa hai mép của mặt cắt gọi là *điều kiện liên tục của biến dạng*. Biến dạng dọc, theo phương vuông góc với tiết diện ngang xảy ra là do biến dạng trượt và biến dạng đường do uốn. Vì biến dạng đường do uốn tuân thủ giả thuyết tiết diện phẳng nên không gây ra chuyển dịch tương đối theo chiều dọc giữa hai mép mặt cắt dọc, và do đó, chuyển dịch tương đối này *chỉ có thể do biến dạng cắt gây ra*.

Xét phân tố dầm có chiều dài đơn vị như trên hình H1.14. Giả thiết là chiều dày thành không đổi và ứng suất tiếp phân bố đều theo chiều dày thành, ta có thể tính được chuyển dịch tương đối,  $u$ , của điểm A nào đó trên chu tuyến so với điểm gốc O, do ứng

lực cắt gây

Ứng lực tiếp tuyến, tác dụng trên mặt cắt dọc bất kỳ, được xác định theo công thức:  $Q_s = Q_0 + \tau_s \delta_s$ , (4.5)

Trong đó,  $\tau_s$  – ứng suất tiếp do uốn, tính theo công thức (4.2), trên chu tuyến hở do bị cắt;

$\delta_s$  – chiều dày thành tiết diện tại điểm khảo sát.

Chuyển vị dọc của điểm A đối với mép cắt sẽ bằng:

$$u = \frac{1}{G} \int_0^s \frac{Q_s}{\delta_s} ds, \quad (4.6)$$

trong đó,  $G$  – module trượt (còn gọi là module cắt).

Đại lượng  $\frac{Q_s}{\delta_s G} = \gamma$  là biến dạng trượt,  $\gamma ds$  – là chuyển dịch tương đối dọc theo trục Ox, do cắt.

Khi điểm A di chuyển hết vòng kín,  $u$  phải bằng 0, do điều kiện liên tục của biến dạng.

Trên cơ sở công thức (4.6), điều kiện liên tục của biến dạng này được thể hiện như sau:

$$\oint \frac{Q_s}{\delta_s} ds = 0 \quad (4.7)$$

trong đó, tích phân lấy trên khắp chu tuyến.

Thay (4.5) vào biểu thức (4.7), tìm được

$$Q_0 = - \frac{\oint \tau_s ds}{\oint \frac{ds}{\delta_s}}. \quad (4.8)$$

Trong trường hợp tiết diện thành mỏng-kín-phức hợp, khi bên trong đường bao tiết diện chứa không phải một mà là một số miền rỗng, như trường hợp tiết diện ngang tàu có một số vách dọc, tiết diện ngang ụ nổi . v.v ., cần tiến hành với nhiều mặt cắt dọc bổ sung để biến tiết diện ngang khảo sát thành hở hoàn toàn. Tại mỗi mặt cắt dọc nói trên, đặt một cặp ứng lực tiếp tuyến siêu tĩnh, đồng thời, để xác định các lực này, có thể viết điều kiện liên tục biến dạng tại mỗi một mặt cắt bổ sung.

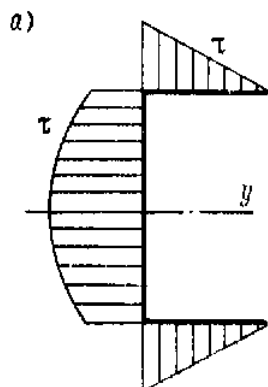
## 5- XÁC ĐỊNH ĐỘ VÔNG DẦM DO CẮT

Từ các mục trên, ta đã thấy là, ứng suất tiếp tuyến thay đổi theo chiều cao và cả theo chiều rộng dầm. Đặc điểm của sự biến đổi ứng suất tiếp theo chiều cao của dầm, có và không có bản cánh, được biểu thị trên hình H.15 a và b. Sự biến đổi ứng suất tiếp dọc theo chiều cao của dầm làm cho thiết diện ngang dầm bị *vênh*, vì góc do cắt các vị trí dọc theo tiết diện ngang được xác định theo quan hệ

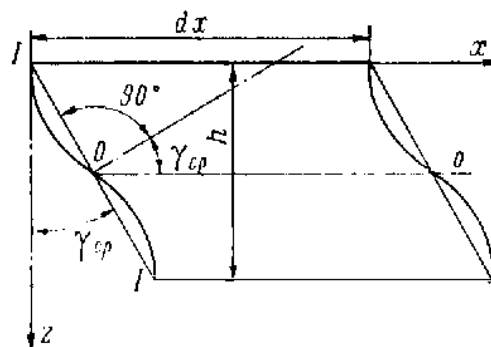
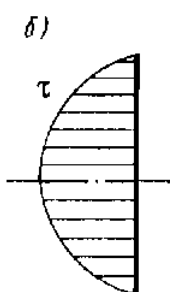
$$\gamma = \frac{\tau_z}{G}, \quad (5.1)$$

trong đó,  $G$  – module cắt.

Từ H1.15, a và b ta thấy là, sự thay đổi, về góc, do cắt, giữa các thớ dọc và các thớ thẳng đứng của dầm đạt trị số lớn nhất tại trục trung hoà và nhỏ nhất tại các mép của tiết diện ngang, theo chiều cao. Ở các dầm không có bản cánh, biến dạng cắt tại các điểm mép này bằng 0.



H.1.15



H.1.16

Đặc trưng của sự vênh tiết diện ngang dầm được biểu diễn trên hình H1.16. Biến dạng cắt làm cho trục dầm  $O-O$  xoay một góc trung bình  $\gamma_{tb}$ , so với mặt phẳng  $I-I$ , đi qua các điểm mút của tiết diện. Góc trung bình này có thể xác định theo công thức

$$\gamma_{tb} = \frac{1}{h} \int_0^h \frac{\tau_z}{G} dz,$$

từ đó, trên cơ sở của công thức (4.3), cho trường hợp dầm không có bản cánh, ta có:

$$\gamma_{tb} = \frac{N}{Gh\delta}$$

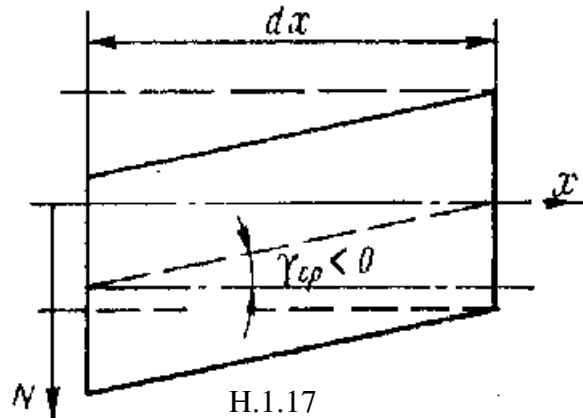
Vì  $h\delta = \omega$  là diện tích tiết diện ngang thành dầm, ta có:

$$\gamma_{tb} = \frac{\tau_{tb}}{G} \quad (5.2)$$

trong đó,  $\tau_{tb} = \frac{N}{\omega}$  - ứng suất cắt trung bình trên thành dầm.

Về sau, ta chỉ đề cập đến góc (biến dạng) cắt trung bình này, là góc đặc trưng cho chuyển vị xoay bổ sung của tiếp tuyến đường đàn hồi. Ta ký hiệu độ võng bổ sung do cắt là  $w_2$ . Khi đó, để ý đến một điều là, khi bị cắt, tiết diện  $I-I$  không xoay, mà vẫn còn nằm trong mặt phẳng vuông góc với đường trục dầm, mà chính tiếp tuyến của đường đàn hồi xoay bổ sung vì có độ võng bổ sung do cắt, và ta có thể viết:

$$\frac{dw_2}{dx} = \gamma_{tb}$$



Dưới tác dụng của lực cắt dương, theo qui ước dấu đã nêu từ đầu môn học, góc xoay do cắt sẽ âm. Vì thế, ta có công thức sau:

$$\gamma_{tb} = w'_2 = -\frac{N}{G\omega} \quad (5.3)$$

Chọn gốc tọa độ là mút trái của dầm  $x_a = 0$  và viết lại biểu thức đường đàn hồi của dầm do uốn dưới dạng

trong đó, 
$$\eta(x) = \frac{1}{EI} \int_0^x \int_0^x \int_0^x q(x) dx dx dx. \quad (5.5)$$

Vì  $N = EIw_1'''(x)$ , trên cơ sở (5.4), có thể viết lại biểu thức (5.3) dưới dạng

$$w'_2 = -\frac{1}{G\omega} [EI\eta'''(x) + N_0],$$

Từ đó, sau khi thực hiện phép tích phân, ta được:

$$w_2 = -\frac{1}{G\theta} [EI\eta''(x) + N_0x] + a \quad (5.6)$$

Hằng số  $a$  trong biểu thức trên, xác định chuyển vị tịnh tiến của dầm như một vật rắn và có thể chọn tùy ý vì chuyển vị tổng cộng của dầm phụ thuộc vào đại lượng  $f_0 + a$ , là đại lượng được xác định từ điều kiện biên.

Moment uốn được xác định trên cơ sở biểu thức (2.6)

$$M(x) = EIw_1''(x) = EI\eta''(x) + N_0x + M_0$$

So sánh biểu thức nhận được với (5.6) và nhận  $a = \frac{M_0}{G\theta}$ , có thể viết lại (5.6) dưới dạng

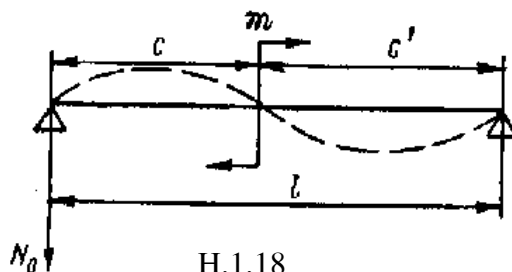
$$w_2 = -\frac{M(x)}{G\theta} \quad (5.7)$$

Độ võng tổng cộng của dầm được xác định theo biểu thức sau

$$w = w_1 + w_2 = \eta(x) + \frac{N_0x^3}{6EI} + \frac{M_0x^2}{2EI} + \theta_0x + f_0 - \frac{M(x)}{G\theta}. \quad (5.8)$$

Đại lượng  $w'$  xác định góc quay của đường đàn hồi, còn các yếu tố uốn khác như góc xoay tiết diện ngang, moment uốn và lực cắt- xác định qua các biểu thức của  $w_1'$ ,  $EIw_1''$  và  $EIw_1'''$ .

Để làm ví dụ, ta hãy xét dầm tựa tự do trên hai đế cứng (H1.18).



H.1.18

Đối với dầm như trên, ta có

$$M_0 = f_0 = 0; \quad M(l) = w(l) = 0.$$

Hai đẳng thức cuối cho ta khả năng xác định hai hằng số chưa biết là  $N_0$  và  $\theta_0$ , nhờ hai phương trình

$$\begin{aligned} \eta(l) + \frac{N_0l^3}{6EI} + \theta_0l &= 0; \\ EI\eta''(l) + N_0l &= 0. \end{aligned}$$

Các phương trình này giống hệt như khi không tính đến ảnh hưởng cắt.

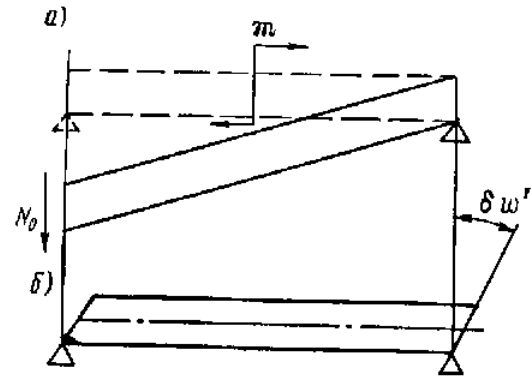
Từ đó suy ra rằng, góc xoay tại các tiết diện đế của dầm tựa tự do trên hai đế cứng, dưới tác dụng của tải trọng ngang trên nhịp là không phụ thuộc gì vào cắt. Độ võng do cắt, của dầm tựa tự do, xác định theo biểu thức (5.7).

Bây giờ xét đến dầm tựa tự do trên hai đế cứng, dưới tác dụng của moment tập trung (H1.18)

Lực cắt trên suốt chiều dài dầm là không đổi và bằng lực cắt trên tiết diện đế trái và được xác định nhờ đẳng thức.

$$N_0 = \frac{m}{l}.$$

Dưới tác dụng của lực cắt này, dầm biến dạng như trên hình H.1.19a, nếu như không có đế cứng bên trái. Nhưng vì dầm nằm trên hai đế cứng nên kết quả, nó bị biến dạng, xô lệch, như trên H.1.19b



H.1.19

Như vậy là, dưới tác dụng của moment tập trung, *đỉnh võng do cắt* của dầm bằng 0.

Các tiết diện ngang khi đó có góc xoay bổ sung không đổi

$$\delta w' = -\frac{N_0}{G\omega} = -\frac{m}{G\omega l} \quad (5.9)$$

Vì  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  ( $\nu$  - là hệ số Poisson), ta đi đến kết luận là, với mỗi một moment uốn, cần bổ sung vào góc xoay tiết diện ngang do cắt một lượng bằng

$$\delta w' = -2(1+\nu) \frac{m}{E\omega l} \quad (5.10)$$

Sử dụng công thức (2.15), khi  $f_0 = f_1 = q = 0$ , vận dụng công thức (5.10) hai lần, với  $m = -M_0$  và  $m = M_1$  (moment  $M_0$  tác dụng gây ra lực cắt âm), ta có biểu thức xác định góc xoay  $\theta_0$ :

$$\theta_0 = -\frac{M_0 l}{3EI} \left[ 1 + 6(1+\nu) \frac{I}{\omega l^2} \right] - \frac{M_1 l}{6EI} \left[ 1 - 12(1+\nu) \frac{I}{\omega l^2} \right]. \quad (5.11)$$

Vì thế cho nên, đối với dầm tựa trên hai đế cứng, chịu tác dụng của moment tập trung  $M_1$  và  $M_2$  tại hai đầu, góc xoay tại các tiết diện đế tựa sẽ là

$$\left. \begin{aligned} w'(0) &= -\frac{M_0 l}{3EI} \psi_1 - \frac{M_1 l}{6EI} \psi_2 \\ w'(l) &= \frac{M_0 l}{6EI} \psi_2 + \frac{M_1 l}{3EI} \psi_1 \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

trong đó



$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= 1 + 6(1 + \nu) \frac{I}{\omega l^2} \\ \psi_2 &= 1 - 12(1 + \nu) \frac{I}{\omega l^2} \end{aligned} \right\} \quad (5.13)$$

Kết quả thu được cho ta phép ta có thể khử siêu tĩnh của dầm một nhịp, có tính đến biến dạng cắt, một cách dễ dàng, nhờ qui tắc cộng tác dụng.

## &6- TÍNH DẦM CÓ TIẾT DIỆN NGANG THAY ĐỔI

Trong các mục trên đây ta đã xét các bài toán liên quan đến dầm có tiết diện ngang không đổi trên suốt chiều dài của nó. Trong nhiều trường hợp, để đơn giản việc tính toán dầm có tiết diện ngang thay đổi, người ta có thể thay gần đúng chúng bằng dầm có tiết diện ngang không đổi, và sử dụng trực tiếp các kết quả mà ta đã thu được cho dầm có tiết diện ngang không đổi này. Một số trong các ví dụ thuộc loại này là việc tính các đà ngang đáy, các sườn tàu thủy... Bản thân các kết cấu này thuộc loại có tiết diện ngang thay đổi, do sự có mặt của các mã chuyển tiếp tại các đế đỡ hoặc chiều cao kết cấu thay đổi theo chiều dài... Tuy nhiên, trong rất nhiều trường hợp thực tế, cần phải tính đến sự thay đổi tiết diện ngang kết cấu, tức, sự thay đổi độ cứng theo chiều dài của kết cấu. Một ví dụ của trường hợp này là việc xác định đường đàn hồi thân tàu trên mặt nước.

Bài toán xác định đường đàn hồi dầm một nhịp có tiết diện ngang thay đổi đưa về việc tích phân, lần lượt 4 lần, phương trình vi phân (2.3).

Nhận mút trái dầm làm gốc tọa độ, sau 4 lần tích phân phương trình vi phân (2.3), ta thu được biểu thức xác định độ võng do uốn dầm có tiết diện ngang thay đổi, như sau:

$$N = (EIw'')' = \int_0^x q dx + N_0; \quad (6.1)$$

$$M = EIw''' = \int_0^x \int_0^x q dx dx + N_0 x + M_0; \quad (6.2)$$

$$w'_1 = \int_0^x \frac{1}{EI} \int_0^x \int_0^x q dx dx dx + N_0 \int_0^x \frac{x}{EI} dx + M_0 \int_0^x \frac{dx}{EI} + \theta_0; \quad (6.3)$$

$$w_1 = \int_0^x \int_0^x \frac{1}{EI} \int_0^x \int_0^x q dx dx dx dx + N_0 \int_0^x \int_0^x \frac{x}{EI} dx dx + M_0 \int_0^x \int_0^x \frac{dx dx}{EI} + \theta_0 x + f_0, \quad (6.4)$$

trong đó,  $N_0, M_0, \theta_0, f_0$  – là các giá trị lực cắt, moment uốn, góc xoay, độ võng của dầm tại tiết diện gốc tọa độ,  $x=0$ , cũng là tiết diện mút trái của dầm.

Khi cần tính đến ảnh hưởng cắt, ta sử dụng công thức (5.3), trong đó,  $\omega$  – là diện tích thành của tiết diện ngang, và là đại lượng thay đổi theo chiều dài dầm.

Sau khi tích phân biểu thức (5.3), ta có

$$w_2 = - \int_0^x \frac{N}{G\theta} dx + a \quad (6.5)$$

Sau khi thay biểu thức lực cắt (6.1) vào (6.5), ta thu được

$$w_2 = - \int_0^x \frac{1}{G\theta} \int_0^x q dx - N_0 \int_0^x \frac{1}{G\theta} dx + a \quad (6.6)$$

Trong đó,  $a$  - là đại lượng tùy ý, vì điều kiện biên chỉ ràng buộc tổng số  $f_0 + w_2$  chứ không có điều kiện ràng buộc riêng  $w_2$ .

Cần chú ý rằng, mối quan hệ (5.7) giữa độ võng dầm do cắt  $w_2$  gây ra bởi moment uốn  $M(x)$  chỉ đúng khi  $\omega = const$ . Có thể thấy rõ điều này khi so sánh công thức (5.7) nói trên với các công thức (6.2), (6.6).

Để xác định các giá trị  $N_0, M_0, \theta_0, f_0$ , trong thành phần của các biểu thức (6.4) và (6.6), cần phải viết các điều kiện biên cho mỗi dầm một nhịp, tương tự như đã làm trước đây trong §1.2, cho dầm có tiết diện ngang không đổi.

Đối với dầm một nhịp tĩnh định, độ võng do uốn và do cắt có thể được xác định một cách độc lập nhau. Còn đối với dầm siêu tĩnh, điều kiện biên của dầm ràng buộc chung cho tổng các độ võng,  $w_1 + w_2$ , và với các đại lượng  $N_0, M_0, \theta_0, f_0 + a$  cũng vậy.

Bài toán xác định độ võng của dầm tĩnh định tiết diện ngang thay đổi là đơn giản hơn, so với bài toán dầm siêu tĩnh.

Con tàu nổi trên mặt nước được mô hình hoá thành một dầm có tiết diện ngang thay đổi. Trong bài toán này, có thể cho  $N_0 = M_0 = 0$ . Xuất phát từ (6.2):

$$\int_0^x \int_0^x q dx dx = M$$

và với lưu ý rằng, moment uốn tại các tiết diện ngang là đã biết, ta viết biểu thức (6.4) cho  $w_1$  dưới dạng:

$$w_1 = \frac{\overline{M_0} L^2}{EI_0} \int_0^x \int_0^x \frac{M}{\overline{M_0}} \frac{I_0}{I} d\left(\frac{x}{L}\right) d\left(\frac{x}{L}\right) + \theta_0 x + f_0, \quad (6.7)$$

trong đó,  $\overline{M_0}$  và  $I_0$  - là các đại lượng tùy ý, có thứ nguyên moment uốn và moment quán tính tiết diện ngang, đưa vào nhằm làm đơn giản hoá các tính toán.

Nếu muốn xác định độ võng của thân tàu đối với đường, đi qua trọng tâm tiết diện ngang mũi và đuôi tàu, khi đó, tại  $x = 0$  và  $x = L$ , ta có  $w_1 = 0$ , tức,  $f_0 = 0$ , còn  $\theta_0$  được xác định từ điều kiện

$$w_1(L) = \frac{\overline{M_0} L^2}{EI_0} \int_0^L \int_0^x \frac{M}{\overline{M_0}} \frac{I_0}{I} d\left(\frac{x}{L}\right) d\left(\frac{x}{L}\right) + \theta_0 L = 0.$$

Từ đó:

$$\theta_0 = - \frac{\overline{M}_0 L}{EI_0} \int_0^L \int_0^x \frac{M}{\overline{M}_0} \frac{I_0}{I} d\left(\frac{x}{L}\right) d\left(\frac{x}{L}\right).$$

thay giá trị của  $\theta_0$  vào (6.7), ta thu được

$$w_1 = \frac{\overline{M}_0 L^2}{EI_0} \left[ \int_0^x \int_0^x \frac{M}{\overline{M}_0} \frac{I_0}{I} d\left(\frac{x}{L}\right) d\left(\frac{x}{L}\right) - \frac{x}{L} \int_0^L \int_0^x \frac{M}{\overline{M}_0} \frac{I_0}{I} d\left(\frac{x}{L}\right) d\left(\frac{x}{L}\right) \right]. \quad (6.8)$$

Trong môn học sức bền thân tàu, ta còn gặp lại bài toán này.

## &7-TÍNH TOÁN DẦM NHIỀU NHỊP TỰA TRÊN CÁC ĐẾ ĐÀN HỒI ĐỘC LẬP NHAU

Dầm liên tục, tựa trên các đế trung gian đàn hồi là dầm siêu tĩnh đơn giản, được ứng dụng rộng rãi nhất trong nhiều công trình kỹ thuật khác nhau, trong đó có kết cấu tàu thủy.

Ví dụ về việc ứng dụng mô hình hoá kết cấu thân tàu thành dầm nhiều nhịp trên đế đàn hồi là trong bài toán tính tàu nằm trên các chồng đế kê độc lập trên triển hoặc trên ụ khô, trong tính toán sống dọc mạn . v.v ..

Các đế đỡ đề cập ở đây được gọi là độc lập vì độ lún của mỗi đế chỉ tỉ lệ với phản lực của đế và không phụ thuộc gì vào biến dạng của các đế khác.

Ta gọi *dầm siêu tĩnh* là dầm mà các yếu tố nội lực của nó (moment uốn và lực cắt) không thể xác định được nếu chỉ dựa vào các phương trình cân bằng tĩnh học. Để tính dầm siêu tĩnh, trước tiên phải biến đổi nó về dạng tĩnh định, mà muốn thế cần phải xác định các *ẩn số thừa*.

*Ẩn số thừa* có thể chính là các phản lực liên kết từ đế đỡ trung gian, cũng có thể là các nội lực trên tiết diện các dầm thuộc hệ, mà việc xác định chúng cho phép đưa hệ dầm khảo sát về một hoặc một số hệ tĩnh định. Số ẩn số thừa chính là *số bậc siêu tĩnh của hệ*. Chẳng hạn, trong trường hợp dầm tựa trên 3 đế, hệ sẽ có 1 bậc siêu tĩnh, ẩn số thừa trong trường hợp này có thể là bất kỳ một trong 3 phản lực đế của dầm, vì sau khi xác định được phản lực này, dầm sẽ biến thành tĩnh định, tựa trên 2 gối đỡ. Trong ví dụ trên, có thể chọn ẩn số thừa là moment nội lực trên đế trung gian (đế giữa), thì sau khi xác định moment này, dầm tựa trên 3 đế trở thành hệ tĩnh định, gồm 2 dầm, mỗi dầm tựa trên 2 đế.

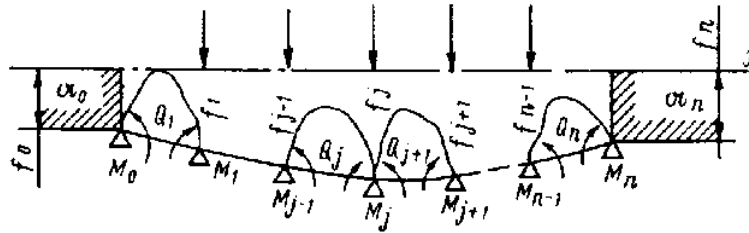
Việc khử siêu tĩnh của dầm nhiều nhịp có thể tiến hành theo nhiều phương pháp khác nhau của cơ học kết cấu. Phương pháp tính hệ siêu tĩnh, trên cơ sở chọn yếu tố lực (nội lực hoặc phản lực liên kết) làm ẩn số thừa, được gọi là *phương pháp lực*.

Một cách hết sức tự nhiên, có thể cho rằng việc chọn các phản lực đế trung gian làm các ẩn số thừa là hợp lý nhất. Giá trị các ẩn số này được xác định từ điều kiện độ võng của dầm tại các tiết diện đế bằng với cao độ cho trước của các đế tương ứng. Sau khi xác định giá trị các ẩn số này, việc xác định ứng lực trên các tiết diện ngang dầm nhiều nhịp khảo sát có thể tiến hành như với dầm một nhịp đơn giản, với sự trợ giúp của các bảng uốn dầm.

Tuy nhiên, phương pháp nêu trên đòi hỏi phải tiến hành rất nhiều các tính toán liên quan đến việc xác định độ võng dầm tại các tiết diện đế đỡ trung gian, đồng thời, lại phải giải hệ phương trình mà mỗi phương trình đều chứa tất cả các ẩn số. Việc giải hệ phương

trình như trên, với số để trung gian lớn, dẫn đến yêu cầu tính toán hiệu số bé giữa các đại lượng xấp xỉ nhau, là những tính toán thường phạm sai số lớn, dẫn đến việc giảm độ chính xác của kết quả cuối cùng.

Điểm bất lợi của phương pháp nói trên còn ở chỗ, theo đó, việc tính moment uốn – là mục đích cơ bản của toàn bộ việc tính toán – lại được thực hiện ở bước cuối cùng của quá trình tính toán thông qua việc cộng đại số các moment uốn trên dầm một nhịp, do tải trọng ngoài và do từng phản lực đế vừa tìm được trong bước trước đó. Điều này, một lần nữa lại dẫn đến việc tính các hiệu số bé giữa các đại lượng xấp xỉ nhau, và do đó càng làm tăng sai số của kết quả.



H.1.20

Khi chọn sơ đồ tính toán, cần chú ý sao cho việc lập các phương trình là đơn giản nhất và ít phải tính các hiệu số bé giữa các đại lượng xấp xỉ nhau. Ngoài ra, nên chọn các yếu tố, là mục đích cuối cùng của việc tính toán, làm ẩn số cơ bản.

Quay về với dầm nhiều nhịp khảo sát. Dễ thấy rằng, các yêu cầu trên đây có thể được thỏa mãn đầy đủ, nếu như ta chọn moment uốn nội lực tại các tiết diện để làm ẩn cơ bản. Sơ đồ này dẫn đến hệ phương trình 3 moment cho dầm trên đế cứng và hệ phương trình 5 moment cho dầm trên đế đàn hồi.

Ta khảo sát dầm liên tục n-nhịp, tựa trên các đế đàn hồi trung gian, chịu ngàm đàn hồi trên đế đàn hồi tại 2 đầu mút.(H1.20)

Để khử siêu tĩnh cho dầm nói trên, ta giả tưởng cắt rời nó tại tất cả các tiết diện đế và thay thế tác dụng uốn lẫn nhau giữa 2 phần dầm kề nhau tại tiết diện nói trên bằng các *moment để chưa biết* (còn gọi là ẩn số moment đế). Các moment đế, thể hiện trên hình H. 1.20, đều tương ứng với giá trị dương, uốn dầm cong lên trên. Như vậy, mỗi một nhịp của dầm khảo sát có thể coi như một dầm chịu tác dụng của phần tải trọng ngang cho trước, tác dụng lên nó và chịu tác dụng của các moment chưa biết tại 2 đầu nhịp.

Để xác định các ẩn số, chỉ cần lập phương trình thể hiện điều kiện liên tục góc xoay của tiết diện ngang tại các đế, có ẩn số moment tương ứng. Tất nhiên, số phương trình lập được bằng số để trung gian cộng với số để đàn hồi tại đầu mút dầm khảo sát.

Trong các phương trình thu được, thường gọi là các phương trình liên tục biến dạng góc, có mặt độ lún chưa biết của các đế. Độ lún này, trong trường hợp tổng quát, được biểu diễn qua các phản lực đế, là những đại lượng hoàn toàn phụ thuộc vào tải trọng ngang và moment uốn tại các tiết diện đế. Như vậy, trong các điều kiện liên tục góc xoay, các độ lún đế chưa biết hoàn toàn có thể được khử bỏ mà không làm phát sinh thêm một ẩn số nào, ngoài các moment ẩn đã chọn ban đầu.

Ta tách từ dầm ra nhịp đầu mút trái, hai nhịp kề nhau bất kỳ bên trong và nhịp mút phải để xem xét và so sánh góc xoay các tiết diện để với góc xoay của ngàm dầm hồi, góc xoay tại tiết diện để trung gian chung, trên hai nhịp kề nhau (H1.21).

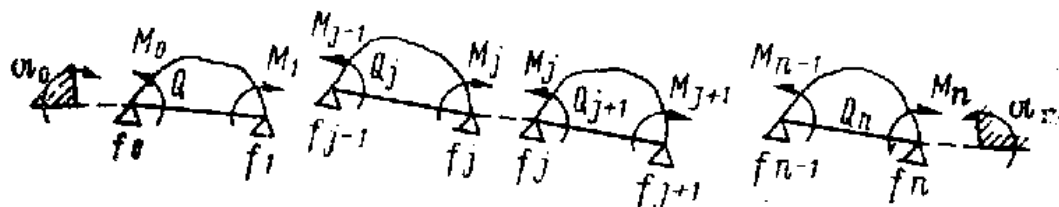
Ta sử dụng ký hiệu sau:

$M_j, f_j, A_j$  – moment uốn, độ lún, hệ số mềm lún, tương ứng, của đế thứ  $j$ ;

$l_j, I_j, Q_j$  – tương ứng, là chiều dài nhịp thứ  $j$ , moment quán tính tiết diện ngang nhịp thứ  $j$  và tải trọng tác dụng trên nhịp thứ  $j$  (ta qui ước, nhịp thứ  $i$  là nhịp từ đế thứ  $i-1$  đến đế thứ  $i$ ).

$\alpha_j(Q_j)$  và  $\alpha_j(Q_{j+1})$  – tương ứng là góc xoay tại tiết diện đế thứ  $j$  do tải trọng ngang  $Q_j$  trên nhịp thứ  $j$  gây ra và góc xoay tại tiết diện đế thứ  $j$  do tải trọng ngang trên nhịp thứ  $j+1$  gây ra.

$u_0, u_n$  – là hệ số mềm ngàm dầm hồi, tương ứng tại đầu mút trái và đầu mút phải.



H1.21

Theo nguyên tắc cộng tác dụng, góc xoay tại tiết diện do đồng thời moment đế và tải trọng trên nhịp tác dụng bằng tổng các góc xoay tại tiết diện đế này, do từng yếu tố lực nói trên gây ra một cách độc lập nhau.

Sử dụng các công thức (2.15) và (2.18) và với các ký hiệu trên đây, ta có thể viết

$$\left. \begin{aligned} u_0 M_0 &= -\frac{M_0 l_1}{3EI_1} - \frac{M_1 l_1}{6EI_1} + \alpha_0(Q_1) + \frac{f_1 - f_0}{l_1}; \\ \frac{M_{j-1} l_j}{6EI_j} + \frac{M_j l_j}{3EI_j} + \alpha_j(Q_j) + \frac{f_j - f_{j-1}}{l_j} &= -\frac{M_j l_{j+1}}{3EI_{j+1}} - \frac{M_{j+1} l_{j+1}}{6EI_{j+1}} + \alpha_j(Q_{j+1}) + \frac{f_{j+1} - f_j}{l_{j+1}}; \\ \frac{M_{n-1} l_n}{6EI_n} + \frac{M_n l_n}{3EI_n} + \alpha_n(Q_n) + \frac{f_n - f_{n-1}}{l_n} &= -u_n M_n. \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

Phương trình thứ 2 trong (7.1) đúng cho đế trung gian bất kỳ  $1 < j < n-1$ .

Các góc xoay  $\alpha_j(Q_j)$  và  $\alpha_j(Q_{j+1})$  được xác định nhờ các bảng uốn dầm tựa tự do trên 2 đế cứng. Dấu trong các biểu thức góc xoay được lập theo các qui ước đã nêu trên.

Khi phải khử siêu tĩnh của dầm nhiều nhịp có kể đến ảnh hưởng của biến dạng cắt, thì các biểu thức góc xoay do moment uốn gây ra, trong các phương trình trên, cần được xác định, căn cứ trên (5.12). Lưu ý rằng, các hệ số  $\Psi_{1j}, \Psi_{2j}$  với chỉ số  $j$  thêm vào để chỉ ra rằng, ta đang xét đoạn dầm từ đế thứ  $j-1$  đến đế thứ  $j$ .

Trong các phương trình trên, độ lún của các đế  $f_j$  có thể bằng 0 trong trường hợp đế cứng, không dịch chuyển, bằng các giá trị cho trước, trong trường hợp dầm còn chưa tựa vào các đế cứng khi chưa chịu tải trọng ngoài, và cuối cùng, cũng có thể là đại lượng chưa biết,

trong trường hợp các đế đỡ độc lập là đế đàn hồi. Hệ phương trình thu được trong 2 trường hợp trên là hệ phương trình 3 moment, vì trong mỗi phương trình của hệ chứa không quá 3 moment chưa biết.

Trong trường hợp độ lún đế là chưa biết, cần thiết lập các phương trình bổ sung, vì hiện tại, số phương trình, bằng số các moment đế, nhỏ hơn số đại lượng chưa biết (vì trong số này còn có thêm các độ lún của đế). Phương trình bổ sung thành lập được nhờ sử dụng điều kiện cân bằng của mỗi một đế đàn hồi.

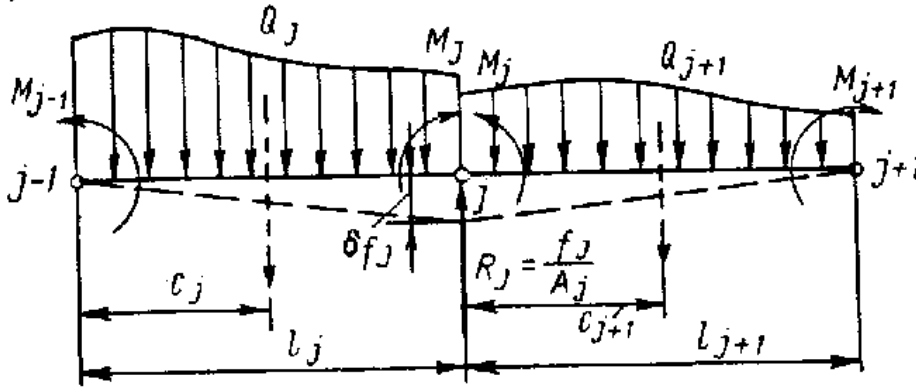
Hãy khảo sát cân bằng của đế thứ j.

Phản lực trên đế đàn hồi tỉ lệ với độ lún của đế và trên cơ sở của (2.7), ta có:

$$R_j = \frac{f_j}{A_j} \quad (7.2)$$

Mặt khác, phản lực này lại có thể biểu diễn được qua các moment đế tựa và tải trọng trên nhịp. Đối với đế khảo sát, ta có (H.1.22)

$$R_j = \frac{M_j - M_{j-1}}{l_j} + \frac{M_j - M_{j+1}}{l_{j+1}} + \frac{Q_j c_j}{l_j} + \frac{Q_{j+1}(l_{j+1} - c_{j+1})}{l_{j+1}} \quad (7.3)$$



H.1.22

Trong đó,  $c_j$  – là khoảng cách đến đế thứ j-1, từ trọng tâm của hợp lực của toàn bộ tải trọng tác dụng lên nhịp dầm thứ j (từ đế thứ j-1 đến đế thứ j).

So sánh (7.3) và (7.2), ta có

$$f_j = A_j \left[ \frac{M_j - M_{j-1}}{l_j} + \frac{M_j - M_{j+1}}{l_{j+1}} + \frac{Q_j c_j}{l_j} + \frac{Q_{j+1}(l_{j+1} - c_{j+1})}{l_{j+1}} \right] \quad (7.4)$$

Dễ thấy rằng, phương trình (7.4) có thể viết được trên cơ sở của nguyên lý di chuyển khả dĩ.

Khi sử dụng phương trình (7.4) cho các đế tại các đầu mút, cần chú ý một điều là, đối với các đế này,

$$\frac{M_0 - M_{-1}}{l_0} = \frac{M_n - M_{n+1}}{l_{n+1}} = 0; \quad Q_n = Q_{n+1} = 0. \quad (7.5)$$

Hệ phương trình cơ bản (7.1) và các phương trình bổ sung (7.4) là đủ để tính tất cả các ẩn số. Để cho tiện lợi khi ứng dụng, người ta biến đổi hệ này theo cách, sao cho các hệ số cạnh các moment ẩn là không thứ nguyên còn bản thân thành phần của phương trình sẽ có thứ nguyên moment. Muốn thế, chỉ moment nhân tất cả các thành phần của (7.1) với thừa số  $\frac{6EI_0}{l_0}$ , trong đó,  $I_0, l_0$  là các đại lượng tùy ý, tương ứng, có thứ nguyên moment quán tính tiết diện và chiều dài, đưa vào để làm gọn các con số trong tính toán.

Sau các biến đổi kể trên, hệ phương trình khảo sát có dạng sau:

$$\left. \begin{aligned} (\alpha_0 + 2a_1)M_0 + a_1M_1 + b_1F_0 - b_1F_1 &= \alpha_0(Q_1)\frac{6EI_0}{l_0}; \\ a_jM_{j-1} + 2(a_j + a_{j+1})M_j + a_{j+1}M_{j+1} - b_jF_{j-1} + (b_j + b_{j+1})F_j - \\ &- b_{j+1}F_{j+1} = [-\alpha_j(Q_j) + \alpha_j(Q_{j+1})]\frac{6EI_0}{l_0}; \\ 1 \leq j \leq n-1 \\ a_nM_{n-1} + (2a_n + \alpha_n)M_n - b_nF_{n-1} + b_nF_n &= -\alpha_n(Q_n)\frac{6EI_0}{l_0}. \end{aligned} \right\} \quad (7.6)$$

Trong đó, đã sử dụng các ký hiệu sau đây để làm gọn công thức:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{6EI_0}{l_0} u_0; \\ \alpha_n &= \frac{6EI_0}{l_0} u_n; \\ a_j &= \frac{l_j}{l_0} \frac{I_0}{I_j}; \end{aligned} \right\} \quad (7.7)$$

$$\left. \begin{aligned} F_j &= \frac{6EI_0}{l_0^2} f_j; \\ b_j &= \frac{l_0}{l_j}. \end{aligned} \right\} \quad (7.8)$$

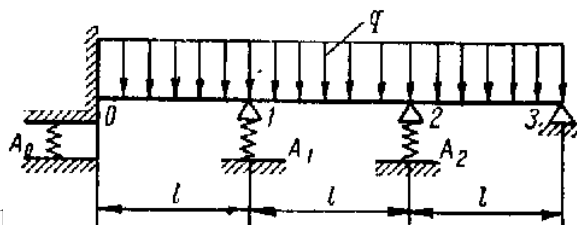
Các phương trình bổ sung (7.4) và (7.5), sau khi được nhân với thừa số  $\frac{l_0}{A_j}$ , có dạng sau:

$$\left. \begin{aligned} b_1M_0 - b_1M_1 - K_0F_0 &= -Q_1(l_0 - c_0)b_1; \\ -b_jM_{j-1} + (b_j + b_{j+1})M_j - b_{j+1}M_{j+1} - K_jF_j &= \\ &= -Q_jc_jb_j - Q_{j+1}(l_{j+1} - c_{j+1})b_{j+1}; \\ 1 \leq j \leq n-1 \\ -b_nM_{n-1} + b_nM_n - K_nF_n &= -Q_nc_nb_n. \end{aligned} \right\} \quad (7.9)$$

Trong đó

$$K_j = \frac{l_0^3}{6EI_0A_j} \quad (7.10)$$

Dễ nhận thấy rằng  $F_j$  có thứ nguyên moment uốn còn  $a_j$  và  $b_j$  không thứ nguyên.



Vì trong mỗi phương trình của hệ (7.9) chỉ chứa một ẩn số  $F_j$  nên từ đó, có thể dễ dàng khử  $F_j$  ra khỏi hệ phương trình (7.6).

Chú ý rằng mỗi một  $F_j$  với  $1 \leq j \leq n-1$  phụ thuộc, theo (7.9), vào  $M_{j-1}, M_j, M_{j+1}$ , còn trong (7.6), mỗi phương trình thứ  $j$  chứa 3 ẩn  $F_{j-1}, F_j, F_{j+1}$ , nên H.1.23 từ tất cả các  $F_j$  ra khỏi (7.6) ta thu được hệ phương trình 5 moment, vì mỗi phương trình thứ  $j$ , với  $2 \leq j \leq n-2$ , chỉ chứa 5 moment ẩn. Ma trận hệ số của hệ phương trình 5 moment này, tất nhiên, có dạng băng, đối xứng theo đường chéo chính thứ nhất, với chiều rộng băng bằng 5.

Việc giải bài toán uốn dầm trên đế đàn hồi độc lập từ việc lập hệ phương trình (7.6) và (7.9) đến việc lập phương trình 5 moment, có thể tiến hành thuận lợi dưới dạng bảng, tính tay. Việc lập trình để tính trên máy tính điện tử, trong trường hợp này, là hoàn toàn dễ dàng.

Sau khi giải hệ phương trình 5 moment, có thể tiến hành vẽ biểu đồ moment uốn và biểu đồ lực cắt riêng cho từng nhịp của dầm.

Để xây dựng biểu đồ moment uốn của dầm, ta sử dụng nguyên lý cộng tác dụng, tức, biểu đồ kết quả sẽ nhận được nhờ cộng biểu đồ do moment đế và biểu đồ do tải trọng nhịp gây ra. Biểu đồ moment uốn thường vẽ về phía thớ bị nén của tiết diện, nhưng không nhất thiết.

Khi vẽ biểu đồ lực cắt, ta sử dụng nhận xét rằng, lực cắt, tại một tiết diện bất kỳ có thể thu được nhờ cộng vào lực cắt tại tiết diện đế bên trái, của nhịp dầm tương ứng, một tải trọng bằng tổng tải trọng tác dụng trên đoạn thanh từ tiết diện đế bên trái đến tiết diện khảo sát.

Lực cắt tại tiết diện đế trái của nhịp dầm được xác định theo công thức sau:

$$N_{j-1,j} = -Q_j \frac{l_j - c_j}{l_j} + \frac{M_j - M_{j-1}}{l_j}. \quad (7.11)$$

Ví dụ- Để hiểu cụ thể hơn phần lý thuyết trình bày trên đây, ta tiến hành tính toán cho dầm liền 3 nhịp, thể hiện trên hình H.1,23.

Hệ số mềm đế đỡ được cho theo công thức

$$A_0 = 0,3 \frac{l^3}{EI}; \quad A_2 = A_2 = 0,15 \frac{l^3}{EI},$$

trong đó,  $I$  - moment quán tính tiết diện ngang dầm, còn  $l$  - chiều dài nhịp.

Ta lập các phương trình theo điều kiện về góc xoay đế dầm:

$$\begin{aligned} -\frac{M_0 l_1}{3EI_1} - \frac{M_1 l_1}{6EI_1} + \frac{ql_1^3}{24EI_1} + \frac{f_1 - f_0}{l_1} &= 0; \\ \frac{M_0 l_1}{6EI_1} + \frac{M_1 l_1}{3EI_1} - \frac{ql_1^3}{24EI_1} + \frac{f_1 - f_0}{l_1} &= -\frac{M_1 l_2}{3EI_2} - \frac{M_2 l_2}{6EI_2} + \frac{ql_2^3}{24EI_2} + \frac{f_2 - f_1}{l_2}; \\ \frac{M_1 l_2}{6EI_2} + \frac{M_2 l_2}{3EI_2} - \frac{ql_2^3}{24EI_2} + \frac{f_2 - f_1}{l_2} &= -\frac{M_2 l_3}{3EI_3} + \frac{ql_3^3}{24EI_3} - \frac{f_2}{l_3}. \end{aligned}$$



Vì đối với trường hợp khảo sát,  $l_1 = l_2 = l_3 = l$ ;  $I_1 = I_2 = I_3 = I$ , sau khi nhân hệ phương trình trên với  $6EI/l$ , chú ý đến ký hiệu (7.8), ta có:

$$\left. \begin{aligned} 2M_0 + M_1 + F_0 - F_1 &= 0,25ql^2; \\ M_0 + 4M_1 + M_2 - F_0 + 2F_1 - F_2 &= 0,5ql^2; \\ M_1 + 4M_2 - F_1 + 2F_2 &= 0,5ql^2. \end{aligned} \right\} \quad (7.12)$$

Phương trình bổ sung (7.4), cho dầm khảo sát, có dạng:

$$\begin{aligned} f_0 &= A_0 \left[ \frac{M_0 - M_1}{l_1} + \frac{Q(l_1 - c_1)}{l_1} \right]; \\ f_1 &= A_1 \left[ \frac{M_1 - M_0}{l_1} + \frac{M_1 - M_2}{l_2} + \frac{Q_1 c_1}{l_1} + \frac{Q_2(l_2 - c_2)}{l_2} \right]; \\ f_2 &= A_2 \left[ \frac{M_2 - M_1}{l_2} + \frac{M_2}{l_3} + \frac{Q_2 c_2}{l_2} + \frac{Q_3(l_3 - c_3)}{l_3} \right]. \end{aligned}$$

Lưu ý rằng,  $Q_1 = Q_2 = Q_3 = ql$  còn  $c_1 = c_2 = c_3 = 0,5l$ , sau khi nhân các phương trình thu được với  $6EI/l^2$ , ta có:

$$\left. \begin{aligned} F_0 &= \frac{1}{K_0} (M_0 - M_1 + 0,5ql^2); \\ F_1 &= \frac{1}{K_1} (-M_0 + 2M_1 - M_2 + ql^2); \\ F_2 &= \frac{1}{K_2} (-M_1 + 2M_2 + ql^2), \end{aligned} \right\} \quad (7.13)$$

Trong đó:  $K_0 = \frac{l^3}{6EI A_0} = \frac{1}{1,8}$ ;  $K_1 = K_2 = \frac{l^3}{6EI A_1} = \frac{1}{0,9}$ .

Sau khi thay các giá trị của  $F_i$  vào hệ phương trình (7.12), ta đưa nó về dạng:

$$\begin{aligned} 4,7M_0 - 2,6M_1 + 0,9M_2 &= 0,25ql^2; \\ -2,6M_0 + 10,3M_1 - 2,6M_2 &= 0,5ql^2; \\ 0,9M_0 - 2,6M_1 + 8,5M_2 &= -0,4ql^2. \end{aligned}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được nghiệm là các moment ẩn sau đây:

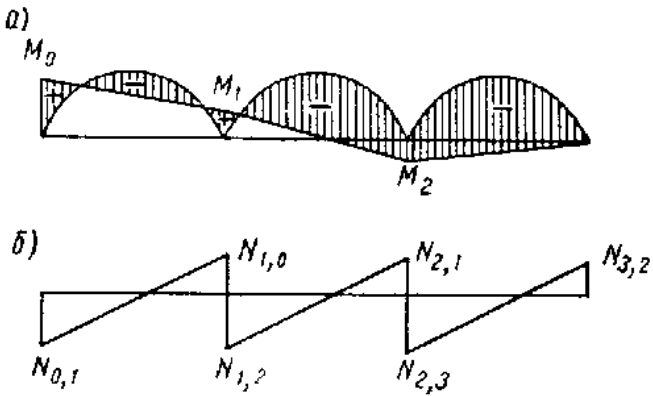
$$M_0 = 0,095ql^2; \quad M_1 = 0,063ql^2; \quad M_2 = -0,038ql^2.$$

Lực cắt trên các tiết diện đế trái của mỗi nhịp tìm được theo công thức (7.11) và cho kết quả sau:

$$N_{0,1} = -0,53ql; \quad N_{1,2} = -0,6ql; \quad N_{2,3} = -0,54ql.$$

Lực cắt trên tiết diện đế phải của các nhịp dầm tìm được như sau:

$$\begin{aligned} N_{1,0} &= -0,47ql; \\ N_{2,1} &= -0,4ql; N_{3,2} = -0,46ql. \end{aligned}$$



H.1.24

Biểu đồ moment uốn và lực cắt trên dầm biểu diễn trên hình H.1.24

Độ lún các đế tìm được trên cơ sở các công thức (7.13) và (7.8), cho kết quả sau:

$$f_0 = 0,159 \frac{ql^4}{EI}; \quad f_1 = 0,160 \frac{ql^4}{EI}; \quad f_2 = 0,129 \frac{ql^4}{EI}.$$

Phương pháp tính trên đây là cho dầm có tiết diện ngang không đổi trên phạm vi mỗi nhịp của nó. Tuy nhiên, phương pháp này cũng có thể sử dụng để tính dầm mà trên một tiết diện ngang của dầm biến đổi nhảy bậc trên một nhịp nào đó. Dầm như thế được gọi là dầm có *tiết diện ngang biến đổi bậc thang*. Trong các kết cấu thân tàu, rất hay gặp các dầm có tiết diện ngang biến đổi bậc thang. Xà ngang khoả mép ngang miệng hầm hàng và sống dọc mép miệng hầm hàng là những ví dụ về kết cấu loại này.

Dầm tiết diện ngang thay đổi liên tục, trong một số trường hợp, khi tính toán, cũng có thể coi gần đúng là dầm có tiết diện ngang thay đổi bậc thang và tại chỗ nhảy bậc của tiết diện ngang, một cách giả định, đặt một *đế đỡ ảo*, có độ cứng bằng 0. Khi đó, ta áp dụng được phương pháp tính dầm liên tục trình bày trên đây để tính dầm có tiết diện ngang thay đổi liên tục này. Khác biệt duy nhất cần chú ý là, trong trường hợp này, phương trình bổ sung thu được từ điều kiện cân bằng đế đỡ ảo, thiết lập được từ phương trình (7.3), với phản lực đế bằng 0, có dạng:

$$\frac{M_j - M_{j-1}}{l_j} + \frac{M_j - M_{j+1}}{l_{j+1}} + \frac{Q_j c_j}{l_j} + \frac{Q_{j+1} (l_{j+1} - c_{j+1})}{l_{j+1}} = 0. \quad (7.14)$$

Số phương trình bổ sung dạng này bằng số đế ảo ta đưa vào, và bằng số tiết diện nhảy bậc của dầm.

Dễ thấy là từ các phương trình bổ sung (7.14), không thể khử bỏ trực tiếp các độ lún được, điều đó có nghĩa là ta không thu được hệ phương trình 5 moment như dầm nhiều nhịp trên đế đàn hồi thông thường. Tuy nhiên đến mục đích của công việc là tính toán xác định các yếu tố uốn dầm như moment uốn, lực cắt, chuyển vị của các tiết diện ngang.v.v. . không hề bị ảnh hưởng.

## &8- XÁC ĐỊNH CÁC HỆ SỐ MỀM VÀ HỆ SỐ CỨNG CỦA CÁC ĐẾ ĐỖ ĐÀN HỒI

Trong &2 ta đã đề cập đến khái niệm *hệ số mềm của đế đỡ đàn hồi và của ngàm đàn hồi* cùng với cách xác định các hệ số này. Song song với khái niệm hệ số mềm, trong cơ học kết cấu, rất thường sử dụng các *hệ số cứng*.

*Hệ số cứng đế đỡ* chính là thừa số bên cạnh chuyển vị của đế trong biểu thức tính phản lực đế.

$$R = Kf \quad (8.1)$$

Và như vậy, về trị số, hệ số cứng bằng lực, gây ra cho đế đỡ chuyển vị *đơn vị*.

So sánh các biểu thức (8.1) và (2.7) ta có thể viết:

$$K = \frac{1}{A} \quad (8.2)$$

Như vậy, *hệ số cứng là đại lượng nghịch đảo của hệ số mềm*.

Ta tiến hành xác định hệ số cứng và hệ số mềm cho một số đế đỡ đàn hồi thường gặp trong đóng tàu.

1. Thanh, chỉ làm việc trong trạng thái kéo-nén, đóng vai trò kết cấu tựa cho dầm khảo sát.

Ví dụ về các thanh loại này là các cột chống độc lập, các sống đứng của vách tại sống chính, các chông đế kê tàu .v .v .

Giả thiết là thanh nối trên tựa trên nền cứng tuyệt đối.

Trong trường hợp trục của thanh, dùng làm đế tựa cho dầm bị uốn, được đặt vuông góc với trục của dầm này và đồng phẳng với dầm, giữa phản lực  $R$  của đế đỡ (thanh chống) và độ lún  $f$  của đế, trên cơ sở của định luật Hooke, xác lập được mối quan hệ sau:

$$f = \frac{Rl}{EF}$$

Trong đó:  $l$  – chiều dài thanh;

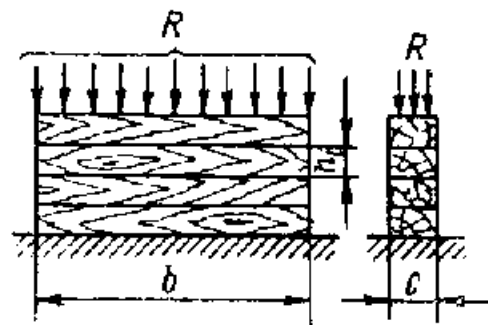
$F$  – diện tích tiết diện ngang thanh;

$E$  – mô đun đàn hồi dọc của vật liệu thanh .

Và như vậy, theo &2 ta có:

$$A = \frac{1}{EF} \quad (8.3)$$

2. Các chông đế kê thường làm từ các thanh gỗ xếp chồng lên nhau và chỉ chịu nén. Giữa phản lực đế kê  $R$  và độ lún đế  $f$  tồn tại mối quan hệ (H1.25):



H1.25

$$f = R \sum_i \frac{h_i}{bcE_i} \quad (8.4)$$

Trong đó:

$i$  – số thanh gỗ làm đế kê;

$b$  và  $c$  – chiều rộng và chiều dài các thanh gỗ;

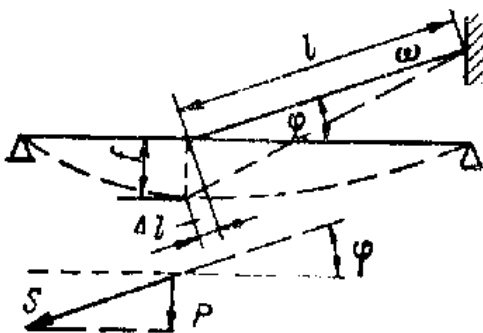
$h_i$  – chiều cao thanh gỗ;

$E_i$  – module đàn hồi nén gỗ .

Như vậy, ta được:

$$A = \sum_i \frac{h_i}{bcE_i} \quad (8.5)$$

Trong tính toán đặt tàu trên triển, ụ, thường sử dụng khái niệm hệ số cứng. Trên cơ sở (8.2), ta có công thức cho hệ số cứng trong trường hợp khảo sát:



H.1.26

$$K = \frac{bc}{\sum_i \frac{h_i}{E_i}} \quad (8.6)$$

Để tựa cho dầm là một thanh đặt xiên so với trục

dầm và làm việc theo kéo – nén. Đây là kết cấu dạng thanh giằng. Thanh giằng đặt trong mặt phẳng của dầm, xiên một góc  $\varphi$  với trục dầm. Khi dầm bị uốn, thanh sẽ bị kéo một lực  $S$ . Quan hệ giữa lực này với thành phần lực thẳng

đường xác định theo biểu thức sau:

$$S = \frac{P}{\sin \varphi}$$

Độ giãn dài tương ứng của thanh giằng, với chiều dài  $l$  sẽ là (H.1.25)

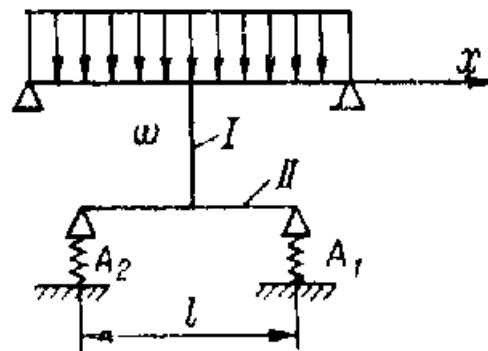
$$\Delta l = \frac{Pl}{Ew \sin \varphi},$$

Trong đó  $E$  – là module đàn hồi dọc của thanh giằng.

Bỏ qua chuyển vị dọc theo trục dầm, có thể coi chuyển vị của đầu thanh chỉ có thành phần thẳng đứng, và như vậy, độ giãn dài của thanh giằng có quan hệ với chuyển vị thẳng đứng, xác định theo biểu thức  $\Delta l = f \sin \varphi$ , và từ đó

$$f = \frac{Pl}{Ew \sin^2 \varphi}.$$

Hệ số mềm của kết cấu đỡ xác định theo công thức



$$A = \frac{l}{E\theta \sin^2 \varphi} \quad (8.7)$$

3. Đế đỡ cho dầm là một dãy liên tiếp các đế đỡ đàn H.1.27

Trên hình H1.27 là một ví dụ. Đây là đế đỡ dạng cột chong. Cột chống này, đến lượt nó, lại chống trên một dầm khác, mà dầm này lại tựa trên 2 đế đỡ đàn hồi. Độ lún của đế khảo sát bằng tổng độ lún của các đế thành viên. Vì các đế trong dãy đều chịu cùng một lực nén nên hệ số mềm của đế khảo sát bằng tổng hệ số mềm các đế thành viên

$$A = \sum_n A_n \quad (8.8)$$

Độ cứng của đế này có thể tính theo công thức

$$K = \frac{1}{\sum_n \frac{1}{K_n}} \quad (8.9)$$

## &9-TÍNH TOÁN KHUNG ĐƠN GIẢN TẠO THÀNH TỪ CÁC THANH THẲNG

Trong thực tế, các thanh thường ít khi đứng độc lập mà liên kết với nhau, tạo thành hệ thanh. Điểm giao kết giữa các thanh trong hệ với nhau hoặc thanh trong hệ với bên ngoài gọi là *nút*.

*Khung phẳng* là kết cấu hệ thanh có các tính chất sau đây:

- Trục của tất cả các thanh đều nằm trong một mặt phẳng, trùng với một trong các mặt phẳng chính của tiết diện ngang của tất cả các thanh;
- Tải trọng, kể cả lực và moment lực, chỉ tác dụng lên các thanh trong mặt phẳng của khung;

Giả thiết thêm rằng, biến dạng của khung không làm xoắn các thanh. Nói cách khác, tải trọng luôn nằm trong mặt phẳng chứa tâm uốn.

Trong các kết cấu thành phần tạo nên thân tàu, thường gặp khung với các thanh thẳng. Các khung này có thể chia ra 2 loại sau:

*Khung đơn giản* - là khung mà tại mỗi nút chỉ có (không quá) 2 thanh giao kết nhau.

*Khung phức tạp* là khung, có ít nhất một nút là điểm giao kết của nhiều hơn 2 thanh.

Các khung, tùy thuộc vào tính chất liên kết của các nút của nó, có thể được phân ra thành *khung có nút cố định* và *khung có nút động*. Khung có nút động lại được chia ra thành *khung chữ nhật* và *khung xiên*, tùy theo góc giao kết giữa các thanh.

Cần lưu ý một điểm là trong việc tính toán khung, độ cong không lớn của các thanh được bỏ qua và như vậy, chúng được coi là thẳng. Chẳng hạn như, trường hợp của xà ngang boong là một ví dụ. Ngoài ra, khi tính khung trong kết cấu tàu thủy, một số điểm khác biệt nhỏ của các thanh, như lỗ khoét nhỏ trên bản thành của các dầm, sự thay đổi cục bộ của tiết diện ngang do các mã . v. v. thường được bỏ qua. Đa số các khung tàu thủy thuộc loại có nút cố định, vì các thanh, tạo thành kết cấu thân tàu, đều tựa trên các khung, dầm phẳng, là những kết cấu có độ cứng rất lớn so với các lực tác dụng trong mặt phẳng của chúng, và khi

đó, mọi dịch chuyển tịnh tiến của các nút đều bị cản trở. Khi khử siêu tĩnh các khung, tạo nên từ các thanh thẳng, ta thừa nhận các giả thiết sau:

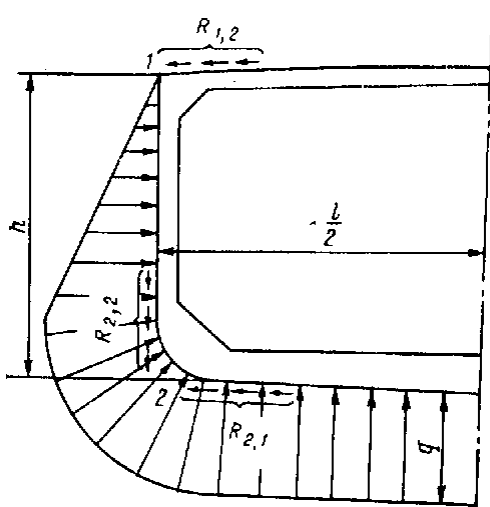
- 1- chiều dài các thanh là không thay đổi khi chịu tải;
- 2- độ cứng của tất cả các thanh của khung đều lớn đến mức, sao cho, tác dụng của lực dọc lên thanh không ảnh hưởng đáng kể đến các yếu tố uốn thanh;
- 3- các thanh của khung được coi là lẳng trụ trên toàn bộ chiều dài của chúng;
- 4- chuyển vị do cắt là nhỏ so với chuyển vị do uốn, và được bỏ qua.

Lưu ý thêm rằng, khi tính toán các khung tàu thủy có kết cấu đối xứng và chịu tác dụng của tải trọng không đối xứng, trong nhiều trường hợp, *nên* phân tải trọng ra thành tổng của hai thành phần, *đối xứng* và *phản xứng* và tiến hành tính toán riêng biệt cho từng tải trọng thành phần này, rồi cộng kết quả lại với nhau. Trong mỗi trường hợp, số ẩn số, nhờ đó tính chất đối xứng hoặc phản xứng nói trên của tải trọng, giảm đi gần 2 lần so với khi giải mà không sử dụng tính chất đối xứng của kết cấu.

Trong mục này, ta đề cập đến việc giải khung có nút cố định và khung có nút động.

Khảo sát khung tàu một boong, chịu tải trọng thủy tĩnh.

Trên hình H.1.28 là sơ đồ kết cấu của một nửa khung khảo sát và tải trọng tác dụng lên khung, còn trên hình H.1.29 là sơ đồ tính toán của khung này.



H.1.28

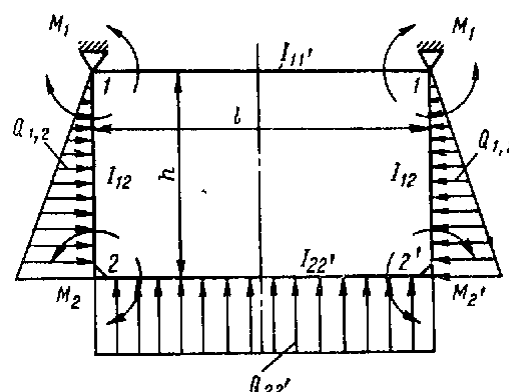
Khi lập sơ đồ tính toán, có thể không cần để ý đến một số đặc điểm của kết cấu thực, như độ vát đáy nhỏ, độ cong ngang của xà ngang boong, sự hiện hữu của các mã, độ cong hông . . . sẽ được bỏ qua. Việc tính đến cả những đặc tính này sẽ làm phức tạp một cách đáng kể sơ đồ tính toán trong khi sự cải thiện về độ chính xác trong các kết quả tính mà nó mang lại lại không đáng kể.

Với các mã lớn, bán kính cong hông lớn, . . . có thể cần phải dùng sơ đồ tính chính xác hơn.

Chiều dài của các thanh của khung bằng khoảng cách giao điểm của các trục thanh.

Mỗi một thanh của khung làm việc về uốn, cùng với một phần của tấm vỏ hoặc tấm boong, gọi là *mép kèm*, gắn với nó. Vì chiều rộng của mép kèm là rất lớn nên trục trung hoà nằm rất sát với mép kèm này. Và vì thế cho nên, một cách gần đúng, chiều dài của nhánh đáy của khung và của xà ngang boong có thể lấy bằng chiều rộng tàu, còn chiều dài của nhánh mạn, đó từ tấm boong đến trọng tâm tiết diện ngang của đà ngang gần mạn.

Khung khảo sát thuộc loại có nút cố định vì mỗi nút đều nằm trong 2 mặt phẳng dần vuông góc nhau và sự di chuyển của nút, theo bất cứ hướng nào cũng bị ngăn cản với trở lực rất lớn. Sự xô lệch khung khảo sát cũng bị loại trừ vì tính chất đối xứng của kết cấu cũng như của tải trọng ngoài.



H.1.29

Việc tính khung đơn giản, có nút cố định, không có gì khác so với việc tính dầm liên tục, nhiều nhịp. Vì các thanh được gắn cứng với nhau tại các nút nên góc xoay tiết diện ngang chung của các thanh tại mỗi nút là bằng nhau. *Chọn moment tại các nút làm ẩn cơ bản và, để xác định các ẩn này, sử dụng điều kiện góc xoay các tiết diện thanh tại nút chung, là bằng nhau.* Trong phần trình bày tiếp theo, các yếu tố của khung và tải trọng trên đó được ký hiệu bằng 2 chỉ số – ứng với số hiệu của các nút hai đầu của nó. Chẳng hạn  $l_{12}$ ,  $I_{12}$ , - là chiều dài và moment quán tính của thanh nối 2 nút, nút số 1 và nút số 2; còn  $Q_{12}$  - là tải trọng trên thanh nối các nút 1 và 2.

Đối với khung cho trên H.1.29, do tính chất đối xứng của kết cấu và tải trọng tác dụng lên nó, các moment nút cũng phải đối xứng, tức, có thể viết:  $M_1 = M_{1'}$ ;  $M_2 = M_{2'}$ . Hệ phương trình khử siêu tĩnh khung sẽ là:

$$\text{Đối với nút 1: } \frac{M_1 l_{12}}{3EI_{12}} + \frac{M_2 l_{12}}{6EI_{12}} - \frac{7}{180} \frac{Q_{12} l_{12}^2}{EI_{12}} = - \frac{M_1 l_{11'}}{3EI_{11'}} - \frac{M_1 l_{11'}}{6EI_{11'}};$$

$$\text{Đối với nút 2: } \frac{M_2 l_{22'}}{3EI_{22'}} + \frac{M_2 l_{22'}}{6EI_{22'}} - \frac{Q_{22'} l_{22'}^2}{24EI_{22'}} = - \frac{M_2 l_{12}}{3EI_{12}} - \frac{M_1 l_{12}}{6EI_{12}} + \frac{2}{45} \frac{Q_{12} l_{12}^2}{EI_{12}}.$$

Với như cho biết thêm:  $l_{12} = h = 0,6l$ ;  $l_{11'} = l_{22'} = l$ ;  $I_{11'} = 2I$ ;  $I_{12} = I$ ;  $I_{22'} = 5I$ ;  $Q_{12} = 0,5q \cdot 0,6l = 0,3ql$ ;  $Q_{22'} = ql$ . Sau khi nhân tất cả các thành phần của hệ phương trình với  $\frac{6EI}{l}$ , cùng với các dữ kiện trên, ta lập được hệ phương trình sau:

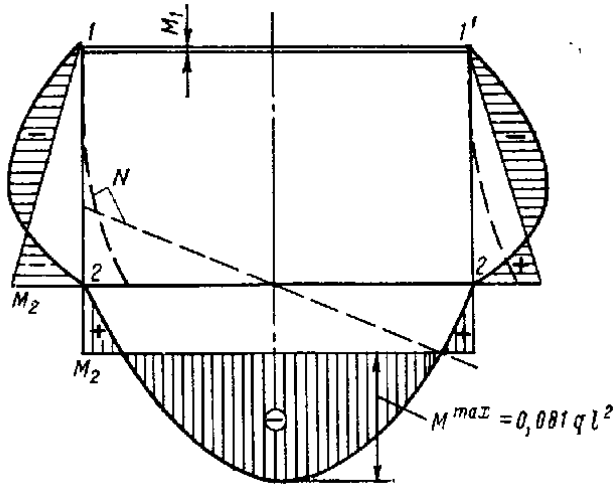
$$2,7M_1 + 0,6M_2 = 0,0252ql^2;$$

$$0,6M_1 + 1,8M_2 = 0,0788ql^2$$

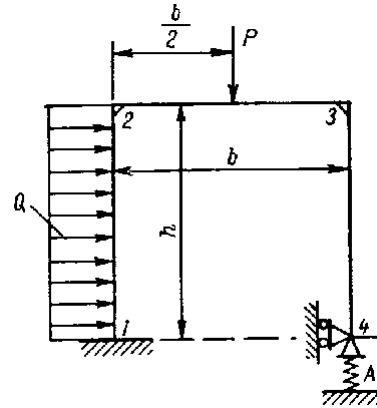
Sau khi giải hệ phương trình trên, ta tìm được:

$$M_1 = -0,00043ql^2; \quad M_2 = 0,044ql^2.$$

Biểu đồ moment uốn và lực cắt của khung, cho trên hình H.1.30



H.1.30



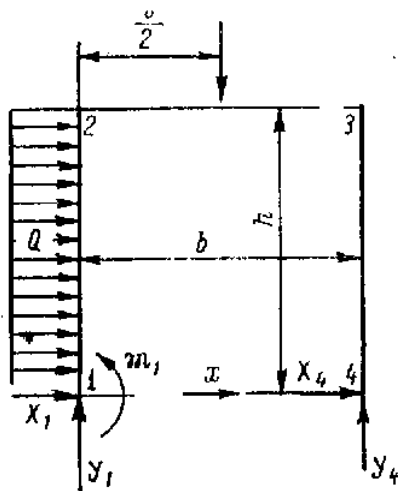
H.1.31

Ta hãy xét đến trường hợp khung có nút động.

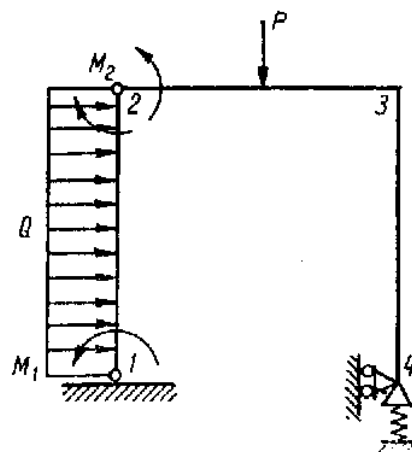
Trong thành phần kết cấu thân tàu, loại khung này rất ít thấy, chủ yếu là trong các kết cấu gia cường các lườn, kết cấu các thiết bị . . .

Ta giải cụ thể cho một khung chữ  $\Pi$  như trên hình H.1.31, làm ví dụ. Khung này có liên kết ngàm cứng tại nút số 1, tựa trên đế cứng theo phương nằm ngang và trên đế đàn hồi theo phương thẳng đứng. Nút số 2 và nút số 3 không có đế tựa. Như vậy, khung khảo sát thuộc loại có nút động.

Nút số 2 và nút số 3 có khả năng di động theo phương nằm ngang trong khi nút số 3 và nút số 4 – theo phương thẳng đứng. Do tính không thay đổi chiều dài của các thanh, ta cho chuyển vị ngang của các nút 2 và 3 như nhau, chuyển vị thẳng đứng của các nút 3 và 4 cũng như nhau với cùng lý do.



H.1.32



H.1.33

Để tính khung này, có thể dùng nhiều phương pháp khác nhau và cần phải chọn phương pháp nào đòi hỏi tốn ít công sức nhất. Số bậc siêu tĩnh của khung khảo sát là 2, vì với chỉ có 3 phương trình cân bằng tĩnh học nhưng lại có đến 5 phản lực liên kết cần xác



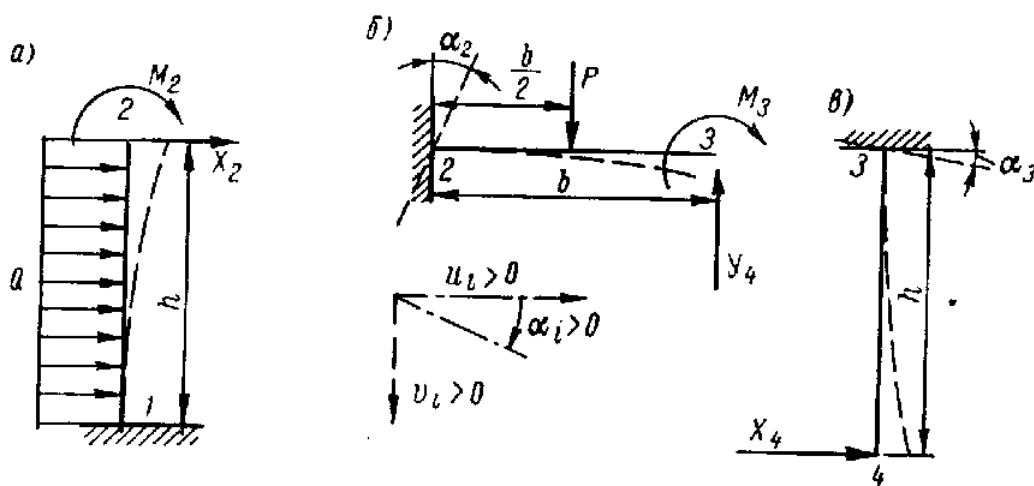
định. Hai ẩn số thừa đưa vào, có thể không chỉ là các phản lực liên kết, mà còn có thể là các nội lực của hệ. Muốn thế, ta chỉ việc đưa thêm vào kết cấu khung các bản lề hoặc các nhất cắt, sao cho khung khảo sát biến thành tập hợp các hệ tĩnh định. Cần chú ý một điều là, việc đưa thêm các bản lề và các mặt cắt vào khi tạo lập sơ đồ tính toán phải tuân thủ nguyên tắc là không được làm cho hệ trở thành biến hình.

Đối với khung cho trên H1.31, chẳng hạn, có thể đưa thêm vào kết cấu một bản lề tại nút số 1 và một bản lề tại nút số 2 (H.1.33). Khi đó, hệ siêu tĩnh ban đầu được phân thành hai phần, mà mỗi phần đều là một hệ tĩnh định. Để xác định các ẩn số thừa, cần lập điều kiện góc quay bằng 0 tại nút số 1 và tổng góc quay các tiết diện thanh tại nút số 2 bằng 0. Nếu như ta chọn phương án giải phóng 2 liên kết để đỡ tại nút số 4 để giải quyết bài toán, khi đó, các ẩn số thừa sẽ là  $X_4$  và  $Y_4$  (H.1.32). Điều kiện để xác định các ẩn số thừa lúc trong trường hợp này là, chuyển vị theo phương ngang tại nút số 4 bằng 0 và chuyển vị theo phương thẳng đứng của khung tại nút số 4 bằng chuyển vị của đế đàn hồi theo phương thẳng đứng, tại nút này.

Với cả 2 phương án trên, đều có thể sử dụng các bảng uốn dầm hoặc định lý Castigliano (sẽ trình bày trong chương V).

Tuy nhiên, cần chú ý một điều là, việc lập các phương trình theo cách này tốn rất nhiều công sức và trong nhiều trường hợp, có thể có cách lập và giải các ẩn số thừa một cách tiện lợi hơn.

Để minh họa cho điều vừa nêu, ta hãy lập và giải hệ phương trình khử siêu tĩnh cho khung có nút động, đang khảo sát, cho cả 2 phương án trên đây. Phương án thứ 1, chọn các phản lực đế tựa nút số 4,  $X_4$  và  $Y_4$  làm ẩn số, và khi đó, cần xác lập điều kiện chuyển vị của nút số 4. (H1.32). Phương án thứ 2 là chọn các moment  $M_1, M_2, M_3$  và hai chuyển vị: chuyển vị nằm ngang của thanh 2-3,  $f_1$ , và chuyển vị thẳng đứng của thanh 3-4,  $f_2$ , tức có tất cả 5 ẩn số (H.1.33)



H.1.34

Để giải bài toán theo phương án thứ nhất, cần lần lượt xác định 3 chuyển vị đối với mỗi nút: chuyển vị nằm ngang  $u_i$ , chuyển vị thẳng đứng  $v_i$  và chuyển vị góc  $\alpha_i$ . ta hãy bắt đầu từ nút số 2.

Từ hình H.1.32 suy ra

$$M_2 = P \frac{b}{2} - Y_4 b - X_4 h; \quad X_2 = X_4.$$

Chuyển vị của nút 2 (dương theo chiều biểu thị trên hình vẽ H.1.32), được xác định nhờ các bảng uốn dầm, và sau khi xử lý các số hạng đồng dạng, có kết quả sau:

$$u_2 = \frac{Qh^3}{8EI_{12}} + \frac{Pbh^2}{4EI_{12}} - \frac{Y_4bh^2}{2EI_{12}} - \frac{X_4h^3}{6EI_{12}};$$

$$v_2 = 0; \quad \alpha_3 = \frac{Qh^2}{6EI_{12}} + \frac{Pbh}{2EI_{12}} - \frac{Y_4bh}{EI_{12}} - \frac{X_4h^2}{2EI_{12}}.$$

Chuyển vị của nút 3 được xác định như là tổng chuyển vị của nút 2 với chuyển vị của nút 3 so với nút 2 (H.1.34-b):

$$u_3 = u_2; v_3 = \alpha_2 b + \bar{v}_3(P, M_3, Y_4);$$

$$\alpha_3 = \alpha_2 + \bar{\alpha}_3(P, M_3, Y_4)$$

Vì  $M_3 = X_4 h$ , ta có thể viết

$$v_3 = \frac{Qh^2b}{6EI_{12}} + \frac{Pbh^2}{2EI_{12}} \left( 1 + \frac{5}{24} \frac{b}{h} \frac{I_{12}}{I_{23}} \right) - \frac{Y_4b^2h}{EI_{12}} \left( 1 + \frac{1}{3} \frac{b}{h} \frac{I_{12}}{I_{23}} \right) - \frac{X_4bh^2}{2EI_{12}} \left( 1 + \frac{bI_{22}}{hI_{22}} \right);$$

$$\alpha_3 = \frac{Qh^3}{6EI_{12}} + \frac{Pbh}{2EI_{12}} \left( 1 + \frac{1}{4} \frac{b}{h} \frac{I_{12}}{I_{23}} \right) - \frac{Y_4bh}{EI_{12}} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{b}{h} \frac{I_{12}}{I_{23}} \right) - \frac{X_4h^2}{2EI_{12}} \left( 1 + 2 \frac{b}{h} \frac{I_{12}}{I_{23}} \right).$$

Chuyển vị của nút 4 là tổng chuyển vị của nút 3 và chuyển vị của nút 4 đối với nút 3 (H.1.33-b)

$$\left. \begin{aligned} u_4 &= u_3 - \alpha_3 h + \frac{X_4 h^3}{3EI_{34}}; \\ v_4 &= v_3; \\ \alpha_4 &= \alpha_3 - \frac{X_4 h^2}{2EI_{34}}. \end{aligned} \right\} \quad (9.1)$$

Góc xoay  $\alpha_4$  là không cần thiết cho mục tiêu khử siêu tĩnh, vì phương trình cần cho việc xác định các ẩn số thừa chỉ là

$$u_4 = 0; \quad v_4 = AY_4. \quad (9.2)$$

Thay các giá trị tính được của  $u_3$ ,  $v_3$  và  $\alpha_3$  theo (9.2) vào (9.1) ta có được hệ phương trình cần tìm sau đây:

$$\left. \begin{aligned} \frac{X_4 h^3}{3EI_{12}} \left( 1 + 3 \frac{b}{h} \frac{I_{12}}{I_{23}} + \frac{I_{12}}{I_{23}} \right) + \frac{Y_4 b h^2}{2EI_{12}} \left( 1 + \frac{b}{h} \frac{I_{12}}{I_{23}} \right) &= \frac{Qh^3}{24EI_{12}} + \frac{Pbh^2}{4EI_{12}} \left( 1 + \frac{b}{h} \frac{I_{12}}{I_{23}} \right); \\ \frac{X_4 b h^2}{2EI_{12}} \left( 1 + \frac{b}{h} \frac{I_{12}}{I_{23}} \right) + \frac{Y_4 b^2 h}{EI_{12}} \left( 1 + \frac{1}{3} \frac{b}{h} \frac{I_{12}}{I_{23}} + \frac{AEI_{12}}{b^2 h} \right) &= \frac{Qh^2 b}{6EI_{12}} + \frac{Pb^2 h}{2EI_{12}} \left( 1 + \frac{5}{24} \frac{b}{h} \frac{I_{12}}{I_{23}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (9.3)$$

Bây giờ ta lập hệ phương trình theo phương án thứ 2, cho việc khử siêu tĩnh.

1. Phương trình góc xoay bằng nhau của hai tiết diện trái và phải tại các nút 1,2 và 3:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{M_1 h}{3EI_{12}} - \frac{M_2 h}{6EI_{12}} + \frac{Qh^2}{24EI_{12}} + \frac{f_1}{h} &= 0; \\ \frac{M_1 h}{6EI_{12}} + \frac{M_2 h}{3EI_{12}} - \frac{Qh^2}{24EI_{12}} + \frac{f_1}{h} &= -\frac{M_2 b}{3EI_{23}} - \frac{M_3 b}{6EI_{23}} + \frac{Pb^2}{16EI_{23}} + \frac{f_2}{b}; \\ \frac{M_2 b}{6EI_{23}} + \frac{M_3 b}{3EI_{23}} - \frac{Pb^2}{16EI_{23}} + \frac{f_2}{b} &= -\frac{M_3 h}{3EI_{34}} + \frac{f_1}{h} \end{aligned} \right\} \quad (9.4)$$

2. Lập phương trình bổ sung:

$$-\frac{M_1}{h} + \frac{Q}{2} + \frac{M_2}{h} - \frac{M_3}{h} = 0$$

Từ đó:

$$\left. \begin{aligned} M_3 &= M_2 - M_1 + \frac{Qh}{2}; \\ f_2 &= A \left( \frac{P}{2} + \frac{M_3}{b} - \frac{M_2}{h} \right) = A \left( \frac{P}{2} + \frac{Qh}{2b} - \frac{M_1}{b} \right) \end{aligned} \right\} \quad (9.5)$$

Nhân cụm phương trình thứ nhất với  $\frac{6EI_{12}}{h}$  và khử bỏ  $f_1$ , ta thu được:

$$\begin{aligned} 3M_1 + 3M_2 \left( 1 + \frac{2}{3} \frac{b}{h} \frac{I_{12}}{I_{23}} \right) + M_3 \frac{b}{h} \frac{I_{12}}{I_{23}} &= \frac{Qh}{2} + \frac{3}{8} \frac{Pb^2}{h} \frac{I_{12}}{I_{23}} + \frac{6EI_{12}f_2}{hb}; \\ 2M_1 + M_2 \left( 1 - \frac{b}{h} \frac{I_{12}}{I_{23}} \right) - 2M_3 \left( \frac{h}{b} \frac{I_{12}}{I_{23}} + \frac{I_{12}}{I_{34}} \right) &= \frac{Qh}{4} - \frac{3}{8} \frac{Pb^2}{h} \frac{I_{12}}{I_{23}} + \frac{6EI_{12}}{bh} f_2' \end{aligned}$$

Sau khi thay  $M_3$  và  $f_2$  từ (9.5), ta thu được:

$$\left. \begin{aligned} & 3M_1 \left( 1 - \frac{1}{3} \frac{I_{12}}{I_{23}} + \frac{2EI_{12}A}{hb^2} \right) + 3M_2 \left( 1 + \frac{b}{h} \frac{I_{12}}{I_{23}} \right) = \\ & = \frac{Qh}{2} \left( 1 - \frac{b}{h} \frac{I_{12}}{I_{23}} + \frac{6EI_{12}A}{hb^2} \right) + \frac{3}{8} \frac{Pb^2}{h} \frac{I_{12}}{I_{23}} \left( 1 + \frac{8EI_{23}A}{b^3} \right); \\ & 2M_1 \left( 1 + \frac{b}{h} \frac{I_{12}}{I_{23}} + \frac{I_{12}}{I_{34}} + \frac{3EI_{12}A}{hb^2} \right) + M_2 \left( 1 - 3 \frac{b}{h} \frac{I_{12}}{I_{23}} - 2 \frac{I_{12}}{I_{34}} \right) = \\ & = \frac{Qh}{4} \left[ 1 + 4 \left( \frac{b}{h} \frac{I_{12}}{I_{23}} + \frac{I_{12}}{I_{34}} \right) + \frac{12EI_{12}A}{hb^2} \right] - \frac{3}{8} \frac{Pb^2 I_{12}}{hI_{23}} \left( 1 - \frac{8EI_{23}A}{b^3} \right) \end{aligned} \right\} \quad (9.6)$$

Việc giải các hệ phương trình (9.3) và (9.6) cho kết quả đồng nhất.

Nếu cụ thể hoá các dữ kiện, chẳng hạn, như sau:  $b = h$ ;  $I_{12} = 3I$ ;  $I_{34} = I_{23} = I$ ;  $A = \frac{1}{60} \frac{b^3}{EI}$ , phương trình (9.3) khi đó sẽ là:

$$\begin{aligned} 26X_4 + 12Y_4 &= 0,25Q + 3,75P; \\ 12X_4 + 12,3Y_4 &= Q + 4,487P. \end{aligned}$$

Giải hệ này, thu được:

$$\begin{aligned} X_4 &= -0,05Q - 0,07P; \\ Y_4 &= 0,13Q + 0,46P. \end{aligned}$$

Các moment nút sẽ là:

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{Qh}{2} + \frac{Pb}{2} - Y_4 b = 0,37Qh + 0,035Pb; \\ M_2 &= \frac{Pb}{2} - Y_4 b - X_4 h = 0,08Qh + 0,105Pb; \\ M_3 &= -X_4 h = 0,05Qh + 0,105Pb; \end{aligned}$$

Trong khi đó, hệ phương trình (9.6) có dạng:

$$\begin{aligned} 0,3M_1 + 12M_2 &= 1,275Pb - 0,85Qh; \\ 14,3M_1 - 14M_2 &= -0,975Pb + 6,4Qh. \end{aligned}$$

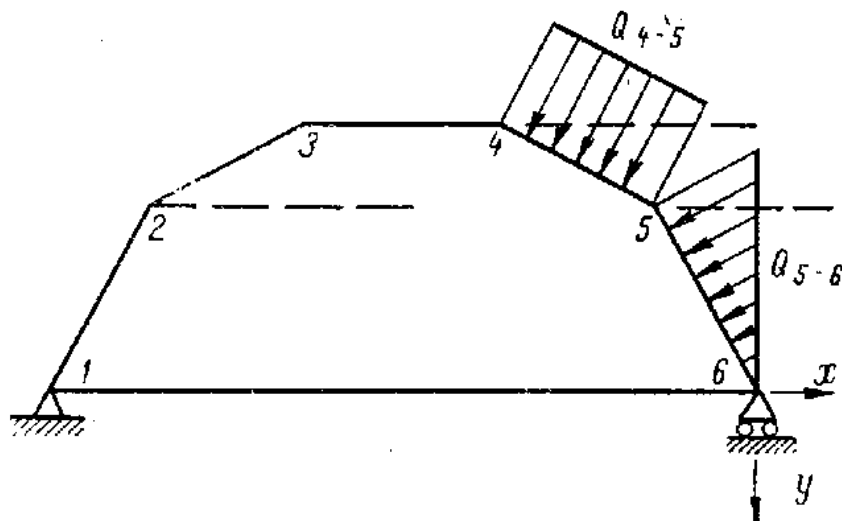
Giải hệ phương trình trên, thu được:

$$\begin{aligned} M_1 &= 0,37Qh + 0,035Pb; \\ M_2 &= -0,08Qh + 0,105Pb; \\ M_3 &= M_2 - M_1 + \frac{Qh}{2} = 0,05Qh + 0,07Pb. \end{aligned}$$

Trong ví dụ cụ thể trên đây, cả 2 phương án có khối lượng tính toán như nhau nhưng phương án 2 ưu việt hơn vì nó cho kết quả trực tiếp là các moment uốn, còn theo phương án

1, để có các moment uốn cần phải tính tiếp từ các nghiệm  $X_4$  và  $Y_4$  vừa tìm được. (Cần nhớ rằng, moment uốn luôn là mục tiêu số 1 của quá trình tính toán uốn dầm và hệ thanh).

Trong thực tế còn gặp trường hợp khung nút động với các thanh liên kết xiên góc với nhau tại nút (và như vậy, miền, giới hạn bởi các thanh, sẽ không phẳng- hình H1.35) .



H.1.35

Để tính toán cho khung trong ví dụ trên, có thể áp dụng cả hai cách trình bày trên đây. Trong cách thứ nhất, chọn moment và lực cắt tại nhất cắt rời khung, trong cách thứ 2, chọn các moment tại tất cả 6 nút và 5 góc xoay trục thanh (góc lệch) làm ẩn số, tổng cộng là 11 ẩn số, thay cho 3 ẩn của cách thứ nhất.

Để xác định 3 ẩn số theo cách thứ nhất, cần phải lập phương trình bằng nhau của 2 chuyển vị tịnh tiến và của 1 chuyển vị góc cho các tiết diện, về 2 phía của nhất cắt.

Để xác định 11 ẩn số của cách thứ 2, cần thiết lập 6 phương trình liên tục góc xoay tại các nút (phương trình 3 moment) hai phương trình động học của liên kết biểu thị điều kiện cố định của đầu các thanh 1-2 và 5-6 tại nút số 1 và nút số 6 cùng với 3 phương trình cân bằng cho từng thanh rời của khung dưới tác dụng của các lực do các thanh lân cận tác dụng vào.

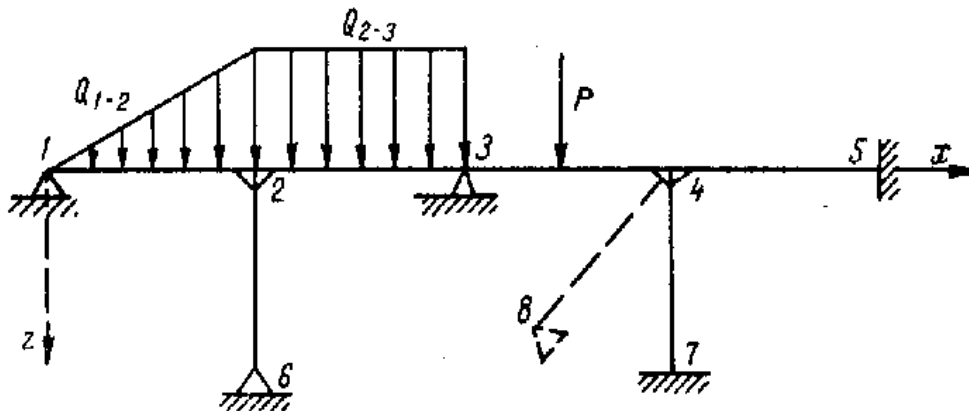
Như vậy là, đối với khung khảo sát, cách thứ nhất đơn giản hơn.

## &10- CÁC QUAN HỆ CƠ BẢN CỦA PHƯƠNG PHÁP CHUYỂN VỊ GÓC

Trong tính toán dầm liên tục nhiều nhịp và các khung đơn giản, ta đã chọn các moment nút làm ẩn cơ bản. Giá trị các moment này được xác định từ điều kiện bằng nhau của góc xoay các tiết diện đầu thanh tại nút chung. Phương pháp tính toán này hoàn toàn hữu dụng khi mà giá trị của moment các tiết diện đầu thanh tại một nút là như nhau. Điều này luôn xảy ra trong trường hợp của dầm liên tục, khi không có liên kết ngoài tại nút.

Tuy nhiên, trong thực tế rất thường gặp kết cấu dầm liên nhịp có một hoặc một số ngàm đàn hồi tại các đế trung gian. Ví dụ như trường hợp biểu thị trên hình H.1.36, tại nút 2 và nút 4, có các thanh chống đỡ, gắn kết chắc với dầm chính. Goá xoay tiết diện đầu thanh của các thanh 1-2 và 2-3 tại đế số 2 không bằng nhau, vì khi xoắn nút 2 sẽ xuất hiện moment cả trên đầu thanh 2-6. Vì tổng moment tác dụng lên nút phải bằng 0 nên hai moment  $M_{12}$ ,  $M_{23}$  không thể bằng nhau. Cũng như vậy đối với thanh 3-4 và 4-5 tại nút số 4, vì sự có mặt của thanh 4-7.

Vậy là, tại các nút 2 và 4 trên đây, mỗi nút tương ứng với không phải 1, như trường hợp khung đơn giản trước đây, mà là 3momen ẩn.



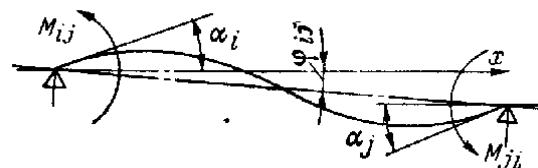
H.1.36

Vấn đề sẽ còn phức tạp hơn nhiều nếu như, chẳng hạn, tại nút 4 có thêm thanh 4-8 như thể hiện trên H.1.36 bằng nét đứt. Khi đó, tại nút 4 có đến 4 moment ẩn. Như vậy là, khi tại các nút có các ngàm đàn hồi hoặc, nói cách khác, khi mà số đầu thanh tại mỗi nút lớn hơn 2, số moment ẩn lớn hơn số nút, thì phương pháp chọn moment đầu thanh làm ẩn số cơ bản và việc chỉ sử dụng điều kiện liên tục về góc xoay để khử siêu tĩnh, như đã làm trên đây, trong trường hợp dầm liên nhịp và khung đơn giản, nút cố định, là không thể sử dụng được.

Việc tính toán khung nói trên sẽ đơn giản hơn rất nhiều, nếu như ta chọn góc xoay các nút làm ẩn số cơ bản, còn phương trình khử siêu tĩnh lập được trên cơ sở điều kiện cân bằng của từng nút. Phương pháp nói trên có tên là *phương pháp chuyển vị góc*. Phương pháp chuyển vị góc áp dụng rất hiệu quả trong việc giải các dầm liên nhịp với ngàm đàn hồi trung gian cũng như giải khung phức tạp.

Để lập các phương trình của phương pháp nói trên, trước tiên hãy biểu diễn moment uốn đầu thanh(gọi tắt là *moment đế*) qua các góc xoay

của tiết diện đầu thanh và góc xoay của thanh như một vật rắn, xảy ra khi các tiết diện đế của dầm chuyển vị tịnh tiến.



H.1.37

Để tiện lợi cho việc lập các phương trình cân bằng nút, nên thay đổi qui ước dấu đã nêu trên đây và coi moment để dương khi nó tác dụng ngược chiều kim đồng hồ; góc xoay tiết diện đế của thanh và góc xoay dầm như vật rắn, cũng như trước đây, coi là dương khi thuận chiều kim đồng hồ.

Ta xét dầm giữa các đế  $i$  và  $j$ , biểu thị trên H.1.37. Vì góc xoay các tiết diện đầu thanh tại mỗi nút là như nhau nên ta ký hiệu chúng bằng một chỉ số, đó chính là số thứ tự nút khảo sát; Các đại lượng moment đế, góc lệch, chiều dài thanh – bằng 2 chỉ số, chỉ ra số thứ tự nút đầu và nút cuối của nhịp. Trong đó, đối với các đại lượng như moment và góc lệch, chỉ số thứ nhất chỉ ra tiết diện mà đại lượng này liên quan trực tiếp đến.

Đối với dầm khảo sát, góc xoay của các tiết diện đế được xác định nhờ các công thức sau

$$\begin{aligned}\alpha_i &= -\frac{M_{ij}l_{ij}}{3EI_{ij}} + \frac{M_{ji}l_{ij}}{6EI_{ij}} + \alpha_i(Q_{ij}) + \varphi_{ij}; \\ \alpha_j &= -\frac{M_{ji}l_{ij}}{3EI_{ij}} + \frac{M_{ij}l_{ij}}{6EI_{ij}} + \alpha_j(Q_{ij}) + \varphi_{ij},\end{aligned}$$

trong đó,  $\varphi_{ij}$  - góc quay của dầm như một vật rắn (góc lệch);

$\alpha_i(Q_{ij})$   $\alpha_j(Q_{ij})$  - góc xoay do tải trọng nhịp.

Giải ra đối với các moment, ta được

$$\left. \begin{aligned}M_{ij} &= \frac{2EI_{ij}}{l_{ij}}[2\alpha_i(Q_{ij}) + \alpha_j(Q_{ij})] - \frac{2EI_{ij}}{l_{ij}}(2\alpha_i + \alpha_j - 3\varphi_{ij}); \\ M_{ji} &= \frac{2EI_{ij}}{l_{ij}}[2\alpha_j(Q_{ij}) + \alpha_i(Q_{ij})] - \frac{2EI_{ij}}{l_{ij}}(2\alpha_j + \alpha_i - 3\varphi_{ij})\end{aligned} \right\} \quad (10.1)$$

Nếu như trong các biểu thức trên, cho  $\alpha_i = \alpha_j = \varphi_{ij} = 0$ , ta thu được biểu thức moment đế của dầm khảo sát, với giả thiết là hai đầu dầm ngàm cứng trên đế cứng. Để cho đơn giản các biểu thức sau này, ta đưa vào các ký hiệu

$$\left. \begin{aligned}\overline{M}_{ij} &= \frac{2EI_{ij}}{l_{ij}}[2\alpha_i(Q_{ij}) + \alpha_j(Q_{ij})]; \\ \overline{M}_{ji} &= \frac{2EI_{ij}}{l_{ij}}[2\alpha_j(Q_{ij}) + \alpha_i(Q_{ij})].\end{aligned} \right\} \quad (10.2)$$

Khi đó, có thể viết lại công thức (10.1) dưới dạng

$$\left. \begin{aligned}M_{ij} &= \overline{M}_{ij} - k_{ij}K_0(2\alpha_i + \alpha_j - 3\varphi_{ij}) \\ M_{ji} &= \overline{M}_{ji} - k_{ij}K_0(2\alpha_j + \alpha_i - 3\varphi_{ij})\end{aligned} \right\} \quad (10.3)$$

trong đó, 
$$K_0 = \frac{2EI_0}{l_0}; \quad k_{ij} = \frac{I_{ij}}{I_0} \frac{l_0}{l_{ij}}, \quad (10.4)$$

Các moment  $\overline{M}_{ij}$ ,  $\overline{M}_{ji}$ , được xác định theo các bảng uốn dầm một nhịp. Khi sử dụng các công thức trong các bảng này, dấu các moment cần xác định sao cho phù hợp với qui tắc mà ta đã ấn định trước. Khi cần để ý đến biến dạng cắt, sử dụng công thức (5.12).

### &11- TÍNH KHUNG PHỨC TẠP CÓ NÚT CỐ ĐỊNH

Khi tính khung phức tạp, tức khung mà tại các nút của nó có nhiều hơn 2 thanh, nên sử dụng phương pháp chuyển vị góc. Phương trình khử siêu tĩnh trong trường hợp này lập theo điều kiện cân bằng của từng nút.

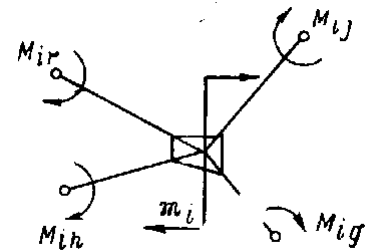
Để làm ví dụ, ta lập phương trình cân bằng cho nút thứ  $i$  của khung. Muốn thế, ta tách một nút ra khỏi khung để khảo sát và thay tác dụng của các thanh lên nút bằng các moment đầu thanh  $M_{ij}$ . Theo qui ước dấu moment (đã điều chỉnh), moment đầu thanh là dương khi tác dụng ngược chiều kim đồng hồ, do đó, moment mà thanh tác dụng vào nút là dương khi tác dụng theo chiều kim đồng hồ. Biểu diễn trên H.1.38 là các moment tác dụng vào nút ứng với trường hợp các moment đầu thanh là dương. (H.1.38)

Phương trình cân bằng nút có dạng

$$M_{ij} + M_{ig} + M_{ir} + M_{ih} + m_i = 0, \quad (11.1)$$

trong đó,  $m_i$  – moment ngoại lực tác dụng vào nút  $i$  – dương khi thuận chiều kim đồng hồ.

Sử dụng các quan hệ (10.3) để biểu diễn các moment đầu thanh qua góc xoay, với  $\varphi_{ij} = 0$  vì trong trường hợp khảo sát, nút cố định, ta có thể viết lại phương trình (11.1) dưới dạng



H.1.38

$$\begin{aligned} k_{ij}(2\alpha_i + \alpha_j) + k_{ig}(2\alpha_i + \alpha_g) + k_{ih}(2\alpha_i + \alpha_h) + k_{ir}(2\alpha_i + \alpha_r) = \\ = \frac{1}{K_0} [m_i + \overline{M}_{ij} + \overline{M}_{ig} + \overline{M}_{ih} + \overline{M}_{ir}]. \end{aligned}$$

Trường hợp tổng quát, phương trình cân bằng nút thứ  $i$  có dạng

$$2\alpha_i \sum_j k_{ij} + \sum_j k_{ij} \alpha_j = \frac{1}{K_0} \left[ m_i + \sum_j \overline{M}_{ij} \right], \quad (11.2)$$

trong đó,  $\alpha_j$  được lấy theo tất cả các giá trị của  $j$  tương ứng với nút khảo sát.

Phương trình (11.2) lập được cho mỗi nút của khung, có nghĩa là số phương trình lập được bằng số nút của khung, và như vậy, số phương trình bằng số ẩn số-góc xoay nút.

Ta hãy chú ý đến một số đặc điểm của hệ phương trình lập được sau đây:

- 1- Hệ phương trình lập được luôn là chính tắc. Khi giải bằng bảng, cần sắp xếp các phương trình (11.2) theo trình tự đánh số các nút.
- 2- Các hệ số bên cạnh các ẩn số-góc xoay nút  $\alpha_i$  trên đường chéo chính bằng 2 lần tổng các hệ số còn lại trong phương trình cân bằng góc cho nút thứ  $i$ .



Sau khi xác định được tất cả các ẩn số góc xoay nút, dễ dàng xác định được các moment tại tất cả các đầu thanh theo công thức (10.3), và đây cũng chính là mục đích chính của việc tính toán.

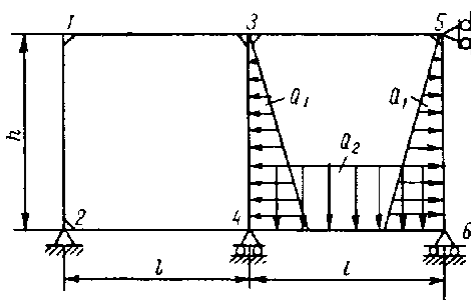
Cần chú ý đến sự khác nhau cơ bản giữa phương pháp tính khung đơn giản và khung phức tạp.

Khi tính khung đơn giản, ta chọn ẩn cơ bản là các moment nút và phương trình khử siêu tĩnh thành lập được trên cơ sở điều kiện liên tục góc xoay tại tiết diện các nút. Điều kiện cân bằng khi đó tự động thoả mãn vì tại mỗi nút chỉ có 2 đầu thanh, và việc moment tại hai đầu thanh này lấy bằng nhau về trị số, ngược chiều tác dụng, bảo đảm điều kiện cân bằng của nút, khi không có moment ngoại lực tác dụng vào nút.

Khi giải khung phức tạp, nút cố định, hệ phương trình khử siêu tĩnh được thành lập trên cơ sở điều kiện cân bằng các nút, với ẩn cơ bản là các góc xoay nút. Điều kiện liên tục biến dạng ở đây được tự thoả mãn, vì góc xoay đầu thanh của tất cả các thanh tại một nút đều bằng nhau. Moment đầu thanh tại các nút được xác định theo góc xoay của các nút, là ẩn của hệ phương trình khử siêu tĩnh. Có nghĩa là, sau khi giải hệ phương trình trên, xác định được các góc xoay, và từ đó, xác định được các moment đầu thanh cần tìm.

Khi giải khung đơn giản, các moment nút (moment đế) được chọn làm ẩn cơ bản. Phương trình khử siêu tĩnh lập được từ điều kiện liên tục của góc xoay. Phương pháp như thế được gọi là *phương pháp lực*. trong tính toán khung phức tạp, ẩn cơ bản lại là các góc xoay, phương trình khử siêu tĩnh lập được từ điều kiện cân bằng các nút. Phương pháp này có tên là *phương pháp chuyển vị*. Ưu điểm cơ bản của phương pháp chuyển vị là số ẩn cơ bản, trong nhiều trường hợp, nhỏ hơn số bậc siêu tĩnh của hệ khảo sát.

Để minh hoạ cho phương pháp chuyển vị, ta xét một khung sườn khoả tàu chở dầu điển hình với một vách dọc giữa, trong trường hợp khoang bên phải nhận đầy nước.(H.1.39)

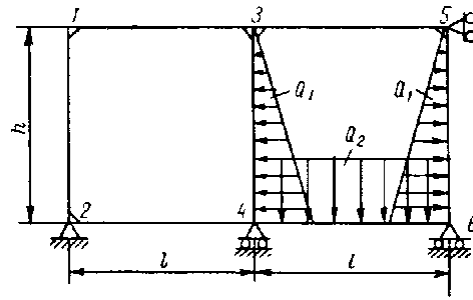


H.1.39

Vì khung khảo sát là đối xứng còn tải trọng là không đối xứng, nên, một cách hợp lý, ta phân tải trọng ra làm 2 thành phần, một thành phần đối xứng và một thành phần phản xứng, sao cho khi cộng hai thành phần này lại với nhau, ta được trạng thái tải trọng ban đầu. Việc giải tiến hành riêng biệt với từng thành phần tải trọng, kết quả cần tìm sẽ là tổng tương ứng của hai kết quả thành phần.

Sơ đồ khung khảo sát với thành phần tải trọng đối xứng, cho ở hình H.1.39, còn còn khung với thành phần tải trọng phản xứng, biểu diễn trên hình H.1.40.

Đối với khung có trạng thái tải trọng đối xứng, các nút đối xứng nhau, có góc quay cũng đối xứng, tức bằng nhau về trị số như nhưng ngược dấu, tức xoay ngược chiều, theo đúng qui ước dấu đã định, đồng thời các góc quay trên trục đối xứng bằng 0. Còn với khung chịu trạng thái tải trọng phản xứng, góc xoay của các nút cũng phản xứng, tức, góc xoay của các nút đối xứng nhau, bằng nhau về trị số và cùng dấu, tức xoay cùng chiều.



H.1.40

Giả sử, cho biết:

$$l_{12} = l_{34} = l_{56} = l_{13} = l_{35} = l_{24} = l_{46} = l$$

$$I_{12} = I_{34} = I_{56} = I_{13} = I_{35} = I;$$

$$I_{24} = I_{46} = 2I;$$

$$Q_1 = 0,5ql; \quad Q_2 = ql.$$

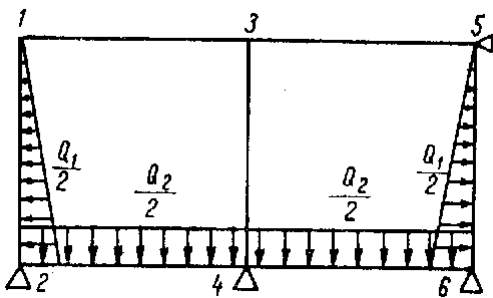
Ta hãy lập phương trình cân bằng cho khung chịu tải trọng đối xứng (H.1.41). Để khử siêu tĩnh, chỉ cần xét cân bằng cho các nút 1 và 2 là đủ, vì từ đặc điểm đối xứng của kết cấu và của tải trọng, cần ta đã có  $\alpha_3 = \alpha_4 = 0$ ;  $\alpha_5 = -\alpha_1$  và  $\alpha_6 = -\alpha_2$ .

Theo các bảng uốn dầm, ta xác định các moment uốn tại đế của các thanh, khi coi là chúng chịu ngàm cứng hai đầu.

$$\overline{M}'_{31} = \overline{M}'_{13} = 0; \quad \overline{M}'_{12} = \frac{0,5Q_1 l_{12}}{15} = 0,0167ql^2;$$

$$\overline{M}'_{21} = -\frac{0,5Q_1 l_{12}}{10} = -0,025ql^2;$$

$$\overline{M}'_{24} = -\overline{M}'_{42} = \frac{0,5Q_2 l_{24}}{12} = 0,0415ql^2.$$



H.1.41

Theo (10.4), độ cứng tương đối của các thanh sẽ là:

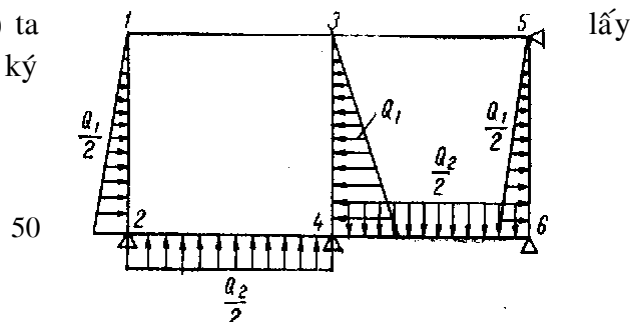
$$k_{12} = \frac{I_{12}l}{\Pi_{12}} = 1; \quad k_{13} = \frac{I_{13}l}{\Pi_{13}} = 1; \quad k_{24} = \frac{I_{24}l}{\Pi_{24}} = 2.$$

Đối với dầm đối xứng này, ta cần viết 2 phương trình cân bằng nút:

$$M'_{12} + M'_{13} = 0; \quad \text{và} \quad M'_{24} + M'_{21} = 0.$$

H.1.41

Khi tính các moment đế theo (10.3) ta  $\varphi_{ij} = 0$ , vì các nút là cố định. Đưa thêm các ký hiệu  $K_0 \alpha'_i = x'_i$ , ta có:



$$\begin{aligned}
 M'_{12} &= \overline{\overline{M}}'_{12} = k_{12}(2x'_1 + x'_2) = \\
 &= 0,016ql^2 - 2x'_1 - x'_2; \\
 M'_{13} &= \overline{\overline{M}}'_{13} - k_{13}(2x'_1 + x'_3) = \\
 &= - - 2x'_1 \text{ vì } \alpha'_3 = 0; \\
 M'_{21} &= \overline{\overline{M}}'_{21} - k_{12}(2x'_2 + x'_1) = \\
 &= -0,025ql^2 - 2x'_2 - x'_1;
 \end{aligned}$$

H.1.42

$$M'_{24} = \overline{\overline{M}}'_{24} - k_{24}(2x'_2 + x'_4) = 0,0415ql^2 - 4x'_2, \text{ vì } \alpha'_4 = 0;$$

Sau khi thay các giá trị moment đế vào các phương trình cân bằng cho khung với tải trọng đối xứng, ta được:

$$4x'_1 + x'_2 = 0,0167ql^2; \quad x'_1 + 6x'_2 = 0,0165ql^2;$$

Giải hệ phương trình trên, thu được:  $x'_1 = 35,8 \cdot 10^{-4} ql^2$ ;  $x'_2 = 21,5 \cdot 10^{-4} ql^2$ .

Sau khi thay các giá trị tìm được vào các biểu thức moment đế, ta có kết quả:

$$M'_{12} = 72 \cdot 10^{-4} ql^2; \quad M'_{13} = -71,610^{-4} ql^2; \quad M'_{21} = -329 \cdot 10^{-4} ql^2; \quad M'_{24} = 329 \cdot 10^{-4} ql^2.$$

Moment uốn tại các nút trên trục đối xứng được xác định theo các công thức:

$$M'_{31} = -k_{13}x'_1 = -3,58 \cdot 10^{-3} ql^2;$$

$$M'_{42} = \overline{\overline{M}}'_{42} - k_{24}x'_2 = -41,5 \cdot 10^{-3} ql^2 - 2 \cdot 21,5 \cdot 10^{-3} ql^2 = -45,8 \cdot 10^{-3} ql^2;$$

Tiếp đến, lập phương trình cho khung chịu tải trọng phản xứng (H.1.41). Để khử siêu tĩnh cho khung, cần lập phương trình cân bằng cho các nút 1, 2, 3 và 4, vì, từ tính chất phản xứng của chuyển vị, ta có  $\alpha_5 = \alpha_1$  và  $\alpha_6 = \alpha_2$ , ngoài ra, các moment đế đối xứng, tương ứng, bằng nhau về trị số và cùng dấu  $M''_{42} = M''_{46}$ ;  $M''_{64} = M''_{24}$  và v.v...

Moment tại các đế, tính với giả thiết các đế này chịu ngàm cứng, sẽ như sau:

$$\overline{\overline{M}}''_{13} = \overline{\overline{M}}''_{31} = \overline{\overline{M}}''_{35} = \overline{\overline{M}}''_{53} = 0;$$

$$\overline{\overline{M}}''_{12} = -\frac{0,5Q_1 l_{12}}{15} = -0,0167ql^2;$$

$$\overline{\overline{M}}''_{21} = \frac{0,5Q_1 l_{12}}{10} = 0,025ql^2;$$

$$\overline{\overline{M}}''_{42} = \overline{\overline{M}}''_{46} = -\overline{\overline{M}}''_{24} = -\overline{\overline{M}}''_{64} = 41,5 \cdot 10^{-3} ql^2;$$

$$\overline{\overline{M}}''_{34} = \frac{Q_1 l_{34}}{15} = 0,0333ql^2;$$

$$\overline{\overline{M}}''_{43} = -\frac{Q_1 l_{34}}{10} = -0,05ql^2,$$

Do độ cứng tương đối của các thanh đối xứng nhau là như nhau, ta có :

$$k_{12} = k_{13} = k_{34} = k_{35} = 1; \quad k_{24} = k_{46} = 2.$$

Đối với khung chịu tải trọng phản xứng đang khảo sát, cần viết 4 phương trình cân bằng cho các nút:

$$\begin{aligned} M_{12}'' + M_{13}'' &= 0; & M_{21}'' + M_{24}'' &= 0; \\ M_{31}'' + M_{34}'' + M_{35}'' &= 0; & M_{42}'' + M_{43}'' + M_{46}'' &= 0. \end{aligned}$$

Trong trường hợp biến dạng phản xứng,  $M_{31}'' = M_{35}''$ ,  $M_{42}'' = M_{46}''$ , và do đó, có thể rút gọn 2 phương trình cuối thành:

$$M_{34}'' + 2M_{31}'' = 0; \quad M_{43}'' + 2M_{42}'' = 0.$$

Biểu thức các moment để , xác định theo công thức (10.3) , với  $\varphi_{ij} = 0$  và ký hiệu  $K_0 \alpha_i'' = x_i''$  có dạng sau đây :

$$\begin{aligned} M_{12}'' &= \overline{\overline{M}}_{12}'' - k_{12}(2x_1'' + x_2'') = -0,0167ql^2 - 2x_1'' - x_2''; \\ M_{13}'' &= \overline{\overline{M}}_{13}'' - k_{13}(2x_1'' + x_3'') = -2x_1'' - x_3''; \\ M_{21}'' &= \overline{\overline{M}}_{21}'' - k_{12}(2x_2'' + x_1'') = 0,025ql^2 - 2x_2'' - x_1''; \\ M_{24}'' &= \overline{\overline{M}}_{24}'' - k_{24}(2x_2'' + x_4'') = -0,0415ql^2; \\ M_{31}'' &= \overline{\overline{M}}_{31}'' - k_{13}(2x_3'' + x_1'') = -2x_1'' - x_3''; \\ M_{34}'' &= \overline{\overline{M}}_{34}'' - k_{34}(2x_3'' + x_4'') = 0,0333ql^2 - 2x_3'' - x_4''; \\ M_{42}'' &= \overline{\overline{M}}_{42}'' - k_{24}(2x_4'' + x_2'') = 0,0415ql^2 - 4x_4'' - 2x_2''; \\ M_{43}'' &= \overline{\overline{M}}_{43}'' - k_{34}(2x_4'' + x_3'') = -0,05ql^2 - 2x_4'' - x_3''. \end{aligned}$$

Sau khi thay giá trị moment để ngàm cứng vào các biểu thức trên, rồi thay kết quả vào hệ phương trình cân bằng nút, ta biến đổi được hệ phương trình này về dạng sau:

$$\begin{aligned} 4x_1'' + x_2'' + x_3'' &= -0,0167ql^2; \\ x_1'' + 6x_2'' + x_4'' &= -0,0165ql^2; \\ 2x_1'' + 6x_3'' + x_4'' &= 0,0333ql^2; \\ 4x_2'' + x_3'' + 10x_4'' &= 0,033ql^2. \end{aligned}$$

Các hệ số của hệ phương trình kết quả là đối xứng qua đường chéo chính . Tính chất này có được là nhờ ta đã sử dụng tính chất phản xứng để giản ước các ẩn số. Tổng các hệ số ngoài đường chéo chính bằng một phần hai hệ số trên đường chéo này.

Để giải hệ phương trình nói trên, có thể sử dụng một phương pháp thông dụng của đại số, đó là phương pháp Gauss.

Kết quả việc giải hệ phương trình này cho ta:

$$x_1'' = -5,01 \cdot 10^{-3} ql^2; x_2'' = -3,18 \cdot 10^{-3} ql^2; x_3'' = 6,56 \cdot 10^{-3} ql^2; x_4'' = 3,92 \cdot 10^{-3} ql^2.$$

Thay các giá trị  $x_i''$  thu được vào các biểu thức moment để, ta tìm được giá trị của các moment để

$$\begin{aligned}M_{12}'' &= -3,3 \cdot 10^{-3} ql^2; M_{13}'' = 3,46 \cdot 10^{-3} ql^2, \\M_{21}'' &= 36,4 \cdot 10^{-3} ql^2; M_{24}'' = -36,6 \cdot 10^{-3} ql^2; \\M_{31}'' &= -8,11 \cdot 10^{-3} ql^2; M_{34}'' = 16,26 \cdot 10^{-3} ql^2; \\M_{42}'' &= 32,18 \cdot 10^{-3} ql^2; M_{43}'' = -64,4 \cdot 10^{-3} ql^2.\end{aligned}$$

Cộng hai thành phần moment để tương ứng với hai trường hợp, tải trọng đối xứng và tải trọng phản xứng, cho từng để, ta được moment uốn kết quả tại các tiết diện đầu thanh:

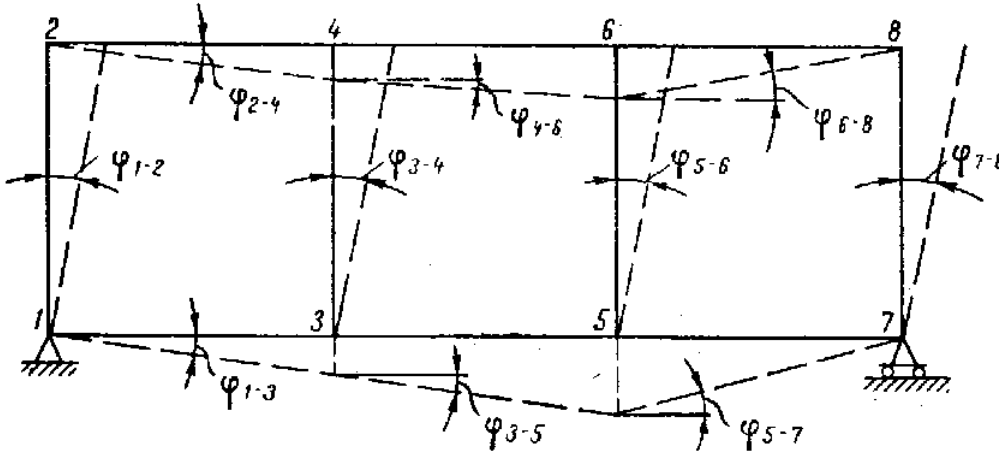
$$\begin{aligned}M_{12} &= M_{12}' + M_{12}'' = (7,2 - 3,5) \cdot 10^{-3} ql^2 = 3,7 \cdot 10^{-3} ql^2; \\M_{13} &= M_{13}' + M_{13}'' = (-7,16 + 3,46) \cdot 10^{-3} ql^2 = -3,7 \cdot 10^{-3} ql^2; \\M_{21} &= M_{21}' + M_{21}'' = (-32,9 + 36,4) \cdot 10^{-3} ql^2 = 3,5 \cdot 10^{-3} ql^2; \\M_{24} &= M_{24}' + M_{24}'' = (32,9 - 36,6) \cdot 10^{-3} ql^2 = -3,7 \cdot 10^{-3} ql^2; \\M_{31} &= M_{31}' + M_{31}'' = (-3,58 - 8,11) \cdot 10^{-3} ql^2 = -11,69 ql^2; \\M_{34} &= M_{34}'' = 16,26 \cdot 10^{-3} ql^2; \\M_{35} &= M_{35}' + M_{35}'' = -M_{31}' + M_{31}'' = (5,86 - 8,11) \cdot 10^{-3} ql^2 = -13,62 \cdot 10^{-3} ql^2; \\M_{42} &= M_{42}' + M_{42}'' = (-45,8 - 32,18) \cdot 10^{-3} ql^2 = -13,62 ql^2; \\M_{43} &= M_{43}'' = -64,4 \cdot 10^{-3} ql^2; \\M_{46} &= -M_{42}'' + M_{42}'' = (45,8 - 32,18) \cdot 10^{-3} ql^2; \\M_{53} &= -M_{13}' + M_{13}'' = (7,16 - 3,46) \cdot 10^{-3} ql^2 = 16,62 \cdot 10^{-3} ql^2; \\M_{56} &= -M_{12}' + M_{12}'' = (-7,2 - 3,5) \cdot 10^{-3} ql^2 = -10,7 \cdot 10^{-3} ql^2; \\M_{64} &= M_{24}' + M_{24}'' = (32,9 + 36,4) \cdot 10^{-3} ql^2 = -69,5 \cdot 10^{-3} ql^2; \\M_{65} &= -M_{21}' + M_{21}'' = (32,9 + 36,4) \cdot 10^{-3} ql^2 = 69,3 \cdot 10^{-3} ql^2.\end{aligned}$$

Sau khi xác định tất cả các moment để, tiến hành kiểm tra điều kiện cân bằng nút, ví dụ như:  $M_{31} + M_{34} + M_{35} = (-11,69 + 16,26 - 4,53) \cdot 10^{-3} ql^2 = 0,04 \cdot 10^{-3} ql^2$ .

Sai số là :  $(0,04 \cdot 100) / (11,69 + 16,26 + 4,53) = 4 / 32,48 = 0,12\%$ .

## **&12- TÍNH KHUNG PHỨC TẠP CÓ NÚT ĐỘNG, CÁC THANH TRỰC GIAO**

Trong kết cấu thân tàu, các đà ngang hở trong thành phần đáy đôi, có thể mô hình hoá thành khung phức tạp với nút động. Tính toán khung phức tạp có nút động khác khung nút cố định ở chỗ, do sự có mặt của nút động nên phát sinh các ẩn số góc lệch bổ sung  $\varphi_{ij}$ .



H.1.43

Để khử siêu tĩnh cho khung loại này, ngoài phương trình cân bằng viết riêng rẽ cho từng nút, cần lập các phương trình bổ sung trên cơ sở của nguyên lý di chuyển khả dĩ.

Việc lập các phương trình bổ sung cho khung trong trường hợp hệ thanh trực giao, thường không mấy khó khăn, vì giữa các góc lệch  $\varphi_{ij}$  luôn tồn tại các quan hệ động học đơn giản, cho phép giảm đáng kể số ẩn số -góc lệch. Chẳng hạn trong trường hợp khung cho trên hình H.1.43, (loại khung này đôi khi còn được gọi là dàn không thanh giằng), số ẩn số-góc lệch, vốn bằng số thanh, đã giảm xuống đáng kể trên cơ sở các phân tích như sau:

1- do giả thiết về tính chất không biến đổi chiều dài các thanh khi biến dạng và các thanh trực giao nhau(hay miền giới hạn bởi các thanh là chữ nhật), có thể kết luận là góc lệch của các thanh song song nhau là bằng nhau, tức,

$$\varphi_{12} = \varphi_{34} = \varphi_{56} = \varphi_{78}; \quad \varphi_{24} = \varphi_{13}; \quad \varphi_{46} = \varphi_{35}; \quad \varphi_{68} = \varphi_{57}.$$

2- vì ở dàn khảo sát, nút 1 và nút 7 cố định nên tồn tại quan hệ sau (xác định chuyển vị thẳng đứng của nút 7 so với nút 1 bằng 0).

$$\varphi_{13}l_{13} + \varphi_{35}l_{35} + \varphi_{57}l_{57} = 0, \quad (12.1)$$

từ đó, suy ra

$$\varphi_{57} = -\varphi_{13} \frac{l_{13}}{l_{57}} - \varphi_{35} \frac{l_{35}}{l_{57}}$$

như vậy, đối với khung khảo sát, thay cho 10 ẩn số-góc lệch, ta chỉ cần tính cho 3, chẳng hạn, đó là các góc:  $\varphi_{12}$ ,  $\varphi_{13}$  và  $\varphi_{35}$ .

Khi tính dàn không thanh giằng, có kết cấu đối xứng, chịu tải không đối xứng, để dễ dàng cho tính toán, luôn có thể phân tải trọng ra thành các thành phần đối xứng và phản xứng, như đã làm với khung có nút cố định, quá trình tính toán cũng tiến hành riêng rẽ cho từng thành phần tải trọng nói trên rồi cộng các kết quả tương ứng lại với nhau.

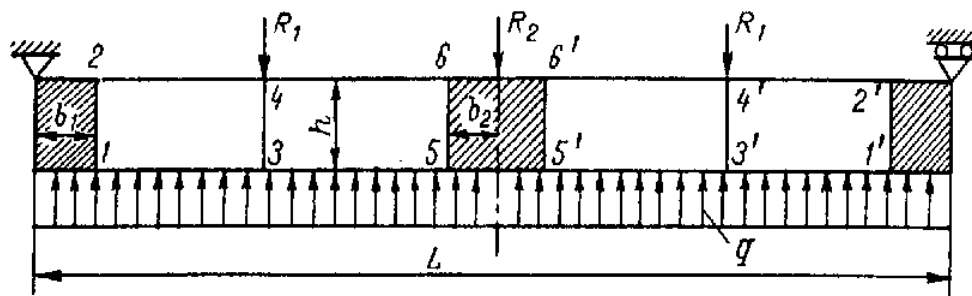
Hãy minh họa phương pháp tính toán khử siêu tĩnh cho khung có nút động, với các thanh trực giao nhau qua việc khảo sát sự làm việc của đà ngang đáy hở, là một dạng của dàn không thanh giằng, gia cường bằng các mã tấm cứng - không biến dạng (H.1.44). Đà ngang khảo sát chịu tải trọng ngang rải đều, từ áp lực của nước và các lực tập trung, chính là các phản lực liên kết, tác dụng từ các sống dọc đáy và sống chính.

Phản lực từ sống chính và các sống dọc đáy được xác định khi tính toán dàn đáy tàu, mà ta sẽ đề cập đến trong chương III.

Việc tính toán đà ngang đáy hở, gia cường bằng các mã tấm, được tiến hành theo phương pháp biến dạng góc, đồng thời với chú ý là, góc xoay của các nút tại mã tấm bằng 0 (tức,  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_5 = \alpha_6 = 0$ ), như vậy, chỉ còn lại các ẩn số góc xoay tại các nút 3 và 4 ( $\alpha_3$  và  $\alpha_4$ ) và các góc lệch  $\varphi_{13}$  và  $\varphi_{35}$ . Để khử siêu tĩnh, trước tiên ta lập 2 phương trình cân bằng các nút

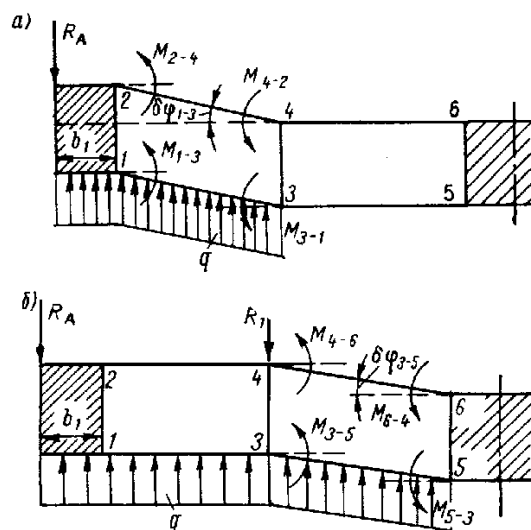
$$\left. \begin{aligned} M_{31} + M_{34} + M_{35} &= 0; \\ M_{42} + M_{43} + M_{46} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (12.2)$$

Các di chuyển khả dĩ của dàn, ứng với các góc lệch  $\varphi_{13}$  và  $\varphi_{35}$  thể hiện trên hình H.1.45. Lập các phương trình cân bằng theo nguyên lý di chuyển khả dĩ, theo các góc lệch  $\varphi_{13}$  và  $\varphi_{35}$ , ta nhận được:  $\alpha_{ij}$  và  $\varphi_{ij}$ , là các hàm của cường độ tải trọng ngang  $q$  và các phản lực  $R_1, R_2$ .



H.1.44

Giả sử là đã biết các chuyển vị của điểm đặt các phản lực  $R_1, R_2$ , ta sử dụng hai phương trình sau đây để xác định các phản lực này.



H.1.45

$$\left. \begin{aligned} & - \left[ R_A l_{12} - q l_{13} \left( b_1 + \frac{l_{13}}{2} \right) + M_{13} + M_{31} + M_{24} + M_{42} \right] \delta \varphi_{13} = 0; \\ & - \left[ (R_A + R_1) l_{35} - q l_{35} \left( b_1 + l_{13} + \frac{l_{35}}{2} \right) + M_{35} + M_{53} + M_{46} + M_{64} \right] \delta \varphi_{35} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (12.3)$$

Trong phương trình (12.3), các lực tác dụng cần thoả mãn điều kiện cân bằng chung cho toàn dàn, theo đó, ta có

$$R_A = \frac{1}{2} qL - R_1 - \frac{R}{2}.$$

Thay các giá trị của moment  $M_{ij}$ , xác định theo (10.3) vào các phương trình (12.2) và (12.3) và giải hệ phương trình kết quả, ta tìm được các giá trị của các góc lệch thanh và góc xoay nút, theo cường độ tải trọng ngang  $q$ , các phản lực  $R_1$  và  $R_2$ .

Giả sử, các chuyển vị  $f_1, f_2$  của điểm đặt các lực  $R_1$  và  $R_2$  là đã biết, ta tìm được các phản lực này từ 2 phương trình sau

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= \varphi_{13} l_{13} + \alpha_1 \frac{q l^4}{EI_{mt}} + \beta_{11} \frac{R_1 L^2}{EI_{mt}} + \beta_{12} \frac{R_2 L^3}{EI_{mt}}; \\ f_2 &= \varphi_{13} l_{13} + \varphi_{35} l_{35} + \alpha_2 \frac{q l^4}{EI_{mt}} + \beta_{21} \frac{R_1 L^3}{EI_{mt}} + \beta_{22} \frac{R_2 L^3}{EI_{mt}}. \end{aligned} \right\} \quad (12.4)$$

trong đó,  $I_{mt}$  - moment quán tính của đà ngang khảo sát khi coi nó như một dầm đặc;

$\alpha_1; \alpha_2; \beta_{11}; \beta_{12}; \beta_{21}; \beta_{22}$  - các hệ số ảnh hưởng, xác định theo các bảng uốn dầm.

Nếu tại chỗ giao giữa đà ngang với sống dọc, có mã tấ, cần lấy  $\alpha_3 = \alpha_4 = 0$ . Khi đó, các phương trình (12.2) mất tác dụng, chiều dài các thanh được lấy là khoảng cách giữa các mã tấ, còn các phương trình (12.3) thay đổi chút ít, vì trong đó chứa các thành phần biểu thị công của tải trọng đặt trên cả chiều dài của mã chú ý rằng, vì  $\alpha_3 = \alpha_4 = 0$ , mã gia cường không quay, mà chuyển động tịnh tiến.

Khi xác định độ võng do uốn của đà ngang đáy, kết cấu này cần được khảo sát trong tổng thể khung sườn tàu, như là nhánh đáy của khung sườn này, tức, từ việc tính khung sườn, xác định các moment uốn tại các nút, sau đó, tìm các độ võng do uốn. Thường thì các khung sườn khảo sát chịu tải trọng đối xứng nên các moment đế của đà ngang không phụ thuộc vào biến dạng cắt.



### &13-PHƯƠNG PHÁP CÂN BẰNG TUẦN TỰ CÁC NÚT CHO BÀI TOÁN KHUNG PHẪNG

Các khung phức tạp có nhiều nút, thường được tính theo phương pháp có tên là *Phương pháp Cross*, mang tên nhà khoa học Mỹ, là người đề xuất phương pháp, vào năm 1930. Ưu điểm nổi bật của phương pháp này là ở chỗ cho ta khả năng khử siêu tĩnh của hệ thanh phức tạp mà không cần lập hệ phương trình và giải hệ phương trình, thường là với rất nhiều ẩn số và tốn nhiều công sức. Điều này đặc biệt có ý nghĩa trong quá khứ, khi mà công cụ tính toán chưa phát đạt, nó đáng được biết đến.

Nội dung của phương pháp này như sau:

Ta giả tưởng đặt vào các nút của hệ khảo sát các *liên kết ảo*, cản trở chuyển vị xoay và chuyển vị tịnh tiến của nút. Đối với khung có nút cố định, liên kết ảo sẽ chỉ cản cản cản trở chuyển vị xoay của nút, và tương ứng với một moment ngoại lực, bằng tổng đại số moment đầu thanh, của tất cả các thanh có chung nút đang xét, tại nút này, và tính với giả thiết đầu còn lại của các thanh là ngàm cứng và trên nhịp thanh chịu tác dụng của tải trọng tương ứng. Đối với các thanh mà đầu thanh còn lại này không phải là một nút nào khác, tức các thanh đơn lẻ, các moment cần được tính theo điều kiện liên kết *ngàm cứng* tại đầu thanh thứ 2 này.

Moment ảo nói trên, *qui ước là dương khi tác dụng ngược chiều kim đồng hồ*, được gọi là *moment mất cân bằng*. Việc giải phóng nút khỏi liên kết ngàm ảo tương đương với việc tác dụng thêm vào nút một moment, bằng về trị số nhưng ngược dấu, với moment mất cân bằng. Moment này gọi là *moment cân bằng*.

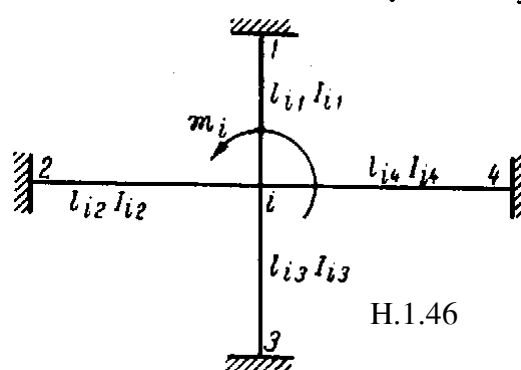
Việc bỏ liên kết tại mỗi nút tiến hành theo điều kiện bất động đối với tất cả các nút còn lại. Khi bỏ liên kết, nút khảo sát xoay một góc  $\alpha_i$  theo chiều của moment cân bằng. Việc nút thứ  $i$  xoay một góc  $\alpha_i$  gây ra trên các nút cố định liên quan tới nó và cả trên các đầu còn lại của các *thanh đơn độc* có liên quan, các moment, gọi là các *moment thứ 2*, các moment thứ 2 này bổ sung vào moment mất cân bằng của nút liên quan.

Bằng cách lần lượt cân bằng tất cả các nút của khung khảo sát, khung sẽ được giải phóng khỏi tất cả các liên kết ảo đưa vào trước đây, tức đạt được điều kiện cân bằng của tất cả các nút. Moment đế của tất cả các thanh được tính bằng tổng đại số của tất cả các moment phát sinh tương ứng trong quá trình tính toán.

Trình tự thực hiện việc cân bằng nút của khung theo phương pháp Cross là như sau:

- (1) Xác định phân bố moment cân bằng giữa các thanh riêng lẻ cùng chung một nút,
- (2) Xác định độ lớn và dấu của các mô men thứ hai trên các thanh là thành viên của nút đang xem xét.

Để làm ví dụ, ta hãy xét một nút bất kỳ của khung, có 4 thanh hợp thành (H.1.46), đầu còn lại của các thanh ngàm trên đế cứng, tương ứng với điều kiện ngàm cứng các nút kế cận của khung trong phương pháp tính đang xét.

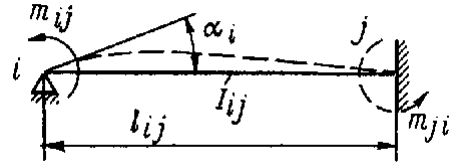


Khi tác dụng vào nút moment ngoại lực  $m_i$ , nút sẽ xoay một góc  $\alpha_i$ . Trên các đầu thanh, tại nút khảo sát sẽ xuất hiện một moment  $m_{ij}$  có thể xác định từ mối quan hệ giữa moment này với góc xoay tiết diện đế của thanh và điều kiện cân bằng.

Đối với dầm một nhịp, ngàm cứng tại đế bên phải như trong hình H.1.47, ta có các quan hệ sau

$$m_{ij} = -K_{ij}\alpha_i; \quad (13.1)$$

trong đó 
$$K_{ij} = \frac{4EI_{ij}}{l_{ij}} \quad (13.2)$$



H.1.47

Từ điều kiện cân bằng nút, của n thanh, có thể viết:

$$m_i = \sum_{j=1}^n m_{ij} = -\alpha_i \sum_{j=1}^n K_{ij}$$

Như vậy, có thể viết công thức xác định  $\alpha_i$  như sau:

$$\alpha_i = -\frac{m_i}{\sum_{j=1}^n K_{ij}} \quad (13.3)$$

và 
$$m_{ij} = m_i \frac{K_{ij}}{\sum_{r=1}^n K_{ir}} \quad (13.4)$$

Phần số nằm về bên phải  $m_i$  mang tên gọi *hệ số phân phối moment* tại nút, mang ký hiệu  $\lambda_{ij}$ .

$$\lambda_{ij} = \frac{K_{ij}}{\sum_{r=1}^n K_{ir}} \quad (13.5)$$

Như vậy là, moment cân bằng phân phối cho một thanh bất kỳ kỳ, thuộc một nút nào đó, tỉ lệ thuận với hệ số phân phối moment của thanh đó. Tất nhiên, tổng các hệ số phân phối moment của tất cả các thanh thuộc một nút bất kỳ đều phải bằng 1. Hệ số phân phối moment là đại lượng không thứ nguyên.

Momen đế  $m_{ij}$ , tác dụng trên đầu thanh  $i-j$ , tại nút  $i$ , như đã nói trên đây, gây ra phản lực, là momen thứ 2,  $m_{ji}$ , tại đầu  $j$  còn lại của thanh này. Moment phản lực có thể được xác định từ phương trình sau

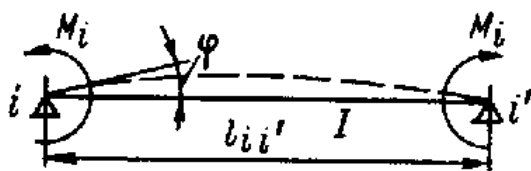
$$\frac{m_{ij}l_{ij}}{6EI_{ij}} - \frac{m_{ji}l_{ij}}{3EI_{ij}} = 0$$

Từ đây: 
$$m_{ji} = \frac{1}{2}m_{ij} \quad (13.6)$$

Như vậy là, khi cân bằng mỗi nút, trên các nút quanh nút khảo sát, xuất hiện phản lực là moment thứ 2, cùng dấu và bằng nửa giá trị của moment cân bằng mà đầu thanh tương ứng của nút này được phân phối. Hệ số 1/2 trong công thức (13.7) được gọi là *hệ số truyền moment*.

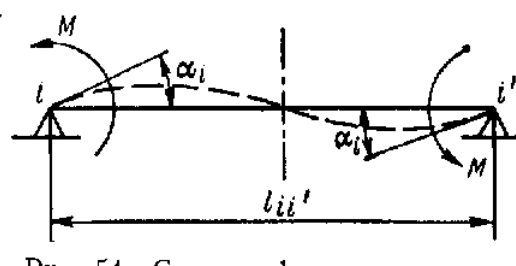
Khi tính toán các khung phức tạp, có kết cấu đối xứng, có thể tận dụng lợi thế do tính đối xứng mang lại. Chẳng hạn như khi tải trọng tác dụng lên khung là đối xứng hoặc phản xứng, chỉ cần tiến hành cân bằng cho các nút nằm về một phía của trục đối xứng.

Khi cân bằng các nút đối xứng, hệ số cứng các thanh cắt trục đối xứng, trong trường hợp tải trọng đối xứng, cần được xác định như là hệ số tỉ lệ trong biểu thức liên hệ giữa các moment đầu, góc xoay của một trong các đế (H.1.48)



H

H.1.48



H.1.49

Trường hợp này (khi tải trọng là đối xứng):

$$\alpha_i = -\frac{M_i l_{ii'}}{3EI_{ii'}} - \frac{M_i l_{ii'}}{6EI_{ii'}} = -\frac{M_i l_{ii'}}{2EI_{ii'}}$$

Do đó, hệ số cứng của thanh, nối các nút đối xứng, khi tải trọng đối xứng, cần được xác định theo công thức ( $i, i'$  là các nút đối xứng nhau)

$$K_{ii'} = \frac{2EI_{ii'}}{l_{ii'}} \quad (13.7)$$

Trường hợp khung đối xứng, chịu tải phản xứng, trên các đầu thanh cắt trục đối xứng, nối các nút đối xứng nhau có các moment bằng nhau về trị số và cả dấu (H.1.49), các góc quay của các nút đối xứng nhau được tính theo công thức:

$$\alpha_i = -\frac{M l_{ii'}}{3EI_{ii'}} + \frac{M l_{ii'}}{6EI_{ii'}} = -\frac{M l_{ii'}}{6EI_{ii'}}$$

Từ đó có công thức độ cứng các thanh trong trường hợp khảo sát:

$$K_{ii'} = \frac{6EI_{ii'}}{l_{ii'}} \quad (13.8)$$

Nếu thanh nằm trên trục đối xứng, khi tải trọng là đối xứng, thì các thanh có chung nút với thanh nào được coi là ngàm cứng tại nút nói trên. Cũng trường hợp này nhưng tải trọng là phản xứng, thanh sẽ tham gia như nhau vào cả hai phần của khung nên độ cứng và tải trọng trên thanh phải được chia đôi khi tính mỗi nửa khung.

Trong khi tính các khung, có thể gặp trường hợp, khi mà đầu thứ hai của thanh, là tựa trên đế cứng. Hệ số cứng của các thanh kiểu này tính theo biểu thức:

$$K_{ii'} = \frac{3EI_{ij}}{l_{ij}} \quad (13.9)$$

Biểu thức tính hệ số phân phối moment, như đã biết, không thứ nguyên. Để tính các hệ số này, không nhất thiết phải dùng các giá trị tuyệt đối của độ cứng mà, thay có độ cứng tuyệt đối  $K_{ij}$  có thể dùng độ cứng tương đối  $k_{ij}$ , xác định theo công thức sau:

$$k_{ij} = \frac{I_{ij}l_0}{I_0l_{ij}} \delta_{ij} \quad (13.19)$$

với  $\delta_{ij} = 1$  cho tất cả các thanh nối vào một nút, chịu cân bằng góc xoay,

$\delta_{ii'} = 1/2$  - dùng cho thanh nối các nút đối xứng, chịu tải đối xứng,

$\delta_{ii'} = 3/2$  - dùng cho thanh nối các nút đối xứng, chịu tải phản đối xứng,

$\delta_{ij} = 3/4$  - cho thanh đơn, tựa tự do tại đầu thứ hai.

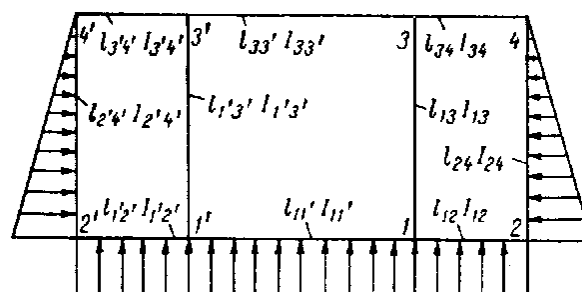
Công thức xác định hệ số phân phối moment giờ đây có dạng:

$$\lambda_{ij} = \frac{n_{ij}}{n} \quad (15.1)$$

Việc tính toán khung phẳng phức tạp theo phương pháp cân bằng liên tục các nút có thể tiến hành theo tuần tự sau: gồm:

- (1) Tính moment tại hai đầu nút các thanh do tác động của lực áp đặt lên thanh với giả thiết, mỗi thanh bị ngàm cả hai đầu,
- (2) Xác định độ cứng tương đối của các thanh và tính hệ số phân phối moment tại các nút,
- (3) Cân bằng các nút của khung và tính các moment thứ tại các nút lân cận,
- (4) Thực hiện cân bằng nút theo bảng sau đây. Quá trình này bắt đầu từ nút ít cân bằng nhất. Có thể đồng thời cân bằng một số nút không lân cận với nút đang xét.

**Ví dụ:** Dùng phương pháp Cross xác định moment tại các nút kết cấu khung tàu dầu, có sơ đồ tính toán cho trên hình H. 1.50.



Dữ liệu liên quan đến cấu hình H.1.50

$$l_{13} = l_{24} = l_{1'3'} = l_{2'4'} = H; \quad l_{12} = l_{1'2'} = l_{34} = l_{3'4'} = \frac{l_{11'}}{2} = \frac{l_{33'}}{2} = \frac{B}{4}$$

$$I_{24} = I_{2'4'}; \quad I_{13} = I_{1'3'}; \quad I_{34} = I_{3'4'}; \quad I_{12} = I_{1'2'};$$

$$\text{Và } B = 2H = 2l_0; \quad I_{11'} = 5I_0; \quad I_{12} = 3I_0;$$

$$I_{13} = I_{24} = 3I_0; \quad I_{34} = I_0; \quad I_{33'} = 2I_0.$$

Độ cứng tương đối các thanh tính theo công thức (13.11):

$$k_{11} = \frac{I_{11'}l_0}{I_0l_{11'}} \delta_{11'} = \frac{5}{2} = 2,5$$

$$k_{12} = \frac{I_{12}l_0}{I_0l_{12}} = \frac{3}{0,5} = 6$$

$$k_{13} = \frac{I_{13}l_0}{I_0l_{13}} = 3$$

$$k_{24} = \frac{I_{24}l_0}{I_0l_{24}} = 3$$

$$k_{34} = \frac{I_{34}l_0}{I_0l_{34}} = \frac{1}{0,5} = 2$$

$$k_{33'} = \frac{I_{33'}l_0}{I_0l_{33'}} \delta_{33'} = \frac{2}{1} \frac{1}{2} = 1$$

Hệ số phân bố moment tại các nút:

$$\text{Nút 1.} \quad \lambda_{11'} = \frac{k_{11'}}{k_{11'} + k_{12} + k_{13}} = \frac{2,5}{2,5 + 6 + 3} = 0,22$$

$$\lambda_{12} = \frac{k_{12}}{k_{12} + k_{11'} + k_{13}} = \frac{6}{6 + 2,5 + 3} = 0,52$$

$$\lambda_{13} = \frac{k_{13}}{k_{13} + k_{11'} + k_{12}} = \frac{3}{3 + 2,5 + 6} = 0,26$$

$$\text{Nút 2.} \quad \lambda_{21} = \frac{k_{12}}{k_{12} + k_{24}} = \frac{6}{6 + 3} = 0,67$$

$$\lambda_{24} = \frac{k_{24}}{k_{12} + k_{24}} = \frac{3}{6 + 3} = 0,33$$

$$\text{Nút 3.} \quad \lambda_{33'} = \frac{k_{33'}}{k_{33'} + k_{13} + k_{34}} = \frac{1}{3 + 1 + 2} = 0,17$$

$$\lambda_{31} = \frac{k_{13}}{k_{33'} + k_{13} + k_{34}} = \frac{3}{3 + 1 + 2} = 0,5$$

$$\lambda_{34} = \frac{k_{34}}{k_{33'} + k_{13} + k_{34}} = \frac{2}{3 + 1 + 2} = 0,33$$

Nút 4.

$$\lambda_{42} = \frac{k_{24}}{k_{24} + k_{34}} = \frac{3}{3 + 2} = 0,6$$

$$\lambda_{43} = \frac{k_{34}}{k_{24} + k_{34}} = \frac{2}{3 + 2} = 0,4$$

Moment  $m_{ij}$  tính cho trường hợp thanh bị ngàm cả hai đầu có dạng:

$$\left. \begin{aligned} \overline{m}_{11'} &= \frac{ql_{11'}^2}{12} = 0,083ql_0^2 \\ \overline{m}_{12} &= -\overline{m}_{21} = -\frac{ql_{12}^2}{12} = -0,021ql_0^2 \\ \overline{m}_{24} &= -\frac{ql_{24}^2}{20} = -0,05ql_0^2 \\ \overline{m}_{42} &= \frac{ql_{42}^2}{30} = 0,033ql_0^2 \end{aligned} \right\}$$

Quá trình cân bằng các góc và xác định moment tại nút tiến hành theo thứ tự ghi tại bảng 1 sau đây.

Hai dòng đầu giành để ghi số thứ tự các nút và thanh. Dòng thứ ba ghi các giá trị hệ số phân bố moment trong các nút, dòng bốn các giá trị moment nhóm đầu dạng không thứ nguyên.

Cân bằng bắt đầu từ nút 1 được coi như nút kém cân bằng nhất, theo nghĩa, giá trị tổng moment nhóm đầu lớn nhất.

Dòng năm, theo thứ tự các cột tương ứng cho các thanh 1 – 1', 1 – 2, 1 – 3 ghi các giá trị moment cân bằng bằng tích của moment không cân bằng nút hiện tại, ví dụ  $0,062ql_0^2$ , lấy ngược dấu, với hệ số phân bố moment. Tại các cột ứng với thanh 2 – 1 và 3 – 1 của cột ghi các giá trị moment nhóm hai, bằng một nửa các moment cân bằng, đã ghi tại các cột 1 – 2 và 1 – 3.

Dòng cuối dùng cho nút thứ tư.

Quá trình tính tiếp tục cho đến khi giá trị các moment nhóm hai của cân bằng các góc đạt giới hạn sai số cho phép. Cộng tất cả moment ghi tại mỗi cột sẽ nhận được giá trị tính toán cho moment tại nút.

**Bảng 1**

Nút	1			2		3			4	
Thanh i – j	1 – 1'	1 – 2	1 – 3	2 – 1	2 – 4	3 – 1	3 – 3'	3 – 4	4 – 2	4 – 3
Hệ số phân bố $\lambda_{ij}$	0,22	0,52	0,26	0,67	0,33	0,50	0,17	0,33	0,60	0,40
Hệ số $\frac{m_{ij}}{ql_0^2}$	0,083	-0,021		0,021	-0,050				0,033	
Moment	1	-0,014	-0,032	-0,016	-0,016		-0,008			
	4				-0,010			-0,007	-0,020	-0,013
	2		0,019		0,037	0,018			0,009	
	1	-0,004	-0,010	-0,005	-0,005		-0,003			
	3			0,005			0,009	0,003	0,006	0,003
	4				-0,004			-0,002	-0,007	-0,005
	2		0,003		0,006	0,003			0,002	
	1	-0,002	-0,004	-0,002	-0,002		-0,001			
	2, 3				0,001	0,001	0,002		0,001	-0,001
	4									
Tổng		0,063	-0,045	-0,018	0,042	-0,042	-0,001	0,003	-0,002	0,016

Kết quả xử lý theo bảng sẽ là:

$$M_{11'} = 0,063ql_0^2; M_{12} = -0,045ql_0^2; M_{13} = -0,018ql_0^2;$$

$$M_{21} = -M_{24} = 0,042ql_0^2; M_{31} = -0,001ql_0^2;$$

$$M_{33'} = 0,003ql_0^2; M_{34} = -0,002ql_0^2;$$

$$M_{42} = -M_{43} = 0,016ql_0^2;$$

Để vẽ đường moment uốn dọc các thanh cần thiết xác định các giá trị max tại giữa các thanh.

Thanh 1 – 1.

$$(M_{11'})_{\max} = \frac{ql_{11'}^2}{8} = 0,125ql_0^2$$

Thanh 1 – 2.

$$(M_{12})_{\max} = \frac{ql_{12}^2}{8} = 0,031ql_0^2$$

Thanh 2 – 4.

$$(M_{24})_{\max} = 0,128 \frac{ql_{24}^2}{2} = 0,044ql_0^2$$

Để vẽ đường lực cắt dọc các thanh cần thiết xác định các giá trị lực cắt tại các nút hai đầu thanh.

Thanh 1 – 1.

$$N_{11'} = - \frac{ql_{11'}}{2} = -0,5ql_0$$

Thanh 1 – 2.

$$N_{12} = \frac{ql_{12}}{2} - \frac{M_{12} + M_{21}}{l_{12}} = 0,25ql_0 + \frac{(0,045 - 0,042)ql_0^2}{0,5l_0} = 0,0256ql_0$$

$$N_{21} = - \frac{ql_{12}}{2} - \frac{M_{12} + M_{21}}{l_{12}} = -0,25ql_0 + \frac{(0,045 - 0,042)ql_0^2}{0,5l_0} = 0,244ql_0$$

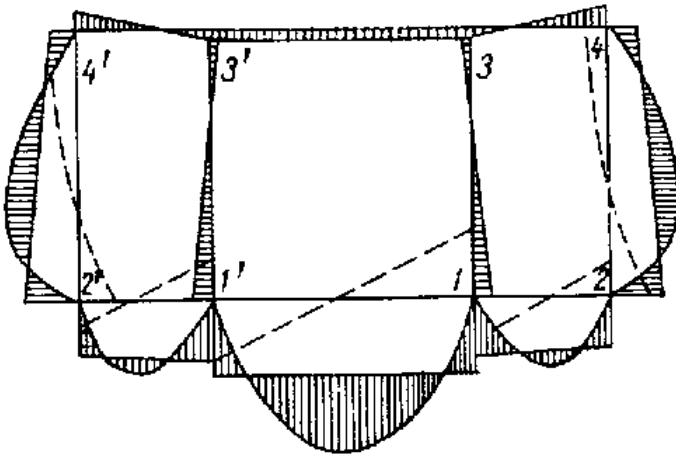
$$N_{24} = \frac{2}{3} \frac{ql_{24}}{2} - \frac{M_{24} + M_{42}}{l_{24}} = 0,333ql_0 + \frac{(0,042 - 0,016)ql_0^2}{l_0} = 0,359ql_0$$

$$N_{42} = - \frac{1}{3} \frac{ql_{24}}{2} - \frac{M_{24} + M_{42}}{l_{24}} = -0,167ql_0 + \frac{(0,042 - 0,016)ql_0^2}{l_0} = -0,141ql_0$$

$$N_{43} = N_{34} = - \frac{M_{34} + M_{43}}{l_{34}} = \frac{(0,002 - 0,016)ql_0^2}{0,5l_0} = 0,036ql_0$$

$$N_{33'} = 0; N_{13} = N_{31} = - \frac{M_{13} + M_{31}}{l_{13}} = \frac{(0,018 - 0,001)ql_0^2}{l_0} = 0,019ql_0$$

Đồ thị moment uốn và lực cắt tính cho trường hợp trên đây được trình bày tại H.1.51



H.1.51



## CHƯƠNG II

### DẦM TRÊN NỀN ĐÀN HỒI

#### &14- PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN UỐN DẦM TRÊN NỀN ĐÀN HỒI, CÓ KẾ ĐẾN ẢNH HƯỞNG CẮT VÀ LỰC DỌC

Các kết cấu trong thành phần của thân tàu cũng như bản thân toàn bộ thân tàu, trong nhiều trường hợp, được mô hình hoá thành các dầm trên nền đàn hồi.

*Dầm tiếp xúc với một môi trường đàn hồi trên suốt chiều dài và chịu tác dụng các lực từ môi trường, cản trở chuyển vị uốn của dầm, được gọi là dầm trên nền đàn hồi.* Biểu diễn hình học của dầm trên nền đàn hồi cho trên hình H2.1: đường liền bên trên biểu thị dầm còn đường đứt đoạn bên dưới biểu thị nền đàn hồi.

Cường độ phản lực  $r(x)$  của nền đàn hồi phụ thuộc vào đặc tính cơ học của nền, vào độ võng của dầm và chiều rộng của diện tích tựa của dầm vào nền. Cường độ này được gọi tắt là *cường độ phản lực nền*. Về bản chất mối quan hệ nói trên, có nhiều giả thuyết khác nhau mà mỗi giả thuyết là cơ sở cho một lý thuyết tính toán dầm trên nền đàn hồi khác nhau.

Giả thuyết đơn giản nhất mà cũng tìm thấy nhiều ứng dụng trong ngành đóng tàu cũng như nhiều khoa học về tính toán kết cấu khác, đó là *thuyết Fuss-Wincler*. Theo thuyết này, cường độ phản lực nền  $r(x)$  tại tiết diện  $x$  bất kỳ của dầm tỉ lệ thuận với độ võng xuống hay võng lên  $w(x)$  của dầm:

$$r(x) = k_0 w(x) \quad (14.1)$$

trong đó,  $k_0$  – hệ số cứng của nền đàn hồi.

Vì cường độ phản lực nền có thứ nguyên  $\left[ \frac{\text{đơn vị lực}}{\text{đơn vị chiều dài}} \right]$ , còn độ võng có thứ nguyên  $-\left[ \text{đơn vị chiều dài} \right]$  nên thứ nguyên của hệ số cứng  $k_0$  sẽ là  $\left[ \frac{\text{đơn vị lực}}{(\text{đơn vị chiều dài})^2} \right]$

Nền đàn hồi *Fuss* có thể biểu diễn dưới dạng tập hợp vô số đế đàn hồi độc lập, phân bố trên toàn bộ chiều dài nền.

Dầm nằm trên nền đàn hồi chịu tác dụng gần giống với dầm nằm trên nhiều đế đàn hồi độc lập. Để đơn giản việc tính toán, đế đàn hồi nói trên được thay bằng nền đàn hồi liên tục với hệ số cứng nền xác định theo công thức:

$$k_0(x) = \frac{K_i}{a_i}$$

trong đó,  $K_i$  - hệ số cứng đế đàn hồi thứ  $i$ ;

$a_i$  - trung bình cộng chiều dài các nhịp dầm hai phía đế thứ  $i$ .

Giáo sư I.G Bubnov, một nhà Bác học người Nga, và là người đặt nền móng cho ngành khoa học cơ kết cấu tàu thủy, đã có công trình nghiên cứu về sai số của phép thay thế

nói trên, và đã xác định được rằng, sai số tương đối phạm phải trong trường hợp này là đại lượng cỡ  $1/n^2$  ( $n$  là số nhịp dầm liên nhịp khảo sát).

Ta có thể viết phương trình vi phân uốn dầm trên nền đàn hồi khảo sát trên cơ sở phương trình vi phân uốn dầm đã có từ chương I, với việc bổ sung phản lực nền vào thành phần của ngoại lực. Việc này cho kết quả sau:

$$[EI(x)w''(x)]' = q(x) - k_0(x)w(x) \quad (14.2)$$

hay

$$[EI(x)w''(x)]' + k_0(x)w(x) = q(x) \quad (14.3)$$

trong đó,  $I(x)$  – moment quán tính tiết diện ngang dầm;

$q(x)$  – cường độ tải trọng ngoài tác dụng lên dầm.

Dấu “ – “ trước số hạng  $k_0(x)w(x)$  trong vế phải nói lên rằng, độ võng dương (hướng xuống dưới) tương ứng với phản lực nền âm (hướng lên trên).

Phương trình (14.3) được lập với giả thiết rằng, phản lực nền tác động vào dầm không chỉ khi nó võng xuống mà ngay cả lúc bị uốn võng lên (độ võng âm). Trong nhiều bài toán thực tế, tình hình không như vậy. Chẳng hạn trong trường hợp thân tàu nằm trên dây đế kê, và được mô hình hoá thành dầm trên nền đàn hồi, nhưng tính chất của dây đế kê là chỉ gây ra phản lực tác dụng lên thân tàu theo một hướng, từ dưới lên trên, khi tàu võng xuống. Phản lực này không tồn tại khi tàu bị uốn võng lên. Trong trường hợp này, phương trình (14.3) vẫn được sử dụng nhưng với điều kiện là phải kiểm tra dấu của độ võng để điều chỉnh phản lực nền cho phù hợp.

Trước khi nghiên cứu chi tiết phương trình (14.3), là phương trình đóng vai trò quan trọng trong việc giải quyết nhiều bài toán của cơ kết cấu nói chung và cơ kết cấu tàu thủy nói riêng, ta hãy thiết lập quan hệ vi phân cho dầm trên nền đàn hồi với các giả thiết tổng quát hơn.

### **1. Uốn phức tạp dầm tiết diện ngang thay đổi, trên nền đàn hồi, có kể đến ảnh hưởng của lực cắt.**

Xét dầm trên nền đàn hồi, độ cứng chống uốn  $EI(x)$  thay đổi và độ cứng về cắt không đổi  $G\omega$ , tải trọng ngang tác dụng lên dầm là  $q(x)$ , đồng thời, chịu tác dụng của lực dọc  $T$  không đổi trên suốt chiều dài dầm. Lực  $T$  được coi là *dương khi tác dụng kéo*.

Trên đây, khi lập phương trình (14.3) ta đã không đề cập đến lực dọc  $T$  và bỏ qua ảnh hưởng của cắt vì quan niệm ảnh hưởng này nhỏ, đến mức có thể bỏ qua. Tuy nhiên, đặc điểm không gian của kết cấu thân tàu khiến cho các kết cấu của nó, ngoài tác dụng của tải trọng cục bộ còn chịu tác dụng của tải trọng do uốn chung dưới hình thức kéo hoặc nén. Mặt khác, nhiều kết cấu thân tàu có mép kèm hoặc mép tự do rộng, là những hình thức kết cấu mà với chúng, ảnh hưởng cắt là đáng kể. Do đó, cần phải để ý đến cả 2 yếu tố nói trên, nếu không muốn phạm phải sai số lớn.

Ta biểu diễn độ võng của thân tàu dưới dạng tổng của độ võng do uốn và độ võng do cắt

$$w(x) = w_1(x) + w_2(x)$$

Trong đó:  $w_1(x)$  là độ võng do uốn còn  $w_2(x)$  là độ võng do cắt.

Trong chương I cũng đã có các quan hệ giữa moment uốn  $M(x)$  và lực cắt  $N(x)$  với các yếu tố uốn dầm

$$EIw''(x) = M(x) \quad (14.4)$$

$$N(x) = -G\theta w_2'(x) \quad (14.5)$$

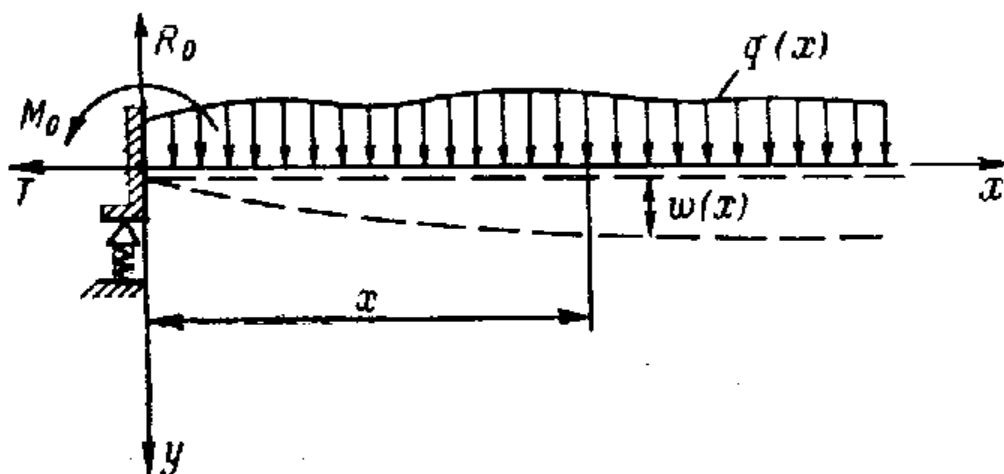
Có thể viết biểu thức xác định moment uốn trên tiết diện ngang  $x$  bất kỳ của dầm như sau (H.2.1).

$$M(x) = M_0 - R_0x + \int_0^x \int_0^x q(x) dx dx - \int_0^x \int_0^x k_0(x)w(x) dx dx + Tw(x), \quad (14.6)$$

trong đó,  $M_0, R_0$  – tương ứng là moment uốn và lực cắt tại tiết diện đế bên trái của dầm.

Thay (14.6) vào vế phải của (14.4) rồi đạo hàm theo  $x$  2 lần, ta được

$$[EI(x)w''(x)]'' - T(w_1'' + w_2'') + k_0(w_1 + w_2) = q(x) \quad (14.7)$$



H2.1

Tiếp đến, ta khử độ võng do cắt ra khỏi (14.7).

Có thể thấy rằng, lực cắt có thể xác định nhờ phương trình hình chiếu các lực tác dụng lên phần dầm, từ tiết diện đế bên trái đến tiết diện  $x$  khảo sát, lên trục Oz, và trên cơ sở đó, ta có

$$N(x) = -R_0 + \int_0^x (q - k_0w) dx + Tw'. \quad (14.8)$$

Đạo hàm (14.6) một lần theo

$x$ , ta có

$$\frac{dM(x)}{dx} = [EIw''_1]' = -R_0 + \int_0^x (q - k_0 w) dx + Tw'.$$

Trên cơ sở của công thức vừa thu được và công thức (14.8), ta có

$$N(x) = [EIw''_1]'. \quad (14.8)$$

Kết hợp kết quả này với (14.5) ta được

$$w'_2(x) = -\frac{1}{G\theta} \frac{d}{dx} [EI(x)w''_1(x)]' \quad (14.9)$$

Tích phân (14.9) theo x, thu được kết quả

$$w_2(x) = -\frac{EI(x)}{G\theta} w''_1(x) + a \quad (14.10)$$

trong đó,  $a$  là hằng số tích phân, tùy chọn.

Sử dụng công thức (14.10) để khử  $w_2(x)$  khỏi (14.7), ta được

$$[EIw''_1]'' + \frac{T}{G\theta} [EIw''_1]'' - Tw''_1(x) - k_0 \frac{EI(x)}{G\theta} w''_1(x) + k_0(x)w_1(x) = q(x) - k_0(x)a,$$

hay

$$[EI_{th}(x)w''_1(x)]'' - T_{th}(x)w''_1(x) + k_0(x)w_1(x) = q(x) - k_0(x)a, \quad (14.11)$$

trong đó, đã sử dụng các ký hiệu

$$\begin{aligned} EI_{th} &= EI(x) + T \frac{EI(x)}{G\theta}, \\ T_{th} &= T + k_0(x) \frac{EI(x)}{G\theta}. \end{aligned} \quad (14.12)$$

Ta hãy làm rõ vai trò của  $a$

Từ (14.11) thấy ngay rằng, nghiệm riêng của phương trình này, tương ứng với số hạng

$-k_0(x)a$  bên vế phải, chính là

$$w_r = -a \quad (14.13)$$

và như vậy, độ võng tổng cộng  $w(x)$  không phụ thuộc vào  $a$  [ xem (14.10)]. Hơn nữa, các yếu tố uốn còn lại như góc xoay  $w'_1$ , moment uốn  $EIw''_1$  và lực cắt  $[EIw''_1]'$  cũng không phụ thuộc gì vào  $a$ . Vì thế cho nên, không hề giảm tính tổng quát của bài toán đang xét nếu như ta lấy  $a = 0$ .

Khi đó, phương trình vi phân xác định độ võng do uốn của dầm trên nền đàn hồi tiết diện ngang không đổi sẽ có dạng

$$EI_{th}w_1^{IV} - T_{th}w_1'' + k_0w_1 = q(x), \quad (14.14)$$

còn độ võng do cắt được xác định nhờ quan hệ

$$w_2(x) = -\frac{EI}{G\theta} w_1''(x). \quad (14.15)$$

Khi  $T \neq 0$ ,  $G\theta = \infty$ , phương trình (14.14) có dạng

$$EIw^{IV} - Tw'' + k_0w = q(x) \quad (14.16)$$

Đối chiếu (14.16) với (14.3) ta thấy, sự có mặt của lực dọc  $T$  làm xuất hiện một thành phần mới là  $Tw''$ . Việc để ý bổ sung đến ảnh hưởng cắt không làm phá vỡ cấu trúc của phương trình (14.16) mà chỉ làm thay đổi một số các hệ số của nó, đó là các hệ số tương ứng với lực dọc và độ cứng nền, xác định theo các quan hệ (14.12).

Tích phân của phương trình vi phân (14.14), cũng như đối với mọi phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất khác, chính là tổng của tích phân tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng và một nghiệm riêng tương ứng với vế phải của phương trình không thuần nhất này.

Bằng phép thế trực tiếp, dễ dàng xác minh rằng, nếu như tải trọng  $q(x)$  được biểu diễn dưới dạng một đa thức có bậc không vượt quá 1 thì nghiệm riêng của (14.14) khi  $k_0 = \text{const}$ , sẽ có dạng

$$w_{r(x)} = \frac{q(x)}{k_0}. \quad (14.17)$$

Đối với phương trình (14.3), khi  $k_0 = \text{const}$ , kết luận trên là đúng cả cho trường hợp khi mà bậc của  $q(x)$  không vượt quá 3. Cần lưu ý thêm rằng, trong nhiều vấn đề mà ta quan tâm, tải trọng ngoài thường, hoặc là không đổi, hoặc là phân bố theo qui luật tam giác.

Hãy quay lại với việc xây dựng tích phân tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất, tương ứng với phương trình vi phân (14.14).

$$EI_{th}w_1^{IV} - Tw_1'' + k_0w_1 = 0. \quad (14.18)$$

Vì phương trình (14.18) là phương trình vi phân tuyến tính cấp 4 nên tích phân tổng quát của nó được biểu thị dưới dạng tổ hợp tuyến tính của 4 nghiệm riêng

$$w_{tg}(x) = \sum_{s=1}^4 A_s e^{\eta_s x} \quad (14.19)$$

trong đó,  $A_s$  - là hằng số tùy ý.

Thay (14.19) vào (14.18) và thực hiện một vài biến đổi cần thiết, ta thu được phương trình xác định  $\eta_s$

$$\eta_s^4 - \frac{T_{th}}{EI_{th}} \eta_s^2 + \frac{k_0}{EI_{th}} = 0. \quad (14.20)$$

Phương trình (14.20) là một phương trình trùng phương, và nghiệm của nó được xác định theo công thức

$$\eta_s = \pm \sqrt{\frac{T_{th}}{2EI_{th}}} \pm \sqrt{\left(\frac{T_{th}}{2EI_{th}}\right)^2 - \frac{k_0}{EI_{th}}}$$

hay

$$\eta_s = \pm \alpha \sqrt{2(\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 1})}, \quad (14.21)$$

trong đó, đã sử dụng các ký hiệu

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{k_0}{4EI_{th}}}; \quad \beta = \frac{T_{th}}{2\sqrt{EI_{th}k_0}}. \quad (14.22)$$

Mỗi một trong bốn nghiệm đặc trưng (14.21) tương ứng với một nghiệm riêng của phương trình vi phân thuần nhất, và tổ hợp tuyến tính của 4 nghiệm này cho ta tích phân tổng quát của phương trình thuần nhất (14.18).

Như đã thấy từ (14.21), đặc điểm của nghiệm phương trình đặc trưng phụ thuộc vào đại lượng  $\beta$ .

Hãy xem xét các trường hợp riêng.

(a).  $0 \leq \beta^2 < 1$ . Khi đó, biểu thức dưới dấu căn của (14.21) sẽ âm và phương trình đặc trưng có 2 cặp nghiệm liên hợp

$$\eta_s = \pm \delta \pm i\gamma \quad (14.23)$$

trong đó

$$\left. \begin{aligned} \delta &= \alpha \sqrt{1 + \beta} \\ \gamma &= \alpha \sqrt{1 - \beta} \end{aligned} \right\} \quad (14.24)$$

Thay các nghiệm đặc trưng từ (14.23) vào (14.19) và biến đổi biểu thức thu được từ dạng hàm số mũ sang dạng hàm hyperbolic và hàm lượng giác, theo công thức Euler<sup>1</sup>, ta có thể viết biểu thức tích phân tổng quát dưới dạng

$$w_{iq}(x) = C_1 ch\delta x \cos \gamma x + C_2 ch\delta x \sin \gamma x + C_3 sh\delta x \cos \gamma x + C_4 sh\delta x \sin \gamma x \quad (14.25)$$

Trong một số trường hợp, không dùng các hàm hyperbolic mà thay vào đó là các hàm số mũ, khi đó, tích phân tổng quát có dạng

$$w_{iq}(x) = e^{-\delta x} (B_1 \cos \gamma x + B_2 \sin \gamma x) + e^{\delta x} (B_3 \cos \gamma x + B_4 \sin \gamma x). \quad (14.26)$$

(b).  $\beta^2 = 1$ . Khi đó, biểu thức dưới dấu tích phân bằng 0 và nghiệm của phương trình đặc trưng có thể thực và kép (nếu  $\beta > 0$ ) mà cũng có thể là ảo và kép (nếu  $\beta < 0$ ).

*Trường hợp thứ nhất, ( $T_{th} > 0$ ) [lưu ý rằng  $\beta$  và  $T_{th}$  luôn cùng dấu]*

$$\eta_{12} = -\eta_{34} = r = \sqrt{\frac{T_{th}}{2EI_{th}}} \quad (14.27)$$

<sup>1</sup>  $e^{\alpha x} = ch \alpha x + sh \alpha x$ ;  $e^{-\alpha x} = ch \alpha x - sh \alpha x$ ;  $e^{i\alpha x} = \cos \alpha x + i \sin \alpha x$ ;  $e^{-i\alpha x} = \cos \alpha x - i \sin \alpha x$ .

và tích phân tổng quát, trong trường hợp nghiệm phương trình đặc trưng là kép và sau khi thay hàm với số mũ thực bằng các hàm hyperbolic, có thể viết dưới dạng

$$w_{iq}(x) = C_1 chrx + C_2 rxchrx + C_3 shrx + C_4 rxshrx. \quad (14.28)$$

Trường hợp thứ 2, ( $T_{th} < 0$ )

$$\eta_{1,2} = -\eta_{3,4} = r^* i, \quad r^* = \sqrt{-\frac{T_{th}}{2EI_{th}}}. \quad (14.29)$$

Tích phân tổng quát trong trường hợp này có dạng

$$w_{iq}(x) = C_1 \cos r^* x + C_2 r^* x \cos r^* x + C_3 \sin r^* x + C_4 r^* x \sin r^* x \quad (14.30)$$

(c).  $\beta^2 > 1$ . khi đó, tùy thuộc vào giá trị của  $\beta$  mà nghiệm của phương trình đặc trưng có thể thực và phân biệt nhau (nếu  $\beta > 0$ ) đồng thời, cũng có thể là ảo và phân biệt nhau (nếu  $\beta < 0$ ).

Trường hợp thứ nhất, ( $T_{th} > 0$ )

Các nghiệm của phương trình đặc trưng trong trường hợp này là thực và phân biệt nhau

$$\left. \begin{aligned} \eta_{1,2} &= \pm \alpha \sqrt{2(\beta + \sqrt{\beta^2 - 1})} = \pm p; \\ \eta_{3,4} &= \pm \alpha \sqrt{2(\beta - \sqrt{\beta^2 - 1})} = \pm t. \end{aligned} \right\} \quad (14.31)$$

và tích phân tổng quát của phương trình (14.18) có thể viết dưới dạng

$$w_{iq}(x) = C_1 chpx + C_2 shpx + C_3 chtx + C_4 shtx. \quad (14.32)$$

Trường hợp thứ 2, ( $T_{th} < 0$ )

Các nghiệm của phương trình đặc trưng là ảo và phân biệt nhau,

$$\left. \begin{aligned} \eta_{1,2} &= \pm it^*, \quad t^* = \pm \alpha \sqrt{2(-\beta - \sqrt{\beta^2 - 1})}, \\ \eta_{3,4} &= \pm ip^*, \quad p^* = \pm \alpha \sqrt{2(-\beta + \sqrt{\beta^2 - 1})}. \end{aligned} \right\} \quad (14.33)$$

và tích phân tổng quát của phương trình (14.18) có thể viết dưới dạng

$$w_{iq}(x) = C_1 \cos p^* x + C_2 \sin p^* x + C_3 \cos t^* x + C_4 \sin t^* x \quad (14.34)$$

(d). Nếu như không có nền đàn hồi, tức  $k_0 = 0$ , thì khi  $T_{th} > 0$ , nghiệm của phương trình đặc trưng xác định theo công thức

$$\eta_{1,2} = 0; \quad \eta_{3,4} = \pm k, \quad (14.35)$$

trong đó

$$k = \sqrt{\frac{T_{th}}{EI_{th}}} \quad (14.36)$$

Khi đó, tích phân tổng quát của phương trình khảo sát có dạng

$$w_{iq}(x) = A_0 + A_1 kx + A_2 ch kx + A_3 sh kx. \quad (14.37)$$

Khi  $T_{th} < 0$ , tích phân tổng quát của phương trình vi phân thuần nhất có dạng

$$w_{iq}(x) = B_0 + B_1 k^* x + B_2 \cos k^* x + B_3 \sin k^* x, \quad (14.38)$$

trong đó

$$k^* = \sqrt{-\frac{T_{th}}{EI_{th}}} \quad (14.39)$$

(e). Khi ảnh hưởng cắt là nhỏ đến mức có thể bỏ qua. Trường hợp này, ứng với khi dầm có độ cứng cắt cực lớn, tức,  $G\omega = \infty$ , các đại lượng  $EI_{th}$  trở thành  $EI$ , còn  $T_{th}$  trở thành  $T$ . Dạng cụ thể của tích phân tổng quát phụ thuộc vào giá trị của tham số  $\beta$  (trong trường hợp khảo sát,  $\beta = \frac{T}{2\sqrt{EI k_o}}$ ), ta đã khảo sát kỹ trong phần vừa rồi.

Tích phân tổng quát của (14.14) chứa 4 hằng số tùy ý mà giá trị của chúng được xác định từ các điều kiện liên kết đầu dầm. Đó chính là các điều kiện ràng buộc tích phân tổng quát phương trình không thuần nhất:

$$w(x) = w_{iq}(x) + w_r(x).$$

Ta xét một số dạng của điều kiện biên khi  $T = 0^1$

(1). Dầm tựa tự do trên đế cứng. trong trường hợp này, moment và độ võng đều bằng 0, tức

$$w''_1 = 0; w = w_1 + w_2 = 0$$

nhưng vì

$$w_2 = -\frac{EI}{G\omega} w''_1,$$

nên điều kiện thứ 2 có dạng

$$w = w_1 - \frac{EI}{G\omega} w''_1 = 0$$

từ đó, trên cơ sở của điều kiện  $w''_1 = 0$ , ta có

$$w_1 = 0$$

(2). Dầm ngàm cứng trên đế cứng.

$$w'_1 = 0; w = w_1 - \frac{EI}{G\omega} w''_1 = 0.$$

(3). Dầm không có đế đỡ nào ngoài nền đàn hồi:

$$EI w''_1 = 0; EI w'''_1 = 0,$$

từ đó

$$w''_1 = w'''_1 = 0.$$

<sup>1</sup> Điều kiện biên khi  $T \neq 0$  sẽ đề cập đến sau này, trong chương V.



(4). Dầm tựa tự do trên đế đàn hồi với hệ số mềm  $A^2$ :

$$w''_1 = 0; w_1 - \frac{EI}{G\omega} w''_1 = \pm AEI w'''_1.$$

Nhờ điều kiện thứ 2, viết lại được điều kiện thứ nhất dưới dạng:

$$w_1 = \pm AEI w'''_1.$$

(5). Dầm ngàm đàn hồi với hệ số mềm ngàm  $l$ , trên đế cứng.

$$w_1 - \frac{EI}{G\omega} w''_1 = 0; w'_1 = \mp l/EI w''_1.$$

Sau khi xác định độ võng dầm do uốn  $w_1(x)$  theo công thức (14.15), có thể xác định độ võng do cắt, và như vậy, xác định được độ võng tổng cộng.

## 2. Uốn dầm tiết diện ngang không đổi, trên nền đàn hồi, khi $T = 0$ ; $G\omega = \infty$

Trong trường hợp khảo sát, phương trình vi phân (14.14) có dạng

$$EI w^{IV} + k_0 w = q, \quad (14.40)$$

Vì  $T_{th} = 0$ , và như vậy,  $\beta = 0$  nên tích phân tổng quát của phương trình thuần nhất:

$$EI w^{IV}(x) + k_0 w(x) = 0 \quad (14.41)$$

có thể viết được dưới dạng (14.25) hoặc (14.26).

Trong trường hợp khảo sát,  $\delta = \gamma = \alpha$ , trong đó,  $\alpha$ , trên cơ sở quan hệ đầu trong (14.22), được xác định theo công thức:

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{k_0}{4EI}}. \quad (14.42)$$

Tích phân tổng quát (14.26) khi đó được biến đổi về dạng:

$$w_{iq}(x) = e^{-\alpha x} (B_1 \cos \alpha x + B_2 \sin \alpha x) + e^{\alpha x} (B_3 \cos \alpha x + B_4 \sin \alpha x) \quad (14.43)$$

Còn tích phân tổng quát (14.25) – về dạng:

$$w_{iq}(x) = C_1 \cosh \alpha x \cos \alpha x + C_2 \cosh \alpha x \sin \alpha x + C_3 \sinh \alpha x \cos \alpha x + C_4 \sinh \alpha x \sin \alpha x. \quad (14.44)$$

Cần nhắc lại rằng, nếu như biểu thức tải trọng rải  $q(x)$  là đa thức bậc không quá 3 thì tích phân riêng của phương trình (14.40), tương ứng với vế phải đã cho, được xác định theo công thức (15.17).

Nếu như tải trọng ngoài phân bố gián đoạn trên từng đoạn dầm hoặc thay đổi theo các qui luật khác nhau trên các đoạn dầm khác nhau thì việc sử dụng tích phân tổng quát dưới dạng (15.43) trở nên khó khăn.

Trong trường hợp nêu trên, tốt nhất là biểu thị tích phân này dưới dạng sử dụng các hàm Puzyrevski<sup>1</sup> mà ta sẽ xét đến ngay sau đây.

<sup>2</sup> Qui ước chung: dấu bên trên là cho đế bên phải, dấu dưới cho đế trái.

<sup>1</sup> Tên nhà bác học Pháp, Giáo sư N.P. Puzyrevski

Giả sử  $V_0(\alpha x)$ ,  $V_1(\alpha x)$ ,  $V_2(\alpha x)$  và  $V_3(\alpha x)$  - là 4 nghiệm riêng, độc lập tuyến tính của phương trình (14.41). Khi đó, tích phân tổng quát của phương trình này có thể viết dưới dạng:

$$w_{iq}(x) = D_0 V_0(\alpha x) + D_1 V_1(\alpha x) + D_2 V_2(\alpha x) + D_3 V_3(\alpha x), \quad (14.45)$$

trong đó,  $D_i$  - là 4 hằng số tích phân được xác định từ các điều kiện biên.

Ta chọn 4 tích phân riêng, sao cho tại  $x=0$ , chúng thoả mãn các điều kiện:

$$\left. \begin{aligned} V_0 &= 1; & V_0' &= 0; & V_0'' &= 0; & V_0''' &= 0; \\ V_1 &= 0; & V_1' &= \sqrt{2}\alpha; & V_1'' &= 0; & V_1''' &= 0; \\ V_2 &= 0; & V_2' &= 0; & V_2'' &= 2\alpha^2; & V_2''' &= 0; \\ V_3 &= 0; & V_3' &= 0; & V_3'' &= 0; & V_3''' &= 2\sqrt{2}\alpha^3. \end{aligned} \right\} \quad (14.46)$$

Các điều kiện (14.46) cho phép dễ dàng tìm được các nghiệm riêng chưa biết. Thực hiện điều này như sau. Vì hàm  $V_i(\alpha x)$ , là nghiệm của phương trình vi phân, nên ta tìm chúng dưới dạng [xem (14.44)]:

$$V_i(\alpha x) = C_{1i} \operatorname{ch} \alpha x \cos \alpha x + C_{2i} \operatorname{ch} \alpha x \sin \alpha x + C_{3i} \operatorname{sh} \alpha x \cos \alpha x + C_{4i} \operatorname{sh} \alpha x \sin \alpha x. \quad (14.47)$$

Ta hãy xác định, chẳng hạn như, hàm  $V_0(\alpha x)$ .

Thay tích phân (14.47) vào dãy điều kiện đầu tiên của (14.46), tìm được:

$$C_{10} = C_{20} = C_{30} = 0; \quad C_{40} = 1.$$

và như vậy,  $V_0(\alpha x) = \operatorname{ch} \alpha x \cos \alpha x$ .

Một cách tương tự đối với các hàm còn lại, ta xác định được cả 4 hàm Puzyrevski

$$\left. \begin{aligned} V_0(\alpha x) &= \operatorname{ch} \alpha x \cos \alpha x; \\ V_1(\alpha x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\operatorname{ch} \alpha x \sin \alpha x + \operatorname{sh} \alpha x \cos \alpha x); \\ V_2(\alpha x) &= \operatorname{sh} \alpha x \sin \alpha x; \\ V_3(\alpha x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\operatorname{ch} \alpha x \sin \alpha x - \operatorname{sh} \alpha x \cos \alpha x) \end{aligned} \right\} \quad (14.48)$$

Các hàm (14.48) là độc lập tuyến tính nhau và chúng có tính chất độc đáo ở chỗ, các hàm lần lượt là đạo hàm của nhau theo kiểu hoán vị vòng quanh, cụ thể, chúng nghiệm đúng các quan hệ sau đây:

$$\left. \begin{aligned} V_1'(\alpha x) &= \alpha \sqrt{2} V_0(\alpha x); \\ V_2'(\alpha x) &= \alpha \sqrt{2} V_1(\alpha x); \\ V_3'(\alpha x) &= \alpha \sqrt{2} V_2(\alpha x); \\ V_0'(\alpha x) &= -\alpha \sqrt{2} V_3(\alpha x). \end{aligned} \right\} \quad (14.49)$$

Thật dễ dàng chứng tỏ tính đúng đắn của các quan hệ (14.49).

Việc sử dụng các hàm Puzyrevski là rất thuận tiện còn vì người ta đã lập sẵn các bảng giá trị của các hàm này theo giá trị của các đối số  $u = \alpha x$ .

Có thể chứng tỏ rằng các hàm  $V_i[\alpha(x - a)]$  cũng là các tích phân riêng của phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất (14.41).

Có một điểm cần lưu ý là, khi tăng giá trị của đối số  $\alpha x$ , hàm *Puzyrevski* tăng nhanh, và việc sử dụng chúng trong các tính toán bằng số rất bất lợi và dễ phạm phải sai số lớn vì phải tính toán với nhiều hiệu số nhỏ của các đại lượng xấp xỉ nhau.

Một nhà bác học Nga đã chứng tỏ rằng, khó khăn trên đây là có thể khắc phục được. Ông đã đề xuất việc sử dụng các hàm đặc biệt, mà giá trị của chúng cũng đã được cho sẵn trong bảng. Các hàm này mang tên ông, G.V. Klishevitch. Các hàm Klishevitch được cho như sau

$$\left. \begin{aligned} W_0(\alpha x) &= e^{-\alpha x} \cos \alpha x; \\ W_1(\alpha x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\alpha x} (-\cos \alpha x + \sin \alpha x) \\ W_2(\alpha x) &= -e^{-\alpha x} \sin \alpha x \\ W_3(\alpha x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\alpha x} (\cos \alpha x + \sin \alpha x) \end{aligned} \right\} \quad (14.50)$$

Chúng là các tích phân riêng của phương trình vi phân thuần nhất (14.41).

Tại  $x = 0$ ,

$$W_0(0) = 1; W_1(0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}; W_2(0) = 0; W_3(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (14.51)$$

Dễ dàng chứng tỏ rằng các hàm Klishevitch là độc lập nhau.

Khi đạo hàm theo  $x$  các hàm Klishevitch đặc tính hoán vị vòng quanh cũng được thể nghiệm, như là với hàm *Puzyrevski*, cụ thể như sau

$$\left. \begin{aligned} W_3'(\alpha x) &= \alpha \sqrt{2} W_2(\alpha x) \\ W_2'(\alpha x) &= \alpha \sqrt{2} W_1(\alpha x) \\ W_1'(\alpha x) &= \alpha \sqrt{2} W_0(\alpha x) \\ W_0'(\alpha x) &= -\alpha \sqrt{2} W_3(\alpha x) \end{aligned} \right\} \quad (14.52)$$

Cũng tương tự như hàm  $V_i[\alpha(x - a)]$ , các hàm Klishevitch  $W_g[\alpha(x - a)]$  cũng thoả mãn phương trình thuần nhất (14.41). Ngoài ra, hàm  $W_g[\alpha(x - a)]$  không thể biểu thị qua các hàm (14.50), nói cách khác, chúng độc lập với các hàm này.

Vì thế cho nên, tích phân tổng quát của phương trình thuần nhất có thể biểu diễn dưới dạng

$$W_{iq}(x) = AW_i(\alpha x) + BW_j(\alpha x) + CW_g[\alpha(l - x)] + DW_h[\alpha(l - x)] \quad (14.53)$$

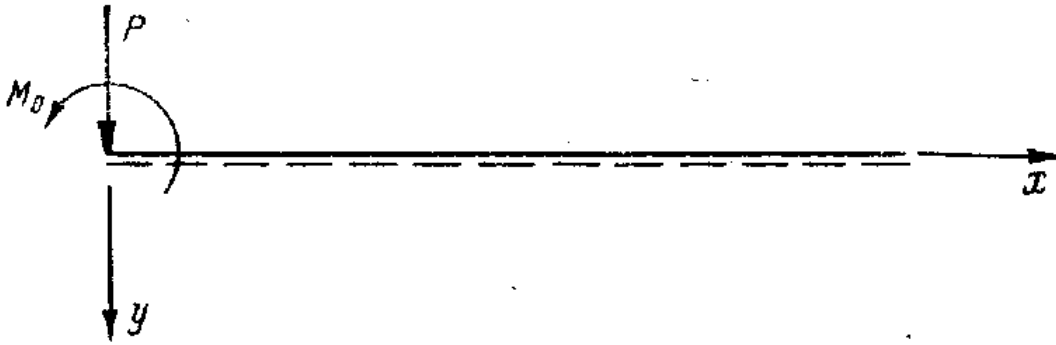
trong đó,  $i \neq j, g \neq h$

Các giá trị  $i, j, g, h$  có thể chọn tùy ý, dĩ nhiên kèm theo điều kiện chúng, từng cặp, khác nhau.

## &15- CÁC BÀI TOÁN CƠ BẢN UỐN DẦM LĂNG TRỤ TRÊN NỀN ĐÀN HỒI, CÓ ĐỘ CỨNG KHÔNG ĐỔI

### 1- Uốn dầm bán vô hạn.

(a). Ta xét ví dụ thứ 1, ứng dụng lý thuyết uốn dầm trên nền đàn hồi, để tính dầm bán vô hạn, tiết diện ngang không đổi, nằm trên nền đàn hồi có độ cứng  $k_0$ , chịu một tải trọng tập trung  $P$  và một moment tập trung  $M_0$  tại đầu mút trái  $x = 0$  (H2.2).



H2.2

Điều kiện biên cho dầm đang xét có dạng:

$$\left. \begin{aligned} EIw'' &= M_0; \\ EIw''' &= P. \end{aligned} \right\} \quad (15.1)$$

Tải trọng ngoài bằng 0 và tại xa vô cùng cách đầu mút trái, độ võng bằng 0. Tốt nhất là sử dụng dạng nghiệm tổng quát Klishevitch.

Để dễ thỏa mãn các điều kiện biên, trong họ hàm Klishevitch, ta chọn sao cho một hàm có đạo hàm bậc 2 bằng 0 và hàm còn lại có đạo hàm bậc 3 bằng 0 tại mút bên trái  $x = 0$

$$w(x) = AW_0(\alpha x) + BW_1(\alpha x). \quad (15.2)$$

Thực hiện các qui tắc bình thường của việc lấy đạo hàm đối với (14.2) ta thu được kết quả sau:

$$\left. \begin{aligned} EIw'' &= 2\alpha^2 EI[-AW_2(\alpha x) - BW_3(\alpha x)]; \\ EIw''' &= 2\sqrt{2}\alpha^3 EI[-AW_1(\alpha x) - BW_2(\alpha x)]. \end{aligned} \right\} \quad (15.3)$$

Sử dụng điều kiện biên (15.2), lưu ý đến các giá trị của các hàm Klishevitch tại  $x = 0$  đã chỉ ra trong (14.51), xác định được:

$$B = -\frac{M_0}{EI\alpha^2\sqrt{2}}; \quad A = \frac{P}{EI\alpha^3\sqrt{2}} \quad (15.4)$$

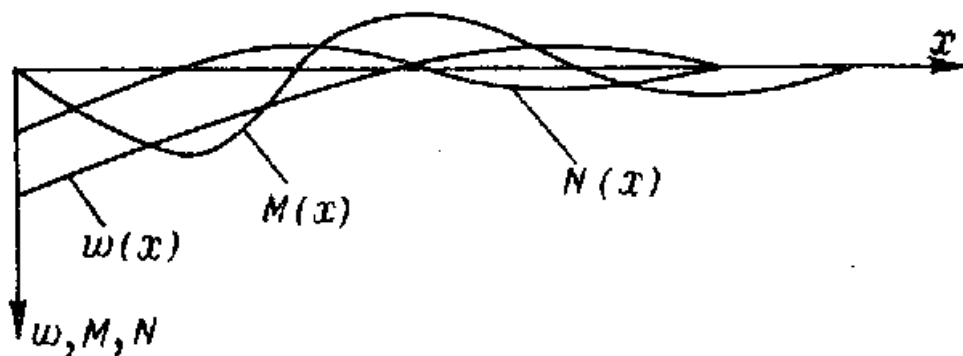
Thay các giá trị tìm được của A và B vào (15.2) ta tìm được đường đàn hồi của dầm khảo sát:

$$w(x) = \frac{1}{2\alpha^3 EI} [PW_0(\alpha x) - M_0\alpha\sqrt{2}W_1(\alpha x)]. \quad (15.5)$$

Độ võng mút trái của dầm khảo sát có thể xác định theo biểu thức:

$$w(0) = \frac{P + M_0 \alpha}{2\alpha^3 EI} \quad (15.6)$$

Trong đó, nhắc lại,  $\alpha$  được xác định theo (14.42).



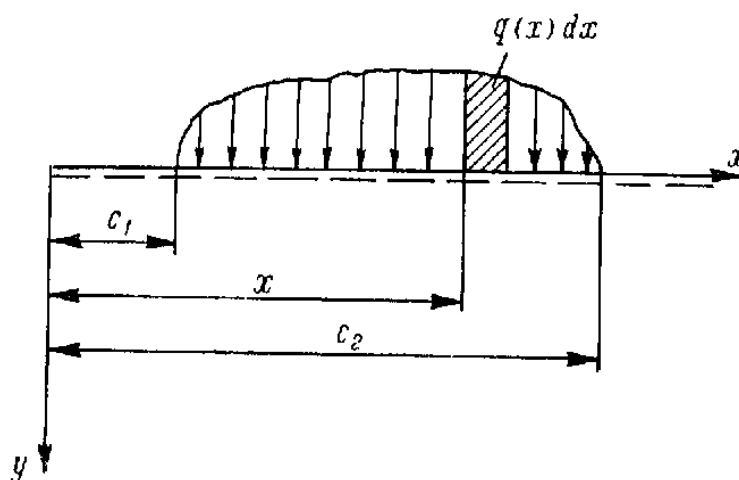
H2.3

Hình H2.3 biểu thị moment uốn, lực cắt, và đường đàn hồi của dầm bán vô hạn chịu tác dụng của lực tập trung  $P$  tại tiết diện  $x = 0$ .

Như trên hình cho thấy, với những giá trị nhất định của  $x$ , tung độ của đường đàn hồi có giá trị âm. Với nền đàn hồi tác dụng hai chiều, không có gì đáng chú ý ở đây, nhưng với nền chỉ tác dụng một chiều như đế kê tàu thủy, ..., lời giải mà trong đó, có xuất hiện độ võng âm, cần được tính toán điều chỉnh.

Kết quả tính toán trên đây có thể sử dụng để xác định độ võng tại gốc  $O$  của dầm bán vô hạn, chịu tải trọng rải theo một qui luật nào đó.

Có thể nhận xét thấy rằng, biểu thức đường đàn hồi  $w(x)$  cũng đồng thời là tung độ đường ảnh hưởng độ võng tại mút trái của dầm  $x = 0$ . Hình H2.4 minh họa một dầm bán vô hạn chịu tải trọng bất kỳ.



H2.4

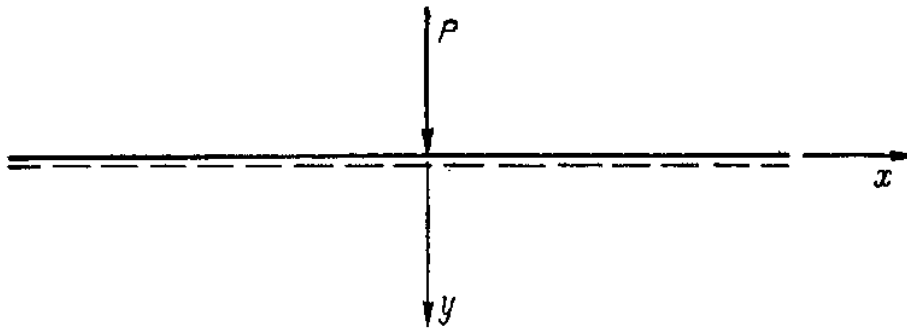
Độ võng tại  $x = 0$ , dưới tác dụng của tải trọng phân bố  $P = q(x)dx$  và  $M_0 = 0$ , được xác định dựa trên kết quả (15.5) trên đây

$$dw = \frac{q(x)dx}{2\alpha^3 EI} W_0(\alpha x).$$

Độ võng tại tiết diện nói trên, do toàn bộ tải trọng ngoài gây ra, được xác định bằng cách tích phân độ võng do tải trọng phân bố gây ra tại chính điểm khảo sát

$$w(0) = \int_{c_1}^{c_2} \frac{q(x)}{2\alpha^3 EI} W_0(\alpha x) dx.$$

(b). Ví dụ thứ 2 là trường hợp dầm vô hạn, chịu tải trọng tập trung tại gốc toạ độ (H2.5)



H2.5

Bài toán này được quan tâm trong ngành đóng tàu vì nó có thể dùng để phân tích sự làm việc của dầm ngang trong dàn tàu thủy dưới tác dụng của tải trọng tập trung.

Hệ khảo sát trong trường hợp này có tính đối xứng qua điểm đặt lực, cả về kết cấu lẫn tải trọng. Vì thế cho nên chỉ cần xét nửa dầm, chẳng hạn nửa bên phải, là đủ. Dĩ nhiên là lực tập trung tác dụng trên nửa dầm này là  $P/2$ ; Ngoài ra, do tính đối xứng nên góc xoay tại tiết diện đặt lực bằng 0, tức  $w' = 0$ .

Điều kiện biên  $w' = 0$  được thoả mãn nếu như ta nhận đường đàn hồi dưới dạng:

$$w(x) = CW_3(\alpha x).$$

Sử dụng qui tắc đạo hàm các hàm Klishevitch và từ điều kiện biên trên đây, ta có:

$$EIw''' = \frac{P}{2}.$$

Từ đó, nhận được:

$$EI\alpha^3 2\sqrt{2}W_0(0)C = \frac{P}{2},$$

và vì thế

$$w(x) = \frac{P}{8\alpha^3 EI} \sqrt{2}W_3(\alpha x). \quad (15.7)$$

Độ võng và moment uốn đạt cực đại tại  $x = 0$ :

$$w_{\max} = \frac{P}{8\alpha^3 EI}, \quad M_{\max} = -\frac{P}{4\alpha}. \quad (15.8)$$

Phản lực nền lớn nhất:

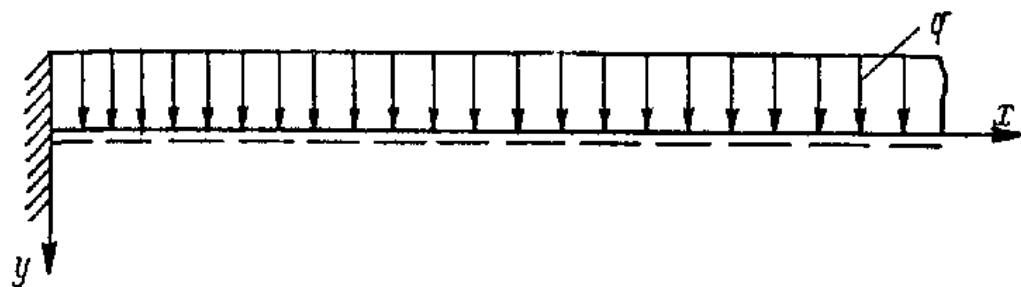
$$r_{\max} = k_0 w_{\max} = \frac{Pk_0}{8\alpha^3 EI} = \frac{P\alpha}{2}.$$

Liên quan đến kết quả vừa thu được, có khái niệm *chiều dài thay thế*. Người ta gọi chiều dài thay thế,  $l_{th}$ , cho một dầm vô hạn trên nền đàn hồi, chịu tải trọng tập trung, là chiều dài của một dầm cứng tuyệt đối trên nền đàn hồi độ cứng  $k_0$ , sao cho khi chịu tải trọng tập trung  $P$ , cường độ phản lực nền đạt trị số

$$r_{\max} = \frac{P\alpha}{2}.$$

Như vậy, chiều dài thay thế, theo nghĩa trên đây, được xác định theo công thức

(c). Trong ví dụ thứ 3, ta có dầm bán vô hạn, chịu tải trọng rải đều và ngàm cứng tại đế (bên trái) như trên hình H2.6



H2.6

Có thể giải bài toán này bằng các lập luận sau

Một dầm vô hạn, chịu tải trọng rải đều với cường độ  $q$ , sẽ có độ võng (chuyển vị) không đổi:

$$w = \frac{q}{k_0}$$

Trong khi các yếu tố uốn còn lại đều bằng 0. Phản lực đế gây ra độ võng, xác định theo công thức (15.7), trong đó,  $P = -R$ . Giá trị của phản lực này tìm được từ điều kiện bằng 0 của độ võng tại tiết diện ngàm  $x = 0$ :

$$w(0) = \frac{q}{k_0} - \frac{R}{8\alpha^3 EI} = 0,$$

từ đó

$$R = \frac{8\alpha^3 EI}{k_0} q$$

Moment uốn tại tiết diện đế được xác định trên cơ sở của biểu thức (15.8) và bằng

$$M_0(0) = \frac{R}{4\alpha} = \frac{q}{2\alpha^3}$$

## 2. Uốn dầm một nhịp trên nền đàn hồi. Các bài toán của I.G.Bubnov.

Khi tính toán một số kết cấu vỏ tàu, trong đó có các dầm, thường cần đến lời giải bài toán uốn dầm một nhịp trên nền đàn hồi, chịu các loại tải trọng khác nhau. Do đó, việc chuẩn bị trước các lời giải sẵn cho những trường hợp tải trọng thường gặp và các điều kiện biên thường gặp của dầm là rất cần thiết. Ta xét một số bài toán loại này, mà không kể đến ảnh hưởng cắt.

(a). Dầm một nhịp, tựa trên các đế đàn hồi có hệ số mềm  $A$ , chịu tải trọng rải đều.

Phương trình vi phân uốn dầm

$$EIw^{IV} + k_0 w = q$$

có tích phân tổng quát được viết dưới dạng Puzyrevski như sau

$$w(x) = \frac{q}{k_0} + D_0 V_0(\alpha x) + D_1 V_1(\alpha x) + D_2 V_2(\alpha x) + D_3 V_3(\alpha x) \quad (15.10)$$

Điều kiện biên bài toán được viết như sau.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Tại } x=0 : w' = 0; \quad w''' = 0; \\ \text{tại } x=l/2 : w'' = 0; \quad w = AEIw'''. \end{array} \right\} \quad (15.11)$$

Hai điều kiện đầu được thoả mãn nếu  $D_1 = D_3 = 0$ . Hai điều kiện sau được dùng cho việc xác định hai hằng số còn lại.

$$D_2 V_0(u) + D_0 V_2(u) = 0;$$

$$-2\sqrt{2}\alpha^3 EIA[D_2 V_3(u) + D_0 V_1(u)] = q/k_0 + D_0 V_0(u) + D_2 V_2(u)$$

$$\text{với } u = \frac{l}{2}\alpha = \frac{l}{2}\sqrt{\frac{k_0}{4EI}}$$

Sau khi xác định các hằng số  $D_0, D_2$  từ các hệ (15.12) và thay giá trị của chúng vào biểu thức (15.10), có thể viết phương trình đường đàn hồi của dầm như sau :

$$w(x) = \frac{q}{k_0} \left[ 1 - \frac{V_0(u)V_0(\alpha x) + V_2(u)V_2(\alpha x)}{V_0^2(u) + V_2^2(u)} \cdot \frac{1}{1+B} \right] \quad (15.14)$$

Trong đó :

$$B = \frac{Ak_0 l}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2} \cdot u} \frac{V_0(u)V_1(u) + V_2(u)V_3(u)}{V_0^2(u) + V_2^2(u)} = \frac{Ak_0 l}{2} \mu_0(u). \quad (15.15)$$

$$\text{trong đó} \quad \mu_0 = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot u} \frac{V_0(u)V_1(u) + V_2(u)V_3(u)}{V_0^2(u) + V_2^2(u)} = \frac{1}{2u} \cdot \frac{\text{sh}2u + \sin 2u}{\text{ch}2u + \cos 2u}$$



Dùng biểu thức tổng quát của đường đàn hồi (15.14) , có thể xác định tất cả các yếu tố uốn cần quan tâm, tại một tiết diện bất kỳ. Tuy nhiên, thường người ta chỉ quan tâm đến một số giá trị lớn nhất mà thôi.

Không đi vào các tính toán biến đổi trung gia, mất nhiều công sức, ta đưa ra ở đây một số công thức đặc trưng nhất cho bài toán khảo sát.

Tại  $x = 0$ , độ võng lớn nhất của dầm là :

$$w(0) = \frac{q}{k_0} \left[ 1 - \frac{\varphi_0(u)}{1+B} \right] \quad (15.16)$$

với

$$\varphi_0(u) = \frac{V_0(u)}{V_0^2(u) + V_2^2(u)} = \frac{2chu \cos u}{ch2u + \cos 2u} \quad (15.17)$$

Góc xoay tại hai đầu mút của dầm  $x = \pm l/2$ :

$$w'(\pm \frac{l}{2}) = \pm \frac{ql^3}{24EI} \cdot \frac{\psi_2(u)}{1+B} \quad (15.18)$$

với

$$\psi_2(u) = \frac{3}{2\sqrt{2}} \frac{V_0(u)V_3(u) - V_1(u)V_2(u)}{u^3[V_0^2(u) + V_2^2(u)]} = \frac{3}{4u^3} \cdot \frac{sh2u - \sin 2u}{ch2u + \cos 2u} \quad (15.19)$$

Moment uốn tại điểm giữa nhịp dầm:

$$M(0) = -\frac{qi^2}{8} \cdot \frac{\chi_0(u)}{1+B} \quad (15.20)$$

với

$$\chi_0(u) = \frac{V_2(u)}{u^2[V_0^2(u) + V_2^2(u)]} = \frac{2}{u^2} \cdot \frac{shu \cdot \sin u}{ch2u + \cos 2u} \quad (15.21)$$

Giá trị lớn nhất của lực cắt:

$$N(\pm \frac{l}{2}) = -\frac{qi}{2} \cdot \frac{\mu_0(u)}{1+B} \quad (15.22)$$

Các biểu thức (14.18), (14.20) và (14.22) chỉ khác biệt với các biểu thức tương ứng của dầm tựa tự do hai đầu mút ở các thừa số , tính đến ảnh hưởng của nền đàn hồi, và trở về đúng dạng các biểu thức này khi không có nền đàn hồi, tức khi *k* *đàn hồi* thừa số  $\frac{1}{1+B}$  chính là thừa số tính đến ảnh hưởng của độ cứng nền đàn hồi đến các yếu tố uốn của dầm.

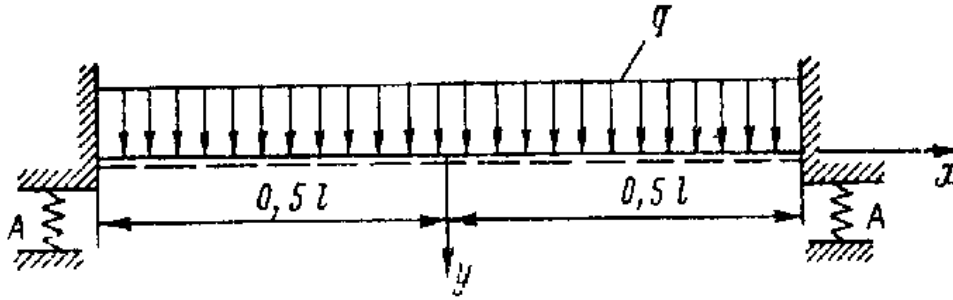
Cường độ phản lực nền tại giữa dầm và tại các tiết diện để được xác định theo các công thức:

$$r(0) = q - k_0 w(0) = q \frac{\varphi(u)}{1+B} \quad (15.23)$$

$$r\left(\frac{l}{2}\right) = q - k_0 w\left(\frac{l}{2}\right) = q \frac{1}{1+B} \quad (15.24)$$

Tất cả các hàm  $\varphi_0(u)$ ,  $\psi_2(u)$ ,  $\chi_0(u)$  và  $\mu_0(u)$  đều được cho dưới dạng bảng.

(b). Dầm ngàm cứng trên hai đế đàn hồi với hệ số mềm đế như nhau, chịu tải trọng rải đều cường độ  $q$  (H2.8).



H2.8

Tích phân tổng quát đối với đường đàn hồi của dầm khảo sát có thể viết dưới dạng (15.10).

Điều kiện biên của dầm khảo sát :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Tại } x = 0 : w' = 0; w''' = 0. \end{array} \right\} \quad (15.25)$$

$$\text{Tại } x = \frac{l}{2} : w' = 0; w = AEIw'''. \quad (15.25)$$

Thay dạng nghiệm (15.10) vào các điều kiện (15.25), ta xác định được, đầu tiên là các hằng số tùy ý và sau đó là bản thân đường đàn hồi của dầm:

$$w(x) = \frac{q}{k_0} \left[ 1 - \frac{V_1(u)V_0(ax) + V_3(u)V_2(ax)}{(1+B_1)[V_0(u)V_1(u) + V_2(u)V_3(u)]} \right] \quad (15.26)$$

Trong đó :

$$B_1 = \frac{Ak_0 l}{2} \mu_1(u) \quad (15.27)$$

$$\text{và} \quad \mu_1 = \frac{1}{\sqrt{2}u} \frac{V_1^2(u) + V_3^2(u)}{[V_0(u)V_1(u) + V_2(u)V_3(u)]} = \frac{1}{u} \cdot \frac{ch2u - \cos su}{sh2u + \sin 2u}$$

Một số biểu thức đặc trưng:

Tại  $x = 0$ , độ võng dầm là lớn nhất và bằng :

$$w(0) = \frac{q}{k_0} \left[ 1 - \frac{\varphi_1(u)}{1+B_1} \right] \quad (15.28)$$

Trong đó

$$\varphi_1(u) = \frac{V_1(u)}{V_0(u)V_1(u) + V_2(u)V_3(u)} = \frac{2chu \sin u + shu \cos u}{sh2u + \sin 2u} \quad (15.29)$$

Moment uốn tại điểm giữa nhịp:

$$M(0) = -\frac{qi^2}{24} \cdot \frac{\chi_1(u)}{1+B_1} \quad (15.30)$$

Trong đó:

$$\chi_1(u) = \frac{3.V_3(u)}{u^2[V_0(u)V_1(u) + V_2(u)V_3(u)]} = \frac{6}{u^2} \cdot \frac{chu \sin u - shu \cos u}{sh2u + \sin 2u} \quad (15.31)$$

Moment uốn tại hai ngàm đầu dầm:

$$M(\pm \frac{l}{2}) = \frac{ql^2}{12} \cdot \frac{\chi_2(u)}{1+B_1} \quad (15.32)$$

$$\text{với } \chi_2(u) = \frac{3.[V_1(u)V_2(u) - V_0(u)V_3(u)]}{u^2[V_0(u)V_1(u) + V_2(u)V_3(u)]} = \frac{3}{2u^2} \cdot \frac{sh2u - \sin 2u}{sh2u + \sin 2u} \quad (15.33)$$

Giá trị lực cắt tại các đế (hai đầu dầm) :

$$N(\pm \frac{l}{2}) = \pm \frac{qi}{2} \cdot \frac{\mu_1(u)}{1+B_1} \quad (15.34)$$

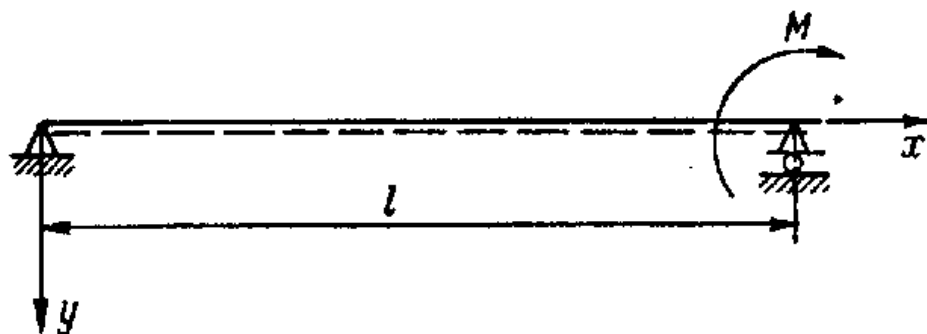
Cường độ tải trọng tại giữa và hai đầu dầm:

$$r(0) = \frac{q}{1+B_1} \varphi_1(u), \quad (15.35)$$

$$r(\frac{l}{2}) = \frac{q}{1+B_1} \quad (15.36)$$

Lời giải bài toán trên cho trường hợp đế cứng do I.G. Bubnov tìm ra còn ảnh hưởng của đế đàn hồi là do P.F.Pavlovitch xác định được.

(c). Dầm trên nền đàn hồi, bị tác động bằng moment uốn  $M$  đặt tại đế bên phải, tựa tự do trên đế cứng bên trái (H2.9).



H2.9

Điều kiện biên được phát biểu cho trường hợp này như sau.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Tại đầu bên trái } x=0: w=0; w''=0 \\ \text{Tại đầu bên phải } x=l: w=0; w''=\frac{M}{EI} \end{array} \right\} \quad (15.37) \quad \text{Trong}$$

trường hợp này  $q=0$ . Sử dụng biểu thức (15.10) quen thuộc, sau khi xác định các hằng số (từ các phương trình điều kiện biên tương ứng) và thay chúng vào lại (15.10), ta thu được phương trình đường đàn hồi của dầm khảo sát:

$$w(x) = \frac{M}{\alpha^2 EI} \cdot \frac{V_1(2u)V_3(2u) - V_3(2u)V_1(2u)}{ch4u - \cos 4u} \quad (15.38)$$

với  $u = \frac{\alpha l}{2}$

Biểu thức góc quay ở bên phải, không có moment, có dạng

$$w'(0) = -\frac{Ml}{6EI} \psi_1(u) \quad (15.39)$$

với:  $\psi_1(u) = \frac{3}{4} \cdot \frac{ch2u \sin 2u - sh2u \cos 2u}{ch4u - \cos 4u} \quad (15.40)$

Góc xoay tại đầu bên trái, chịu tác dụng của moment:

$$w'(l) = -\frac{Ml}{3EI} \psi_0(u) \quad (15.41)$$

với:  $\psi_0(u) = \frac{3}{4u} \cdot \frac{sh4u - \sin 4u}{ch4u - \cos 4u} \quad (15.42)$

Dễ thấy rằng, so với trường hợp dầm không trên nền đàn hồi, các công thức trên đây cho trường hợp dầm trên nền đàn hồi chỉ khác ở thừa số  $\psi_0(u), \psi_1(u)$ . Đây chính là các thừa số tính đến ảnh hưởng của nền đàn hồi tới góc xoay tiết diện đầu của dầm.

Nếu có moment dương tác dụng vào tiết diện đầu trái thì góc xoay tiết diện đầu được xác định theo các CT (15.39) và (15.40), và có các kết quả:

$$\left. \begin{array}{l} w'(0) = -\frac{Ml}{3EI} \psi_0(u); \\ w'(l) = \frac{Ml}{6EI} \psi_1(u) \end{array} \right\} \quad (15.43)$$

Lực cắt tại hai đầu dầm (moment đặt tại đầu phải) xác định theo các biểu thức:

$$N(0) = \frac{M}{l} \vartheta_1(u) \quad (15.44)$$

$$N(l) = \frac{M}{l} \vartheta_0(u) \quad (15.45)$$

với  $\vartheta_0(u) = \frac{2u(ch4u + \sin 4u)}{ch4u - \cos 4u}$   
 $\vartheta_1(u) = \frac{4u(ch2u \sin 2u + sh2u \cos 2u)}{ch4u - \cos 4u}$

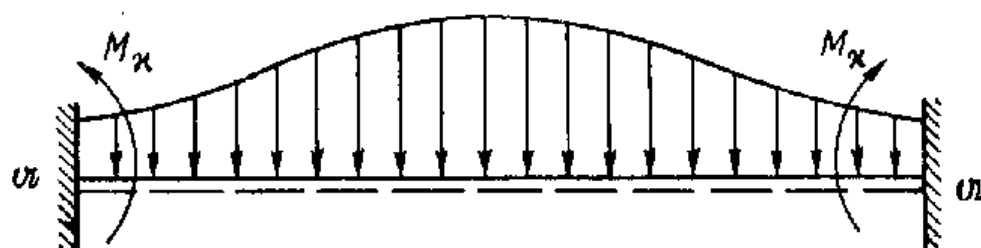
Trường hợp moment đặt tại đế bên trái, các công thức góc quay, lực cắt tương ứng sẽ là:

$$\left. \begin{aligned} N(0) &= -\frac{M}{l} \vartheta_0(u) \\ N(l) &= -\frac{M}{l} \vartheta_1(u) \end{aligned} \right\} \quad (15.46)$$

### 3. Dầm trên nền đàn hồi, ngàm đàn hồi tại hai đầu mút . Hệ số ngàm.

Các công thức trình bày trên đây là cho trường hợp dầm tựa tự do trên đế cứng và ngàm cứng tại các tiết diện đế hai đầu mút. Đó chính là hai thái cực về tính chất cản trở chuyển vị xoay các tiết diện đế của các liên kết đầu dầm. Trong thực tế, tồn tại nhiều trường hợp không thể coi là tựa tự do mà cũng không thể coi là ngàm cứng được, mà nó phải được coi là ngàm đàn hồi.

Ta xét dầm chịu tải trọng đối xứng đối với điểm giữa nhịp. Hệ số mềm ngàm của cả hai mút dầm là như nhau, và được ký hiệu bằng chữ  $\chi$  (H2.10).



H2.10

Ta chứng minh rằng, có thể thu được các công thức quan tâm cho bài toán đang xét, không cần phải tích phân phương trình vi phân uốn dầm tương ứng, mà chỉ cần sử dụng các công thức đối với dầm tựa tự do và dầm ngàm cứng hai đầu, chịu cùng tải trọng ngang như dầm khảo sát là đủ.

Trước tiên ta đưa ra thêm khái niệm *hệ số ngàm*<sup>1</sup>

$$\chi = \frac{M_{dh}}{M_c} \quad (16.47)$$

Trong đó:  $M_{dh}$  - moment uốn thực tế phát sinh tại ngàm đàn hồi;

$M_c$  – moment xác định được tại tiết diện ngàm khi coi ngàm là cứng tuyệt đối.

Hệ số ngàm  $\chi$  có thể thay đổi từ 0, cho trường hợp liên kết là tựa tự do (tuyệt đối không cản xoay) cho đến 1, khi liên kết không cho phép chuyển vị xoay (tuyệt đối cứng xoay). Khi tính dầm liên nhịp, hệ số ngàm có thể lớn hơn 1.

Như đã biết, đường đàn hồi của dầm là hàm tuyến tính đối với tải trọng nói chung và moment uốn nói riêng. Trong trường hợp khảo sát, moment ngàm hai đầu là như nhau và tỉ

<sup>1</sup> Khái niệm hệ “số ngàm” trong cơ học kết cấu được đưa ra lần đầu tiên bởi I.G.Bubnov.

lệ với hệ số ngàm  $\chi$ . Như vậy, hàm độ võng  $w_\chi(x)$  phải là hàm tuyến tính của hệ số ngàm  $\chi$  và trở thành hàm biểu thị đường đàn hồi của dầm tựa tự do hai đầu khi  $\chi = 0$ , và hàm biểu thị độ võng dầm ngàm cứng đối xứng hai đầu khi  $\chi = 1$ . Biểu thức sau thỏa mãn điều kiện nói trên:

$$w_\chi(x) = (1 - \chi)w_0(x) + \chi w_1(x) \quad (15.48).$$

Sử dụng công thức (15.48) trên đây cho trường hợp tải trọng rải đều, kết hợp với các công thức thu được trước đây, ta có thể có được các công thức xác định các yếu tố uốn dầm khảo sát:

$$w_\chi(0) = \frac{q}{k_0} \left[ 1 - \frac{1 - \chi}{1 + B} \varphi_0(u) - \chi \frac{\varphi_1(u)}{1 + B_1} \right]; \quad (15.49)$$

$$w'_\chi \left( \pm \frac{l}{2} \right) = \mp (1 - \chi) \frac{ql^3}{24EJ} \frac{\psi_2(u)}{1 + B}; \quad (15.50)$$

$$M_\chi(0) = - \frac{ql^2}{8} \left[ \frac{(1 - \chi)}{1 + B} \chi_0(u) - \frac{\chi \chi_1(u)}{3(1 + B_1)} \right]; \quad (15.51)$$

$$M_\chi \left( \frac{l}{2} \right) = \chi \frac{ql^2}{12} \frac{\chi_2(u)}{1 + B}; \quad (15.52)$$

Giữa hệ số ngàm  $\chi$  và hệ số mềm ngàm  $\mathcal{U}$  tồn tại một quan hệ hoàn toàn xác định. Để các định quan hệ này, ta hãy so sánh góc xoay, chẳng hạn của tiết diện đế phải(H2.10).

$$\frac{M_\chi l}{6EI} \psi_1(u) + \frac{M_\chi l}{3EI} \psi_0(u) - \alpha(q) = -aM_\chi,$$

Hay:

$$\frac{M_\chi l}{6EI} \left[ \psi_1(u) + 2\psi_0(u) + \frac{6EIa}{l} \right] = \alpha(q) \quad (15.53)$$

Trong công thức,  $M_\chi$  chính là moment uốn tại ngàm đàn hồi phía phải.

Nếu như là ngàm cứng,  $\mathcal{U} = 0$  và  $M_\chi$  bằng  $M_c$ . Và như vậy:

$$\alpha(q) = \frac{M_c l}{6EI} [\psi_1(u) + 2\psi_0(u)] \quad (15.54)$$

Thay biểu thức này vào công thức trước đó và để ý rằng  $M_\chi = \chi M_c$ , chúng ta nhận được:

$$\chi \frac{M_c l}{6EI} \left[ \psi_1(u) + 2\psi_0(u) + \frac{6EIa}{l} \right] = \frac{M_c l}{6EI} [\psi_1(u) + 2\psi_0(u)]$$

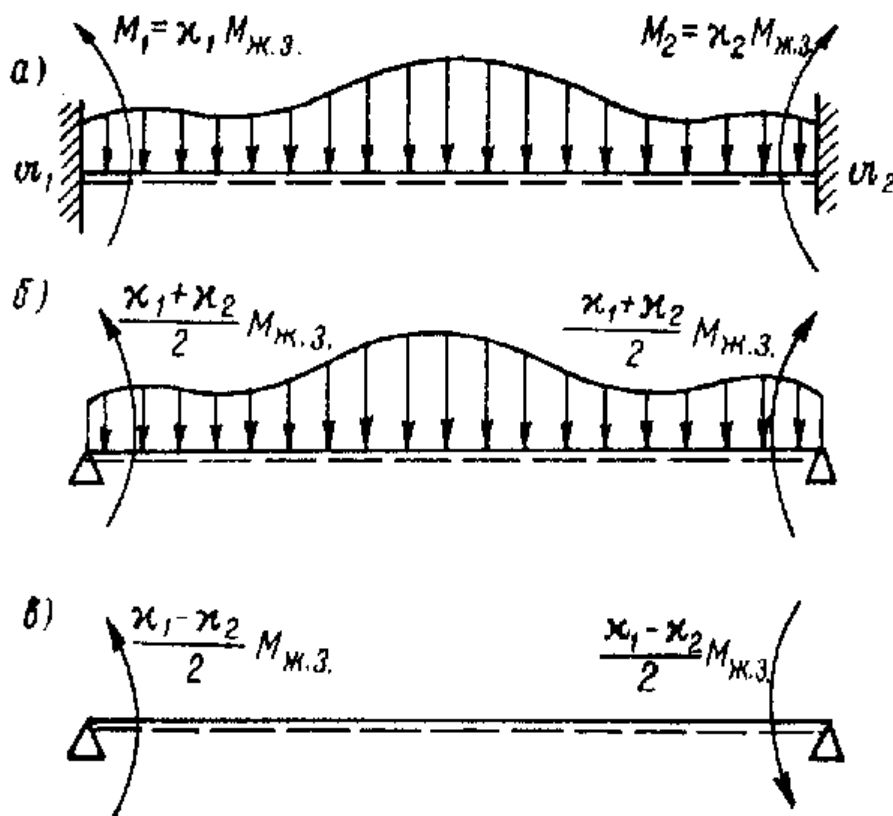
Từ đó:

$$\chi = \frac{1}{1 + \frac{2\mathcal{U}EI}{l} \times \frac{3}{\psi_1(u) + 2\psi_0(u)}} \quad (15.55)$$

Điều có thể rút ra từ công thức tính hệ số ngàm  $\chi$  là, với tải trọng phân bố đối xứng, các hệ số “mềm” hai đế bằng nhau, tức đối xứng nhau, và khi đó,  $\chi$  không lệ thuộc vào độ lớn và qui luật phân bố của tải trọng.

Công thức (15.55) có thể suy rộng cho trường hợp hệ số ngàm đầu bên trái  $\mathcal{U}_1$  và đầu bên phải  $\mathcal{U}_2$  khác nhau (H2.11).Viết lại các điều kiện bằng nhau về góc xoay cho các tiết diện đế (H2.11,a) , ta có:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{U}_1 M_1 &= -\frac{M_1 l}{3EI} \psi_0(u) - \frac{M_2 l}{6EI} \psi_1(u) + \alpha(q); \\ -\mathcal{U}_2 M_2 &= -\frac{M_1 l}{6EI} \psi_1(u) - \frac{M_2 l}{3EI} \psi_0(u) - \alpha(q); \end{aligned} \right\} \quad (15.56)$$



H2.11

Trường hợp cả hai ngàm đều cứng,  $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2 = 0$ ;  $M_1 = M_2 = M_c$ , chúng ta quay về các quan hệ quen thuộc cho dầm ngàm cứng.

Từ hệ phương trình (15.56), kết hợp với (15.54), có thể nhận được hệ phương trình đại số cho phép xác định các hệ số ngàm đế bên trái  $\chi_1$  và hệ số ngàm đế bên phải  $\chi_2$ :

$$\left. \begin{aligned} \chi_1 &= \frac{(\psi_1 + 2\psi_0) \left( 2\psi_0 - \psi_1 + \frac{6EI}{l} u_1 \right)}{\left( 2\psi_0 + \frac{6EI}{l} u_1 \right) \left( 2\psi_0 + \frac{6EI}{l} u_2 \right) - \psi_1^2} \\ \chi_2 &= \frac{(\psi_1 + 2\psi_0) \left( 2\psi_0 - \psi_1 + \frac{6EI}{l} u_2 \right)}{\left( 2\psi_0 + \frac{6EI}{l} u_1 \right) \left( 2\psi_0 + \frac{6EI}{l} u_2 \right) - \psi_1^2} \end{aligned} \right\} \quad (15.57)$$

Công thức (15.57) cho thấy, khi tải trọng ngang là đối xứng, các hệ số ngàm không phụ thuộc gì, cả về trị số lẫn đặc tính biến đổi của tải trọng.

Trong nhiều trường hợp ứng dụng trong thực tế quan trọng, hệ số ngàm được xác định không phải từ hệ phương trình (15.57) mà từ công thức (15.47), trong đó, moment trên tiết diện ngàm đàn hồi  $M_{dh}$  được xác định theo kết quả tính toán dầm liên nhịp. Khi đó, thường thì  $\chi_1 \neq \chi_2$ .

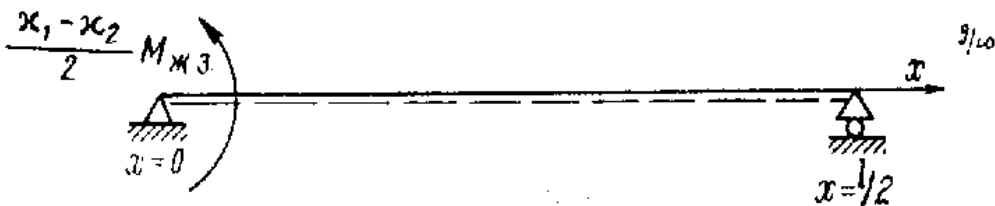
Xuất hiện một câu hỏi, làm thế nào để có thể xây dựng công thức xác định các yếu tố uốn cơ bản của các dầm kể trên và có thể sử dụng các công thức (15.49) - (15.52) vào mục đích này không?

Ta thay các ngàm bằng các moment ngàm đàn hồi  $M_1 = \chi_1 M_c$  và  $M_2 = \chi_2 M_c$  (H2.11a), phân tải trọng ra thành đối xứng (H2.11b), và phản xứng (H2.11c), đối với điểm giữa dầm. Dĩ nhiên là moment uốn và độ võng tại giữa dầm do phần phản xứng gây ra sẽ bằng 0, do đó các đặc trưng uốn nói trên chỉ cần được xác định bởi thành phần tải trọng đối xứng, với hệ số ngàm bằng trung bình cộng cả hệ số ngàm của 2 tiết diện đế:

$$\chi = \frac{\chi_1 + \chi_2}{2} \quad (15.58).$$

Như vậy là, moment uốn và độ võng tại giữa dầm có thể xác định theo các công thức (15.49) - (15.51), với hệ số ngàm bằng trung bình cộng hai hệ số ngàm tại hai đầu.

Góc xoay và lực cắt tại các tiết diện đế được xác định bằng tổng cả yếu tố uốn tương ứng của dầm theo sơ đồ đối xứng và phản xứng. Các yếu tố uốn tại tiết diện đế do tải trọng đối xứng được xác định theo được công thức (15.50. (15.52), với  $\chi = \frac{\chi_1 + \chi_2}{2}$ . Khi xác định các yếu tố uốn tại tiết diện đế của dầm do thành phần tải trọng phản xứng, có thể giới hạn trong việc khảo sát bài toán uốn nửa dầm bất kỳ, chẳng hạn nửa dầm trái (H2.12).



H2.12

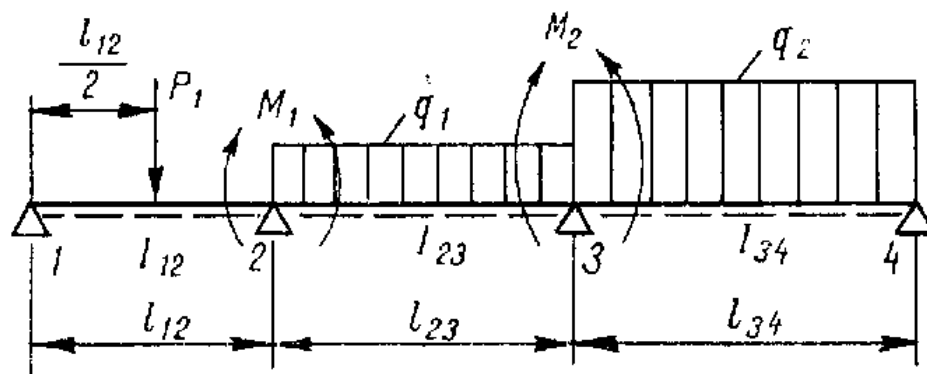


Việc xác định góc xoay và lực cắt tại tiết diện ngàm đàn hồi, đế trái của dầm, biểu thị trên hình H2.12, tiến hành theo các công thức (15.43) và (15.45). Góc xoay và lực cắt tại đế phải của dầm dưới tác dụng của tải trọng phản xứng sẽ bằng giá trị tương ứng tại đế bên trái.

Nếu dầm chịu tải không đối xứng, và có các hệ số ngàm khác nhau, thì tải trọng cần phân thành các thành phần đối xứng và phản xứng, Độ võng và moment uốn tại giữa dầm do tải trọng phản xứng bằng 0, còn do tải trọng đối xứng, được xác định theo cách thức nêu ra trên đây.

#### 4. Tính dầm liên nhịp trên nền đàn hồi.

Các bảng uốn dầm cho phép tiến hành một cách thuận lợi việc tính toán dầm liên nhịp nằm trên nền đàn hồi và tựa trên các đế cứng đàn hồi. Ta hãy xem xét vấn đề này thông qua ví dụ cho trên hình H2.13.



H2.13

Giả tưởng tách rời thanh tại các đế và tác dụng qua lại giữa hai phần thanh này với nhau được thay bằng các moment. Để xác định các moment chưa biết, hãy lập phương trình liên tục góc xoay tại nút thứ 2 của các nhịp dầm 1-2 và 2-3, tại nút thứ 3 của các nhịp dầm 2-3 và 3-4:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{P_1 l_{12}^3}{16EI_{12}} \chi_0(u_{12}) + \frac{M_1 l_{12}}{3EI_{12}} \psi_0(u_{12}) &= \frac{q_1 l_{23}^2}{24EI_{23}} \psi_0(u_{23}) - \frac{M_1 l_{23}}{3EI_{23}} \psi_0(u_{23}) - \frac{M_2 l_{23}}{6EI_{23}} \psi_1(u_{23}); \\ -\frac{q_1 l_{23}^3}{24EI_{23}} \psi_2(u_{23}) + \frac{M_1 l_{23}}{6EI_{23}} \psi_1(u_{23}) + \frac{M_2 l_{23}}{3EI_{23}} \psi_0(u_{23}) &= -\frac{M_2 l_{34}}{3EI_{34}} \psi_0(u_{34}) + \frac{q_2 l_{34}^3}{24EI_{34}} \psi_2(u_{34}), \end{aligned} \right\} \quad (15.59)$$

$$\text{trong đó} \quad u_{i,i+1} = \frac{l_{i,i+1}}{2} \sqrt{\frac{k_{i,i+1}}{4EI_{i,i+1}}} \quad (15.60)$$

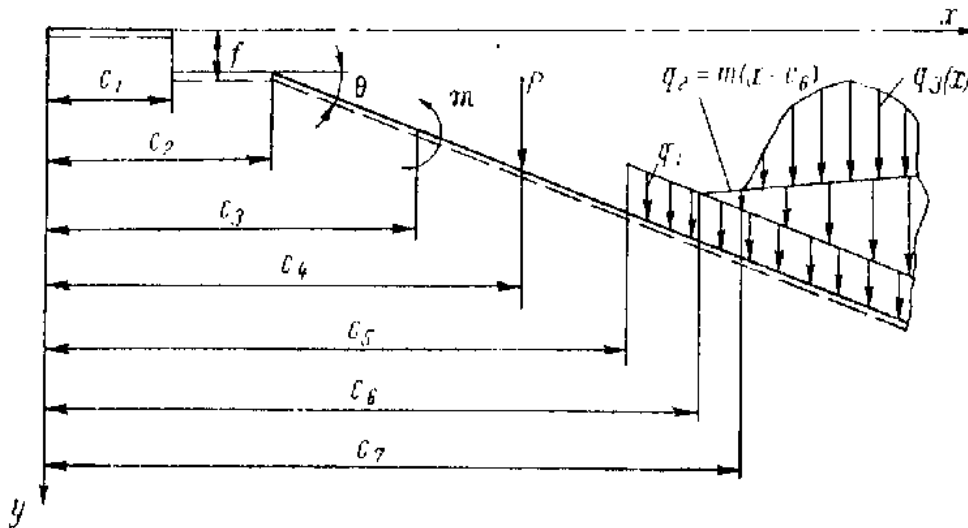
Các giá trị bằng số của các hàm phụ trợ dễ dàng xác định nhờ các bảng cho sẵn trong các sổ tay và như vậy, việc giải hệ phương trình (15.59) không còn khó khăn nào.

Sau khi xác định các moment đế, có thể tìm được các hệ số ngàm cho mỗi một nhịp, trong đó, việc xác định các moment uốn tại tiết diện đế của dầm khảo sát khi ngàm cứng là nhất thiết.

Các yếu tố uốn tại giữa từng nhịp dầm của dầm liên nhịp được xác định theo các công thức (15.49) và (15.51). Giá trị các hệ số nằm trong các công thức này lấy bằng trung bình cộng các hệ số nằm tại tiết diện đế phải và tiết diện đế trái của nhịp khảo sát.

### 5. Sử dụng phương pháp tham số đầu để giải bài toán dầm trên nền đàn hồi.

Trong thực tế, nhiều khi cần giải bài toán dầm trên nền đàn hồi khi mà tải trọng thay đổi theo các qui luật khác nhau trên những đoạn khác nhau theo chiều dài dầm (H2.14).



H2.14

Để giải bài toán trên, nên dùng phương pháp tham số đầu, mà ta đã có dịp đề cập đến tại §2. Theo phương pháp này, đường đàn hồi dầm có thể được biểu diễn dưới dạng:

$$w(x) = w_1(x) + l_{c1} \delta_1 w(x) + \dots + l_{c7} \delta_7 w(x), \quad (15.61).$$

Trong đó,  $w_1(x)$  – là đường đàn hồi của đoạn bên trái của dầm với giả thiết là tải trọng trên đoạn này kéo dài qui luật tác dụng trên suốt chiều dài dầm. Việc chuyển tiếp qua mỗi điểm  $x = c_i$  kèm theo một bổ sung  $\delta_i w(x)$  đối với đường đàn hồi, thỏa mãn điều kiện chuyển tiếp của nền đàn hồi tại tiết diện chuyển tiếp nói trên. Dạng của hàm bổ sung  $\delta_i w(x)$  không phụ thuộc gì vào điều kiện liên kết tại các đế của dầm cũng như vào các hàm bổ sung trên các đoạn còn lại.

Dựa trên (14.40), phương trình vi phân uốn dầm cho trường hợp của đại lượng bổ sung có dạng sau:

$$EI(\delta_i w)^{IV} + k_0 \delta_i w = \delta_i q(x).$$

Nghiệm tổng quát của phương trình này được viết dưới dạng:

$$\delta_i w(x) = D_{0i} V_0[\alpha(x - c_i)] + D_{1i} V_1[\alpha(x - c_i)] + D_{2i} V_2[\alpha(x - c_i)] + D_{4i} V_0[\alpha(x - c_i)] + (\delta_i w)_r \quad (15.62)$$

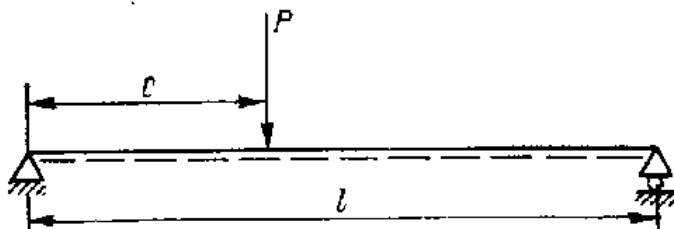
Trong đó:

-  $(\delta_i w)_r$  là nghiệm riêng của phương trình vi phân tương ứng với vế phải  $\delta_i q(x)$ .

- Các hằng số  $D_{0i}$ ,  $D_{1i}$ ,  $D_{2i}$ ,  $D_{3i}$  được xác định từ các điều kiện biên liên đới giữa hai đoạn dầm tại điểm  $c_i$ .

Để hiểu rõ thêm về cách làm, ta hãy xét một vài ví dụ:

**Ví dụ 1:** Xác định đường đàn hồi của dầm tựa tự do hai đầu, nằm trên nền đàn hồi có độ cứng  $k_0$ , và chịu tải bởi lực tập trung  $P$  tại điểm  $x = c$  (H2.15).



H2.15

Trong trường hợp của ví dụ này,  $\delta q_1(x) = 0$ , cho nên  $(\delta_1 w)_r = 0$  và khi chuyển qua điểm  $x = c$  lực cắt có biến đổi nhảy bậc một lượng  $P$ . Vì thế cho nên các hằng số  $D_{01}$ ,  $D_{11}$ ,  $D_{21}$ ,  $D_{31}$  được xác định từ các điều kiện liên đới sau đây giữa hai đoạn dầm:

$$\delta_1 w = 0; \delta_1 w' = 0; \delta_1 w'' = 0; \delta_1 w''' = \frac{P}{EI} \quad (15.63)$$

Buộc dạng nghiệm (15.62) thoả mãn các điều kiện (15.63) với lưu ý về các tính chất của các hàm Puzyrevski, xác định bởi các công thức (15.46) và (15.49), dễ dàng nhận được:

$$D_{01} = D_{11} = D_{21} = 0; D_{31} = \frac{P}{2\sqrt{2}\alpha^3 EI} \quad (15.64)$$

và như vậy: 
$$\delta_1 w = \frac{P}{2\sqrt{2}\alpha^3 EI} V_3[\alpha(x - c)]. \quad (15.65)$$

Trên đoạn dầm đầu tiên, vì không có tải trọng ngang nên  $w_1(x)$  có thể biểu thị dưới dạng (15.45).

Và như vậy, biểu thức đường đàn hồi của dầm khảo sát có thể viết dưới dạng:

$$w(x) = w_1(x) + \left\| \delta_1 w = \right. \\ = D_0 V_0(\alpha x) + D_1 V_1(\alpha x) + D_2 V_2(\alpha x) + D_3 V_3[\alpha x] + \left\| \frac{P}{2\sqrt{2}\alpha^3 EI} V_3[\alpha(x-c)] \right. \quad (15.66)$$

Sử dụng điều kiện biên hai đầu dầm để xác định các hằng số  $D_0, D_1, D_2, D_3$

Các điều kiện biên này là:

Tại  $x = 0$ :  $w = w_1 = 0, w'' = w_1'' = 0$ ;

Tại  $x = l$ :  $w = w_1 + \delta_1 w = 0, w_1'' + \delta_1 w'' = 0$ .

Từ các điều kiện tại  $x = 0$ , thu được  $D_0 = D_2 = 0$ .

Hai điều kiện tại  $x = l$  giúp ta lập được hệ phương trình xác định hai hằng số còn lại:

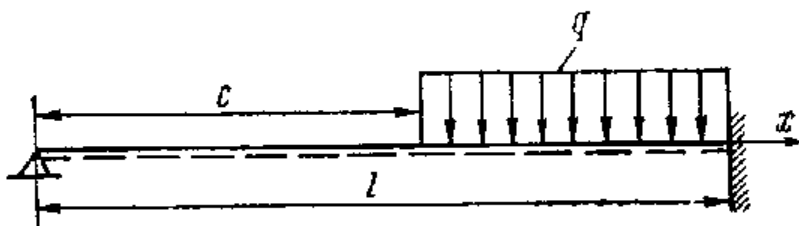
$$\left. \begin{aligned} D_1 V_1(2u) + D_3 V_3(2u) + \frac{P}{2\sqrt{2}\alpha^3 EI} V_3(2u') &= 0; \\ -D_1 V_3(2u) + D_3 V_1(2u) + \frac{P}{2\sqrt{2}\alpha^3 EI} V_1(2u') &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (15.67)$$

Trong đó sử dụng các ký hiệu:

$$\left. \begin{aligned} \alpha l &= 2u, \\ \alpha(l-c) &= 2u'. \end{aligned} \right\} \quad (15.68)$$

Sau khi xác định  $D_1$  và  $D_3$ , biểu thức của đường đàn hồi là hoàn toàn được xác định.

**Ví dụ 2.** Xác định đường đàn hồi của dầm trên nền đàn hồi với hệ số cứng  $k_0$  và chịu tải rải đều trên một phần dầm(H2.16)



H2.16

Trong trường hợp khảo sát,  $\delta q_1(x) = q = \text{const}$ , nên biểu thức của  $\delta_1 w$  có thể viết dưới dạng

$$\delta_1 w(x) = D_{01} V_0[\alpha(x-c)] + D_{11} V_1[\alpha(x-c)] + D_{21} V_2[\alpha(x-c)] + D_{31} V_3[\alpha(x-c)] + \frac{q}{k_0} \quad (15.69)$$

Buộc (15.69) thỏa mãn các điều kiện chuyển tiếp giữa hai đoạn dầm tại  $x = c$ :

$$\delta_1 w = 0; \delta_1 w' = 0; \delta_1 w'' = 0; \delta_1 w''' = 0,$$

Ta thu được :

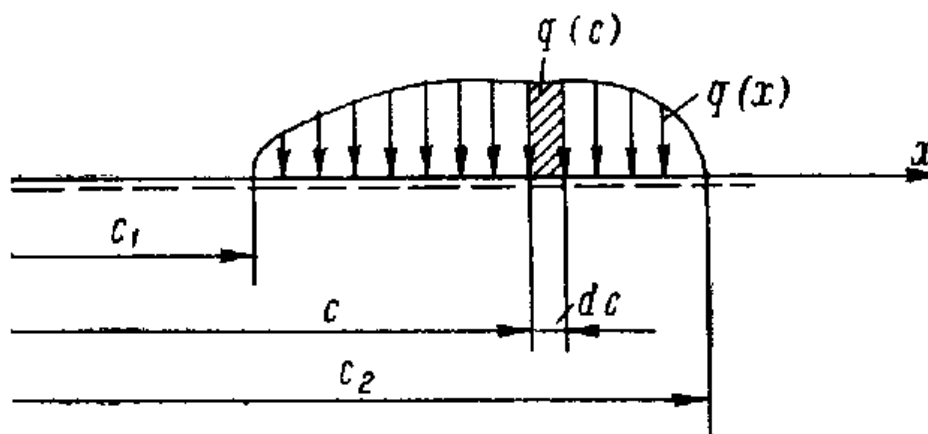
$$D_{11} = D_{21} = D_{31} = 0, \quad D_{01} = -\frac{q}{k_0}$$

Như vậy, hàm bổ sung đường đàn hồi cho đoạn  $x \geq c$  sẽ là:

$$\delta_1 w(x) = \frac{q}{k_0} \{1 - V_0[\alpha(x - c)]\}. \quad (15.70)$$

Việc xác định đường đàn hồi đường đàn hồi cho toàn thể dầm tiến hành không khác ví dụ trước.

**Ví dụ 3.** Xác định biểu thức hàm độ võng bổ sung ( $\delta_1 w$ ) khi tác dụng tải trọng rải  $q(x)$  theo qui luật bất kỳ trên đoạn  $x \geq c_1$  (H2.17).



H2.17

Dùng nguyên lý cộng tác dụng. Xét tác dụng của tải trọng phân tố  $qdc$  trên đoạn dầm từ  $x = c$  đến  $x = c + dc$  (H2.17). Khi đó, trên cơ sở của (15.65), ta có

$$d(\delta_1 w) = \frac{q(c)}{2\sqrt{2}\alpha^3 EI} \left\| V_3[\alpha(x - c)] dc \right.$$

Độ võng bổ sung  $\delta_1 w$  do toàn bộ tải trọng tác dụng lên dầm được xác định theo công thức:

$$\delta_1 w(x) = \left\| \int_{c_1}^x \frac{q(c)}{2\sqrt{2}\alpha^3 EI} V_3[\alpha(x - c)] dc \right. \quad (15.71).$$

Biểu thức (15.71) bằng 0 tại  $x = c_1$ . Điều này có thể chứng minh không mấy khó khăn. Tất nhiên, biểu thức này chính là tích phân riêng của phương trình vi phân uốn dầm, tương ứng với vế phải của phương trình này.

Trong các ví dụ trên, ta đã thu được một số biểu thức hàm độ võng bổ sung. Một cách hoàn toàn tương tự, có thể viết biểu thức hàm bổ sung tính đến các dạng gián đoạn khác của đường đàn hồi.

Ta đưa ra ở đây biểu thức đầy đủ của đường đàn hồi cho dầm biểu thị trên hình H2.14:

$$\begin{aligned}
 w(x) = & w_r + D_0 V_0(\alpha x) + D_1 V_1(\alpha x) + D_2 V_2(\alpha x) + D_3 V_3(\alpha x) + \left\| \int_{c_1}^x f V_0[\alpha(x - c_1)] + \right. \\
 & + \left\| \frac{\theta}{\sqrt{2\alpha}} V_1[\alpha(x - c_2)] + \left\| \frac{m}{2\alpha^2 EI} V_2[\alpha(x - c_3)] + \left\| - \frac{P}{2\sqrt{2EI}\alpha^3} V_3[\alpha(x - c_4)] + \right. \right. \\
 & + \left\| \frac{q}{4\alpha^4 EI} \{1 - V_0[\alpha(x - c_5)]\} + \left\| \frac{m_0}{4\alpha^4 EI} \left\{ x - c_6 - \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} V_1[\alpha(x - c_6)] \right\} + \right. \\
 & + \left\| \frac{1}{2\sqrt{2\alpha^3 EI}} \int_{c_7}^{c=x} q(c) V_3[\alpha(x - c)] dc. \quad (15.72)
 \end{aligned}$$

Trong đó,  $w_r$  - là nghiệm riêng, tương ứng với phần lực tác dụng lên toàn dầm, không thể hiện trên hình vẽ H2.14). Nếu không có lực này thì  $w_r = 0$ .

Biểu thức (15.72) thu được với giả thiết là tất cả các lực phân bố kéo dài đến tận mút phải của dầm. Vì thế cho nên, với lực rải kết thúc trước, ta phải giả định kéo dài nó đến tận mút phải, đồng thời với việc bổ sung một lực cùng cường độ nhưng ngược hướng tác dụng vào dầm, bắt đầu từ điểm lực thực kết thúc tác dụng.

## &16. ỨNG DỤNG LÝ THUYẾT UỐN DẦM TIẾT DIỆN NGANG THAY ĐỔI, NẪM TRÊN NỀN ĐÀN HỒI, TRONG MỘT SỐ BÀI TOÁN KẾT CẤU TÀU THỦY.

### 1. Uốn tàu trên nước tĩnh.

Tàu nổi trên nước tĩnh có thể coi là dầm tự do, cân bằng dưới tác dụng của hai hệ lực: trọng lượng và lực nổi.

Nếu đưa vào các ký hiệu sau:

$p(x)$  - cường độ trọng lượng (trọng lượng phân bố) tại tiết diện  $x$  theo chiều dài tàu;

$F(x)$  - diện tích phần sườn phần dưới đường nước cân bằng của của tàu cứng tuyệt đối, tại tiết diện  $x$ ;

$\gamma$  - trọng lượng riêng của nước;

$b(x)$  - nửa chiều rộng đường nước;

$w(x)$  - độ võng của thân tàu như một dầm đàn hồi.

Ta có thể viết biểu thức cường độ lực tổng hợp tác dụng gây uốn thân tàu, có thành thẳng tại lân cận đường nước khảo sát, như sau:

$$q(x) = p(x) - \gamma[F(x) + b(x).w(x)], \quad (16.1)$$

Khi đó, Phương trình vi phân uốn thân tàu được viết dưới dạng:

$$[EI(x)w''(x)]' = p(x) - \gamma F(x) - \gamma b(x)w(x). \quad (16.2)$$

Trực tiếp từ (16.2) và (14.3) suy ra rằng đối với tàu mềm nổi trên mặt nước, hệ số cứng nền đàn hồi được xác định theo công thức:

$$k_0 = \gamma \cdot b(x) \quad (16.3)$$

Các tính toán chỉ ra rằng, đối với tàu biển, khi xác định moment uốn, lượng bổ sung khi tính đến ảnh hưởng của nền đàn hồi nói trên chỉ vào khoảng từ 1% đến 2%. Ngược lại, đối với sà lan chở dầu trên sông, với tỉ số giữa chiều dài và chiều cao tàu  $L/D \geq 30$ , lượng giảm moment uốn, khi tính đến ảnh hưởng của độ võng, sẽ rất lớn, có khi đạt từ 30% đến 40%.

Khi tính ảnh hưởng của độ võng, người ta thường phải tính luôn cả ảnh hưởng của biến dạng cắt. Nếu ký hiệu độ cứng cắt là  $G\theta$  và giả thiết rằng độ cứng này là không đổi trên suốt chiều dài tàu, thì phương trình vi phân (16.2), tính cả ảnh hưởng cắt, có dạng:

$$[EI(x)w_1''(x)]' = p(x) - \gamma F(x) + \gamma b(x) \frac{EI(x)}{G\theta} w_1''(x) - \gamma b(x)w_1(x)$$

Hay

$$[EI(x)w_1''(x)]' - T(x)w_1''(x) + k_0(x)w_1(x) = q^*(x), \quad (16.4)$$

Trong đó:

$$T(x) = \frac{EI(x)}{G\theta} \gamma b(x); \quad (16.5)$$

$$q^*(x) = p(x) - \gamma F(x); \quad (16.6)$$

với  $w_1(x)$  – độ võng do uốn của dầm.

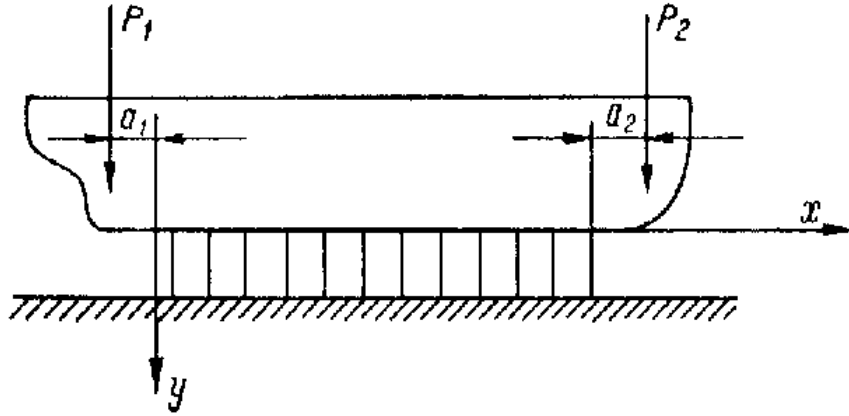
Phương trình (16.4) mô tả uốn dầm không lằng trệ, nằm trên nền đàn hồi độ cứng thay đổi  $k_0(x)$ , dưới tác dụng của lực dọc thay đổi  $T(x)$ , và tải trọng ngang phân bố với cường độ  $q(x)$ .

Việc giải phương trình trên có thể tiến hành theo các phương pháp số khác nhau, với sự trợ giúp của máy tính điện tử.

## 2. Uốn tàu nằm trên ụ khô.

Sơ đồ đặt tàu trên ụ khô cho trên H2.18. Sơ đồ tính toán cho trên H2.19.

Khi đặt tàu trên ụ khô, tàu thường được kê dưới đường ki, nằm ngang. Vì luôn có hai phần thừa ra ở hai đầu tàu, nên tồn tại hai lực tập trung  $P_1$  và  $P_2$  cách hai tiết diện đầu mút dầm để kê các đoạn  $a_1, a_2$ , đồng nghĩa với việc sự tồn tại của 2 moment  $M_1$  và  $M_2$  tác dụng lên thân tàu, tại hai tiết diện nói trên.

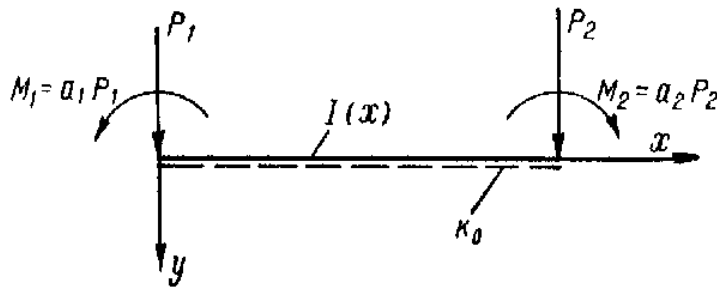


H2.18

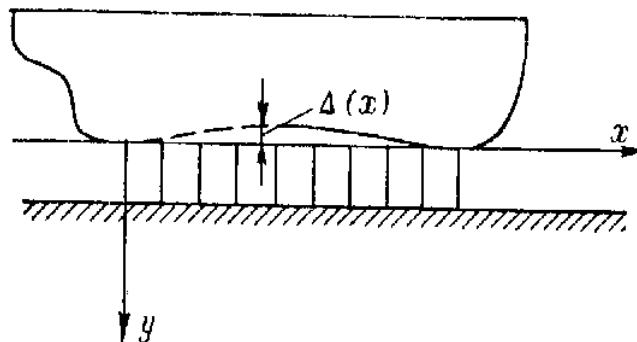
Đường ki tàu có thể có độ cong lắp ráp; khiến cho mép trên của đế kê có thể không là đường thẳng. vì thế cho nên nếu hình dung kê con tàu không trọng lượng lên  $\Delta$ , thì giữa đường ki và mép trên đế kê tồn tại khe hở  $\Delta x$ , như thể hiện trên hình H2.20.

Trong trường hợp này, cường độ phản lực nền được xác định theo công thức:

$$r(x) = k_0(x)[w(x) - \Delta(x)]. \quad (16.7)$$



H2.19



H2.20



Trong trường hợp này, vì đế kê là nền đàn hồi “một hướng”, tức phản lực của nó chỉ có thể hướng từ dưới lên, khi đó, đẳng thức (16.7) chỉ có thể sử dụng với điều kiện:

$$w(x) - \Delta(x) \geq 0. \quad (16.8)$$

Khi  $w - \Delta x < 0$ , phản lực  $r$  phải lấy bằng 0.

Ký hiệu moment quán tính tiết diện ngang thân tàu bởi  $I(x)$ , còn cường độ trọng lượng – bởi  $q(x)$ , với chú ý là cường độ phản lực nền xác định nhờ biểu thức (16.7), có thể viết phương trình vi phân uốn thân tàu trên ụ khô dưới dạng sau:

$$[EI(x)w''(x)]' + k_0(x)w(x) = q(x) + k_0(x)\Delta(x) \quad (16.9)$$

Khi lập phương trình (16.9), giả thiết rằng hệ số cứng nền  $k_0(x)$  không phụ thuộc vào độ võng. Trên thực tế, khi dùng gỗ làm vật liệu kê, tình hình không phải như vậy.

Khi lập phương trình (16.9), cũng đã không để ý đến biến dạng uốn của dàn đáy tàu.

Việc giải phương trình trên cũng chỉ có thể thực hiện được nhờ các phương pháp gần đúng và tốt nhất là với sự trợ giúp của máy tính điện tử.



### CHƯƠNG III

## UỐN DÀN PHẪNG

Dàn là hệ thanh thông dụng nhất trong kết cấu thân tàu.

*Dàn phẳng* là hệ các dầm giao nhau, cùng gắn vào một tấm và gắn cứng với nhau tại điểm giao kết, nhận tải trọng ngoài tác dụng thẳng góc lên mặt phẳng tấm và truyền tải trọng này lên vành đế cứng của dàn. Vành đế của dàn thường là một dàn khác, nằm trong mặt phẳng, nghiêng một góc nào đó so với mặt phẳng dàn khảo sát.

Các dầm trong dàn tàu thủy thường trực giao nhau. Khi đó, phương song song với các dầm có số lượng nhiều hơn, được gọi là *phương chính*, còn dầm theo phương chính được gọi là *dầm chính*. Dầm đặt theo phương vuông góc với dầm chính, gọi là *dầm ngang*. Chẳng hạn trong kết cấu dàn đáy tàu, các đà ngang đáy đóng vai các dầm chính, còn các sống dọc đóng vai các dầm ngang.

Mục đích của việc tính dàn là xác định vai trò của các dầm thuộc dàn trong việc tiếp nhận các tải trọng ngoài tác dụng lên mặt phẳng dàn cùng các ứng lực trên tiết diện ngang của các dầm. Đây là bài toán siêu tĩnh, vì thế, việc giải dàn bắt đầu từ việc khử siêu tĩnh cho dàn.

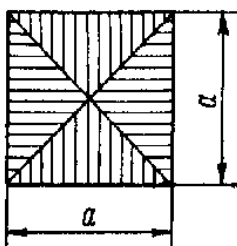
Trước tiên, hãy xác định sơ đồ tính toán và làm sáng tỏ vai trò của các dầm cấu thành dàn.

Tải trọng ngoài tác dụng lên dàn có thể bao gồm áp lực nước ngoài mạn, dưới đáy tàu, phân bố trên mặt dàn, áp lực của hàng hoá trong khoang, cùng các loại tải trọng khác, như áp lực của cột chống chẳng hạn.

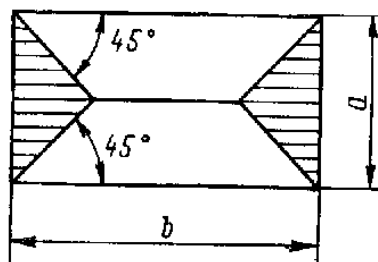
Áp lực của nước tác dụng lên dàn, thông qua tấm vỏ, và được truyền lên các dầm trong thành phần dàn, còn gọi là *các cơ cấu* của dàn, và từ đây, truyền tiếp lên các vành đế của chúng.

Các dầm của dàn chia tấm ra thành các miền hình chữ nhật, gọi là các *tấm chữ nhật*, và như vậy, để biết được chính xác sự phân chia tải trọng ngoài cho các dầm của dàn như thế nào, cần tiến hành tính toán các tấm chữ nhật này. Việc giải tính toán các tấm chữ nhật là một nội dung được đề cập đến trong một phần khác “Lý thuyết đàn hồi và lý thuyết tấm, vỏ”.

Tuy nhiên, bài toán phân chia tải trọng tác dụng lên dàn, giữa dầm chính và dầm ngang, có thể thực hiện một cách nhanh chóng hơn, gần đúng, nhưng đủ chính xác, đáp ứng yêu cầu của thực tế.



H3.1



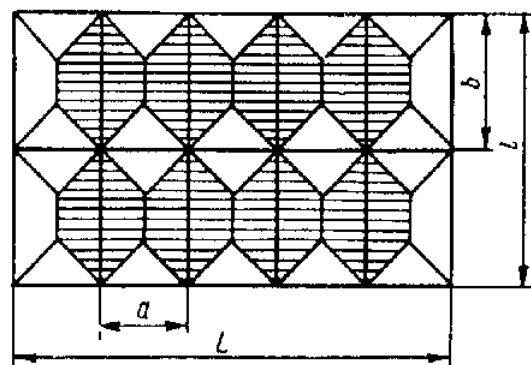
H3.2

Ta xét trường hợp khoảng cách giữa các dầm chính và giữa các dầm ngang là như nhau, tức các dầm của dàn chia tấm ra thành các miền hình vuông (H3.1).

Trong trường hợp này, tải trọng trên tấm chữ nhật sẽ phân đều ra 4 cạnh và áp lực lên mỗi cạnh sẽ là  $\frac{pa^2}{4}$  - với  $p$  là áp suất của tải trọng tác dụng lên dầm. Phân bố của áp lực này lên dầm có thể lấy theo qui luật hình tam giác, với đỉnh tam giác tại giữa đường viền tấm.

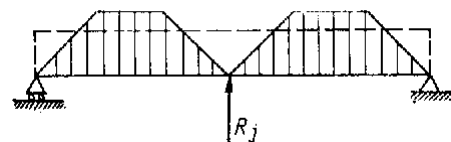
Nếu các tấm không phải là hình vuông mà là hình chữ nhật, có thể phân chia tải trọng ngoài cho các cạnh tấm như trên hình H3.2. Cạnh ngắn chịu tác dụng của phần tam giác, phần còn lại, hình thang, do cạnh dài đảm nhiệm.

Như vậy là khi tính dầm, tải trọng ngang tác dụng lên dầm, với áp suất phân bố đều, cần được phân ra cho dầm chính và dầm ngang theo cách thể hiện trên hình H3.3, tức phân ra thành tải trọng răng cưa tam giác và răng cưa hình thang. Phần răng cưa tam giác là cho dầm chính còn phần răng cưa hình thang – cho dầm ngang.



H3.3

Ngoài các tải trọng ngoài nói trên, các dầm còn chịu phản lực tác dụng lẫn nhau, theo phương vuông góc với mặt phẳng dầm và các moment phản lực, tập trung, gây ra do các dầm bị xoắn khi dầm bị uốn. Lưu ý rằng với các dầm là thanh thành mỏng tiết diện hở, độ cứng chống uốn rất nhỏ nên moment xoắn phát sinh không lớn, có thể bỏ qua. Vì lý do này, trong mô hình tính toán, dầm chính và dầm ngang, biểu diễn trên hình H3.4 và H3.5, không có mặt các moment này.



H3.4

H3.5

Với đơn

mục đích

giản hoá tính toán, các tải trọng răng cưa lại được thay bằng các tải trọng rải đều, như thể hiện trên hình H3.4 và H3.5, bằng các đường gián đoạn, và sự thay thế này hoàn toàn được thực tế xác nhận là không gây sai lệch nào về phản lực tương tác giữa các dầm.

Thực tế tính toán còn cho phép phân bố tải trọng ngoài tác dụng lên dầm cho các dầm một cách đơn giản hơn nhiều, mà vẫn không gây sai sót đáng kể về kết quả tính. Theo đó, giả thiết rằng, toàn bộ tải trọng ngoài do các dầm chính và cạnh đế dọc theo dầm chính tiếp nhận, còn dầm ngang chỉ chịu phản lực tác dụng qua lại giữa chúng với các dầm chính mà thôi.

Với giả thiết tính toán này, phản lực tương tác giữa các dầm, tính được, lớn hơn thực tế. Sự sai khác này ở mức không cần quan tâm khi tính toán các dầm của dầm, mà chỉ ảnh hưởng đến việc tính các mối nối giữa các dầm của dầm.

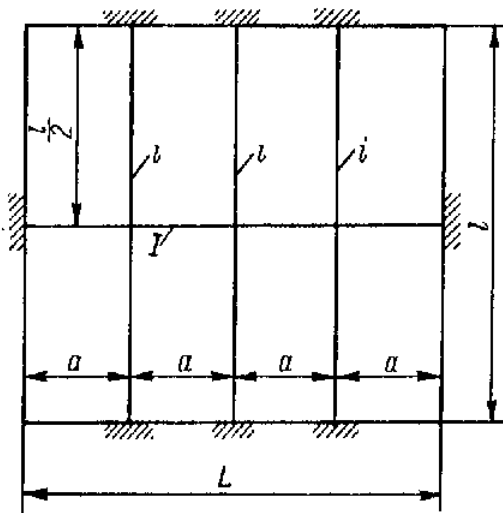
## **&17. TÍNH DẦM PHẪNG ĐƠN GIẢN - PHƯƠNG PHÁP SO SÁNH ĐỘ VÔNG**

Khi số dầm của dàn không nhiều, việc khử siêu tĩnh dàn có thể tiến hành theo phương pháp so sánh độ võng giữa các dầm của dàn tại các nút. Trong trường hợp này, ẩn số cơ bản sẽ là các phản lực tương tác giữa các dầm chính và các dầm ngang.

Để làm ví dụ, ta xét dàn đáy tàu dầu, giữa hai vách dọc, chịu tải trọng rải đều, với áp suất  $p$ . Dàn khảo sát (H3.6) bao gồm một sống dọc và 3 đà ngang. Sống dọc đóng vai dầm ngang còn các đà ngang – dầm chính. Từ các đặc điểm kết cấu của dàn khảo sát, các dầm chính và dầm ngang có thể coi là ngàm cứng tại các vành đế.

Trong ví dụ minh họa này, ta xem xét cả mức độ ảnh hưởng của độ cứng xoắn của dầm. Vì dầm ngang và dầm chính tại giữa dàn được đặt đúng tại vị trí trục đối xứng, và tải trọng ngoài là đối xứng nên chúng không bị xoắn. Moment xoắn phản lực chỉ tác dụng lên dầm ngang tại chỗ nó giao nhau với các dầm chính hai bên.

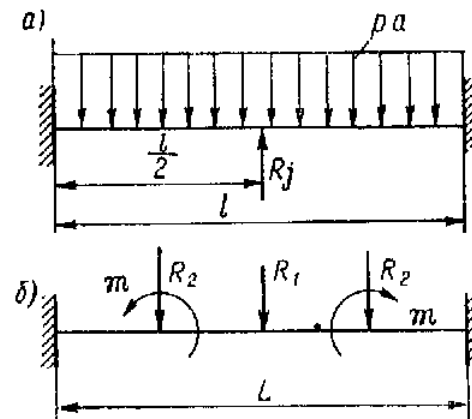
Sơ đồ tính toán các dầm chính và dầm ngang, cho trên H3.7, a và δ.



3

H3.6

Độ võng dầm chính tại chỗ giao với dầm ngang



H3.7

$$w_j = \alpha \frac{Pal^4}{EI} - \beta \frac{R_j l^3}{EI} \quad (17.1)$$

Trong đó,  $l$  – chiều dài dầm chính;

$i$  – moment quán tính dầm chính;

$a$  – khoảng cách giữa các dầm chính;

$\alpha$  và  $\beta$  - các hệ số ảnh hưởng, xác định theo các bảng uốn dầm;

$j$  – số hiệu dầm chính .

Độ võng của dầm ngang tại chỗ giao nhau giữa nó với các dầm chính ở giữa và dầm chính hai bên , tương ứng sẽ là:

$$w_1 = \gamma_{11} \frac{R_1 L^3}{EI} + \gamma_{12} \frac{2R_2 L^3}{EI} - \gamma_{m1} \frac{mL^2}{EI}; \quad (17.2)$$

$$w_2 = \gamma_{21} \frac{R_1 L^3}{EI} + \gamma_{22} \frac{R_2 L^3}{EI} - \gamma_{m2} \frac{mL^2}{EI}, \quad (17.3)$$

Trong đó:

$L$  – chiều dài dầm ngang;

$I$  – moment quán tính dầm ngang;

$\gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{22}, \gamma_{m1}, \gamma_{m2}$  – các hệ số ảnh hưởng , xác định theo các bảng uốn dầm.

Hai phương trình khử siêu tĩnh thu được từ việc so sánh độ võng xác định theo các biểu thức (17.1) và (17.2), (17.3):

$$\left\{ \begin{aligned} \left( \gamma_{11} \frac{L^2}{EI} + \beta \frac{l^3}{EI} \right) R_1 + \gamma_{12} \frac{2R_2 L^3}{EI} &= \alpha \frac{pal^4}{EI} + \gamma_{m1} \frac{mL^2}{EI}; \\ \gamma_{21} \frac{L^3}{EI} R_1 + \left( \gamma_{22} \frac{L^3}{EI} + \beta \frac{l^3}{EI} \right) R_2 &= \alpha \frac{pal^4}{EI} + \gamma_{m2} \frac{mL^2}{EI}. \end{aligned} \right. \quad (17.4)$$

Phương trình thứ 3 thu được từ việc cho bằng nhau giữa góc xoay tiết diện ngang dầm ngang tại chỗ nó giao với dầm chính hai bên và góc xoắn của dầm chính này.

Góc xoay của tiết diện ngang dầm ngang bằng công thức:

$$w'_2 = \gamma'_{22} \frac{R_2 L^2}{EI} + \gamma'_{21} \frac{R_1 L^2}{EI} - \gamma'_{m2} \frac{mL}{EI}, \quad (17.5)$$

Trong đó,  $\gamma'_{22}, \gamma'_{21}, \gamma'_{m2}$  – các hệ số ảnh hưởng xác định theo các bảng uốn dầm.

Góc xoắn của dầm chính cạnh khi chịu moment thứ 3 được tính bằng công thức:

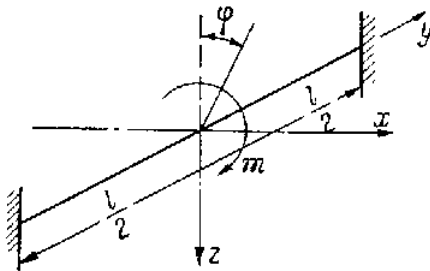
$$\varphi = \frac{ml}{4C} \quad (17.6)$$

Trong đó,  $C$  - độ cứng xoắn của dầm chính.

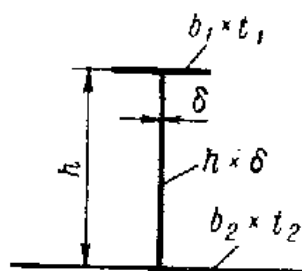
So sánh các biểu thức (3.5) và (3.6) ta thu được

$$m \left( \gamma'_{m2} + \frac{EI}{4C} \right) = \gamma'_{21} R_1 L + \gamma'_{22} R_2 L \quad (17.7)$$

Phương trình (17.7) cho phép khử ẩn số chứa biết  $m$  ra khỏi (17.4). Tuy nhiên, việc thực hiện thao tác này không có ý nghĩa gì nhiều vì hệ số bên cạnh  $m$  trong (17.7) là rất lớn, đồng nghĩa với  $m$  là rất nhỏ, và như vậy, số hạng cuối cùng trong (17.4) đều là rất nhỏ, có thể bỏ qua.



H3.8



H3.9

Để khẳng định điều này, ta hãy xem xét đại lượng  $\frac{EI}{C}$ . Đối với tiết diện hở (H3.8), độ cứng xoắn tự do  $C$  được xác định theo công thức:

$$C = G \left( \frac{h\delta^3}{3} + \frac{b_1 t_1^3}{3} + \frac{b_2 t_2^3}{3} \right). \quad (17.8)$$

Đối với tiết diện đà ngang tàu dầu cỡ trung ( $h = 170$  cm;  $\delta = 1,25$  cm;  $b_1 = 25,5$  cm;  $t_1 = 2$  cm;  $b_2 = 170$  cm;  $t_2 = 1,9$  cm)

$$C = 734,2 \cdot G \text{ cm}^4; i_{dn} = 2,44 \text{ cm}^4.$$

Giả sử moment quán tính sống chính bằng 2 lần moment quán tính đà ngang đáy,  $I = 2i_{dn}$ , ta có:

$$\frac{EI}{4C} = \frac{2(1+\nu)E \cdot 2,44 \cdot 10^6 \cdot 1,25}{734,2 \cdot E} = 1,08 \cdot 10^4.$$

Các hệ số ảnh hưởng, trong các công thức (17.1), (17.2), (17.3), (17.5), có các giá trị sau:

$$\alpha = 0,0026; \quad \beta = \gamma_{11} = 0,0052; \quad \gamma_{12} = \gamma_{21} = 0,0026; \quad \gamma_{22} = 0,0033; \\ \gamma_{m1} = \gamma'_{21} = \gamma'_{22} = 0,0156; \quad \gamma_{m2} = 0,125.$$

Nhận  $L = l$ , từ (3.7) ta được:

$$m \approx \frac{4C}{EI} (\gamma'_{21} R_1 L + \gamma'_{22} R_2 L) = 3,7 \cdot 10^{-4} \cdot 0,0156 L (R_1 + R_2) = 5,8 \cdot 10^{-6} (R_1 + R_2) L.$$

Việc thay giá trị trên đây vào phương trình (17.4) làm thay đổi các hệ số, bên cạnh các ẩn  $R_1, R_2$ , một lượng vào cỡ  $10^{-5}$  so với 1, điều này khẳng định tính đúng đắn của kết luận của chúng ta trên đây về vấn đề đang xét.

Bỏ qua đại lượng  $m$  trong hệ phương trình (23.4), sau khi biến đổi, ta thu được

$$\begin{aligned} 1,17R_1 + 0,52R_2 &= 0,081pl^2; \\ 0,26R_1 + 0,976R_2 &= 0,081pl^2. \end{aligned}$$

Từ đó:  $R_1 = 0,036pl^2$  và  $R_2 l^2$ .

Đối với dầm có một số dầm ngang, các dầm của dàn có tiết diện ngang hở, việc xoắn dầm xảy ra dưới hình thức xoắn kiểm chế, chứ không là xoắn tự do. Điều đó làm cho độ cứng xoắn tăng chút ít. Tuy nhiên, cho dù như vậy, ngay cả khi đó, kết quả tính toán cũng không được bổ sung gì đáng kể. Vì thế cho nên, việc tính đến ảnh hưởng của độ cứng xoắn cho dàn tạo thành từ các dầm tiết diện ngang hở luôn được bỏ qua.

Ảnh hưởng của độ cứng xoắn dầm là đáng kể hơn khi các dầm thuộc loại tiết diện. Để làm ví dụ, ta xem xét dàn đáy của tàu có đáy trong (tàu đáy đôi), là trường hợp mà cả hai hệ dầm đều gắn với cả hai tấm đáy, tấm đáy trong và tấm đáy ngoài. Đặc điểm làm việc của dàn nói trên không chỉ là tăng độ cứng xoắn các dầm mà còn làm xuất hiện trạng thái ứng suất phẳng trong các tấm của dàn. Theo các kết quả nghiên cứu, việc tính đến nhân tố trên, trong một số trường hợp, làm thay đổi giá trị kết quả tính từ 10% đến 20%.

Nói một cách chính xác, về bản chất, dàn thuộc loại trên cần được coi như một tấm chứ không phải như một hệ dàn trực giao. Tuy nhiên, trong đa số các trường hợp thường gặp trong thực tế, dàn loại này được dùng làm sơ đồ tính toán cho kết cấu nói trên, với việc bỏ qua ảnh hưởng của độ cứng xoắn, và trạng thái ứng suất phẳng trên hai tấm đáy, nhưng cần tính đến ảnh hưởng của biến dạng cắt.

## **&18. UỐN DÀN CÓ MỘT DẦM NGANG VÀ NHIỀU DẦM CHÍNH.**

Việc áp dụng phương pháp nêu ra trên đây cho việc tính toán dàn có nhiều nút là rất bất lợi, vì số ẩn sẽ nhiều. Khi tính dàn với số lượng lớn các dầm ngang giống nhau, có thể áp dụng phương pháp khác, thích hợp và đơn giản hơn<sup>1</sup>.

Đầu tiên, ta nghiên cứu trường hợp dàn có nhiều dầm chính giống nhau và một dầm ngang (H3.10).<sup>2</sup>

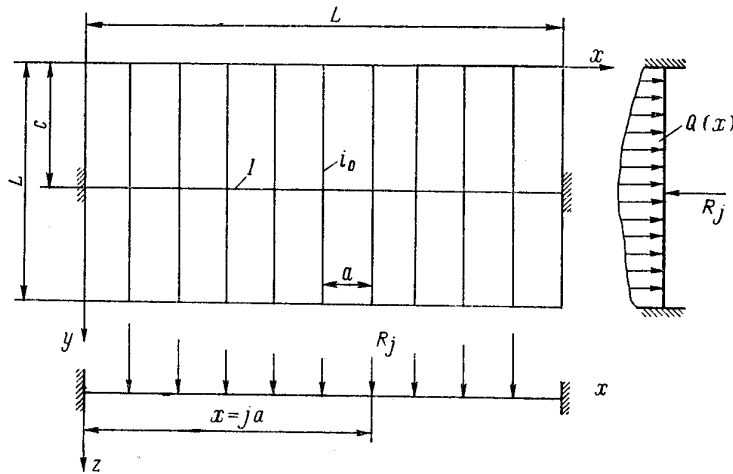
Đối với dàn khảo sát, có thể giả thiết rằng, dầm chính nhận toàn bộ tải trọng ngoài còn dầm ngang chỉ chịu tác dụng của phản lực từ dầm chính, mà không sợ phạm sai số đáng kể.

---

<sup>1</sup> Điều này thể hiện rõ khi số dầm chính không ít hơn 5.

<sup>2</sup> GS I.G. Bubnov là người đầu tiên đề xuất và trình bày phương pháp một cách hoàn chỉnh, đầy đủ nhất, trong khi Gs P.F. Pavlovitch thực hiện một số bổ sung.





H3.10

Cũng có thể thay thế phản lực tập trung của dầm chính tác dụng vào dầm ngang thành lực phân bố nào đó, mà không kèm theo sai số lớn. Sai số nói trên càng nhỏ khi số dầm chính càng lớn. Việc thay các lực tập trung bằng các lực phân bố cho phép ta khử siêu tĩnh các dầm mà không cần phải giải hệ phương trình đại số tuyến tính. Bài toán khử siêu tĩnh dầm đưa về việc giải phương trình vi phân uốn dầm trên nền đàn hồi, mà ta đã biết.

Theo các giả thiết trên đây, mỗi dầm chính  $j$  có thể coi là chịu tác dụng của tải trọng  $Q_j(x)$  và phản lực thẳng đứng  $R_j$  từ dầm ngang, đặt tại chỗ giao nhau của hai dầm này. Sơ đồ chịu lực của dầm chính thứ  $j$  và của dầm ngang được biểu thị trên H3.10.

Thay tác dụng của lực tập trung  $R_j$  thành lực phân bố với cường độ

$$r(x)|_{x=ja} = \frac{R_j}{a} \quad (18.1),$$

Ta có thể viết phương trình vi phân uốn dầm ngang như sau

$$EIw^{IV}(x) = r(x) = \frac{R_j}{a} \quad (18.2)$$

Độ võng tại điểm giữa của dầm chính thứ  $j$  bằng tổng độ võng của dầm nói trên do tải trọng ngoài và do phản lực từ dầm ngang gây ra:

$$w_j = \beta_j \frac{Q_j l^3}{Ei_0} - \gamma \frac{R_j l^3}{Ei_0}. \quad (18.3)$$

Trong đó,  $\beta_j$  và  $\gamma$  - là các hệ số, dễ dàng xác định được từ các bảng uốn dầm;

$i_0$  - moment quán tính tiết diện ngang dầm chính.

Sau khi giải (18.3) đối với  $R_j$ , ta thu được:

$$R_j = \frac{Ei_0}{\gamma l^3} w_j + \frac{\beta_j}{\gamma} Q_j. \quad (18.4)$$

Sử dụng (18.4) biến đổi được (18.2) về dạng sau:

$$EIw^{IV}(x)|_{x=ja} = -\frac{Ei_0}{a\gamma l^3}w_j + \frac{\beta_j}{\gamma}\frac{Q_j}{a} \quad (18.5)$$

Độ võng dầm chính và dầm ngang tại chỗ giao nhau phải bằng nhau, vì thế, có thể viết:

$$EIw^{IV}(x)|_{x=ja} = -\frac{Ei_0}{a\gamma l^3}w(x)|_{x=ja} + \frac{\beta_j}{\gamma}\frac{Q_j}{a} \quad (18.6)$$

Một cách chính xác, quan hệ (18.6) chỉ đúng tại các điểm nút  $x = ja$ , tuy nhiên, khi có nhiều dầm chính, phương trình trên có thể mở rộng, và coi là đúng cho mọi  $x$  trong phạm vi chiều dài dầm ngang:  $0 \leq x \leq L$

$$EIw^{IV}(x) = -\frac{Ei_0}{a\gamma l^3}w(x) + \frac{\beta(x)}{\gamma}\frac{Q(x)}{a} \quad (18.7)$$

Đưa vào các ký hiệu:

$$k_0 = \frac{Ei_0}{a\gamma l^3}; \quad (18.8)$$

$$q(x) = \frac{\beta(x)}{\gamma}\frac{Q(x)}{a}, \quad (18.9)$$

Ta dễ thấy ngay rằng phương trình (18.7) lúc đó, có dạng quen thuộc, mà ta đã nghiên cứu trong mục “dầm trên nền đàn hồi”:

$$EIw^{IV}(x) + k_0w(x) = q(x). \quad (18.10)$$

Do giả thiết tính toán là các dầm chính có tiết diện ngang như nhau cũng như có điều kiện biên như nhau nên trong phương trình trên, độ cứng nền đàn hồi  $k_0$  là không đổi. Còn tải trọng  $q(x)$  có thể là không đổi, cũng có thể là thay đổi tùy thuộc vào qui luật thay đổi tải trọng ngoài tác dụng lên dầm, dọc theo chiều dài, và được truyền lên các dầm chính. Trong các tính toán kết cấu thân tàu, nói chung, tải trọng  $q(x)$  hoặc là không đổi, hoặc thay đổi theo qui luật tuyến tính.

Buộc tích phân tổng quát của (18.10) thỏa mãn các điều kiện biên của dầm ngang tại vành đế của dầm, ta tìm được biểu thức đường đàn hồi dầm ngang, và từ đó, tìm được chuyển vị tại tiết diện bất kỳ của nó, trong đó có tiết diện trùng vị trí với tiết diện giữa của các dầm chính. Điều này cũng có nghĩa là tìm được chuyển vị của tiết diện giữa của dầm chính bất kỳ.

Từ giá trị tìm được của độ võng tại điểm giữa dầm chính, nhờ quan hệ (18.1), ta dễ dàng tìm được phản lực tương tác của dầm này với dầm ngang

$$R_j = ar_j = aEIw^{IV}(x)|_{x=ja} = a[q(x) - k_0w(x)]|_{x=ja}. \quad (18.11)$$

Sau khi xác định được phản lực  $R_j$ , việc dựng biểu đồ moment uốn và lực cắt của dầm chính thứ  $j$  là dễ dàng.

Ta mở rộng phương pháp trên cho trường hợp, khi mà một hoặc một vài dầm chính nào đó nhận thêm tải trọng bất thường, so với tải trọng phân bố theo qui luật chung toàn

dàn, và có độ cứng khác so với độ cứng của đa số các dầm chính khác, và điều kiện biên cũng khác với các dầm chính khác của dàn. Để cho gọn, ta gọi dầm có đặc điểm khác biệt như trên trong các dầm chính là *dầm lạ*.

Để làm ví dụ, ta xét trường hợp chỉ một dầm chính có độ cứng, điều kiện biên khác biệt và nhận bổ sung một tải trọng ngoài nào đó, tức trường hợp chỉ có một dầm lạ. (Bằng qui tắc cộng tác dụng, ta có thể sử dụng lời giải cho trường hợp chỉ có một dầm lạ để giải bài toán trong trường hợp có nhiều dầm lạ).

Độ võng của dầm chính, tại chỗ giao nhau với dầm ngang, được xác định theo công thức (18.3) .

Tương tự như công thức trên, đối với dầm lạ, chẳng hạn là dầm thứ  $j$ , ta có:

$$w_j = \beta' \frac{Q'(x_j)l^3}{Eni_0} - \frac{\gamma' R'_j l^3}{Eni_0}, \quad (18.12)$$

Trong đó:

$ni_0$  - moment quán tính tiết diện ngang dầm lạ;

$Q'_j$  - tải trọng tác dụng lên dầm lạ (kể cả tải trọng bổ sung  $\Delta Q_j(x)$ );

$R'_j$  - phản lực của dầm ngang tác dụng tại chỗ giao nhau với dầm chính.

Độ chênh lệch của phản lực tại chỗ có dầm lạ được xác định bằng:  $\Delta R = R'_j - R_j$ .

Giải phương trình (18.12) đối với  $R'_j$  và lập hiệu số  $\Delta R = R'_j - R_j$  với  $R_j$  xác định từ (18.4), ta được:

$$\Delta R = R'_j - R_j = \left[ \frac{\beta'}{\gamma'} Q'(x_j) - \frac{\beta}{\gamma} Q(x_j) \right] - \left( \frac{\gamma}{\gamma'} n - 1 \right) \frac{Ei_0}{\gamma l^3} w_j. \quad (18.13)$$

Trên cơ sở của (18.13), có thể kết luận rằng sự có mặt của dầm lạ trong số các dầm chính có thể tính đến bằng cách đặt thêm vào dầm ngang một lực tập trung:

$$\Delta P = \frac{\beta'}{\gamma'} Q'(x_j) - \frac{\beta}{\gamma} Q(x_j) \quad (18.14)$$

Và đặt thêm một đế đàn hồi có hệ số cứng:

$$K = \left( \frac{\gamma}{\gamma'} n - 1 \right) \frac{Ei_0}{\gamma l^3} \quad (18.15)$$

Tại vị trí của dầm lạ.

## **&19. PHÂN TÍCH SỰ LÀM VIỆC CỦA DÀN CÓ MỘT DẦM NGÁNG.**

Ta xét 2 trường hợp điển hình sau đây:

- Dàn một dầm ngang, chịu tải trọng ngang phân bố đều.

- Dàn một dầm ngang, chịu tác dụng của tải trọng tập trung.

### 1. Trường hợp dàn chịu tải trọng phân bố đều $q_0$

Ta nghiên cứu trường hợp của dàn đáy tàu, có một dầm ngang (sống chính). Các dầm chính (dàn ngang) được coi là ngàm tựa tự do hai đầu.

Moment uốn tại giữa nhịp dầm ngang đáy giữa được xác định theo công thức:

$$m_0 = -\frac{q_0 a l^2}{8} + \frac{R_0 l}{4}, \quad (19.1)$$

Trong đó, phản lực của dầm ngang lên dầm chính ở giữa,  $R_0$ , có thể xác định theo công thức (18.11):

$$R_0 = a[q - k_0 w(x)]|_{x=0} \quad (19.2)$$

Giả sử hệ số ngàm của dầm ngang tại hai đầu mút (trên vành đế của dàn) là  $\chi$ . Như đã biết từ phần trước, việc tính toán dàn một dầm ngang, nhiều dầm chính được đưa về tính dầm trên nền đàn hồi có hệ số nền  $k_0$  xác định theo công thức (18.8) và với tải trọng  $q_0$  xác định theo công thức (18.9).

Những yếu tố uốn dầm nói trên mà ta quan tâm có thể xác định được nhờ các công thức (15.49) – (15.52) với  $B = B_1 = 0$ .

Sau khi thay (15.49) vào (19.2) ta có được công thức khá đơn giản, xác định phản lực từ dầm ngang chính ở giữa lên dầm ngang:

$$R_0 = aq[(1 - \chi)\varphi_0(u) + \chi\varphi_1(u)]. \quad (19.3)$$

Đối số  $u$ , được định nghĩa bởi (15.13), có thể xác định trên cơ sở của công thức (18.8), theo công thức:

$$u = \frac{L}{l} \sqrt[4]{\frac{1}{64} \frac{i}{I} \frac{l}{a}}. \quad (19.4)$$

Để tiện cho việc phân tích, ta hãy biến đổi công thức (19.1) trên đây chút ít. Chú ý rằng trong trường hợp khảo sát:

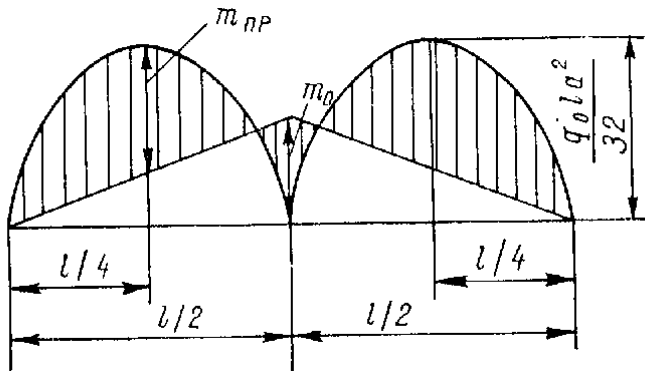
$$Q(x) = alq_0; \quad \gamma = \frac{1}{48}; \quad \beta = \frac{5}{384}$$

và như vậy,  $q = \frac{5}{8}q_0 l$ . Tiếp đến, sử dụng công thức (19.3) để khử  $R_0$  ra khỏi (19.2), ta thu được công thức xác định moment tải giữa nhịp dầm ngang đáy (dầm chính) giữa:

$$m_0 = -\frac{q_0 a l^2}{32} \{4 - 5[(1 - \chi)\varphi_0(u) + \chi\varphi_1(u)]\}. \quad (19.5)$$

Như đã lưu ý trên đây, thông thường, các dầm chính (dàn ngang đáy) giống hệt nhau. Tiết diện ngang của các dầm chính này được xác định dựa trên trị số tuyệt đối lớn nhất của moment uốn tác dụng lên dầm này. Moment uốn cực đại (về trị số tuyệt đối), có thể tại tiết diện nút, cũng có thể tại tiết diện nào đó trên nhịp của một trong các dầm chính. Trong ví dụ của chúng ta, dầm ngang chia đôi nhịp của dầm chính, vì thế moment uốn dầm chính đạt

cực đại tại điểm lân cận điểm giữa của nửa nhịp dầm (H3.11). Vì tại lân cận điểm cực trị, giá trị của hàm biến đổi chậm, nên để cho đơn giản, ta có thể xác định moment tại điểm giữa của nửa nhịp dầm làm moment tính toán.



H3.11

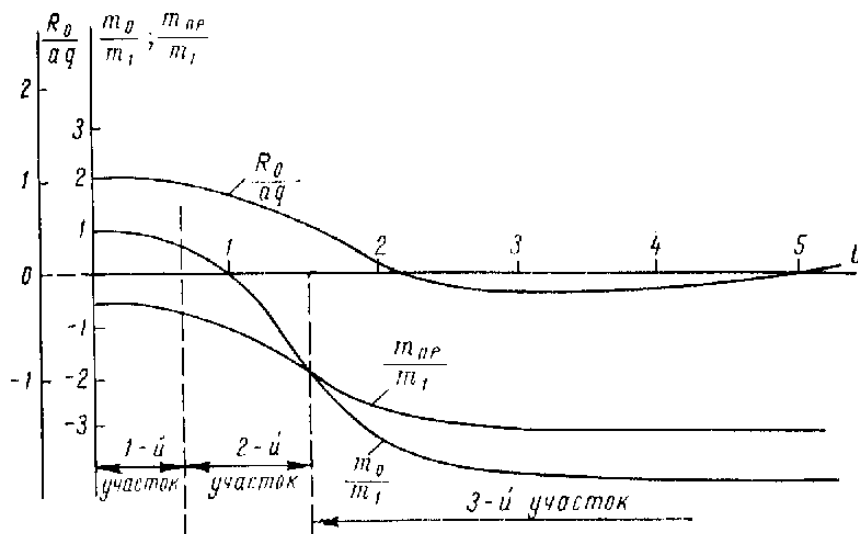
Từ hình H3.11 biểu diễn biểu đồ moment uốn dầm chính, có thể nhận được ngay công thức xác định moment uốn cho dầm chính:

$$m_{nh} = \frac{m_0}{2} - \frac{q_0 l^2 a}{32}. \quad (19.6)$$

Trong đó,  $m_{nh}$  - là moment uốn dầm chính tại tiết diện giữa của nửa nhịp dầm (gọi tắt là moment nhịp), đồng thời cũng là moment tính toán này.

Một số kết quả tính toán, với hệ số ngàm hai đầu dầm ngáng  $\chi = 0,75$  được biểu diễn trên hình H3.12.

Các đường cong trên đồ thị H3.12 biểu thị sự biến đổi, theo đối số  $u$ , của tỉ số giữa các momen  $m_0$  và momen nhịp  $m_{nh}$  so với đại lượng  $m_1 = \frac{q_0 l^2 a}{32}$ , là moment uốn trên tiết diện nút của dầm chính bìa (giáp vành đế).



H3.12

Ngoài ra, trên đồ thị còn có đường cong biểu diễn sự biến đổi của tỉ số giữa phản lực nút  $R_0$  của dầm chính giữa so với đại lượng  $\frac{5}{8}aq_0l$  - là phản lực nút tại dầm chính bìa.

Từ trên H3.12 có thể có một số kết luận sau:

Trên khoảng biến thiên của đối số  $u$  ( $0 \leq u \leq 5$ ) có thể chia ra làm 3 đoạn:

(a).  $u \leq 0,8$ , tức độ cứng uốn của dầm chính là rất nhỏ so với độ cứng uốn của dầm ngang. Khi đó, moment uốn tính toán sẽ chính là moment uốn tại tiết diện nút của dầm chính bìa, với điều kiện là các dầm chính giống hệt nhau.

(b).  $0,8 \leq u \leq 1,5$ . Trong khoảng biến thiên này của đối số  $u$ , moment uốn tính toán chính bằng moment nhịp của dầm chính giữa.

(c). Khi  $u > 1,5$  tức khi dầm ngang quá yếu, moment uốn tính toán chính bằng moment nút của dầm chính.

Khi thay đổi hệ số ngàm, ranh giới phân chia các đoạn trên khoảng biến thiên của  $u$  có thay đổi chút ít.

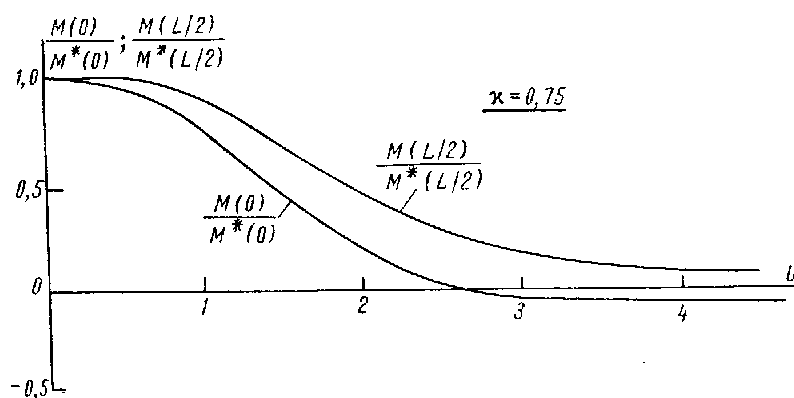
Khi tính toán thực tế các dầm, khó biết trước là tại tiết diện nào và tại dầm nào moment uốn sẽ đạt cực đại. Vì thế cho nên, thường vẽ biểu đồ moment uốn cho cả 2 dầm, dầm chính bìa, là dầm được dầm ngang đỡ nhiều nhất, và dầm chính giữa dầm, là dầm được đỡ ít nhất, sau đó, chọn ra moment uốn tính toán là moment lớn nhất, về trị số tuyệt đối, trong số các mô men tác dụng lên hai dầm nói trên.

Đối với phản lực  $R_0$  :

a. Với  $u \leq 2,1$ , phản lực  $R_0$  còn có giá trị dương.

b. Khi  $u \geq 2,1$ , phản lực  $R_0$  có giá trị âm. Điều này đồng nghĩa với việc dầm ngang không những không đỡ mà dường như là còn gây hại cho các dầm chính. Tuy nhiên, trên thực tế, ngay cả các dầm ngang rất yếu cũng đóng vai trò tích cực, đó là truyền một phần tải trọng tập trung tác dụng vào dầm lên các dầm chính kế cận. Đó là trường hợp va đập từ băng trôi vào dầm mạn, trường hợp va chạm đáy tàu khi mắc cạn, va chạm vào cầu cảng .v.v..

Trên hình H3.13 biểu thị sự biến đổi của hai moment uốn điển hình, trên hai tiết diện ngang của dầm ngang: tiết diện đế  $M(L/2)$  và tiết diện giữa chiều dài  $M(0)$ .



### H3.13

Trong đó: ký hiệu  $M^*(L/2)$  và  $M^*(0)$  - là các moment uốn dầm ngang, tương ứng tại tiết diện đế và tiết diện giữa chiều dài, khi lấy  $u = 0$ .

Đồ thị cho thấy, khi tăng độ cứng nền, ban đầu, moment uốn dầm ngang tại giữa chiều dài dần giảm nhanh hơn moment uốn tại tiết diện đế. Về sau, cả hai cùng không đổi.

#### 2. Dàn chịu tác dụng của lực tập trung $P$ .

Ta xét trường hợp dàn có nhiều dầm chính, một dầm ngang, chịu lực tập trung  $P$ . Giả thiết thêm rằng, lực tập trung đặt tại tiết diện nút của dầm chính giữa dàn.

Theo cách làm gần đúng quen thuộc, để giải bài toán đặt ra có thể sử dụng lời giải thu được từ &15, cho bài toán dầm trên nền đàn hồi, chịu tải trọng tập trung.

Khi không có dầm ngang, độ võng dầm chính tại chỗ đặt lực tập trung có thể xác định theo công thức:

$$w_{dc} = \gamma \frac{Pl^3}{EI}. \quad (19.7)$$

Độ võng dầm ngang của dàn chiều dài vô hạn chịu tải trọng tập trung đặt tại nút, được xác định theo công thức (15.8), trong đó:

$$\alpha = \frac{1}{l} \sqrt[4]{\frac{1}{4\gamma} \frac{i}{I} \frac{l}{a}},$$

$$\text{Từ đó: } w_{dn} = \frac{Pl^3}{8EI} \left( 4\gamma \frac{I}{i} \frac{a}{l} \right)^{\frac{3}{4}} \quad (19.8)$$

Các công thức (18.7) và (18.8) cho thấy, dầm ngang đã làm giảm độ võng phát sinh trên dầm chính. Để đánh giá mức độ giảm nói trên, người ta dùng tỉ số:

$$\xi = \frac{w_{dc}}{w_{dn}} = \frac{2l}{a} \sqrt[4]{4\gamma \frac{I}{i} \frac{a}{l}} \quad (19.9)$$

Công thức trên cho thấy, tỉ số  $\xi$  phụ thuộc vào các tỉ số  $l/a$  và  $I/I$ , biểu thị tương quan độ cứng của dầm chính và dầm ngang của dàn.

Nếu như dầm ngang đi qua điểm giữa dầm chính, có  $\gamma = 1/48$ , và có moment quán tính nhỏ, với  $I = i$ , ta có:

$$\xi = \frac{l}{a} \sqrt[4]{\frac{3}{4} \frac{a}{l}} \approx 1,07 \left( \frac{l}{a} \right)^{a/4}.$$

Ví dụ như trong trường hợp  $l/a = 5$ ,  $\xi \approx 3,6$ . Khi tải trọng đặt vào một vài dầm chính kề nhau, tác dụng giảm tải của dầm ngang kém hiệu quả. Chẳng hạn trong trường hợp dàn trên đây, tải trọng đặt vào 2 dầm chính, khi đó, để tính hệ số  $\xi$  cũng vẫn sử dụng các công thức (19.9), với chú ý thay  $i$  bởi  $2i$ , còn khoảng sườn  $a$  thay bằng  $2a$ . Khi đó, hệ số  $\xi$  giảm đi 2 lần.

Ảnh hưởng của dầm ngang càng giảm khi hệ số  $\gamma$  càng nhỏ, điều này xảy ra khi các dầm ngang được đặt cạnh đế của dầm chính.

Từ những phân tích trên đây, có thể thấy rằng, khi sử dụng các dầm ngang yếu, cần phải phân tích đặc tính chịu tải của các dầm một cách tỉ mỉ vì đôi khi việc thêm các dầm chính chỉ làm tăng thêm phức tạp của kết cấu mà không hề đạt được mục đích mong muốn.

## &20. TÍNH DÀN CÓ NHIỀU DẦM NGANG BẰNG PHƯƠNG PHÁP UỐN CHÍNH.

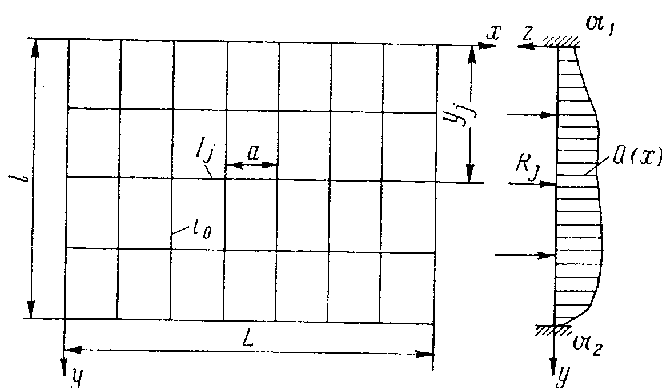
Trong thực tế kết cấu thân tàu, ít khi gặp kết cấu dàn có một dầm ngang như trường hợp đã xét trên đây, mà thường gặp dạng dàn có nhiều dầm ngang. Thuộc loại này có thể kể đến dàn đáy tàu, tạo thành từ một sống chính đáy, một số sống phụ đáy và các đà ngang.

Đế của dầm ngang là các vách ngang, và có thể coi, hoặc là ngàm cứng, hoặc là ngàm đàn hồi. Đế đỡ của đà ngang là các vách dọc hoặc các mạn, và có thể coi là tựa tự do hoặc ngàm đàn hồi.

Các kết cấu dọc như sống chính hoặc sống phụ đáy, trong phạm vi một khoang, thường là có tiết diện ngang không đổi, trong khi khoảng cách giữa chúng nói chung là không bằng nhau.

Các dầm chính trong phạm vi một khoang, nói chung, có thể coi là như nhau.

Ta khảo sát dàn cho trên hình H 3.14



H3.14

Cũng như trong trường hợp dàn với một dầm ngang, ta giả thiết rằng dầm chính nhận toàn bộ tải trọng ngoài, còn các dầm ngang chỉ chịu tác dụng của các phản lực liên kết.

Ý nghĩa các ký hiệu hoặc như đã sử dụng trước đây, hoặc có thể nhận biết dễ dàng từ H3.14.

Ta hãy khảo sát độ võng của một dầm chính bất kỳ dưới tác dụng của tải trọng ngoài  $Q(x)$  và phản lực  $R_j$ .

Độ võng dầm chính tại chỗ giao nhau với dầm ngang thứ  $i$  có thể viết dưới dạng



$$w_i = \beta_i \frac{Q(x)l^3}{Ei_0} - \frac{l^3}{Ei_0} \sum_{j=1}^{j=n} \gamma_{ij} R_j \quad (20.1)$$

$i = 1, 2, 3, \dots, n$ .

Trong đó,  $\beta_i$  - hệ số ảnh hưởng của tải trọng  $Q(x)$  đến độ võng tại nút thứ  $i$  của dầm chính;

$\gamma_{ij}$  - hệ số ảnh hưởng của phản lực từ dầm ngang thứ  $j$  đến độ võng nút thứ  $i$  ;  
 $i_0$  - moment quán tính tiết diện ngang dầm chính;

$n$  - số dầm ngang.

Ta chú ý thấy rằng, các hệ số  $\beta_i$  và  $\gamma_{ij}$  phụ thuộc vào kết cấu đế đỡ của dầm chính, đặc tính phân bố tải trọng ngoài  $Q(x)$  theo chiều dài dầm và vị trí điểm nút khảo sát. Với các dầm lạng trụ, các hệ số trên, nói chung, có thể tra được từ các bảng uốn dầm hoặc từ phương trình đường đàn hồi của dầm tương ứng.

Nếu như dầm chính là các dầm có tiết diện ngang thay đổi hoặc tự thân nó là các khung thì các hệ số nói trên có thể xác định bằng tính toán.

Cũng như đã làm trước đây, ta phân bố lực  $R_j$  ra thành lực rải có cường độ  $r_j = R_j/a$ .

Khi đó, phương trình vi phân uốn dầm ngang thứ  $j$  được viết dưới dạng:

$$EI_j w_j^{IV}(x) = \frac{R_j}{a} \quad (20.2)$$

Sau khi thay  $R_j$  từ (20.2) vào (20.1) ta thu được:

$$w_i = \beta_i \frac{Q(x)l^3}{Ei_0} - \frac{al^3}{Ei_0} \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} EI_j w_j^{IV}, \quad (20.3)$$

$i = 1, 2, 3, \dots, n$ .

Hệ phương trình (20.3) mô tả đầy đủ về uốn dầm, và được I.G.Bubnov đưa ra lần đầu tiên vào đầu thế kỷ 20.

Việc tích phân hệ phương trình (20.3) có thể tiến hành theo một trong các phương pháp tổng quát tích phân hệ phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng số, mà trong chương trình toán học cao cấp đề cập đến. Tuy nhiên, theo đó, khi  $n > 2$ , khối lượng tính toán sẽ rất lớn. Ta xem xét ở đây một giải pháp hợp lý hơn cho vấn đề đặt ra. Giải pháp đề cập đến có hai xuất xứ, một, do I.G.Bubnov, dựa trên cơ sở của nguyên lý Dalambert, đề ra, và một do P.F. Pavkovitch đề ra, trên cơ sở nguyên lý Lagrange.

Ta tiếp cận vấn đề theo lập luận của P.F. Pavkovitch, là lập luận, xem ra, phù hợp hơn.

Nghiệm của phương trình (20.3) được tìm dưới dạng

$$w_i(x) = \frac{I_0}{I_i} \sum_{k=1}^n v_{ik} p_k(x) \quad (20.4)$$

Trong đó:

$I_0$  - hằng số bất kỳ, có thứ nguyên moment quán tính tiết diện ngang;

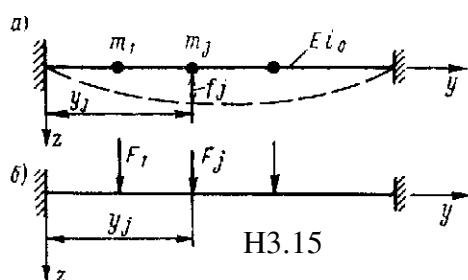
$pk(x)$  - hàm cần xác định;

$v_{ik}$  - hệ số chưa biết.

Ta chứng minh rằng, nếu như các hệ số chưa biết  $v_{ik}$  được chọn tỉ lệ với chính dạng dao động tự do của dầm chính, không trọng lượng, mang các khối lượng tập trung,

$$m_j = \frac{I_j}{I_0} \quad (20.5)$$

Tại chỗ giao nhau với dầm ngang, thì phương trình xác định các hàm chưa biết  $p_k(x)$  có dạng tách biệt (14.40). Ta hãy khảo sát dao động tự do của dầm cho trên hình H3.15-a:



Theo nguyên lý Đalambert, phương trình chuyển động của cơ hệ khảo sát có thể thiết lập trên cơ sở của điều kiện cân bằng sau khi thêm các lực quán tính tác dụng vào mỗi khối lượng tập trung của hệ (H3.15.δ):

$$F_j = -m_j \frac{d^2 f_j}{dt^2}. \quad (20.6)$$

Khi đó, biểu thức độ võng tại khối lượng thứ  $i$  có dạng:

$$f_i = -\frac{l^3}{Ei_0} \sum_{j=1}^n \frac{I_j}{l^3} \gamma_{ij} F_j,$$

Hay, nếu như để ý đến (20.6), có thể viết:

$$f_i = -\frac{l^3}{Ei_0} \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} m_j \frac{d^2 f_j}{dt^2}. \quad (20.7)$$

Nghiệm riêng của hệ phương trình (20.7) tìm dưới dạng:

$$f_j = \frac{I_0}{I_j} v_{jk} \cos \omega_k t, \quad (20.8)$$

Trong đó:

$v_{jk}$  - tham số chưa biết, cần xác định;

$\omega_k$  - tần số dao động tự do chưa biết của hệ đàn hồi khảo sát.

Thay (20.8) vào (20.7), và giản ước thừa số là hàm của thời gian,  $\cos \omega_k t$ , ta thu được hệ phương trình đại số tuyến tính thuần nhất đối với các ẩn số  $v_{jk}$ :

$$\frac{I_0}{I_i} \lambda_k v_{ik} = \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} v_{jk}, \quad (20.9)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, n,$$

Trong đó:

$$\lambda_k = \frac{E i_0}{I^3 \omega_k^2}. \quad (20.10)$$

Hệ (20.9) có nghiệm không đồng nhất bằng 0 chỉ khi định thức hệ số của hệ phương trình bằng 0, tức:

$$\begin{vmatrix} \gamma_{11} - \frac{I_0}{I_1} \lambda_k & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} - \frac{I_0}{I_2} \lambda_k & \dots & \gamma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \dots & \gamma_{nn} - \frac{I_0}{I_n} \lambda_k \end{vmatrix} = 0 \quad (19.11)$$

Vì định thức hệ số hệ phương trình thuần nhất (20.9) bằng 0 nên các hệ số  $v_{ik}$  được xác định với độ sai khác một thừa số tùy ý, thường được chọn sao cho  $v_{ii} = 1$ , nếu  $v_{ii} \neq 0$ .

Các hệ số ảnh hưởng  $\gamma_{ij}$ , có một tính chất đặc biệt, đó là:

$$\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$$

Điều này ta sẽ chứng minh trong chương V của giáo trình này.

Do tính chất trên đây, ma trận hệ số của định thức (20.11) là đối xứng qua đường chéo chính. Vì thế, phương trình (20.11) có  $n$  nghiệm thực và dương. Điều này đã được chứng minh trong các giáo trình đại số tuyến tính.

Ta hãy viết lại phương trình (20.9) đối với các chỉ số  $k$  khác nhau:

$$\begin{aligned} \frac{I_0}{I_i} \lambda_k v_{ik} &= \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} v_{jk}; \\ \frac{I_0}{I_i} \lambda_r v_{ir} &= \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} v_{jr}; \end{aligned}$$

Nhân phương trình thứ nhất với  $v_{ir}$  và cộng tất cả theo  $i$ , rồi, cũng tương tự, nhân phương trình thứ 2 với  $v_{ik}$ , và cũng cộng tất cả theo  $i$ , sau đó, trừ kết quả thứ nhất cho kết quả thứ 2, ta được:

$$(\lambda_k - \lambda_r) \sum_{i=1}^n \frac{I_0}{I_i} v_{ik} v_{ir} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} v_{jk} v_{ir} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} v_{jr} v_{ik} \quad (20.12)$$

Đổi  $i$  thành  $j$  và  $j$  thành  $i$  trong số hạng thứ 2 của vế phải (20.12), căn cứ vào tính chất  $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$ , ta thấy, vế phải của phương trình này đồng nhất bằng 0. Khi đó, với  $r \neq k$  và  $\lambda_k \neq \lambda_r$  [giả thiết rằng phương trình (20.11) không có nghiệm kép], ta có thể kết luận về một tính chất rất quan trọng của các hệ số  $v_{ik}$ , có tên là tính chất, trực giao:

$$\sum_{i=1}^n \frac{I_0}{I_i} v_{ik} v_{ir} \quad \text{với } r \neq k \quad (20.13).$$

Quay lại vấn đề chính ta đang khảo sát – về việc tách rời hệ phương trình (20.3).

Thay (20.4) vào (20.3), ta thu được:

$$\frac{I_0}{I_i} \sum_{k=1}^n v_{ik} p_k(x) = \beta_i \frac{Q(x)l^3}{Ei_0} - \frac{al^3}{Ei_0} \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} EI_0 \sum_{k=1}^n v_{jk} p_k^{IV}(x),$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, n$$

Hay:

$$\frac{I_0}{I_i} \sum_{k=1}^n v_{ik} p_k(x) = \beta_i \frac{Q(x)l^3}{Ei_0} - \frac{al^3}{Ei_0} EI_0 \sum_{k=1}^n p_k^{IV}(x) \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} v_{jk}, \quad (20.14)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, n$$

Tiếp đến, sử dụng quan hệ (20.9), có thể viết lại phương trình (20.14) dưới dạng:

$$\sum_{k=1}^n v_{ik} p_k(x) = \beta_i \frac{I_i}{I_0} \frac{Q(x)l^3}{Ei_0} - \frac{al^3}{Ei_0} EI_0 \sum_{k=1}^n v_{ik} \lambda_k p_k^{IV}(x), \quad (20.15)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, n$$

Chia hai vế của (20.15) cho  $al^3/Ei_0$  và chuyển số hạng thứ 2 của vế phải sang vế trái, ta được:

$$\sum_{k=1}^n v_{ik} \lambda_k [EI_0 p_k^{IV}(x) + K_k p_k(x)] = \beta_i \frac{I_i}{I_0} \frac{Q(x)}{a}, \quad (20.16)$$

Trong đó:

$$K_k = \frac{Ei_0}{al^3 \lambda_k}. \quad (20.17)$$

Đặt tiếp:

$$\frac{I_i}{I_0} \beta_i \frac{Q(x)}{a} = \sum_{k=1}^n v_{ik} \lambda_k q_k(x), \quad (20.18)$$

Ta có thể thu được phương trình sau đây từ (20.18):

$$EI_0 p_k^{IV}(x) + K_k p_k(x) = q_k(x) \quad (20.19)$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, n$$

Để xác định  $q_k(x)$ , ta nhân hai vế của (20.18) với  $\frac{I_0}{I_i} v_{jr}$  và lấy tổng theo mọi  $i$ :

$$\frac{Q(x)}{a} \sum_{i=1}^n \beta_i v_{ir} = \sum_{k=1}^n \lambda_k q_k(x) \sum_{i=1}^n \frac{I_0}{I_i} v_{ik} v_{ir}, \quad (20.20)$$

Từ đó, dựa vào tính chất trực giao (20.13) suy ra:

$$q_k(x) = \frac{Q(x)}{a \lambda_k} \frac{\sum_{i=1}^n \beta_i v_{ik}}{\sum_{i=1}^n \frac{I_0}{I_i} v_{ik}^2} \quad (20.21)$$

Các hàm  $p_k(x)$  được GS.P.F. Pavlovitch gọi là *các tọa độ chính*, và dạng uốn đàn tương ứng với chúng gọi là *dạng uốn chính*, còn phương pháp tính có tên là *phương pháp uốn chính*.

Ta hãy xem xét các điều kiện biên mà các hàm  $p_k(x)$  phải thỏa mãn.

Một số trường hợp riêng thường gặp:

a. Tất cả các dầm ngáng tựa tự do trên đế cứng, tức:

$$\left. \begin{aligned} w_i(0) &= w_i(L) = 0; \\ w_i''(0) &= w_i''(L) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (20.22)$$

Khi đó, trên cơ sở của biểu thức (20.4) suy ra

$$\left. \begin{aligned} p_i(0) &= p_i(L) = 0; \\ p_i'''(0) &= p_i'''(L) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (20.23)$$

b. Tất cả các dầm ngáng ngàm cứng trên đế cứng, tức:

$$\left. \begin{aligned} w_i(0) &= w_i(L) = 0; \\ w_i'(0) &= w_i'(L) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (20.24)$$

Từ đó:

$$\left. \begin{aligned} p_i(0) &= p_i(L) = 0; \\ p_i'(0) &= p_i'(L) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (20.25)$$

c. Tất cả các dầm ngáng ngàm đàn hồi trên đế cứng, đồng thời, các hệ số ngàm tỉ lệ thuận với moment quán tính của tiết diện ngang dầm ngáng tương ứng, tức,  $\mathcal{U}_i EI_i = \mathcal{U} EI_0$  ( $\mathcal{U}_i$  – là hệ số mềm ngàm đàn hồi của dầm ngáng thứ  $i$ ). Khi đó, chẳng hạn, tại  $x = 0$ :

$$\left. \begin{aligned} w_i &= 0; \\ w_i' &= \mathcal{U} EI_0 w_i''. \end{aligned} \right\} \quad (20.26)$$

Có thể chứng minh, không mấy khó khăn rằng, khi đó, điều kiện biên tương ứng sẽ là:

$$\left. \begin{aligned} p_k &= 0; \\ p_k' &= \mathcal{U}EI_0 p_k'' \end{aligned} \right\} \quad (20.27)$$

Tức, khi thoả mãn điều kiện (20.27), điều kiện biên của dầm ngang sẽ thoả mãn.

Ở đây ta không khảo sát một số các vấn đề khác, chẳng hạn như trường hợp dầm có các dầm ngang với ngàm đàn hồi theo các kiểu khác nhau.

Những trình bày trên đây cho phép ta tiến hành xử siêu tĩnh cho các dầm nhờ phương pháp uốn chính, theo các trình tự sau:

1. Dựa vào đặc điểm phân bố tải trọng ngoài tác dụng lên dầm mà các dầm chính phải đảm nhiệm, dựa vào kết cấu của dầm chính và sự phân bố các tiết diện nút trên dầm, nhờ các bảng uốn dầm, xác định các hệ số ảnh hưởng  $\beta_i$  do tải trọng phân bố và  $\gamma_{ij}$  do các phản lực từ dầm ngang tác dụng.

2. Từ việc giải phương trình về định thức đặc trưng (20.11) tìm các nghiệm  $\lambda_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots, n$ ) của phương trình này.

3. Với mỗi giá trị của nghiệm  $\lambda_k$ , từ hệ phương trình thuần nhất (20.9) xác định các hệ số của dạng uốn chính  $v_{1k}, v_{2k}, \dots, v_{nk}$ , với điều kiện  $v_{kk} = 1$ .

Sau khi xác định các hệ số  $v_{ik}$ , nên kiểm tra tính chính xác của chúng theo các điều kiện trực giao (20.13).

4. Theo các công thức (20.17) và (20.21) tính các độ cứng nền đàn hồi  $k_k$  và cường độ tải trọng  $q_k(x)$  cho mỗi dầm chính.

5. Từ các điều kiện biên của dầm ngang, xác định các điều kiện ràng buộc đối với các hàm  $p_k(x)$ .

6. Xác định các hằng số của tích phân tổng quát của phương trình (20.19).

7. Thay các giá trị của các hệ số  $v_{ik}$  và các toạ độ chính  $p_k(x)$  vào công thức (20.4), tìm được biểu thức đường đàn hồi của các dầm ngang.

8. Theo các tải trọng mà các dầm chính chịu tác dụng, và theo giá trị các độ võng tại nút vừa tìm được, dựng biểu đồ moment uốn và lực cắt cho các dầm chính đặc trưng nhất (thường là các dầm giữa và các dầm bìa)

Theo các công thức

$$M_i(x) = EI_i w_i''(x) = \sum_{k=1}^n v_{ik} EI_0 p_k''(x); \quad (20.28)$$

$$N_i(x) = EI_i w_i'''(x) = \sum_{k=1}^n v_{ik} EI_0 p_k'''(x). \quad (20.29)$$

Có thể xác định các moment uốn, lực cắt trên các dầm ngang.

Một số lưu ý trong việc sử dụng phương pháp uốn chính giải quyết các bài toán thực tế:

a. Việc tính toán các hệ số ảnh hưởng  $\beta_i$ ,  $\gamma_{ij}$  và các trị số đặc trưng  $\lambda_k$  cần tiến hành với độ chính xác cao nhất, vì việc xác định các hệ số  $v_{ik}$  của hệ (20.9) và cường độ tải trọng  $q_k(x)$  theo công thức (20.21), trong bước tiếp theo, luôn gắn liền với việc phải tính toán với các hiệu số nhỏ giữa các đại lượng xấp xỉ nhau;

b. Thường không cần phải tính cho tất cả các tọa độ chính  $p_k(x)$ . Chỉ cần tính cho 2 hoặc 3 trong số các uốn chính, tương ứng với các giá trị lớn nhất của trị số đặc trưng  $\lambda_k$ , theo quan hệ (20.4), là đủ bảo đảm độ chính xác mà thực tế kỹ thuật đòi hỏi;

c. Phương pháp uốn chính hoàn toàn tiện lợi cho việc tính các dàn, mà dầm chính của chúng có moment quán tiết diện ngang thay đổi theo chiều dài. Tuy nhiên, trên thực tế, các tính toán này gặp khó khăn khi phải xác định các hệ số ảnh hưởng với độ chính xác cao;

d. Việc tính đến tính chất đối xứng của kết cấu dàn và của tải trọng làm giảm khối lượng và mức độ khó khăn của việc tính toán rất nhiều, vì nó cho phép chỉ cần xét một nửa dàn là đủ.

Ta hãy chú ý đến một số điểm đặc biệt khi tính các hệ số ảnh hưởng  $\gamma_{ij}$  cho dàn đối xứng.

Nếu số dầm ngang là chẵn, thì, khi xét một nửa dầm, ta cần xác định hệ số ảnh hưởng  $\gamma_{ij}$  đối với nửa chiều dài dầm chính, với chú ý là do tính chất đối xứng, góc xoay tại trục đối xứng bằng 0. Tuy nhiên, bản thân hệ số ảnh hưởng này ta cũng có thể tìm được khi xét toàn bộ dầm chính và tìm độ võng của tiết diện thứ  $i$  do cả 2 lực đơn vị đặt tại các nút  $j$  đối xứng nhau.

Còn nếu như số dầm ngang là lẻ, tức, có một dầm nằm trên trục đối xứng, thì ta coi là dầm ngang ở giữa bao gồm 2 dầm, có độ cứng chia đôi. Vì thế cho nên, khi xác định các hệ số  $\gamma_{i1}$  (số thứ tự của dầm ngang giữa là 1), cần đặt không phải là 1 mà là 2 lực đơn vị tại giữa dầm chính.

**Ví dụ.** Tính toán dàn cho trên H3.16, gồm 5 dầm ngang đặt đối xứng nhau, cách đều nhau, với dầm giữa được tăng cường. Các dầm chính tựa tự do, còn các dầm ngang ngàm cứng tại 2 đầu. Dàn chịu tác dụng của tải trọng phân bố đều, với cường độ  $q$ ,  $kG/cm^2$ .

Các ký hiệu moment quán tính, chiều dài các dầm chính, dầm ngang, khoảng cách giữa các dầm chính, dầm ngang, thể hiện trên hình vẽ.

Cho:

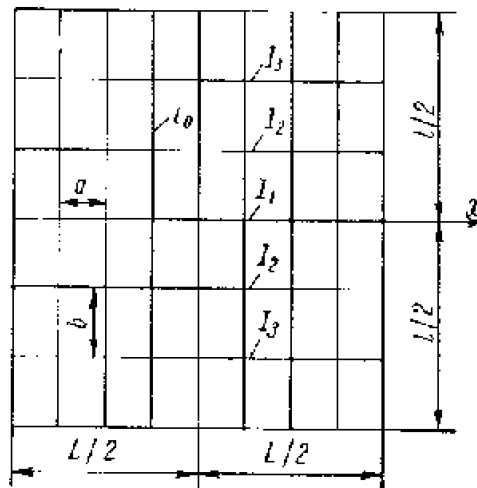
$$I_1 = I, 2I_2; I_2 = I_3 = I_0; i_0 = I/3; a = L/8; L/l = 1,05; b = l/6.$$

Để xác định các hệ số ảnh hưởng  $\gamma_{ij}$  ta chọn dầm tựa tự do 2 đầu, chịu tác dụng đối xứng bởi 2 lực tập trung  $P$  (H3.17). Phương trình đường đàn hồi của dầm nói trên là

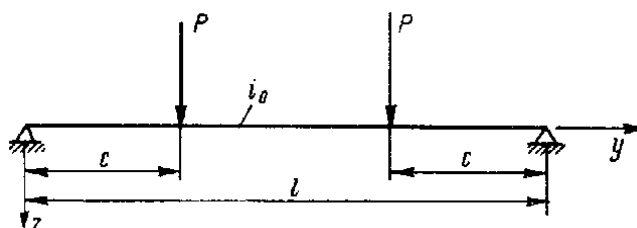
$$w(y) = \frac{Pl^3}{6EI_0} \left\{ \frac{y}{l} \left( 3 \frac{c}{l} \frac{l-c}{l} - \frac{y^2}{l^2} \right) + \left\| \frac{y-c}{l} \right\|_c^3 + \left\| \frac{y-(l-c)}{l} \right\|_{l-c}^3 \right\} \quad (20.30)$$

Để tính hệ số  $\gamma_{11}$ , cho  $y = 0,5l$ ,  $c = 0,5l$ .  
 Để xác định  $\gamma_{22}$ , cho  $y = 0,5l$ ,  $c = l/3$ , v.v

$$\begin{aligned}\gamma_{11} &= \frac{1}{24}; & \gamma_{12} &= \gamma_{21} = \frac{23}{648}; \\ \gamma_{22} &= \frac{5}{162}; & \gamma_{23} &= \gamma_{32} = \frac{23}{1296}; \\ \gamma_{33} &= \frac{7}{648}; & \gamma_{31} &= \gamma_{13} = \frac{13}{648}.\end{aligned}$$



H3.16



H3.17

Với dầm chính chịu tải rải đều, sau khi tính độ võng tại các nút, dễ dàng xác định các hệ số ảnh hưởng của tải trọng ngang  $\beta_i$ :

$$\beta_1 = \frac{5}{384}; \beta_2 = \frac{11}{927}; \beta_3 = \frac{205}{31104}.$$

Định thức đặc trưng (20.11) của bài toán đang xét được xác định sau khi thay các giá trị tìm được của  $\gamma_{ij}$  và thay  $I_1$  bởi  $0,5I_1$ , có dạng:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{24} - 2\frac{I_0}{I_1}\lambda_k; & \frac{23}{648}; & \frac{13}{648} \\ \frac{23}{648}; & \frac{5}{162} - \lambda_k; & \frac{23}{1296} \\ \frac{13}{648}; & \frac{23}{1296}; & \frac{7}{648} - \lambda_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 32,4 - x_k; & 27,6; & 15,6 \\ 46; & 40 - x_k; & 23 \\ 26; & 23; & 14 - x_k \end{vmatrix} = 0$$

Trong đó, ký hiệu  $x_k = 1296\lambda_k$

Khai triển định thức, ta được phương trình bậc 3 đối với  $x_k$ .

$$x_k^3 - 86,4x_k^2 + 105,4x_k - 15,6 = 0$$

Các nghiệm của phương trình này là

$$x_1 = 85,164; \quad x_2 = 1,0632; \quad x_3 = 0,1723.$$

Hệ phương trình (20.9) xác định các hệ số xác định dạng uốn chính cho trường hợp của dầm đang xét có thể viết dưới dạng:



$$\begin{aligned}(32,4 - x_k)v_{1k} + 27,6v_{2k} + 15,6v_{3k} &= 0; \\ 46v_{1k} + (40 - x_k)v_{2k} + 23v_{3k} &= 0; \\ 26v_{1k} + 23v_{2k} + (14 - x_k)v_{3k} &= 0.\end{aligned}$$

Thay lần lượt các nghiệm  $x_1, x_2$  và  $x_3$  vào

Ta có thể dễ dàng chứng tỏ được rằng, rằng các hệ số xác định dạng uốn chính thỏa mãn điều kiện trực giao (20.13). Bây giờ đến bước lập phương trình (20.19), xác định các uốn chính. Muốn thế, dựa vào các công thức (20.17) và (20.21) tính các giá trị độ cứng nền đàn hồi  $k_k$  và cường độ lực phân bố  $q_k(x)$ :

$$\begin{aligned}k_1 &= 47 \frac{EI_0}{L^4}; \quad k_2 = 3760 \frac{EI_0}{L^4}; \quad k_3 = 23200 \frac{EI_0}{L^4}; \\ q_1 &= 0,1193 \frac{Q}{a}; \quad q_2 = 0,0054 \frac{Q}{a}; \quad q_3 = 0,0010 \frac{Q}{a},\end{aligned}$$

Trong đó:  $Q = alq$ .

Trong trường hợp khảo sát,  $q_k(x)$  không thay đổi theo trục  $Ox$ , và như vậy, có thể sử dụng các hàm I.G.Bubnov.

Dựa trên các lời giải I.G.Bubnov, các giá trị của các hàm  $p_k(x)$  tại giữa chiều dài dầm ngang có thể được xác định bằng công thức (15.26), với  $B_1 = 0$ :

$$p_k(0) = \frac{q_k}{k_k} [1 - \varphi_1(u_k)] \quad (19.31)$$

Trong đó,  $\varphi_1(u_k)$  - hàm bổ trợ I.G.Bubnov, mà giá trị của nó có thể xác định nhờ bảng số cho sẵn, theo đối số:

$$u_k = \frac{L}{2} \sqrt[4]{\frac{k_k}{4EI_0}}$$

Như vậy, độ võng tại giữa nhịp thứ  $i$  sẽ bằng:

$$w_i(0) = \frac{I_0}{I_i} \sum_{k=1}^3 v_{ik} p_k(0) = \frac{I_0}{I_i} \sum_{k=1}^3 \frac{q_k}{k_k} v_{ik} [1 - \varphi_1(u_k)]. \quad (20.32)$$

Một cách tương tự, có thể xác định các yếu tố uốn khác của dầm ngang thứ  $i$ :

$$M_i(0) = - \frac{QL^2}{24a} \sum_{k=1}^3 v_{ik} \frac{q_k a}{Q} \chi_2(u_k) \quad (20.33)$$

Moment uốn và lực cắt tại tiết diện ngàm dầm ngang được xác định theo công thức:

$$M_i\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{QL^2}{12a} \sum_{k=1}^3 v_{ik} \frac{q_k a}{Q} \mu_1(u_k) \quad (20.34)$$

$$N_i\left(\frac{L}{2}\right) = \pm \frac{QL}{2a} \sum_{k=1}^3 v_{ik} \frac{q_k a}{Q} \mu_1(u_k) \quad (20.35)$$

## &21. TÍNH DÀN BẰNG PHƯƠNG PHÁP CHỌN TẢI TRỌNG DẦM NGÁNG

Thực chất phương pháp này là như sau:

Ta hãy hình dung một dàn bao gồm một loạt dầm chính đặt cách đều nhau, liên kết theo một kiểu thích hợp nào đó tại hai đầu và một số dầm ngang, có liên kết tại các đế như nhau.

Để giải gần đúng dàn nói trên, ta xác định cường độ tải trọng mà các dầm ngang phải chịu.

$$r_j(x) = q_j^0(x) - q_j\varphi(x), \quad (21.1)$$

trong đó  $q_j^0(x)$  - cường độ tải trọng của dầm ngang thứ  $j$ , tính với giả thiết là dàn không biến dạng;

$\varphi(x)$  - hàm chọn, có dạng gần với dạng võng dự kiến của dầm ngang;

$q_j$  - hệ số chưa biết, cần xác định.

Đường đàn hồi của dầm ngang thứ  $j$  dưới tác dụng của tải trọng đã biết  $r_j(x)$  có thể xác định bằng tích phân phương trình sau

$$[EI_j(x)w_j''] = r_j(x), \quad (21.2)$$

Trong đó,  $I_j(x)$  - moment quán tính dầm ngang thứ  $j$ .

Để xác định tham số chưa biết  $q_j$ , và từ đó, xác định  $r_j(x)$ , ta sử dụng điều kiện bằng nhau của chuyển vị tại tiết diện nút của dầm theo hai hướng. Ta so sánh độ võng tại điểm giữa dầm ngang, ( $x = L/2$ ), với độ võng tại tiết diện tương ứng của dầm chính giữa, còn hàm  $\varphi(x)$  được chọn sao cho tại điểm giữa dầm ngang,  $\varphi(L/2) = 1$ .

Vì phản lực đỡ, tác dụng lên dầm chính giữa, từ dầm ngang, khi dầm ngang có độ cứng hữu hạn, đã giảm đi một lượng  $R_j = a q_j$  [xem công thức (21.1)], nên ta dùng chính đại lượng này làm tải trọng tập trung tác dụng lên dầm chính giữa khi xác định độ võng tại các nút của dầm này.

Nếu ký hiệu  $w_i$  là độ võng của dầm chính giữa, tại nút thứ  $j$ , thì có thể viết

$$w_i = \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} \frac{l^3}{Ei_0} R_j = \frac{al^3}{Ei_0} \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} q_j, \quad (20.3)$$

Trong đó,  $\gamma_{ij}$  - hệ số ảnh hưởng của phản lực dầm ngang thứ  $j$  đến độ võng của dầm chính tại nút thứ  $i$ ;

$l$  - chiều dài dầm chính;

$i_0$  - giá trị trung bình của moment quán tính dầm chính giữa.

Giả sử dầm ngang thứ  $i$ , dưới tác dụng của lực  $r_i(x) = q_i^0(x) - q_i\varphi(x)$ , có độ võng tại giữa nhịp là

$$w_i = \frac{L^4}{EI_0} (\alpha_i q_i^0 - \beta_i q_i) \quad (20.4)$$

Trong đó,  $L$  – chiều dài dầm ngang;

$I_0$  – giá trị trung bình moment quán tính dầm ngang;

$q_0$  – giá trị trung bình của tải trọng  $q_i^0(x)$ ;

$\alpha_i$  và  $\beta_i$  – các hệ số ảnh hưởng đến độ võng tại giữa chiều dài dầm ngang thứ  $i$ , do tải trọng  $q_i^0(x)$  và  $q_i(x)$ , tác dụng.

Đặt bằng nhau độ võng giữa các tiết diện dầm chính giữa [biểu thức (20.3)] với độ võng tương ứng của các dầm ngang, thu được hệ phương trình đại số đối với  $q_j$

$$\frac{L^4}{EI_0} (\alpha_i q_i^0 - \beta_i q_i) = \frac{al^3}{EI_0} \sum_{j=i}^n \gamma_{ij} q_j, \quad (20.5)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, n$$

Sau khi xác định  $q_j$ , trên cơ sở của công thức (20.1) dễ dàng xác định cường độ tải trọng  $r_j(x)$  tác dụng lên dầm ngang thứ  $j$ , và sau đó, nhờ phương trình vi phân (20.2), xác định các yếu tố uốn cần thiết của các dầm ngang.

Lưu ý một điểm là, khó khăn trong việc xác định các hệ số ảnh hưởng  $\beta_i$  và các yếu tố uốn dầm ngang sẽ giảm đi nhiều nhờ việc sử dụng các bảng uốn dầm và các hàm phụ trợ cũng cho sẵn trong các sổ tay cơ học kết cấu.

CHƯƠNG IV

# LÝ THUYẾT UỐN THANH GHÉP VÀ ỨNG DỤNG TRONG CƠ KẾT CẤU TÀU THỦY

## &21. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN UỐN THANH GHÉP CÓ KẾT NỐI ĐÀN HỒI

Việc tính toán nhiều kết cấu thân tàu như thượng tầng, lầu lái hoặc tính toán tàu trên ụ nổi . . . Có thể giải quyết trên cơ sở của lý thuyết tính uốn thanh ghép.

*Thanh ghép* là thanh được tạo thành nhờ sự kết nối với nhau, theo chiều dài, của nhiều thanh. Các thanh thành phần trong thanh ghép có thể được làm từ các vật liệu khác nhau. Kết cấu đảm nhận việc kết nối các thanh với nhau gọi là các *liên kết*. Các liên kết giữa các thanh có thể là cứng, cũng có thể là đàn hồi. Nếu liên kết là cứng và các thanh làm từ cùng một loại vật liệu, thì thanh ghép có thể coi là thanh liền, theo định nghĩa thông thường, mà ta đã nghiên cứu trong các chương trước.

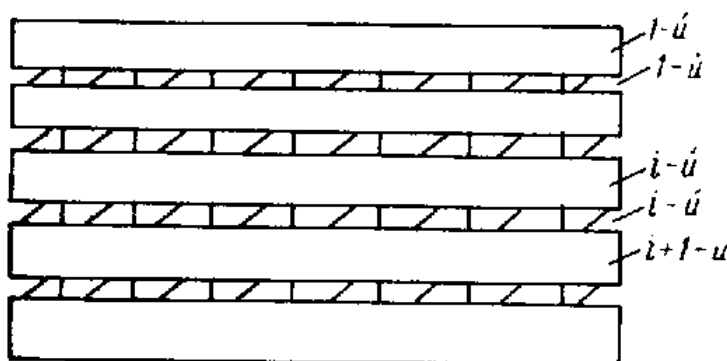
Các liên kết có thể chia ra hai loại, tùy thuộc vào dạng ứng lực mà nó có thể truyền từ thanh nọ đến thanh kia. Nếu mỗi nối truyền ứng lực tiếp, nó được gọi là *liên kết trượt*, còn *liên kết ngang* là liên kết truyền các ứng lực giữa hai thanh, tác dụng theo phương pháp tuyến, ngang các thanh.

Khoảng không gian giữa hai thanh cạnh nhau gọi là *mối nối*.

Ta chỉ xem xét ở đây các thanh ghép phẳng, là thanh ghép mà trong đó, tiết diện ngang các thanh thành phần xếp kế tiếp nhau và có cùng một trục quán tính chính .

Số mối nối trong thanh ghép phẳng kém số thanh thành phần của nó 1 đơn vị. Tại mỗi mối nối, có thể có 2 loại liên kết, liên kết trượt và liên kết ngang, cũng có thể chỉ có hoặc loại này, hoặc loại kia, theo chiều dọc thanh. Mỗi nối có thể phân bố liên tục, cũng có thể phân bố gián đoạn.

Trên hình H4.1 biểu diễn thanh ghép với mối nối đàn hồi. Giả thiết rằng chiều dài các thanh thành phần là như nhau.



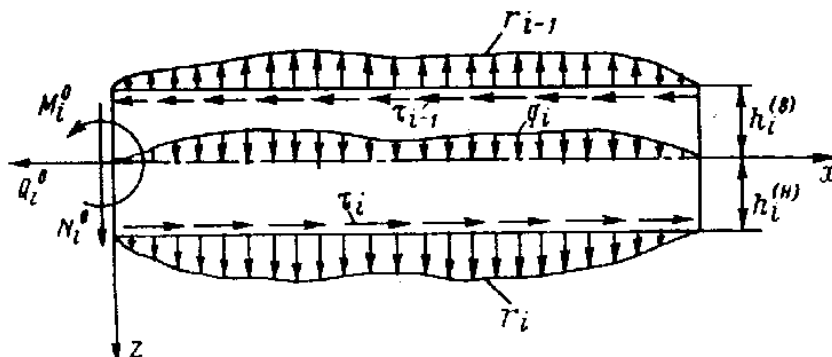
H4.1

Để rút ra các quan hệ vi phân mô tả sự làm việc uốn của thanh ghép, ta tách ra từ chúng một thanh, chẳng hạn như, thanh thứ  $i$  để khảo sát.

Trong phần tiếp theo, ta sử dụng các ký hiệu sau:

$E_i$	-	Mo đun đàn hồi của vật liệu;
$I_i$	-	Moment quán tính tiết diện ngang ;
$F_i$	-	Diện tích tiết diện ngang;
$h_i^{(t)}$	-	Khoảng cách từ mép trên của thanh đến trục trung hoà;
$h_i^{(d)}$	-	Khoảng cách từ mép dưới đến trục trung hoà;
$w_i(x)$	-	Độ võng của thanh;
$q_i(x)$	-	Cường độ tải trọng ngang bên ngoài;
$Q_i^0$	-	Lực kéo tập trung đặt tại tiết diện trái;
$N_i^0$	-	Lực cắt trên tiết diện ngang bên trái;
$M_i^0$	-	Moment uốn tại tiết diện ngang bên trái;
$r_i(x)$	-	Cường độ phản lực ngang, tác dụng trên mỗi nối thứ $i$ ;
$\tau_i(x)$	-	Cường độ ứng lực tiếp, tác dụng trên mỗi nối thứ $i$ ;
$k_i$	-	Hệ số cứng liên kết ngang thứ $i$ ;
$\lambda_i$	-	Hệ số cứng liên kết trượt thứ $i$ ;
$u_i^t$	-	Chuyển vị của mép trên thanh thứ $i$ theo phương Ox;
$u_i^d$	-	Chuyển vị của mép dưới thanh thứ $i$ theo phương Ox;

Tác dụng từ các thanh bên trên và bên dưới thanh thứ  $i$  đang xét được thay bằng các phản lực tương tác (H4.2)<sup>1</sup>.



H4.2

<sup>1</sup> ký hiệu trên hình vẽ, “B” ứng với “t” còn “H” ứng với “d” trong các công thức.

Ta lập phương trình vi phân uốn thanh thứ  $i$ .

Biểu thức tổng quát của moment uốn thanh thứ  $i$  tại tiết diện  $x$  bất kỳ, có thể viết dưới dạng:

$$M_i(x) = E_i I_i w_i''(x) = \int_0^x \int_0^x q_i(x) dx^2 + \int_0^x \int_0^x (r_i - r_{i-1}) dx^2 + Q_i h_i^d + Q_{i-1} h_i^t + M_i^0 + N_i^0 x, \quad (21.1)$$

Trong đó:

$$Q_i(x) = \int_0^x \tau_i dx; \quad Q_{i-1} = \int_0^x \tau_{i-1} dx. \quad (21.2)$$

Lưu ý đến các quan hệ hiển nhiên:

$$\left. \begin{aligned} r_i &= k_i (w_{i+1} - w_i); \\ r_{i-1} &= k_{i-1} (w_i - w_{i-1}) \end{aligned} \right\} \quad (21.3)$$

Sau khi đạo hàm 2 lần biểu thức (21.1), ta thu được:

$$E_i I_i w_i^{IV}(x) = q_i(x) - (k_i + k_{i-1}) w_i + k_i w_{i+1} + k_{i-1} w_{i-1} + \tau_i' h_i^d + \tau_{i-1}' h_i^t, \quad (21.4)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, n,$$

Trong đó,  $n$  - là số các thanh thành phần.

Trong phương trình (21.4), các đại lượng  $\tau_0$  và  $\tau_n$  được coi như đã cho (đây chính là ứng suất tiếp trên bề mặt tự do),  $w_0 = w_{n+1} \equiv 0$ , các đại lượng  $k_0$  và  $k_n$  hoặc là bằng 0, hoặc là cho trước nếu như các thanh ghép nằm trên nền đàn hồi. Trong hệ phương trình (21.4), đồng thời với các đại lượng chưa biết  $w_i(x)$  còn chứa các đại lượng chưa biết khác là  $\tau_i(x)$ .

Ta lập tiếp các quan hệ vi phân bổ sung để xác định  $\tau_i(x)$ .

Theo định nghĩa độ cứng của liên kết trượt đàn hồi:

$$\tau_i = \lambda_i (u_{i+1}' - u_i^d). \quad (21.5)$$

Đạo hàm quan hệ (21.5) theo  $x$ , thu được:

$$\tau_i' = \lambda_i \left( \frac{du_{i+1}^t}{dx} - \frac{du_i^d}{dx} \right) = \lambda_i (\varepsilon_{i+1}^t - \varepsilon_i^d), \quad (21.6)$$

Trong đó:  $\varepsilon_{i+1}^t$  - biến dạng đường mép trên của thanh thứ  $i+1$ ;  
 $\varepsilon_i^d$  - biến dạng đường mép dưới của thanh thứ  $i$

Biến dạng đường của thanh thứ  $i$  và thứ  $i+1$  tại mối nối giữa hai thanh gây ra biến dạng của các thanh này về uốn cũng như về kéo dãn. Trên cơ sở này, có:

$$\varepsilon_i^d = -h_i^d w_i'' + \frac{Q_i^0 - Q_i + Q_{i-1}}{E_{i+1} F_i} \quad (21.7)$$

$$\varepsilon_{i+1}^t = h_{i+1}^t w_{i+1}'' + \frac{Q_{i+1}^0 - Q_{i+1} + Q_i}{E_{i+1} F_{i+1}} \quad (21.8)$$

Thay (21.7) và (21.8) vào vế phải của (21.6) rồi đạo hàm hai vế biểu thức thu được, ta có được phương trình vi phân bổ sung cần tìm

$$\tau_i'' - \lambda_i \left( \frac{1}{E_{i+1}F_i} + \frac{1}{E_iF_i} \right) \tau_i + \lambda_i \frac{1}{E_{i+1}F_{i+1}} \tau_{i+1} + \lambda_i \frac{1}{E_iF_i} \tau_{i-1} = \lambda_i (h_{i+1}^t w_{i+1}'' + h_i^d w_i''), \quad (21.9)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, n$$

Tập hợp  $n$  phương trình vi phân (21.4) và  $n-1$  phương trình (21.9) mô tả uốn thanh ghép. Tích phân đồng thời hai hệ này cho phép ta xác định các hàm chưa biết  $w_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ) và  $\tau_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$ ). Như thường lệ, các hằng số tích phân được xác định từ các điều kiện biên.

Để dàng lập được các điều kiện biên để xác định 2 hằng số tùy ý khi tích phân mỗi một phương trình (21.9). Thực vậy, nếu như sử dụng các biểu thức (21.7), thì biểu thức (21.6) có thể viết dưới dạng:

$$\frac{\tau_i'}{\lambda_i} = w_i'' h_i^d + w_{i+1}'' h_{i+1}^t - \frac{Q_i^0 - Q_i + Q_{i-1}}{E_i F_i} + \frac{Q_{i+1}^0 - Q_{i+1} + Q_i}{E_{i+1} F_{i+1}} \quad (21.10)$$

Tiếp đến, ta chú ý rằng, khi  $x = l$ :

$$\left. \begin{aligned} Q_i^0 - Q_i + Q_{i-1} &= Q_i^{(1)}; \\ Q_{i+1}^0 - Q_{i+1} + Q_i &= Q_{i+1}^{(1)}; \end{aligned} \right\} \quad (21.11)$$

Trong đó,  $Q_i^{(1)}, Q_{i+1}^{(1)}$  - các lực kéo dọc, tác dụng, tương ứng, vào nút phải của thanh thứ  $i$  và thanh thứ  $i+1$ .

Khi đó, trên cơ sở của các công thức (21.10), sử dụng (21.11), có thể viết lại điều kiện biên cho hàm  $\tau_i$  như sau:

$$\left. \begin{aligned} \text{Khi } x = 0 \\ \frac{\tau_i'}{\lambda_i} &= \left| w_i'' h_i^d + w_{i+1}'' h_{i+1}^t \right|_{x=0} + \frac{Q_{i+1}^0}{E_{i+1} F_{i+1}} - \frac{Q_i^0}{E_i F_i}; \\ \text{Khi } x = l \\ \frac{\tau_i'}{\lambda_i} &= \left| w_i'' h_i^d + w_{i+1}'' h_{i+1}^t \right|_{x=l} + \frac{Q_{i+1}^{(1)}}{E_{i+1} F_{i+1}} - \frac{Q_i^{(1)}}{E_i F_i}; \end{aligned} \right\} \quad (21.12)$$

### 1. Tính đến ảnh hưởng cắt của từng thanh thành phần.

Các quan hệ thu được trên đây đã không tính đến biến dạng trượt (cắt), là biến dạng mà ảnh hưởng của nó, trong từng thanh thành phần, có khi là rất đáng kể.

Ta đưa vào thêm một số ký hiệu bổ sung:

$w_i^{(1)}$  - độ võng do uốn của thanh thứ  $i$ ;

$w_i^{(2)}$  - độ võng do cắt của thanh thứ  $i$ ;

$w_i$  - độ võng tổng cộng của thanh thứ  $i$ ;

$\omega_i$  - diện tích thay thế của tiết diện ngang thứ  $i$ .

Phân tích các quan hệ vi phân trên đây, có được khi chưa kể đến ảnh hưởng trượt, dễ dàng nhận thấy rằng, việc tính đến ảnh hưởng trượt chỉ làm thay đổi một số thành phần, về cách viết, trong phương trình (21.4), trong đó,  $w_i(x)$  trong vế trái, sẽ được hiểu là độ võng do uốn  $w_i^{(1)}(x)$ , còn trong vế phải,  $w_i(x)$  – là độ võng tổng cộng.:

$$w_i(x) = w_i^{(1)}(x) + w_i^{(2)}(x),$$

nhưng

$$w_i^{(2)}(x) = - \frac{E_i I_i}{G_i \omega_i} (w_i^{(1)}(x))''$$

Nên

$$w_i(x) = w_i^{(1)}(x) - \frac{E_i I_i}{G_i \omega_i} (w_i^{(1)}(x))'' \quad (21.13)$$

Lưu ý đến biểu thức (21.13) cho độ võng tổng cộng, hệ phương trình cân bằng (21.4) có thể viết lại, có tính đến ảnh hưởng của biến dạng trượt như sau:

$$\begin{aligned} E_i I_i [w_i^{(1)}(x)]^{IV} = & q_i(x) - (k_i + k_{i-1}) \left[ w_i^{(1)} - \frac{E_i I_i}{G_i \omega_i} (w_i^{(1)})'' \right] + k_i \left[ w_{i+1}^{(1)} - \frac{E_{i+1} I_{i+1}}{G_{i+1} \omega_{i+1}} (w_{i+1}^{(1)})'' \right] + \\ & + k_{i+1} \left[ w_{i-1}^{(1)} - \frac{E_{i-1} I_{i-1}}{G_{i-1} \omega_{i-1}} (w_{i-1}^{(1)})'' \right] + h_i^d \tau_i' + h_i^t \tau_{i-1}' \end{aligned} \quad (21.14)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, I$$

Phương trình vi phân (21.9) cho mỗi liên kết nối thanh thứ  $i$  và thanh thứ  $i+1$ , khi tính ảnh hưởng cắt, không thay đổi cấu trúc ban đầu của nó:

$$\tau_i'' - \lambda_i \left( \frac{1}{E_{i+1} F_{i+1}} + \frac{1}{E_i F_i} \right) \tau_i + \frac{\lambda_i}{E_{i+1} F_{i+1}} \tau_{i+1} + \frac{\lambda_i}{E_i F_i} \tau_{i-1} = \lambda_i \left[ h_{i+1}^t (w_{i+1}^{(1)})''' + h_i^d (w_i^{(1)})''' \right], \quad (21.15)$$

## 2. Tính uốn thanh ghép với liên kết trượt đàn hồi và liên kết ngang cứng ( $G_i \omega_i \neq \infty$ ).

Điều kiện  $k_i = \infty$  dẫn đến kết quả là độ võng của tất cả các thanh bằng nhau tại mỗi một tiết diện, tức:

$$w_1(x) = w_2(x) = w_3(x) = \dots = w_n(x) = w(x) \quad (21.16)$$

Tiếp đến, cộng từng thành phần của (21.4), ta thu được phương trình vi phân xác định độ võng  $w(x)$ :

$$EI w^{IV}(x) = q(x) + R_t, \quad (21.17)$$

$$\left. \begin{aligned} EI &= \sum_{i=1}^n E_i I_i; \\ q(x) &= \sum_{i=1}^n q_i(x), \end{aligned} \right\} \quad (21.18)$$

Trong đó:

$$R_t = \sum_{i=1}^{n-1} (h_i^d + h_{i+1}^t) \tau_i' \quad (21.19)$$



Các hàm chưa biết  $\tau_i$  được xác định từ hệ phương trình (21.9):

$$\frac{\tau_i'''}{\lambda_i} - \left( \frac{1}{E_{i+1}F_{i+1}} + \frac{1}{E_iF_i} \right) \tau_i' + \frac{1}{E_{i+1}F_{i+1}} \tau_{i+1}' + \frac{1}{E_iF_i} \tau_{i-1}' = (h_{i+1}^t = h_i^d) w''', \quad (21.20)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, n-1$$

Đạo hàm (21.20) theo  $x$  rồi dùng (21.17) khử bỏ đại lượng  $w^{IV}$  trong vế phải, cuối cùng ta thu được:

$$\frac{\tau_i'''}{\lambda_i} - \left( \frac{1}{E_{i+1}F_{i+1}} + \frac{1}{E_iF_i} \right) \tau_i' + \frac{1}{E_{i+1}F_{i+1}} \tau_{i+1}' + \frac{1}{E_iF_i} \tau_{i-1}' - \frac{h_{i+1}^t + h_i^d}{EI} R_{\tau'} = \frac{h_{i+1}^t + h_i^d}{EI} q, \quad (21.21)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, n-1$$

Hệ phương trình (21.21) là hệ phương trình vi phân cấp 2 đối với các hàm chưa biết  $\tau_i'$ . Để xác định các hằng số tích phân của các hàm  $\tau_i'$  này, ta sử dụng các điều kiện biên đã nêu ra trong (21.12).

Trong trường hợp khảo sát,  $k_i = \infty$ , các điều kiện biên khi uốn mỗi thanh của thanh ghép tỏ ra không đủ để xác định các hằng số tích phân. Ta sẽ quay lại vấn đề này sau, khi đề cập đến việc tính toán các thượng tầng tàu thủy.

Tích phân  $\tau_i$  theo  $x$ , ta thu được:

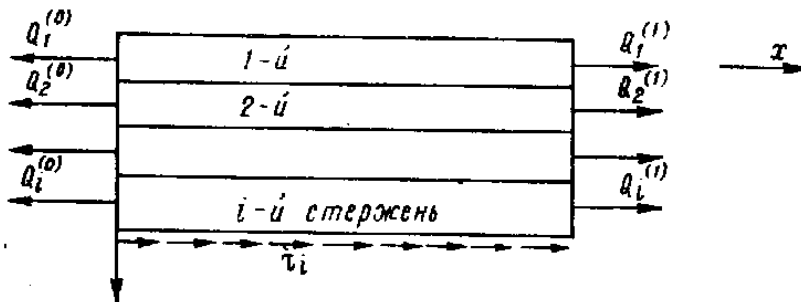
$$\tau_i(x) = \int_0^x \tau_i'(x) dx + \alpha_i. \quad (21.22)$$

Tích phân tiếp tục (21.22) một lần nữa theo  $x$  trong giới hạn từ 0 đến  $l$  và từ kết quả tìm được, giải ra  $\alpha_i$ , ta thu được:

$$\alpha_i = \frac{1}{l} \left[ Q_i(l) - \int_0^l \int_0^x \tau_i'(x) dx^2 \right], \quad (21.23)$$

$$\text{Trong đó: } Q_i(l) = \int_0^l \tau_i(x) dx. \quad (21.24)$$

Các hàm chưa biết dễ dàng được xác định, nếu như ta cắt dọc theo mỗi nối thứ  $i$  và lập phương trình cân bằng hình chiếu tất cả các lực tác dụng vào phần thanh phía trên mặt cắt, theo phương của trục  $Ox$  (H4.3)



H4.3

$$Q_i(l) = \sum_{k=1}^{k=i} (Q_k^{(0)} - Q_k^{(1)}). \quad (21.25)$$

Thay (21.25) vào (21.23), có thể xác định các hằng số  $\alpha_i$ . Sau khi biết đại lượng  $\alpha_i$  ta tìm được các hàm  $\tau_i(x)$  theo công thức (21.22). Đây chính là hàm đặc trưng cho sự phân bố ứng lực tiếp trên mỗi nối thứ  $i$  bất kỳ của thanh ghép.

### 3. Uốn thanh ghép có mối nối ngang đàn hồi và liên kết trượt cứng tuyệt đối ( $G_i \omega_i = \infty$ )

Trong trường hợp khảo sát, hệ phương trình vi phân (21.4) xác định uốn thanh ghép, không có gì thay đổi.

Đạo hàm theo  $x$  điều kiện liên kết giữa 2 tiếp cận với mỗi nối thứ  $i$ , (21.9), với chú ý là  $\lambda_i = \infty$ , ta được

$$-\left( \left( \frac{1}{E_{i+1}F_{i+1}} + \frac{1}{E_i F_i} \right) \tau_i' + \frac{1}{E_{i+1}F_{i+1}} \tau_{i+1}' + \frac{1}{E_i F_i} \tau_{i-1}' \right) = (h_{i+1}' w_{i+1}^{IV} + h_i^d w_i^{IV}), \quad (21.26)$$

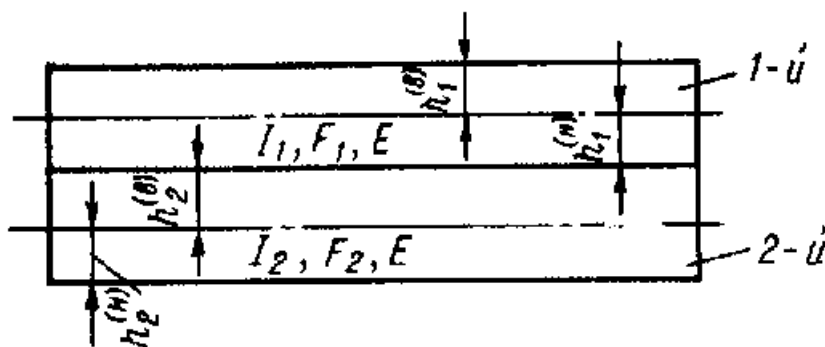
$$i = 1, 2, 3, \dots, n-1$$

Hệ phương trình (21.26) là hệ phương trình đại số không thuần nhất đối với  $\tau_i'$ . Giải hệ này, ta có thể biểu diễn các đại lượng  $\tau_i'$  qua  $w_i^{IV}$  theo quan hệ tuyến tính. Thay vào công thức c (21.4) giá trị tìm được của  $\tau_i'$ , phụ thuộc tuyến tính vào  $w_i^{IV}$ , ta thu được hệ  $n$  phương trình vi phân đối với các độ võng chưa biết  $w_i$  của thanh ghép.

### 4. Uốn thanh ghép có độ cứng trượt và độ cứng ngang vô cùng lớn ( $k_i = \lambda_i = \infty$ ).

Các liên kết trượt và mối nối ngang củ thanh cứng tuyệt đối có nghĩa là thanh không còn là thanh ghép nữa mà nó đã trở thành thanh đơn, là loại thanh tuân theo giả thuyết tiết diện phẳng trên toàn bộ tiết diện của nó, chứ không chỉ đối với từng thanh thành phần.

Ta chứng tỏ điều này qua khảo sát thanh ghép gồm 2 thanh thành phần, lằng trụ, làm từ cùng một loại vật liệu (H4.4). Dữ kiện cuối cùng là không nhất thiết, nhưng ta đưa vào để đơn giản hoá các dẫn giải.



H4.4

Đối với thanh nói trên, tương ứng với các phương trình (21.4) và (21.9) có thể viết các phương trình vi phân sau:

$$\left. \begin{aligned} E_1 I_1 w_1^{IV} &= q_1 - k_1 w_1 + k_2 w_2 + h_1^d \tau_1' \\ E_2 I_2 w_2^{IV} &= q_2 - k_1 w_2 + k_2 w_1 + h_2^t \tau_1' \end{aligned} \right\} \quad (21.27)$$

$$\tau_1'' = w_1''' h_1^d + w_2''' h_2^t + \left( \frac{1}{EF_1} + \frac{1}{EF_2} \right) \tau_1. \quad (21.28)$$

Nếu chia các thành phần của (21.27) cho  $k = \infty$ , ta thu được:

$$w_2 - w_1 = 0.$$

Từ đó:  $w_1(x) = w_2(x) = w(x) \quad (21.29)$

Cộng vế phải với vế phải và vế trái với vế trái của các phương trình thuộc hệ (21.27), chú ý đến (21.29), ta thu được:

$$E(I_1 + I_2)w^{IV} = q_1 + q_2 + (h_1^d + h_2^t)\tau_1'. \quad (21.30)$$

Đạo hàm quan hệ (21.28) theo  $x$  và chú ý rằng  $\lambda_1 = \infty$ , ta được:

$$\tau_1' \left( \frac{1}{EF_1} + \frac{1}{EF_2} \right) = - (h_1^d + h_2^t)w^{IV}. \quad (21.31)$$

Dùng (21.31) để khử hàm  $\tau_1'$  khỏi vế phải của phương trình (21.30), sau một số biến đổi đơn giản, ta đi đến phương trình sau:

$$EI_{th} w^{IV}(x) = q(x), \quad (21.32)$$

Trong đó:

$q(x) = q_1 + q_2$  - tổng tải trọng ngoài tác dụng lên thanh;

$I_{th} = I_1 + I_2 + \frac{F_1 F_2}{F_1 + F_2} (h_1^d + h_2^t)^2$  - momen quán tính tiết diện ngang thanh ghép đối với

trục trung hoà.

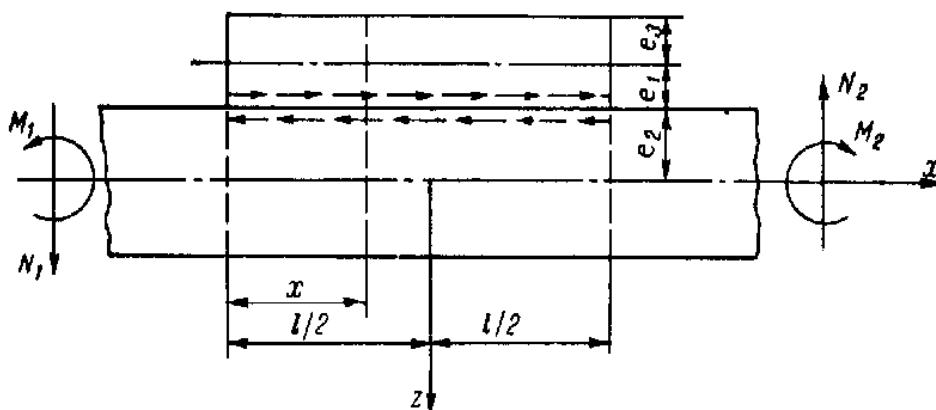
Phương trình vi phân (21.32) thu được trên đây chứng tỏ *tính khả suy* trong việc chuyển qua giới hạn từ lý thuyết uốn thanh ghép sang lý thuyết uốn *thanh đơn* thông thường.

## &22. UỐN THƯỢNG TẦNG VÀ LẦU

Việc tính toán thượng tầng và lầu đã được quan tâm từ lâu. Ta chỉ xem xét một số bài toán đơn giản nhất.

### 1. Tính toán thượng tầng đơn.

Ta hiểu thượng tầng đơn ở đây là thượng tầng chỉ gồm một tầng. Vỏ tàu cùng với thượng tầng đơn có thể coi là một thanh ghép gồm 2 thanh: vỏ tàu và thượng tầng (H4.5).



H4.5

Dọc theo đường nối ghép giữa 2 thanh, có các ứng lực tương tác tiếp tuyến và pháp tuyến.

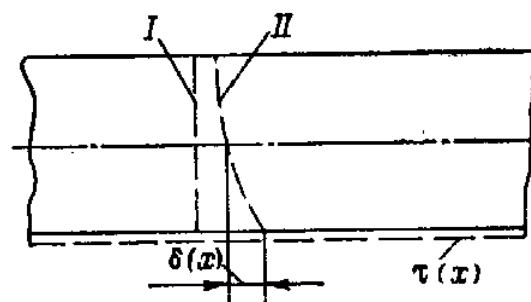
Khi tính các thượng tầng, mà hai mạn của nó kéo ra đến tận 2 mạn tàu hoặc nối tiếp các vách dọc, ta có thể giả thiết rằng các liên kết ngang là cứng tuyệt đối, tức  $k = \infty$ .

Việc xác định độ cứng của liên kết trượt có nhiều khó khăn hơn. Ta giả thiết rằng liên kết giữa vỏ tàu và thượng tầng là *hàn*. Khi đó, không có sự trượt tương đối giữa thượng tầng và vỏ tàu, và như vậy, độ cứng trượt  $\lambda$  có thể coi là vô cùng lớn.

Lý thuyết uốn thanh ghép dựa trên việc vận dụng giả thuyết tiết diện phẳng khi mô tả uốn của từng thanh thành phần, và như vậy, không tính đến sự vênh do ứng lực tiếp tuyến  $\tau(x)$  gây ra cho tiết diện ban đầu vốn phẳng (H4.6).

Ký hiệu chuyển vị bổ sung của mép thanh chịu tải đối với tâm kéo là  $\delta(x)$ , và tính hệ số cứng trượt

$$\lambda(x) = \frac{\tau(x)}{\delta(x)} \quad (22.1)$$



H4.6

Đại lượng  $\delta(x)$  phụ thuộc cả vào các tham số đặc trưng cho kích thước thanh ghép khảo sát lẫn qui luật phân bố ứng suất tiếp  $\tau(x)$  theo chiều dài mép gắn giữa 2 thanh. Để xác định  $\delta(x)$  theo ứng lực cho trước  $\tau(x)$  cần phải giải bài toán phẳng của lý thuyết đàn

hồi, mà nội dung của nó không nằm trong khuôn khổ của giáo trình này. Chú ý một điều là hệ số  $\lambda$  xác định theo (22.1) là đại lượng biến đổi theo chiều dài. Tuy nhiên, như các tính toán khảo cứu cho thấy, với độ chính xác mà các mục đích thực tế yêu cầu, có thể coi đại lượng này là không đổi dọc theo mối nối.

Ký hiệu hệ số cứng, cản lại trượt gây ra sự vênh tiết diện ngang vốn phẳng của thượng tầng, tại mối nối đàn hồi, là  $\lambda_1$ , còn của vỏ tàu là  $\lambda_2$ , ta có thể viết công thức xác định độ cứng trượt  $\lambda$  của mối nối ghép giữa thượng tầng và vỏ tàu như sau:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \quad (22.2)$$

Nếu mối nối nói trên không phải là hàn mà là tán đinh, thì công thức trên cần hiệu chỉnh bằng việc bổ sung độ cứng  $\lambda_{dt}$  của mối nối đinh tán :

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_{dt}} \quad (22.3)$$

Ta đưa tiếp vào các ký hiệu sau:

$I_1$  - momen quán tính tiết diện ngang thượng tầng;

$I_2$  - momen quán tính tiết diện ngang vỏ tàu;

$E_1$  - môđun đàn hồi dọc vật liệu thượng tầng;

$E_2$  - môđun đàn hồi dọc vật liệu vỏ tàu;

$F_1$  - diện tích tiết diện ngang kết cấu thượng tầng;

$F_2$  - diện tích tiết diện ngang kết cấu vỏ tàu;

$w_1$  - độ võng thượng tầng;

$w_2$  - độ võng vỏ tàu;

$q_1$  - cường độ tải trọng ngang tác dụng lên thượng tầng;

$q_2$  - cường độ tải trọng ngang tác dụng lên vỏ tàu;

$e_1$  - khoảng cách từ trọng tâm tiết diện ngang thượng tầng đến mối nối với vỏ tàu;

$e_2$  - khoảng cách từ trọng tâm tiết diện ngang vỏ tàu đến mối nối với thượng tầng.

Tương ứng với các ký hiệu trên đây và trên cơ sở của các quan hệ vi phân trong &21, có thể viết hai phương trình sau đây:

$$EIw^{IV}(x) = q(x) + (e_1 + e_2)\tau' \quad (22.4)$$

trong đó

$$w(x) = w_1(x) = w_2(x); \quad (22.5)$$

$$q(x) = q_1(x) + q_2(x); \quad (22.6)$$

$$EI = E_1I_1 + E_2I_2, \quad (22.7)$$

và

$$\tau''' - \alpha^2 \tau' = \lambda \frac{e}{EI} q, \quad (22.8)$$

Với

$$\alpha^2 = \left( \frac{e^2}{EI} + \frac{1}{EF} \right) \lambda; \quad (22.9)$$

$$\frac{1}{EF} = \frac{1}{E_1 F_1} + \frac{1}{E_2 F_2}; \quad (22.10)$$

$$e = e_1 + e_2$$

Với điều kiện hàm  $q(x)$  hoặc là không đổi, hoặc là thay đổi tuyến tính theo  $x$ , ta có thể viết biểu thức tích phân tổng quát của (22.8) dưới dạng

$$\tau'(x) = A \cosh \alpha x + B \sinh \alpha x - \frac{\lambda e}{\alpha^2 EI} q \quad (22.12)$$

Các hằng số tích phân  $A$  và  $B$  được xác định trên cơ sở các điều kiện biên (21.12), mà trong trường hợp đang xét có dạng

$$\text{tại } x = \pm \frac{l}{2} \quad \tau' = \lambda e w'' \quad (22.13)$$

Ký hiệu moment uốn vỏ tàu tại tiết diện mút trái và tiết diện mút phải của thượng tầng, tương ứng, là  $M_1$  và  $M_2$ , có thể viết (22.13) dưới dạng

$$\left. \begin{aligned} \text{tại } x = -\frac{l}{2} \quad \frac{\tau'}{\lambda} &= e \frac{M_1}{EI}; \\ \text{tại } x = \frac{l}{2} \quad \frac{\tau'}{\lambda} &= e \frac{M_2}{EI} \end{aligned} \right\} \quad (22.14)$$

Buộc biểu thức (22.12) thỏa mãn các điều kiện biên này, ta được:

$$\tau' = \frac{\lambda e}{EI \alpha} \left[ \left( \frac{M_1 + M_2}{2} + \frac{q}{\alpha^2} \right) \frac{\cosh \alpha x}{\cosh \frac{\alpha l}{2}} + \frac{M_2 - M_1}{2} \frac{\sinh \alpha x}{\sinh \frac{\alpha l}{2}} - \frac{q}{\alpha^2} \right] \quad (22.15)$$

Tích phân biểu thức (22.15)

$$\tau = \frac{\lambda e}{EI \alpha} \left[ \frac{M_1 + M_2}{2} \frac{\sinh \alpha x}{\cosh \frac{\alpha l}{2}} + \frac{M_2 - M_1}{2} \frac{\cosh \alpha x}{\sinh \frac{\alpha l}{2}} + \frac{1}{\alpha} \int_{-\frac{l}{2}}^x q(x) \frac{\cosh \alpha x}{\cosh \frac{\alpha l}{2}} dx - \frac{1}{\alpha} \int_{-\frac{l}{2}}^x q(x) dx \right] + a. \quad (22.16)$$

Trong đó:  $a$  - là hằng số tích phân.

Vì tại các đầu mút của thượng tầng,  $Q = 0$ , nên cần thỏa mãn điều kiện:

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \tau(x) dx = 0. \quad (22.17)$$

Buộc (22.16) thỏa mãn (22.17) và giải ra đại lượng  $a$  ta được

$$a = -\frac{\lambda e}{EI\alpha^2} \frac{1}{l} \left[ (M_2 - M_1) + \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} q \frac{ch\alpha x}{ch\frac{\alpha l}{2}} dx^2 - \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} q dx^2 - \frac{M_2 - M_1}{2sh\frac{\alpha l}{2}} \alpha l \right]. \quad (22.18)$$

Thay (22.18) vào (22.16) ta thu được

$$\tau(x) = \frac{\lambda e}{EI\alpha} \left[ \frac{M_2 + M_1}{2} \frac{sh\alpha x}{ch\frac{\alpha l}{2}} + \frac{M_2 - M_1}{2} \left( \frac{ch\alpha x}{sh\frac{\alpha l}{2}} - \frac{2}{\alpha l} \right) + \frac{1}{\alpha} \int_{-\frac{l}{2}}^x q(x) \left( \frac{ch\alpha x}{ch\frac{\alpha l}{2}} - 1 \right) dx - \frac{1}{\alpha l} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \int_{-\frac{l}{2}}^x q(x) \left( \frac{ch\alpha x}{ch\frac{\alpha l}{2}} - 1 \right) dx^2 \right] \quad (22.19)$$

Nếu giả thiết là moment uốn chung tại hai đầu mút vỏ tàu như nhau, tức  $M_1 = M_2 = M_0$ , còn cường độ tải trọng ngang là không đổi,  $q(x) = q = const$ , thì công thức (22.19) có thể viết dưới dạng đơn giản hơn:

$$\tau(x) = \frac{\lambda e}{EI\alpha} \left[ \left( M_0 + \frac{q}{\alpha^2} \right) \frac{sh\alpha x}{ch\frac{\alpha l}{2}} - \frac{q}{\alpha} x \right]. \quad (22.20)$$

Tích phân (22.4) hai lần liên tiếp, ta thu được

$$EIw''(x) = \int_{-\frac{l}{2}}^x \int_{-\frac{l}{2}}^x q(x) dx^2 + eQ + n \left( x - \frac{l}{2} \right) + m, \quad (22.21)$$

Trong đó:  $n$  và  $m$  – là các hằng số tích phân;

$$Q(x) = \int_{-\frac{l}{2}}^x \tau(x) dx - \text{Lực dọc tác dụng trên thượng tầng.}$$

Vì tại các đầu mút của thượng tầng,  $Q = 0$ , còn moment tổng cộng tác dụng lên vỏ tàu và thượng tầng  $EIw''$  cần phải bằng moment do uốn chung vỏ tàu, nên có thể dễ dàng tìm được các hằng số tích phân

$$n = 0; m = M(-l/2),$$

Trong đó,  $M(-l/2)$  – là moment uốn do uốn chung thân tàu tại tiết diện  $x = -l/2$ .

Khi đó, quan hệ (22.21) có thể viết lại như sau:

$$EIw''(x) = M \left( -\frac{l}{2} \right) + \int_{-\frac{l}{2}}^x \int_{-\frac{l}{2}}^x q(x) dx^2 + eQ(x) \quad (22.22)$$

hay

$$EIw'' = M(x) + eQ(x),$$

Moment uốn trên thượng tầng và trên vỏ tàu được xác định tương ứng theo các công thức,  $M_t = E_1 I_1 w''$ ;  $M_v = E_2 I_2 w''$ , và dựa vào công thức (22.22) ta có:

$$\left. \begin{aligned} M_t &= \frac{E_1 I_1}{EI} (M + eQ) \\ M_v &= \frac{E_2 I_2}{EI} (M + eQ) \end{aligned} \right\} \quad (22.23)$$

Như có thể thấy từ (22.13), các moment tác dụng lên hai đầu mút của thượng tầng,  $M_v$ , không bằng 0. Kết quả này là hệ quả của việc sử dụng giả thuyết tiết diện phẳng và giả thiết về độ cứng tuyệt đối của liên kết ngang ( $k = \infty$ ).

Ta xác định ứng suất pháp tuyến trên thượng tầng  $\sigma_t$ , tại chỗ tiếp giáp với vỏ tàu. Ứng suất này được gây ra bởi:

1. Tác dụng của moment uốn thượng tầng  $M_t(x)$ ;

2. Tác dụng của lực dọc  $Q = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \tau dx$ ;

3. Biến dạng bổ sung  $\delta'$  (độ vênh ra khỏi vị trí phẳng ban đầu của tiết diện ngang thượng tầng):

$$\delta' = \frac{\tau'}{\lambda_1}.$$

Khi đó, thuận theo các qui ước dấu đối với  $M$ ,  $Q$ ,  $\tau$  ta có thể viết biểu thức sau:

$$\sigma_{1t} = \frac{E_1}{E} \frac{M + eQ}{I} e_1 - \frac{Q}{F_1} + \frac{E_1 \tau'}{\lambda_1}. \quad (22.24)$$

Tương tự như (22.24), có thể viết các công thức xác định ứng suất pháp tại boong trên của vỏ tàu, là boong liên kết với thượng tầng:

$$\sigma_{1v} = \frac{E_2}{E} \frac{M + eQ}{I} e_2 + \frac{Q}{F_2} - \frac{E_2 \tau'}{\lambda_2}. \quad (22.25)$$

Còn ứng suất trên boong thượng tầng:

$$\sigma_{1bt} = \frac{E_1}{E} \frac{M + eQ}{I} e_3 + \frac{Q}{F_1} - \frac{E_1 \tau'}{\lambda_1}. \quad (22.26)$$

Chú ý là ứng suất pháp tại boong thượng tầng, tại các tiết diện hai đầu mút thượng tầng, cũng không bằng 0, lý do cũng tương tự như trường hợp moment uốn  $M_t$ .

Nếu bỏ qua ứng suất pháp trên thành thượng tầng và coi nó chỉ làm việc cắt, boong thượng tầng sẽ chỉ chịu tác dụng của lực  $Q$ , và công thức (22.26) được thay bởi:

$$\sigma_{1bt} = - \frac{Q}{F_1}$$

Trong trường hợp uốn thuần túy, để ý đến công thức  $Q = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \tau(x) dx$  và tính  $\tau(x)$  dựa



Trên quan hệ (22.20) khi  $q = 0$ , ta có:

$$\sigma_{bt} = \frac{M_0 e}{I_2 + e^2 F} \frac{F}{F_1} \left( 1 - \frac{ch \alpha x}{ch \frac{\alpha l}{2}} \right). \quad (22.27)$$

Khi thiết lập biểu thức (22.27) ta đã lấy  $I_1 = 0$ , và nhận  $E_2 = E$ . Đại lượng  $F$  xác định theo (22.10).

Nếu coi như không có biến dạng trượt trên thành thượng tầng, khi đó, trên cơ sở công thức (22.27) ta có công thức xác định ứng suất pháp trên boong thượng tầng:

$$\sigma_{bt}^* = \frac{M_0 e}{I_2 + e^2 F} \frac{F}{F_1},$$

Tương ứng với việc sử dụng giả thuyết tiết diện phẳng trên toàn bộ chiều cao thanh ghép, nói một cách khác, thượng tầng tham gia hoàn toàn vào uốn chung thân tàu.

$$\text{Ví thế cho nên, tỉ số } \varphi = \frac{\sigma_{bt}}{\sigma_{bt}^*} = 1 - \frac{ch \alpha x}{ch \frac{\alpha l}{2}} \quad (22.28)$$

Cho phép ta đánh giá mức độ tham gia vào uốn chung thân tàu của thượng tầng.

Cần chú ý đến một điều là các kết quả ta thu nhận được trên đây về sự uốn đồng thời của thân tàu với thượng tầng đơn là đã không tính đến ảnh hưởng của lực cắt (do tải trọng ngang tác dụng lên vỏ tàu và lên thượng tầng gây ra). Ảnh hưởng của nhân tố này tăng nhanh khi tiến gần đến các đầu mút thượng tầng.

Trong trường hợp cần thiết, việc tính đến ảnh hưởng của lực cắt có thể tiến hành nhờ các quan hệ trong mục &21 trên đây.

## 2. Tính lều đơn, tựa trên không quá 2 vách ngang.

Ta hiểu lều đơn, cũng tương tự như trường hợp thượng tầng, là lều chỉ có một tầng.

Chiều rộng của lều nhỏ hơn chiều rộng tàu, và vì thế mạn lều và mạn tàu không trong cùng một mặt phẳng. Điều này có thể cho phép suy ra rằng mối nối giữa lều và vỏ tàu làm việc chủ yếu nhờ ứng suất tiếp  $\tau(x)$ , phân bố lực tập trung tại các cơ cấu ngang của lều, tại chỗ thành lều gặp vách ngang của vỏ tàu.

Vỏ tàu cùng với lều (cũng như trong trường hợp thượng tầng) có thể coi như một thanh ghép từ 2 thanh thành phần, đó là vỏ tàu và lều. Mối nối giữa các thanh này, cả liên kết trượt lẫn mối nối ngang, là đàn hồi, tức, có độ cứng hữu hạn.

Vì độ cứng mối nối là hữu hạn nên việc tính toán uốn chung vỏ tàu và lều trở nên phức tạp (so với trường hợp thượng tầng), vì khi đó, phải sử dụng lý thuyết tổng quát uốn thanh ghép, mà ta đã trình bày trong &21.

Quan hệ vi phân cơ bản cho bài toán uốn chung vỏ tàu và lều sẽ là:

$$\left. \begin{aligned} E_1 I_1 w_1^{IV} &= q_1(x) + k_1(w_2 - w_1) + e_1 \tau'; \\ E_2 I_2 w_2^{IV} &= q_2(x) + k_1(w_1 - w_2) + e_2 \tau', \end{aligned} \right\} \quad (22.29)$$

$$\tau'' - \frac{\lambda}{EF} \tau = \lambda (e_1 w_1''' + e_2 w_2'''). \quad (22.30)$$

Trong trường hợp tổng quát, phương trình (22.29) và (22.30) là khá rắc rối. Đối với lều ngắn, tựa trên không quá 2 vách ngang, hệ phương trình trên đây có thể đơn giản hoá. Khi đó, có thể bỏ qua ảnh hưởng của nền đàn hồi, tức số hạng  $k_1(w_1 - w_2)$ . Để cho đơn giản, ta giả thiết thêm rằng, tất cả tải trọng ngoài đều tác dụng vào vỏ tàu ( $q_1 = 0$ ;  $q_2 = q(x)$ ). Với các giả thiết như trên, phương trình (22.29) có thể viết lại dưới dạng sau:

$$E_1 I_1 w_1^{IV} = \tau' e_1 \quad (22.31)$$

$$E_2 I_2 w_2^{IV} = q(x) + \tau' e_2 \quad (22.32)$$

Tích phân các phương trình này, ta thu được:

$$E_1 I_1 w_1''' = \tau e_1; \quad (22.33)$$

$$E_1 I_1 w_1'' = Q e_1; \quad (22.34)$$

$$E_2 I_2 w_2''' = N + \tau e_2 \quad (22.35)$$

$$E_2 I_2 w_2'' = M + Q e_2, \quad (22.36)$$

Trong đó,  $M(x)$ ,  $N(x)$  – các moment uốn và lực cắt trong uốn chung thân tàu, tại tiết diện  $x$ .

Các hằng số tích phân trong (22.33) và (22.34) đã được lấy bằng 0, vì tại các đầu mút của lều,  $Q = 0$ ;  $E_1 I_1 w_1''' = 0$ ;  $E_1 I_1 w_1'' = 0$ .

Chú ý rằng trong trường hợp khảo sát, không thể dùng điều kiện bổ sung về sự bằng nhau giữa chuyển vị của vỏ tàu và của lều.

Sử dụng (22.33) và (22.35) có thể biến đổi (22.30) về dạng:

$$\tau'' - \alpha^2 \tau = \frac{N e_2}{E_2 I_2} \lambda \quad (22.37)$$

Trong đó,

$$\alpha^2 = \left( \frac{1}{EF} + \frac{e_2^2}{E_2 I_2} + \frac{e_1^2}{E_1 I_1} \right) \quad (22.38)$$

Lấy đạo hàm (22.37), ta được:

$$\tau''' - \alpha^2 \tau' = \lambda \frac{e_3}{E_2 I_2} q. \quad (22.39)$$

Tích phân tổng quát của phương trình (22.39) đối với hàm  $\tau'$  được viết dưới dạng:

$$\tau'(x) = A \cosh \alpha x + B \sinh \alpha x - \frac{\lambda e_2}{\alpha^2 E_2 I_2} q. \quad (22.40)$$

Các hằng số tích phân  $A$  và  $B$  có thể xác định được nhờ sử dụng các điều kiện biên (21.12). Điều kiện biên nói trên, trong trường hợp khảo sát, có dạng sau:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Tại } x = -\frac{l}{2} \\ \text{Tại } x = +\frac{l}{2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{\tau'}{\lambda} = \frac{M_1 e_2}{E_2 I_2}; \\ \frac{\tau'}{\lambda} = \frac{M_2 e_2}{E_2 I_2}, \end{array} \quad (22.41)$$

Trong đó,  $M_1$  và  $M_2$  là các moment uốn chung vỏ tàu, tác động lên các tiết diện mút phải và mút trái của lều.

Tích phân tổng quát của (22.40) và các điều kiện biên (22.41) giống hệt như các biểu thức (22.12) và (22.14). Vì thế, bỏ qua các dẫn dắt trung gian, ta có thể viết ngay công thức cuối cùng đối với  $\tau(x)$ , tương tự như (22.19):

$$\tau(x) = \frac{\lambda e_2}{E_2 I_2 \alpha} \left[ \frac{M_1 + M_2}{2} \frac{\text{sh} \alpha x}{\text{ch} \frac{\alpha l}{2}} + \frac{M_2 - M_1}{2} \left( \frac{\text{ch} \alpha x}{\text{sh} \frac{\alpha l}{2}} - \frac{2}{\alpha l} \right) + \frac{1}{\alpha} \int_{-\frac{l}{2}}^x q(x) \left( \frac{\text{ch} \alpha x}{\text{ch} \frac{\alpha l}{2}} - 1 \right) dx - \frac{1}{\alpha l} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \int_{-\frac{l}{2}}^x q(x) \left( \frac{\text{ch} \alpha x}{\text{ch} \frac{\alpha l}{2}} - 1 \right) dx^2 \right] \quad (22.42)$$

Nếu giả thiết rằng, moment uốn vỏ tàu tại tiết diện mút trái và tiết diện mút phải lều là  $M_1 = M_2 = M^0$ , còn cường độ tải trọng ngang là  $q(x) = q = \text{const}$ , công thức (22.42) có thể viết dưới dạng sau:

$$\tau(x) = \frac{\lambda e_2}{E_2 I_2 \alpha} \left[ \left( M^0 + \frac{q}{\alpha^2} \right) \frac{\text{sh} \alpha x}{\text{ch} \frac{\alpha l}{2}} - \frac{qx}{\alpha} \right]. \quad (22.43)$$

Tích phân tiếp tục biểu thức cuối cùng này, ta được :

$$Q(x) = -C \left[ \left( M^0 + \frac{q}{\alpha^2} \right) \left( 1 - \frac{\text{ch} \alpha x}{\text{ch} \frac{\alpha l}{2}} \right) - \frac{ql^2}{8} \left( 1 - \frac{4x^2}{l^2} \right) \right], \quad (22.44)$$

Trong đó:

$$C = \frac{e_2}{E_2 I_2 \left( \frac{1}{E_1 F_1} + \frac{1}{E_2 F_2} \right) + e^2 \frac{E_2 I_2}{E_1 F_1} + e^2}. \quad (22.45)$$

Giá trị âm của  $Q$  tương ứng với trạng thái kéo, vì với moment uốn dương,  $M^0$ , gây kéo boong trên của vỏ tàu, và khi đó, lều cũng sẽ bị kéo ở phía dưới và chịu biến dạng uốn, ngược với chiều biến dạng uốn của vỏ tàu, khiến cho boong của lều ở trạng thái nén.

Moment uốn tác dụng trên lều và trên vỏ tàu, tương ứng với các công thức (22.34) và (22.36), được biểu thị bằng các công thức, sau:

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= E_1 I_1 w''_1 = Qe_1; \\ M_2 &= E_2 I_2 w''_2 = M + Qe_2. \end{aligned} \right\} \quad (22.46)$$

Ứng suất trên boong trên của vỏ tàu, dưới lều, được xác định, tương tự như công thức (22.25), theo công thức sau:

$$\sigma_{lv} = \frac{M + Qe_2}{I_2} e_2 + \frac{Q}{F_2} - \frac{E_2 \tau'}{\lambda_2}. \quad (22.47)$$

Ứng suất trên thành lều, tại vị trí giáp với boong lều, sẽ là

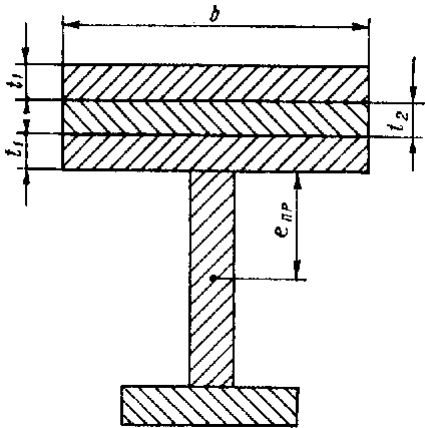
$$\sigma_{bl} = -\frac{Qe_1^2}{I_1} - \frac{Q}{F_1} + \frac{E_1 \tau'}{\lambda_1}. \quad (22.48)$$

Việc tính toán lều dài, tựa trên nhiều hơn 2 vách ngang, ta không khảo sát ở đây, vì tính chất phức tạp của vấn đề, hơn nữa lại là vấn đề chưa được nghiên cứu đầy đủ. Ngoài ra, với các lều nhẹ, người ta có xu hướng loại trừ sự tham gia của nó vào uốn chung, vì trong trường hợp ngược lại, ứng suất trên boong lều thường rất lớn.

### &23. UỐN DẦM BA LỚP

Trong kỹ thuật đóng tàu ngày càng sử dụng nhiều kết cấu tấm, vỏ nhiều lớp. Thể loại tấm, vỏ này có nhiều ưu điểm. Trong số đó, kết cấu tấm ba lớp là thường được dùng hơn cả.

Ta hãy khảo sát sự làm việc của dầm với dải liên kết 3 lớp (H4.7), gồm hai lớp ngoài chịu lực và một lớp đệm giữa. Phần dầm chính, liên kết với dải 3 lớp, gọi tắt là *thân chính (thân)*.



H4.6

Ta đưa vào các ký hiệu sau:

$t_1$  – chiều dày các lớp chịu lực (của kết dải 3 lớp);

$t_2$  – chiều dày lớp đệm giữa;

$b$  – chiều rộng dải liên kết 3 lớp;

$f_{th}$  – diện tích tiết diện ngang thân, không kể dải 3 lớp;

$i_{th}$  – moment quán tính bản thân tiết diện ngang, không kể dải 3 lớp;

$h$  – chiều cao tiết diện;

$e_{th}$  – khoảng cách từ trọng tâm tiết diện thân chính đến dải 3 lớp;

$E_{3l}$  – module đàn hồi dọc của vật liệu dải 3 lớp;

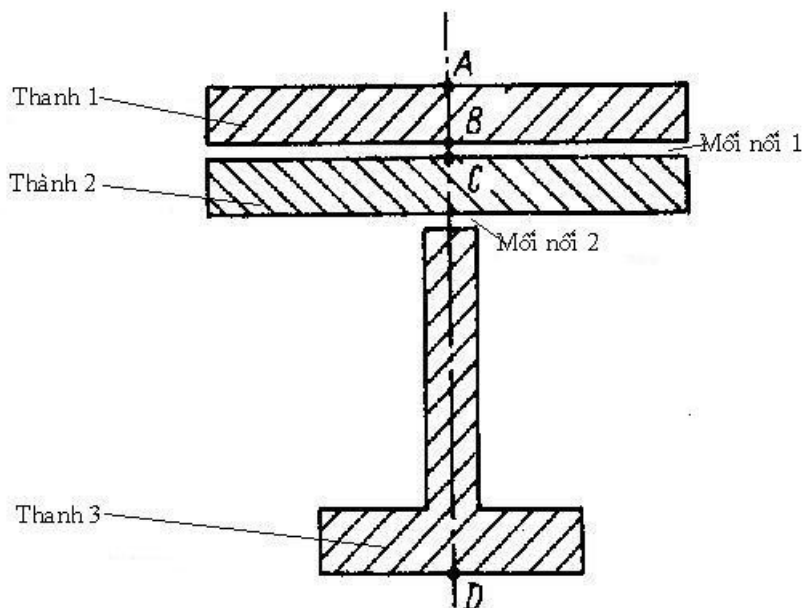
$G_{th}$  – mô đun trượt lớp đệm;

$E_{th}$  – mô đun đàn hồi dọc của vật liệu tiết diện.

Trong phần tiếp theo, để cho tiện, chúng ta coi lớp đệm giữa như là một mối nối, với độ cứng trượt hữu hạn và độ cứng ngang vô cùng lớn. Từ định nghĩa độ cứng mối nối làm việc theo trượt, ta có công thức

$$\lambda = \frac{Gb}{t_2} \quad (23.1)$$

Việc thay lớp đệm bằng liên kết có độ cứng trượt hữu hạn cho phép đưa bài toán khảo sát (H4.6) về việc nghiên cứu thanh ghép bao gồm ba thanh thành phần, (H4.7), đó là: thân chính, dải chịu lực trên và dải chịu lực dưới.



(H4.7)

Mối nối 1 giữa các lớp chịu lực của dải 3 lớp (H4.7) có độ cứng trượt hữu hạn và độ cứng ngang vô cùng lớn, còn mối nối 2 giữa thân chính và lớp chịu lực dưới có độ cứng trượt và độ cứng ngang vô cùng lớn.

Vì độ cứng ngang của các mối nối đều vô cùng lớn nên độ võng của các thanh thành phần đều bằng nhau (bỏ qua biến dạng trượt của bản thân các thanh).

Ta có thể viết phương trình vi phân uốn dầm, tương ứng với phương trình (21.4), cho thanh ghép từ 3 thanh:

$$\left. \begin{aligned} E_{3l} i_{3l} w^{IV} &= q_1(x) + r_1(x) + \frac{t_1}{2} \tau_1'; \\ E_{3l} i_{3l} w^{IV} &= q_2(x) + r_2(x) - r_1(x) + \frac{t_1}{2} (\tau_1' + \tau_2'); \\ E_{th} i_{th} w^{IV} &= q_3(x) - r_2(x) + e_{th} \tau_2'. \end{aligned} \right\} \quad (23.2)$$

Tiếp đến, thiết lập các phương trình vi phân xác định xác định  $\tau_1$  và  $\tau_2$ , theo (21.9):

$$\left. \begin{aligned} \tau_1'' - \frac{2\lambda_1}{E_{3l} b t_1} \tau_1 + \frac{\lambda_1}{E_{3l} b t_1} \tau_2 &= \lambda_1 t_1 w'''; \\ - \left( \frac{1}{E_{3l} b t_1} + \frac{1}{E_{th} f_{th}} \right) \tau_2 + \frac{1}{E_{3l} b t_1} \tau_1 &= \left( e_{th} + \frac{t_1}{2} \right) w'''. \end{aligned} \right\} \quad (23.3)$$

Ta biến đổi các phương trình (23.2) và (23.3). Cộng tương ứng các số hạng của hệ (23.2), ta được:

$$(E_{th} i_{th} + 2E_{3l} i_{3l}) w^{IV}(x) = q(x) + t_1 \tau_1' + \left( \frac{t_1}{2} + e_{th} \right) \tau_2', \quad (23.4)$$

Trong đó:

$$q(x) = q_1(x) + q_2(x) + q_3(x).$$

Trong (23.4), đại lượng  $\tau_2'(x)$  có thể khử bỏ, nếu như sử dụng phương trình thứ 2 trong hệ (23.3), sau khi đạo hàm phương trình này theo x. Kết quả có thể biến đổi (23.4) về dạng sau:

$$(E_{3l}i_{3l} + Ei)w^{IV}(x) = q(x) + \left(e^* + \frac{t_1}{2}\right)\tau_1' \quad (23.5)$$

Trong đó, đã sử dụng các ký hiệu sau đây:

$$Ei = E_{3l}i_{3l} + E_{th}i_{th} + \left(e_{th} + \frac{t_1}{2}\right)^2 \frac{E_{3l}i_{3l} \cdot E_{th}i_{th}}{E_{3l}bt_1 + E_{th}f_{th}}; \quad (23.6)$$

$$e^* = \frac{t_1}{2} + \frac{\frac{t_1}{2} + e_{th}}{1 + \frac{E_{3l}bt_1}{E_{th}f_{th}}}. \quad (23.7)$$

Nếu khử bỏ  $\tau_2$  trong phương trình đầu của (23.3), nhờ phương trình thứ 2 của hệ này, rồi đạo hàm kết quả theo x, khử bỏ tiếp đại lượng  $w^{IV}$ , ta thu được phương trình sau đây xác định  $\tau_1'$

$$\tau_1''' - \lambda \left( \frac{e_2}{EI} + \frac{1}{EF} \right) \tau_1' = \lambda \frac{e}{EI} q, \quad (23.8)$$

trong đó

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{EF} &= \frac{1}{E_{3l}bt_1} \left( 2 - \frac{1}{1 + \frac{E_{3l}bt_1}{E_{th}f_{th}}} \right); \\ e &= e^* + \frac{t_1}{2} \end{aligned} \right\} \quad (23.9)$$

Như vậy là việc khử  $\tau_2'(x)$  cho phép đưa việc giải bài toán về việc giải đồng thời hệ hai phương trình vi phân sau:

$$EIw^{IV}(x) = q(x) + e\tau_1'; \quad (23.10)$$

$$\tau_1''' - \alpha^2 \tau_1' = \lambda \frac{e}{EI} q, \quad (23.11)$$

trong đó

$$\alpha^2 = \lambda \left( \frac{e^2}{EI} + \frac{1}{EF} \right)$$

Tập hợp các phương trình vi phân (23.10) và (23.11) mô tả uốn thanh ghép, mà hai trong số các thanh thành phần liên kết với nhau bằng mối nối có độ cứng ngang vô cùng lớn và độ cứng trượt có hệ số cứng  $\lambda$  hữu hạn, xác định theo công thức (23.1).

Như đã nêu ra trên đây, bài toán uốn thanh ghép từ 2 thanh với liên kết trượt đàn hồi có liên quan đến việc tính uốn thân tàu thủy, với thượng tầng đơn. Vận dụng các công thức đã có trên đây, không mấy khó khăn, có thể lập được công thức xác định ứng suất trên các lớp chịu lực và trên thân chính, trong bài toán đang xét.

Ta hạn chế trong việc xem xét uốn thanh tựa tự do với dải kèm có kết cấu 3 lớp, chịu tải trọng ngang rải đều  $q$ . Ứng suất tại các điểm A,B,C,D trên tiết diện ngang (H4.7)

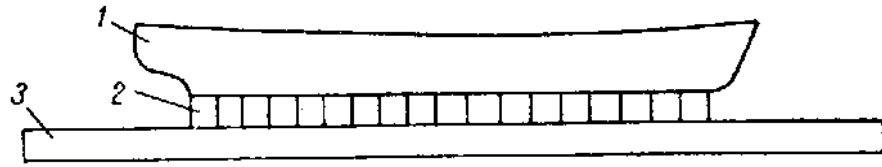
$$\left. \begin{aligned} \sigma_A &= \frac{E_{3l}}{E} \frac{M + Qe}{I} \frac{t_1}{2} - \frac{Q}{bt_1}; \\ \sigma_B &= - \frac{E_{3l}}{E} \frac{M + Qe}{I} \frac{t_1}{2} - \frac{Q}{bt_1}; \\ \sigma_C &= \frac{E_{3l}}{E} \frac{M + Qe}{I} e^* + \frac{Q}{bt_1 + \frac{E_{th}}{E_{3l}} f_{th}}; \\ \sigma_D &= - \frac{E_{th}}{E} \frac{M + Qe}{I} (h + t_1 - e^*) + \frac{Q}{f_{th} + \frac{E_{3l}}{E_{th}} bt_1}, \end{aligned} \right\} \quad (23.12)$$

## **&24. UỐN CHUNG TÀU VÀ Ụ NỔI.**



Tàu trên ụ nổi là bài toán được quan tâm, không chỉ về mặt sức bền thân tàu, mà cả về sức bền ụ nổi, không phải chỉ là vấn đề sức bền chung mà còn cả về sức bền cục bộ. Bài toán then chốt phải giải quyết ở đây là việc xác định phản lực đế kê.

Sơ đồ đặt tàu trên ụ nổi cho ở hình vẽ H4.8



H4.8

Ta giả thiết là đáy ụ nổi kết cấu theo hệ thống ngang (điều này luôn xảy ra trong thực tế), và không tính đến ảnh hưởng của độ võng đến sự thay đổi lực nổi tác dụng lên ụ. Việc cân bằng ụ được tiến hành theo các phương pháp của tĩnh học tàu thủy, ta không đề cập đến ở đây.

Trước hết là một số ký hiệu sử dụng trong phần trình bày dưới đây:

- $I_1$  - momen quán tính tiết diện ngang vỏ tàu;
- $I_2$  - momen quán tính tiết diện ngang ụ nổi;
- $w_1$  - độ võng vỏ tàu;
- $w_2$  - độ võng ụ nổi;
- $f$  - độ võng của dàn ụ nổi dưới đế kê, so với thành ụ;
- $\Delta$  - khe hở giữa vỏ tàu và đế kê;
- $q_1$  - tải trọng rải trên vỏ tàu;
- $q_2$  - hiệu số giữa trọng lượng bản thân và lực nổi tác dụng lên ụ nổi;
- $r$  - cường độ phản lực đế kê;
- $k_1$  - độ cứng đế kê;
- $k_2$  - độ cứng dàn đáy tàu;
- $k_3$  - độ cứng dàn ngang ụ nổi

Độ võng coi là dương khi chuyển vị hướng xuống dưới. Chuyển vị  $w_1 - w_2$  của vỏ tàu đối với thành tháp ụ nổi được xác định như tổng của độ võng cục bộ dàn đáy tàu  $r/k_2$ , độ nén của đế kê  $r/k_1$ , độ võng của dàn đáy ụ nổi đối với thành tháp  $f$  và khe hở ban đầu  $\Delta$ , tức

$$w_1 - w_2 = r \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right) + f + \Delta,$$

từ đó

$$r = k(w_1 - w_2 - f - \Delta), \quad (24.1)$$

trong đó

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3}. \quad (24.2)$$

Phản lực đế kê là dương nếu như nó đỡ tàu, và như vậy, phương trình vi phân uốn tàu và ụ nổi có thể viết dưới dạng:

$$\left. \begin{aligned} (E_1 I_1 w_1'')'' &= q_1 - r; \\ (E_2 I_2 w_2'')'' &= q_2 + r, \end{aligned} \right\} \quad (24.3)$$

hay, với sự chú ý đến (24.1), có thể viết lại

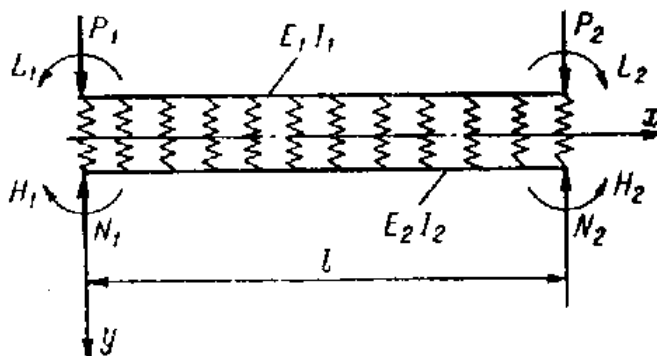
$$\left. \begin{aligned} (E_1 I_1 w_1'')'' &= q_1^* - k(w_1 - w_2); \\ (E_2 I_2 w_2'')'' &= q_2^* + k(w_1 - w_2), \end{aligned} \right\} \quad (24.4)$$

trong đó

$$\begin{aligned} q_1^* &= q_1 - k(f + \Delta); \\ q_2^* &= q_2 + k(f + \Delta). \end{aligned}$$

Hệ phương trình (24.4) mô tả uốn của thanh tạo nên từ 2 thanh thay đổi tiết diện ngang, liên kết với nhau bằng mối nối ngang đàn hồi với độ cứng  $k$ .

Các điều kiện biên cho thanh ghép tàu – ụ nổi được viết tương ứng với minh hoạ trên hình H4.9



H4.9

$$\begin{aligned} \text{tại } x = 0 \quad E_1 I_1 w_1'' &= L_1; \quad (E_1 I_1 w_1'')' = P_1; & \text{tại } x = l \quad (E_1 I_1 w_1'') &= L_2; \quad (E_1 I_1 w_1'')' = -P_2 \\ E_2 I_2 w_2'' &= -H_1; \quad (E_2 I_2 w_2'')' = -N_1; & E_2 I_2 w_2'' &= -H_2; \quad (E_2 I_2 w_2'')' = N_2, \end{aligned} \quad (24.5)$$

$P_1$  và  $P_2$  - trọng lượng các phần treo của vỏ tàu khi kê trên ụ;  
 $L_1$  và  $L_2$  - momen của các trọng lượng treo đối với hai đầu mút đế kê;  
 Trong đó  $N_1$  và  $N_2$  - hiệu số giữa lực nổi và trọng lượng phần ụ nổi ngoài dây đế kê;  
 $H_1$  và  $H_2$  - momen của các lực  $N_1$  và  $N_2$  đối với các đầu mút dây đế kê.

Việc tích phân hệ phương trình vi phân (24.4) với các điều kiện biên (24.5) có thể thực hiện được, chẳng hạn, bằng phương pháp tham số đầu, quen thuộc từ trong môn học sức bền vật liệu. Khi đó, toàn bộ khoảng biến thiên của  $x$  được chia ra thành  $n$  đoạn bằng nhau, với chiều dài  $\Delta = l/n$ .

Trong mỗi đoạn nói trên, hệ phương trình (24.4) có thể viết dưới dạng

$$\left. \begin{aligned} E_1 I_{1i} w_1^{IV}(x) &= p_{1i}; \\ E_2 I_{2i} w_2^{IV}(x) &= p_{2i} \end{aligned} \right\} \quad (24.6)$$

trong đó

$$\left. \begin{aligned} p_{1i} &= q_1^*(x_i) - k[w_1(x_i) - w_2(x_i)]; \\ p_{2i} &= q_2^*(x_i) + k[w_1(x_i) - w_2(x_i)]; \\ I_{1i} &= I_1(x_i), \quad I_{2i} = I_2(x_i). \end{aligned} \right\} \quad (24.7)$$

Sử dụng tiếp tục các quan hệ của phương pháp tham số đầu, cho phép ta xác định các yếu tố uốn của toàn bộ  $n+1$  tiết diện, nếu như biết trước tất cả các yếu tố uốn này (4 yếu tố) tại một tiết diện nào đó.

CHƯƠNG V

CÁC ĐỊNH LÝ VÀ PHƯƠNG PHÁP TỔNG QUÁT CỦA  
CƠ KẾT CẤU TÀU THỦY

**&25. LỰC SUY RỘNG VÀ CHUYỂN VỊ SUY RỘNG. ĐỊNH LÝ LAGRANGE.**

Để giải các bài toán của cơ học kết cấu tàu thủy, điều kiện cân bằng luôn được sử dụng. Phương trình vi phân uốn thanh được lập trên cơ sở sử dụng phương trình cân bằng của phân tố thanh. Trong tính toán khung phức tạp, với nút động, sử dụng phương trình cân bằng nút. Phương trình bổ sung, cũng của khung với nút động, lập được trên cơ sở của nguyên lý di chuyển khả dĩ.

Khi tính toán hệ siêu tĩnh, cần lập các phương trình bổ sung xác định các ẩn số thừa, vì khi đó, chỉ dùng các phương trình cân bằng tĩnh học thông thường là không đủ. Trong trường hợp này, đã ta sử dụng phương trình cân bằng các nút, sau khi biểu diễn các góc xoay theo các moment đầu thanh.

**1. Các khái niệm chuyển vị suy rộng và lực suy rộng.**

Để có các phương pháp tổng quát hơn cho việc lập các phương trình cân bằng cũng như các phương trình bổ sung, ta đưa vào các khái niệm “*chuyển vị suy rộng*”, và “*lực suy rộng*” (Chúng còn có thể được gọi là “*chuyển vị tổng quát*” và “*lực tổng quát*”). Thực ra, các khái niệm này đã được đưa ra từ giáo trình *cơ học lý thuyết*.

Ta gọi tập hợp các chuyển vị (toạ độ), mà nhờ đó, có thể xác định hoàn toàn vị trí tất cả các chất điểm của vật thể đàn hồi hoặc của hệ đàn hồi khảo sát, là các “*chuyển vị suy rộng*” của hệ. Ta phải chọn các chuyển vị suy rộng sao cho chúng độc lập nhau và khi thay đổi các chuyển vị này theo bất kỳ một cách nào đó cũng không phá vỡ các liên kết đặt vào cơ hệ.

Đối với hệ holonom<sup>1</sup>, số lớn nhất các chuyển vị suy rộng, độc lập nhau, chính bằng *số bậc tự do* của hệ. Chẳng hạn như, đối với vật cứng tuyệt đối, quay quanh một trục cố định, có thể chọn góc quay làm chuyển vị suy rộng; Với vật thể quay quanh một điểm cố định, các chuyển vị suy rộng có thể là 3 góc Euler.

Số bậc tự do của vật thể đàn hồi là vô cùng lớn. Chẳng hạn, với dầm chiều dài  $l$  tựa tự do tại hai đầu mút, có thể biểu diễn đường đàn hồi dầm dưới dạng

$$w(x) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad (25.1)$$

trong đó, các hệ số  $q_k$  có thể coi là các toạ độ suy rộng của hệ. Khi các hệ số  $q_k$  trong biểu thức (25.1) thay đổi một lượng  $\delta q_k$  bất kỳ, các liên kết đặt vào hệ vẫn không bị phá vỡ, vì

---

<sup>1</sup> Cơ hệ là *holonom* khi phương trình (mô tả) liên kết của nó không phụ thuộc vào tốc độ suy rộng, còn nếu trong các phương trình đó không xuất hiện đại lượng thời gian, hệ được gọi là *dừng*. Trong bài toán tĩnh học, hệ là holonom và dừng.

bản thân các hàm số cơ sở  $\sin \frac{k\pi x}{l}$  thoả mãn các điều kiện động học áp đặt tại hai đầu mút của dầm, và theo đó, độ võng tại các đầu mút này luôn bằng 0.

Về sau, toán tử  $\delta$  đặt trước một đại lượng nào đó sẽ chỉ một sự biến đổi vô cùng nhỏ đại lượng này, và được gọi là biến phân của đại lượng nói trên.

Có nhiều cách khác nhau để chọn hệ các tọa độ suy rộng đối với một cơ hệ.

Các lực suy rộng  $Q_k$  không thể chọn tùy ý mà phụ thuộc (tương ứng với) các chuyển vị suy rộng  $q_k$ .

Theo định nghĩa, lực suy rộng là *hệ số* bên cạnh các biến phân của chuyển vị suy rộng trong biểu thức tổng quát, tính công của tất cả các lực ngoài tác dụng lên hệ, trên di chuyển vô cùng bé bất kỳ

$$\delta R_k = Q_k \delta q_k. \quad (25.2)$$

Thí dụ như với vật quay quanh trục cố định, nếu chọn góc quay làm chuyển vị suy rộng, lực suy rộng chính là tổng moment tất cả các lực ngoài tác dụng lên vật, lấy đối với trục nói trên, còn trong trường hợp chuyển động tịnh tiến, các lực này chính là hình chiếu tất cả các lực tác dụng lên hệ, lên các phương của chuyển vị.

Nếu trên dầm tựa tự do, tác dụng một lực rải đều, với cường độ  $p$ , tại điểm  $x = a$ , tác dụng một lực tập trung  $P$ , còn tại  $x = b$ , đặt một moment tập trung  $M$ , tác dụng theo chiều kim đồng hồ, thì lực suy rộng sẽ được xác định như sau:

Cho một chuyển vị suy rộng,  $q_k$  một biến lượng  $\delta q_k$ , và tìm biến lượng đường đàn hồi dựa trên (25.1)

$$\delta w = \delta q_k \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

Trên chuyển vị này của dầm, các tải trọng tác dụng trên đây thực hiện công như sau

$$\delta R_k = \left( \int_0^l p \sin \frac{k\pi x}{l} dx + P \sin \frac{k\pi a}{l} + M \frac{k\pi}{l} \cos \frac{k\pi b}{l} \right) \delta q_k.$$

Hệ số bên cạnh  $\delta q_k$  chính là lực suy rộng  $Q_k$ . Lực suy rộng là dương nếu như công thức hiện là dương.

## **2. Định lý Lagrange.**

Đối với vật thể đàn hồi, nguyên lý di chuyển khả dĩ có thể được phát biểu như sau: *với mọi di chuyển khả dĩ của vật thể đàn hồi hoặc hệ đàn hồi ra khỏi vị trí cân bằng, tổng công của tất cả các ngoại lực và các nội lực bằng 0.*

Nguyên lý di chuyển khả dĩ, về giải tích, có thể biểu diễn dưới dạng:

$$\sum_{k=1}^n Q_k \delta q_k - \delta V = 0. \quad (25.3)$$

trong đó,  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  – các lực suy rộng;

$\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n$  – các biến phân của chuyển vị suy rộng;

$-\delta V$  – tổng công các nội lực đàn hồi.

Hàm  $\delta V$  gọi là biến phân của thế năng biến dạng và, như thể hiện trên công thức (25.3), bằng biến phân của công tất cả các ngoại lực. Ta sẽ giả thiết rằng, thế năng biến dạng chỉ phụ thuộc vào giá trị các chuyển vị suy rộng, mà không phụ thuộc gì vào cách thức thực hiện các chuyển vị này.

Điều này luôn xảy ra đối với vật thể đàn hồi lý tưởng, là vật thể mà, khi trút bỏ tải trọng tác dụng, nó quay về trạng thái không biến dạng ban đầu, đồng thời với việc hoàn trả toàn bộ công tiêu tốn cho quá trình biến dạng (lưu ý rằng, tại trạng thái không biến dạng, thế năng biến dạng bằng 0).

Trong trường hợp của vật thể đàn hồi lý tưởng,

$$\delta V = \sum_{k=1}^n \frac{\partial V}{\partial q_k} \delta q_k,$$

nên sau khi thay vào phương trình (25.3), và so sánh các hệ số có  $\delta q_k$  như nhau của các chuyển vị suy rộng, ta thu được biểu thức của định lý Lagrange

$$\frac{\partial V}{\partial q_k} = Q_k. \quad (25.4)$$

Định lý Lagrange được phát biểu như sau: *Tại trạng thái cân bằng, đạo hàm của thế năng biến dạng theo các tọa độ suy rộng, bằng các lực suy rộng tương ứng.*

Cần nhấn mạnh rằng, khi thiết lập định lý Lagrange, ta không sử dụng bất kỳ giả thiết nào ngoài giả thiết về tính chất đàn hồi lý tưởng của vật thể.

Nếu ngoại lực là có thế, có thể viết

$$Q_k = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_k} \quad (25.5)$$

còn phương trình (25.4) có thể viết dưới dạng

$$\frac{\partial \Xi}{\partial q_k} = 0, \quad (25.6)$$

$$\text{trong đó,} \quad \Xi = V + \Pi \quad (25.7)$$

là năng lượng toàn phần của hệ.

Thường người ta thay hàm thế năng ngoại lực bằng hàm lực ngoài:  $U = -\Pi$ . Khi đó, năng lượng toàn phần của hệ sẽ bằng

$$\mathfrak{J} = V - U \quad (25.8)$$

Nếu ta chọn được các chuyển vị suy rộng, có thể tính được các lực suy rộng theo công thức Lagrange (25.4) và nhờ các công thức, được nêu ra trong phần tiếp theo sau đây, có thể tính được thế năng biến dạng đàn hồi, tương ứng với các chuyển vị suy rộng đã chọn.

## **&26. HỆ BIẾN DẠNG TUYẾN TÍNH. ĐỊNH LÝ CLAPEYRON. CÁC BIỂU THỨC THẾ NĂNG.**

Hệ được gọi là *biến dạng đàn hồi tuyến tính* nếu như giữa lực suy rộng và chuyển vị suy rộng tồn tại quan hệ tuyến tính:

$$Q_k = \beta_{k1}q_1 + \beta_{k2}q_2 + \dots + \beta_{kn}q_n,$$

$$k = 1, 2, \dots, n$$

hay, ở dạng gọn hơn

$$Q_k = \sum_{i=1}^n \beta_{ki}q_i \quad (26.1)$$

trong đó,  $\beta_{ki}$ — hệ số hằng số, còn chuyển vị suy rộng được tính từ vị trí cân bằng.

Cần chú ý rằng, để hệ là biến dạng tuyến tính, việc tuân theo định luật Hooke là điều kiện cần, nhưng chưa đủ. Chẳng hạn, trong biến dạng *uốn dọc-ngang*, dầm không là biến dạng tuyến tính đối với lực dọc.

Sử dụng định lý Lagrange (25.4) và chú ý rằng, đạo hàm bậc 2 của  $V$  không phụ thuộc vào thứ tự thực hiện, ta có

$$\frac{\partial Q_k}{\partial q_i} = \frac{\partial Q_i}{\partial q_k},$$

Sau khi thay đẳng thức này vào (25.1), ta rút ra được *tính chất tương đồng* của các hệ số

$$\beta_{ik} = \beta_{ki} \quad (26.2)$$

Vì hệ số  $\beta_{ki}$  chính là giá trị của lực suy rộng thứ  $k$  khi chuyển vị suy rộng thứ  $i$  bằng đơn vị, còn  $\beta_{ik}$  là giá trị của lực suy rộng thứ  $i$ , khi chuyển vị suy rộng thứ  $k$  bằng đơn vị, nên điều kiện (26.2) đôi khi còn được gọi là *điều kiện lực tương đồng*.

Đối với hệ biến dạng tuyến tính, các đạo hàm (25.4) của thế năng biến dạng theo các chuyển vị suy rộng là hàm *đẳng cấp bậc 1* (25.1) của các tọa độ suy rộng, vì thế cho nên, thế năng biến dạng là hàm đẳng cấp *bậc 2* của các chuyển vị suy rộng.

Trên cơ sở của định lý Euler về các hàm đẳng cấp, có thể viết

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial q_i} q_i = 2V. \quad (26.3)$$

Định lý Lagrange (25.4) khi đó có thể viết dưới dạng

$$\sum_{i=1}^n Q_i q_i = 2V. \quad (26.4)$$

Đây chính là biểu thức của định lý Clapeyron, được phát biểu như sau: *Hai lần thế năng biến dạng của hệ biến dạng tuyến tính bằng tổng tích của lực suy rộng và chuyển vị suy rộng, tương ứng với vị trí cân bằng của hệ.*

Ta sử dụng định lý Clapeyron để xác định thế năng biến dạng trong các trường hợp chịu lực đơn giản.

### **1. Kéo-nén.**

Nếu tách ra từ thanh chịu kéo một phần tử có chiều dài  $ds$  bằng hai mặt cắt, thì lực suy rộng  $T$  tương ứng với chuyển vị suy rộng  $dq = \varepsilon ds$  (với  $\varepsilon$  là độ giãn dài tương đối, xác định theo định luật Hooke,

$$\varepsilon = \frac{T}{EF};$$

$E$  – mô đun đàn hồi pháp tuyến;

$F$  – diện tích tiết diện ngang.

Thế năng biến dạng của phần tử thanh được xác định trên cơ sở của định lý Clapeyron

$$dV = \frac{1}{2} T dq = \frac{1}{2} \frac{T^2}{EF} ds.$$

Thế năng biến dạng của cả thanh sẽ là

$$V = \frac{1}{2} \int_{(s)} \frac{T^2}{EF} ds. \quad (26.5)$$

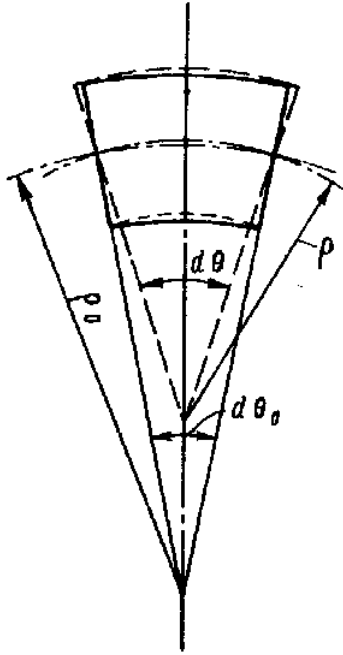
### **2. Uốn thuần túy.**

Nếu tách ra từ thanh chịu uốn thuần túy một phần tử có chiều dài  $ds$  nhờ hai mặt cắt ngang vô cùng gần nhau, thì lực suy rộng  $M$  sẽ tương ứng với chuyển vị suy rộng  $d\varphi$  (góc xoay tương đối giữa hai tiết diện ngang). Theo định lý Clapeyron, thế năng biến dạng của phần tử thanh được tính theo công thức

$$dV = \frac{1}{2} M d\varphi, \quad (26.7)$$

Giả sử  $\rho_0$  – là bán kính cong đường trung hoà ban đầu của thanh, còn  $\rho$  là bán kính cong sau khi biến dạng. Khi đó, như thể hiện trên hình vẽ H5.1,





$$d\varphi = d\theta - d\theta_0,$$

và vì

$$ds = \rho_0 d\theta_0 = \rho d\theta,$$

nên

$$d\varphi = \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} \right) ds \quad (26.8)$$

hay, khi chú ý đến (1.4)

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{M}{EI} \quad (26.9)$$

Sử dụng các công thức (26.7), (26.8) và (26.9) ta tìm được

$$dV = \frac{1}{2} \frac{M^2}{EI} ds.$$

Khi đó, thế năng biến dạng uốn toàn thanh được xác định theo công thức

$$V = \frac{1}{2} \int_{(s)} \frac{M^2}{EI} ds, \quad (26.10)$$

H5.1

trong đó, tích phân được tính trên

toàn bộ chiều dài thanh.

Đối với thanh thẳng,

$$V = \frac{1}{2} \int_{(l)} \frac{M^2}{EI} dx \quad (26.11)$$

còn nếu như sử dụng biểu thức (1.5),

$$V = \frac{1}{2} \int_{(l)} EI w''^2 dx. \quad (26.12)$$

Trường hợp uốn thuần túy thanh lẳng trụ,

$$V = \frac{1}{2} \frac{Mi^2 l}{E}. \quad (26.13)$$

### 3. Trượt thuần túy.

Trong trượt thuần túy, hai tiết diện ngang thanh, cách nhau một đoạn  $ds$ , sẽ có chuyển vị tương đối  $\gamma ds$ , với  $\gamma$  - là góc trượt (H5.2).

Nếu lực cắt  $N$  là lực suy rộng thì chuyển vị  $\gamma ds$  sẽ là chuyển vị suy rộng tương ứng và theo định lý Clapeyron,

$$dV = \frac{1}{2} N \gamma ds.$$

Khi đó, theo định luật Hooke,

$$\gamma = \frac{N}{G\theta}, \quad (26.14),$$

trong đó,

$\theta$  - diện tích tiết diện ngang thanh, và ta có

$$dV = \frac{1}{2} \frac{N^2}{G\theta} ds$$

còn biểu thức thế năng biến dạng trượt có dạng

$$V = \frac{1}{2} \int_{(s)} \frac{N^2}{G\theta} ds. \quad (26.15)$$

Đối với thanh thẳng

$$V = \frac{1}{2} \int_{(l)} \frac{N^2}{G\theta} dx \quad (26.16)$$

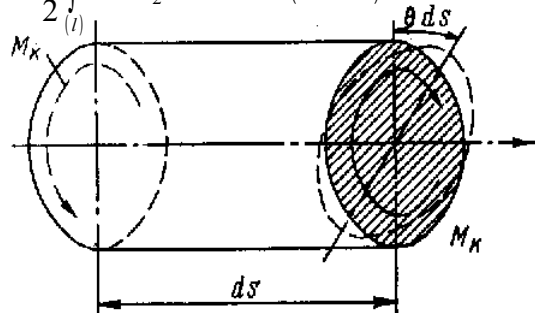
còn nếu như đưa vào độ võng do trượt  $w_2$  thì theo (5.3),

$$N = -G\theta \cdot w_2',$$

nên

$$V = \frac{1}{2} \int_{(l)} G\theta w_2'^2 dx. \quad (26.17)$$

H5.3



### 4 . Xoắn

Giả thiết  
tiết diện ngang

pháp tuyến. Điều này chỉ đúng trong những điều kiện xác định, như đã đề cập đến trong chương xoắn thanh thành mỏng, khi đó, nếu nhận moment xoắn  $M_x$  làm lực suy rộng thì chuyển vị suy

thuần túy.

rằng khi thanh chịu xoắn, trên  
không xuất hiện ứng suất

rộng tương ứng sẽ là góc xoay  $\theta ds$  của một tiết diện so với một tiết diện khác (H5.3), trong đó,  $\theta$  là góc xoay tương đối trên một đơn vị chiều dài.

Theo định lý Clapeyron,

$$dV = \frac{1}{2} M_x \theta ds,$$

Nhưng vì 
$$\theta = \frac{M_x}{C}$$

trong đó,  $C$  là độ cứng xoắn, nên

$$dV = \frac{1}{2} \frac{M_x^2}{C} ds.$$

Thế năng biến dạng xoắn toàn thanh được xác định nhờ biểu thức

$$V = \frac{1}{2} \int_{(s)} \frac{M_x^2}{C} ds. \quad (26.19)$$

đối với thanh thẳng

$$V = \frac{1}{2} \int_{(l)} \frac{M_x^2}{C} dx \quad (26.20)$$

hay, theo (5.18),

$$V = \frac{1}{2} \int_{(l)} C \theta^2 dx. \quad (26.21)$$

### **5. Thế năng biến dạng khi tác dụng đồng thời kéo (nén), uốn, trượt và xoắn.**

Các trường hợp khảo sát trên đây độc lập nhau, theo nghĩa là lực suy rộng trong trạng thái biến dạng này không thực hiện công trên chuyển vị suy rộng ứng với trạng thái biến dạng khác. Vì thế cho nên, theo định lý Clapeyron,

$$dV = \frac{1}{2} \left( \frac{M^2}{EI} + \frac{N^2}{G\theta} + \frac{T^2}{EF} + \frac{M_x^2}{C} \right) ds,$$

và thế năng biến dạng đàn hồi của thanh được xác định theo công thức

$$V = \frac{1}{2} \int_{(s)} \left( \frac{M^2}{EI} + \frac{N^2}{G\theta} + \frac{T^2}{EF} + \frac{M_x^2}{C} \right) ds. \quad (26.22)$$

Cần nhấn mạnh rằng, tất cả các công thức trên đây, trong đó có công thức (26.22) chỉ nghiệm đúng cho hệ biến dạng tuyến tính, tức hệ mà trong đó, quan hệ giữa lực suy rộng và chuyển vị suy rộng là quan hệ tuyến tính với các hệ số hằng số. Ngoài ra, các công thức được

lập với điều kiện độ cong của thanh là bé. Đối với thanh có độ cong lớn, không thể giả thiết rằng sự thay đổi độ cong của thanh không ảnh hưởng đến độ giãn dài của trục trung hoa của nó.

#### **6. Thế năng của ngàm đàn hồi và đế đàn hồi.**

Sử dụng khái niệm các hệ số mềm, trên cơ sở của định lý Clapeyron, có thể viết

a. Trong trường hợp của ngàm đàn hồi

$$V = \frac{1}{2} \mathcal{U} M^2 \quad (26.23)$$

hay

$$V = \frac{1}{2 \mathcal{U}} \varphi^2 \quad (26.24)$$

trong đó

$\mathcal{U}$  - hệ số mềm ngàm đàn hồi;

$M$  - momen đế;

$\varphi$  - góc xoay;

b. trong trường hợp của đế đàn hồi

$$V = \frac{1}{2} A R^2 \quad (26.25)$$

hay

$$V = \frac{1}{2} \frac{f^2}{A} \quad (26.26)$$

trong đó  $A$  – hệ số mềm đế đỡ;

$R$  – phản lực đế đỡ;

$f$  – độ lún đế đỡ.

### **&27. ĐỊNH LÝ CASTIGLIANO, CÔNG THỨC MAXWELL-MOHR, ĐỊNH LÝ VỀ CÔNG CỤC TIỂU, ĐỊNH LÝ VỀ TÍNH TƯƠNG ĐỒNG CỦA CÔNG.**

Định lý Lagrange thiết lập trong &25 nghiệm đúng với hệ đàn hồi bất kỳ. Trong trường hợp hệ đàn hồi tuyến tính, thế năng biến dạng đàn hồi có một số tính chất có thể sử dụng được trong nhiều bài toán.

Ta xét các tính chất của thế năng biến dạng của vật thể đàn hồi tuyến tính.

### **1. Định lý Castigliano.**

Thế năng biến dạng không chỉ có thể biểu diễn qua chuyển vị suy rộng, như đã thực hiện khi thiết lập biểu thức của định lý Lagrange, mà còn có thể biểu diễn qua các lực suy rộng.

Nếu coi tập hợp các quan hệ (25.1) như hệ phương trình tuyến tính đối với các chuyển vị suy rộng,

$$\begin{aligned} Q_1 &= \beta_{11}q_1 + \beta_{12}q_2 + \dots + \beta_{1n}q_n; \\ Q_2 &= \beta_{21}q_1 + \beta_{22}q_2 + \dots + \beta_{2n}q_n; \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ Q_n &= \beta_{n1}q_1 + \beta_{n2}q_2 + \dots + \beta_{nn}q_n. \end{aligned}$$

khi giải hệ này, ta thu được<sup>1</sup>:  $q_k = \alpha_{k1}Q_1 + \alpha_{k2}Q_2 + \dots + \alpha_{kn}Q_n, \quad (27.1)$

Như đã chú ý trên đây, trong trường hợp của hệ biến dạng tuyến tính, thế năng biến dạng là hàm thuần nhất cấp 2 đối với chuyển vị suy rộng. Vì thế cho nên, khi thay biến chuyển vị suy rộng bằng các lực suy rộng, theo quan hệ (27.1), thế năng biến dạng trở thành hàm thuần nhất cấp 2 đối với các lực suy rộng. Trên cơ sở của định lý Euler đối với các hàm đẳng cấp,

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial Q_i} Q_i = 2V \quad (27.2)$$

So sánh (27.2) với (27.1), dễ dàng có được biểu thức của định lý Castigliano

$$\frac{\partial V}{\partial Q_k} = q_k, \quad (27.3)$$

tức, đạo hàm riêng của thế năng biến dạng theo lực suy rộng bằng chuyển vị suy rộng tương ứng.

Vì tính chất quan trọng của định lý Castigliano trong ứng dụng nên ta lập biểu thức của định lý này theo một cách khác.

Coi thế năng biến dạng như một hàm hợp và để ý đến các công thức (25.4) và (27.1), khi thay  $i$  bởi  $k$ , ta được

<sup>1</sup> Nhờ tính chất (26.2), định thức hệ số của hệ phương trình trên khác 0.

$$\frac{\partial V}{\partial Q_k} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} = \sum_{i=1}^n Q_i \alpha_{ik}. \quad (27.4)$$

Vì đạo hàm bậc 2 không phụ thuộc vào thứ tự lấy đạo hàm, nên

$$\frac{\partial^2 V}{\partial Q_k \partial Q_i} = \frac{\partial^2 V}{\partial Q_i \partial Q_k},$$

từ đó, suy ra tính chất tương đồng giữa các hệ số ảnh hưởng

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ki} \quad (27.5)$$

Trong vế phải của (27.4) ta thay  $\alpha_{ik}$  bởi  $\alpha_{ki}$  và sử dụng biểu thức (27.1), sẽ thu được biểu thức cần tìm của định lý Castigliano.



Như có thể thấy từ (27.1), các hệ số  $\alpha_{ki}$  chính là giá trị của chuyển vị suy rộng thứ  $k$  dưới tác dụng của lực suy rộng đơn vị thứ  $i$ , còn  $\alpha_{ik}$  là chuyển vị suy rộng thứ  $i$  dưới tác dụng của lực suy rộng đơn vị thứ  $k$ .

Cần lưu ý rằng, ta hiểu chuyển vị (toạ độ) suy rộng  $q_k$  tương ứng với lực

suy rộng  $Q_k$ , chính là chuyển vị mà biến phân của nó

H5.4

gắn liền với biến phân công của lực suy rộng theo quan hệ (25.2).

Chuyển vị suy rộng tương ứng với một ngoại lực tập trung nào đó sẽ là chuyển vị đường của điểm đặt lực, theo hướng tác dụng của lực này. Chuyển vị suy rộng tương ứng với moment ngoại lực sẽ là góc xoay của tiết diện tương ứng theo hướng tác dụng của moment.

Nếu như, chẳng hạn, chọn lực suy rộng là tập hợp 2 moment, tác dụng vào các tiết diện mút của dầm (H5.4),  $M_1 = M_2 = M$ , thì chuyển vị suy rộng tương ứng sẽ là góc xoay tương đối giữa tiết diện này so với tiết diện kia.

Cần lưu ý về chiều dương của chuyển vị suy rộng. Vì thế năng biến dạng đàn hồi, được xác định trong các bài toán khảo sát, theo định lý Clapeyron (27.4), là đại lượng xác định dương nên lực suy rộng được coi là dương nếu như công của lực suy rộng dương thực hiện trên di chuyển này là dương.

Ví dụ như, trên hình 5.4, ứng với lực suy rộng tại tiết diện mút trái, chuyển vị suy rộng là góc xoay tiết diện mút này là dương nếu ngược chiều kim đồng hồ, còn ứng với moment tại tiết diện mút phải thì ngược lại, chuyển vị suy rộng là góc xoay tại tiết diện này là dương khi theo chiều kim đồng hồ.

Định lý Castigliano cho phép xác định chuyển vị suy rộng bất kỳ mà chỉ cần thiết lập được biểu thức thế năng, dưới dạng hàm của các tải trọng ngoài và các lực suy rộng tương ứng với các chuyển vị suy rộng. Tuy nhiên, điều này chỉ có thể thực hiện được với các hệ siêu tĩnh sau khi đã khử siêu tĩnh. Trong trường hợp này, các phản lực thừa được biểu thị qua các tải trọng ngoài, đồng thời cũng có thể biểu thị các moment uốn, lực cắt và lực dọc, tức tất cả các đại lượng trong biểu thức thế năng biến dạng (26.22), qua các tải trọng ngoài.

Nếu trong các thành phần tải trọng của hệ đàn hồi khảo sát không có một lực suy rộng nào tương ứng với chuyển vị suy rộng  $w_p$  cần tìm, cần đưa vào một lực ảo  $P_a$  và khi tính chuyển vị suy rộng, đặt lực ảo này bằng 0, tức

$$w_p = \left( \frac{\partial V}{\partial P_a} \right)_{P_a=0} \quad (27.6)$$

## 2. Công thức Maxwell-Mohr.

Khi xác định các chuyển vị suy rộng theo định lý Castigliano, không nhất thiết phải thiết lập biểu thức thế năng biến dạng dưới dạng hàm thuần nhất cấp 2 đối với các lực suy rộng rồi sau đó tiến hành lấy đạo hàm biểu thức này. Tiện lợi hơn nhiều nếu ta tiến hành ngay việc lấy đạo hàm của hàm dưới dấu tích phân.

Thực hiện việc đạo hàm dưới dấu tích phân biểu thức (26.22), ta thu được ngay công thức Maxwell-Mohr

$$q = \int_{(s)} \left( \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial Q} + \frac{N}{G\theta} \frac{\partial N}{\partial Q} + \frac{T}{EF} \frac{\partial T}{\partial Q} + \frac{M_x}{C} \frac{\partial M_x}{\partial Q} \right) ds. \quad (27.7)$$

Các đạo hàm  $\frac{\partial M}{\partial Q}, \frac{\partial N}{\partial Q}, \frac{\partial T}{\partial Q}$  và  $\frac{\partial M_x}{\partial Q}$  chính là các ứng lực (tương ứng với các moment uốn, lực cắt, v.v.) dưới tác dụng của lực suy rộng đơn vị.

## 3. Định lý về công cực tiểu.

Như đã nêu ra trên đây, định lý Castigliano chỉ có thể sử dụng để xác định các chuyển vị suy rộng sau khi đã khử siêu tĩnh hệ khảo sát. Tuy nhiên, cũng có thể sử dụng hệ này để xác định các ẩn thừa của hệ siêu tĩnh.

Phương pháp tổng quát để khử siêu tĩnh bao gồm việc sử dụng các mặt cắt và đưa vào hệ các ẩn lực thừa, còn gọi chung là các *đại lượng siêu tĩnh*, với mục đích thay hệ đã cho bằng một hệ khác, tĩnh định. Phương trình xác định các ẩn lực thừa được thành lập trên cơ sở so sánh chuyển vị tại hai phần bị cắt rời.

Ta sử dụng mặt cắt để chia vật thể khảo sát ra làm 2 phần và ký hiệu lực suy rộng siêu tĩnh bởi  $R$ . Ghép các lực này vào số các ngoại lực. Giả sử  $V_1$  là thế năng phần vật thể thứ nhất còn  $V_2$  – phần thứ 2.

Khi viết điều kiện bằng nhau của chuyển vị suy rộng, cần chú ý một điều là chuyển vị suy rộng, xác định theo định lý Castigliano, là dương khi công của lực suy rộng tương ứng, thực hiện trên chuyển vị nói trên là dương. Vì hai lực  $R$  tác dụng lên hai phần vật thể là ngược hướng nhau nên các chuyển vị suy rộng dương tương ứng cũng ngược hướng nhau. Vì thế cho nên, điều kiện bằng nhau của chuyển vị suy rộng của hai phần vật thể sẽ được viết dưới dạng:

$$\frac{\partial V_1}{\partial R} = \frac{\partial V_2}{\partial R}$$

hay

$$\frac{\partial V}{\partial R} = 0, \quad (27.8)$$

trong đó,  $V = V_1 + V_2$  là thế năng biến dạng đàn hồi của vật thể, dưới tác dụng của cả ngoại lực lẫn các đại lượng siêu tĩnh.

Vì thế năng biến dạng là hàm xác định dương, và tăng khi tải trọng tăng nên biểu thức (27.8) là điều kiện cực tiểu của thế năng biến dạng, và đây cũng chính là biểu thức của định lý về công bé nhất (hay công cực tiểu). Định lý phát biểu như sau: *Đạo hàm riêng của thế năng biến dạng theo ẩn lực thừa bằng 0.*

Định lý nói trên đôi khi còn được diễn đạt dưới dạng khác, thay đổi đôi chút, như sau: *Giá trị thực của ẩn lực thừa biến biểu thức thế năng biến dạng thành cực tiểu.* Định lý công bé nhất cũng có thể chứng minh bằng suy luận logic. Khi tiến hành chia đôi vật thể bằng một mặt cắt, và thay tác dụng của phần vật thể này lên phần kia bằng ẩn lực thừa  $R$ , ta có quyền coi tập hợp hai ẩn lực  $R$  tác dụng lên cả hai phần vật thể khảo sát là lực suy rộng. Vì hai lực nói trên về mặt tĩnh học tương đương với 0, do đó, công của nó trên chuyển vị suy rộng nhất thiết bằng 0 và là cực tiểu. Đây chính là nội dung định lý cần chứng minh.

Trên thực tế, khi sử dụng định lý công bé nhất, nên tiến hành đạo hàm hàm dưới dấu tích phân.

#### **4. Định lý về tính tương đồng của công.**

Tính chất tương đồng của các hệ số ảnh hưởng (26.2) hay (27.5) cho phép chứng minh định lý về tính tương đồng của công, là định lý cho phép làm đơn giản việc giải nhiều bài toán của cơ học kết cấu.

Giả sử có hai hệ lực tác dụng lên vật thể đàn hồi:

Hệ lực thuộc trạng thái thứ nhất:

$$Q'_1, Q'_2, \dots, Q'_m$$

Hệ lực thuộc trạng thái thứ hai:

$$Q''_{m+1}, Q''_{m+2}, \dots, Q''_n.$$

Các chuyển vị suy rộng tương ứng với hệ lực thuộc trạng thái thứ hai gây ra do các lực thuộc hệ thứ nhất, được xác định nhờ biểu thức

$$q'_i = \sum_{k=1}^m \alpha_{ik} Q'_k, \quad (27.9)$$

$$m+1 \leq i \leq n,$$



còn chuyển vị suy rộng, tương ứng với các lực thuộc trạng thái thứ nhất và gây ra do các lực thuộc trạng thái thứ hai, nhờ biểu thức

$$q_k'' = \sum_{i=m+1}^n \alpha_{ki} Q_i'', \quad (27.10)$$

$$1 \leq k \leq m.$$

Định lý về tính tương đồng của công có thể phát biểu như sau: *khi tác dụng vào vật thể đàn hồi tuyến tính hai hệ lực, công của hệ lực thuộc trạng thái thứ nhất trên các chuyển vị suy rộng thuộc trạng thái thứ hai tương ứng với nó bằng công của hệ lực thứ hai trên các chuyển vị suy rộng tương ứng với nó thuộc hệ thứ nhất*

Về mặt toán học, định lý nói trên biểu thị bởi đẳng thức

$$\sum_{k=1}^m Q_k' q_k'' = \sum_{i=m+1}^n Q_i'' q_i'. \quad (27.11)$$

Để chứng minh định lý này, chỉ cần sử dụng các biểu thức (27.9) và (27.10)

Ta có

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m Q_k' q_k'' &= \sum_{k=1}^m \sum_{i=m+1}^n \alpha_{ki} Q_k' Q_i''; \\ \sum_{i=m+1}^n Q_i'' q_i' &= \sum_{i=m+1}^n \sum_{k=1}^m \alpha_{ik} Q_i'' Q_k', \end{aligned}$$

Khi sử dụng tính chất tương đồng hệ số (27.5) ta có thể đi đến biểu thức của định lý về tính tương đồng của công. Cần chú ý rằng định lý Castigliano và định lý công bé nhất sử dụng tiện lợi chủ yếu cho các dầm thay đổi tiết diện ngang, các thanh cong và các khung.

Việc xác định chuyển vị của thanh thẳng tiết diện ngang không đổi bằng định lý Castigliano không phải là tiện lợi nhất, vì mỗi một chuyển vị bất kỳ (độ võng, góc xoay) đều có thể dễ dàng tìm được từ phương trình đường đàn hồi, thông qua việc tích phân phương trình vi phân tương ứng hoặc sử dụng các bảng uốn dầm. Đối với việc khử siêu tĩnh của các dầm có tiết diện ngang không đổi (hoặc dầm có tiết diện ngang nhảy bậc) cũng vậy. Khi đó, phương trình 3 moment . . . được sử dụng.

## &28. SỬ DỤNG CÁC ĐỊNH LÝ CASTIGLIANO VÀ ĐỊNH LÝ CÔNG BÉ NHẤT ĐỂ TÍNH CÁC DẦM.

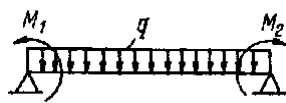
Khi sử dụng định lý Castigliano để xác định các chuyển vị (độ võng, góc xoay), cần nhớ rằng, trước đó, tất cả các phản lực đế của dầm đều đã phải được xác định trước và được biểu thị qua các ngoại lực đã biết. Nếu hệ là siêu tĩnh, để xác định các chuyển vị, cần tiến hành khử siêu tĩnh trước. Để tìm các ẩn lực thừa theo định lý công bé nhất hoặc định lý Castigliano, cần biểu diễn tất cả các nội lực (moment uốn, lực cắt, lực dọc) trên tất cả các tiết diện ngang qua

các ngoại lực đã biết và các ẩn lực nói trên; Tất cả các phản lực để còn lại cần được khử khỏi các quan hệ nói trên nhờ các phương trình tĩnh học.

Ta khảo sát một số ví dụ về việc ứng dụng các định lý nói trên.

### 1. Ví dụ 1.

Xác định góc xoay tiết diện đế của dầm một nhịp, chịu tác dụng của các moment đế và của tải trọng ngang (H5.5).



Moment uốn trên tiết diện bất kỳ của dầm được xác định nhờ biểu thức

$$M(x) = M_1 \left(1 - \frac{x}{l}\right) + M_2 \frac{x}{l} - \frac{ql^2}{2} \left(\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2}\right). \quad (28.1)$$

H5.5

Ta tính các đạo hàm

$$\frac{\partial M(x)}{\partial M_1} = 1 - \frac{x}{l}; \quad \frac{\partial M(x)}{\partial M_2} = \frac{x}{l}. \quad (28.2)$$

Trên cơ sở của công thức (27.7), góc xoay của các tiết diện đế, được tính phù hợp với qui ước dấu thông thường đã biết, bằng

$$\left. \begin{aligned} w'(0) &= - \int_0^l \frac{M(x)}{EI(x)} \frac{\partial M(x)}{\partial M_1} dx; \\ w'(l) &= \int_0^l \frac{M(x)}{EI(x)} \frac{\partial M(x)}{\partial M_2} dx. \end{aligned} \right\} \quad (28.3)$$

Dấu “-” trước công thức thứ nhất biểu thị chiều dương của góc xoay (theo chiều kim đồng hồ) ngược với chiều của moment đế  $M_1$ .

Sau khi thay cả biểu thức (28.1) và (28.2) vào (28.3) đồng thời với việc đổi biến tích phân  $x = \xi l$ , ta tìm được

$$\begin{aligned} w'(0) &= - \frac{M_1 l}{EI_0} \int_0^1 \frac{I_0}{I(\xi)} (1 - \xi)^2 d\xi - \frac{M_2 l}{EI_0} \int_0^1 \frac{I_0}{I(\xi)} \xi (1 - \xi) + \frac{ql^3}{2EI_0} \int_0^1 \frac{I_0}{I(\xi)} \xi^2 d\xi; \\ w'(l) &= \frac{M_1 l}{EI_0} \int_0^1 \frac{I_0}{I(\xi)} \xi (1 - \xi) d\xi + \frac{M_2 l}{EI_0} \int_0^1 \frac{I_0}{I(\xi)} \xi^2 d\xi - \frac{ql^3}{2EI_0} \int_0^1 \frac{I_0}{I(\xi)} (1 - \xi) \xi^2 d\xi, \end{aligned} \quad (28.4)$$

trong đó,  $I_0$  – giá trị moment quán tính tiết diện ngang bất kỳ.

Các tích phân trong biểu thức (28.4), tốt nhất là, nên tính theo phương pháp tích phân số.

Khi cần để ý đến ảnh hưởng trượt, thay cho công thức (28.3), có thể sử dụng công thức

$$w'(0) = - \int_0^l \frac{M(x)}{EI(x)} \frac{\partial M(x)}{\partial M_1} dx - \int_0^l \frac{N(x)}{G\theta(x)} \frac{\partial N(x)}{\partial M_1} dx;$$

$$w'(l) = \int_0^l \frac{M(x)}{EI(x)} \frac{\partial M(x)}{\partial M_2} dx + \int_0^l \frac{N(x)}{G\theta(x)} \frac{\partial N(x)}{\partial M_2} dx.$$

Công thức (28.4) có thể sử dụng để tính dầm liên nhịp tiết diện ngang thay đổi chịu tải phân bố đều trên từng nhịp. Sơ đồ tính toán cho dầm nói trên, về nguyên tắc không khác so với tính dầm tiết diện ngang không đổi.

Để làm ví dụ, ta tiến hành khử siêu tĩnh cho dầm ngàm cứng đối xứng tại hai đế, chịu tải trọng rải đều.

Từ điều kiện đối xứng, suy ra rằng,  $M_1 = M_2 = M$ , và để xác định 1 ẩn moment ta sử dụng điều kiện bằng 0 của một trong hai biểu thức góc xoay (28.4)<sup>1</sup>

$$- \frac{Ml}{EI_0} \int_0^1 \frac{I_0}{I(\xi)} (1-\xi)^2 d\xi + \frac{ql^3}{2EI_0} \int_0^1 \frac{I_0}{I(\xi)} \xi (1-\xi)^2 d\xi = 0;$$

$$\frac{Ml}{EI_0} \int_0^1 \frac{I_0}{I(\xi)} \xi d\xi - \frac{ql^3}{2EI_0} \int_0^1 \frac{I_0}{I(\xi)} (1-\xi) \xi^2 d\xi = 0.$$

Để có được công thức, dưới dạng tiện lợi cho việc nghiên cứu, ta lấy phương trình thứ nhất trừ phương trình thứ 2, được

$$- \frac{Ml}{EI_0} \int_0^1 \frac{I_0}{I(\xi)} d\xi + \frac{ql^3}{2EI_0} \int_0^1 \frac{I_0}{I(\xi)} (1-\xi) \xi d\xi = 0.$$

từ đó,

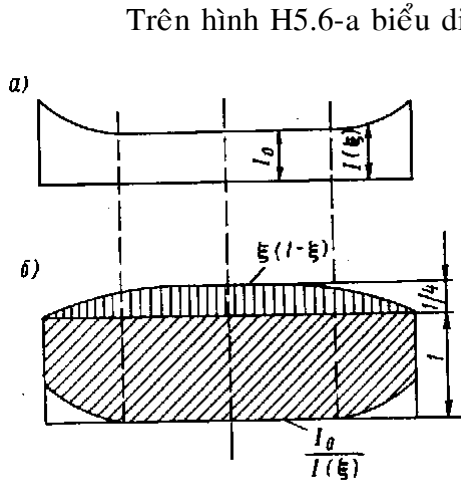
$$M = \frac{ql^2}{2} \frac{\int_0^1 \frac{I_0}{I(\xi)} \xi (1-\xi) d\xi}{\int_0^1 \frac{I_0}{I(\xi)} d\xi}. \quad (28.5)$$

Đối với dầm tiết diện ngang không đổi,  $I(\xi) = I_0$ , biểu thức (28.5) trở về dạng

$$M = \frac{ql^2}{12}.$$

Ta chứng minh rằng, khi có các mã, tức khi tăng moment quán tính h tiết diện ngang dầm tại vùng gần tiết diện đế, moment đế sẽ tăng.

<sup>1</sup> Để chứng minh rằng, cả hai phương trình cùng cho kết quả một momen như nhau, chỉ cần thay biến  $\xi_1 = \xi - 0,5$  và chú ý rằng tích phân của hàm lẻ trên đoạn đối xứng (qua gốc tọa độ) bằng 0.



Trên hình H5.6-a biểu diễn đường cong  $I(\xi)$ , còn trên hình H5.6-b, là các đường cong biểu diễn tử số và mẫu số của hàm dưới dấu tích phân trong biểu thức (28.5). Các diện tích được gạch chéo biểu thị tử số và mẫu số dưới dấu tích phân. Diện tích giới hạn bởi đường cong phía

trên tương ứng với dầm có tiết diện ngang không đổi.

Từ hình H5.6-b ta thấy rằng, khi có đặt mã, cả tử số và mẫu số của biểu thức (28.5) đều giảm, nhưng mẫu số giảm nhanh hơn.

Như vậy là, khi đặt mã, moment tiết diện để tăng H5.6 hơn so với trường hợp dầm có tiết diện không đổi.

## 2. Ví dụ 2.

Tìm góc trượt trung bình do trượt tiết diện ngang thân tàu phục vụ cho việc xác định độ võng do trượt.

Góc trượt trung bình trên tiết diện ngang hình chữ I đơn giản có thể xác định bằng tỉ số giữa lực cắt là tích số của diện tích thành tiết diện và mô đun trượt  $G$ . Đối với vỏ tàu, là dầm có hình dáng tiết diện ngang phức tạp, khó quan niệm được đâu là thành tiết diện, đặc biệt là trong trường hợp hình bao nhọn. Khi đó, có thể sử dụng định lý Castigliano để xác định góc trượt nói trên.

Dựa trên qui ước dấu đã biết của lực cắt, góc trượt trung bình được xác định nhờ biểu thức

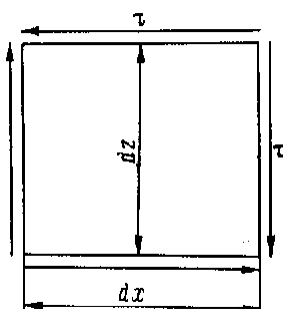
$$w'_2(x) = - \frac{\partial V}{\partial N}, \quad (28.6)$$

trong đó,  $V$  – thế năng biến dạng cắt trên một đơn vị chiều dài vỏ tàu;

$N$  – lực cắt.

Để xác định thế năng biến dạng  $V$ , không thể sử dụng trực tiếp công thức (26.15) cho dầm chữ I đơn giản khi uốn thuần túy, vì nó không để ý đến sự biến đổi của ứng suất tiếp dọc theo chiều tiết diện ngang.

Để có được công thức cần thiết, ta khảo sát một phân tố thành dầm có chiều dài  $dx$  và chiều cao  $dz$  (H5.7).



Trên biên của phân tố tác dụng ứng suất tiếp  $\tau$ . Thế năng biến dạng đàn hồi trên phân tố (do cắt) bằng

$$dV = \frac{1}{2} \frac{\tau^2}{G} \delta dx dz \quad (28.7)$$

trong đó,  $\delta$  - chiều dày phân tố.

Chia hai vế của (28.7) cho  $dx dz$  và  $\delta$  ta được

H5.7

$$W = \frac{1}{2} \frac{\tau^2}{G}$$

Thế n ăng biến dạng đơn vị chiều dài tàu bằng

$$V = \frac{1}{2} \int_H \frac{\tau^2}{G} \delta dz, \quad (28.8)$$

trong đó, đại lượng  $\delta$  được hiểu là tổng chiều dày mạn và vách dọc, còn tích phân lấy trên toàn bộ chiều cao tiết diện ngang vỏ tàu.

Sau khi xác định ứng suất tiếp trên tiết diện ngang vỏ tàu theo công thức đã biết (4.2)

$$\tau = \frac{NS}{I\delta}$$

và sau khi thay giá trị này vào biểu thức (28.8), trên cơ sở của quan hệ (28.6), ta được

$$w'_2(x) = - \frac{N}{GI^2} \int_H \frac{S^2}{\delta} dz. \quad (28.9)$$

Đại lượng

$$\frac{1}{I^2} \int_H \frac{S^2}{\delta} dz = \frac{1}{\theta_{td}} \quad (28.10)$$

xác định diện tích tương đương của thanh tiết diện ngang vỏ tàu và có thể tìm được bằng phương pháp số đối với mỗi một tiết diện ngang.

Như vậy là, 
$$w'_2 = - \frac{N}{G\theta_{td}} \quad (28.11).$$

### 3. Ví dụ 3.

Xác định độ võng đối với khung không phẳng cho trên hình H5.8.

Ta ký hiệu  $I$  - là moment quán tính trung tâm tiết diện ngang thanh đối với trục nằm ngang, còn  $C$  - là độ cứng của thanh về xoắn. Ảnh hưởng của trượt được bỏ qua.

Chuyển vị của đầu mút chịu lực ngoài của thanh có thể xác định theo công thức (27.7)

$$f = \int_{(s)} \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P} ds + \int_{(s)} \frac{M_x}{C} \frac{\partial M_x}{\partial P} ds, \quad (28.12)$$

trong đó,  $M$  - moment uốn;

$M_x$  - moment xoắn.

Trên đoạn thanh thứ nhất(chiều dài  $l_1$ ), moment uốn và moment xoắn bằng:

$$M = Px; \quad \frac{\partial M}{\partial P} = x; \quad M_x = 0.$$

Trên đoạn thanh thứ 2

$$M = -Py; \quad \frac{\partial M}{\partial P} = -y; \quad M_x = -Pl_1; \quad \frac{\partial M_x}{\partial P} = -l_1.$$

Từ biểu thức (28.12), ta được

$$f = \int_0^{l_1} \frac{Px^2}{EI} dx + \int_{-l_2}^0 \frac{Py^2}{EI} dy + \int_{-l_2}^0 \frac{Py^2}{C} dy = \frac{Pl_1^3}{3EI} \left[ 1 + \left( \frac{l_2}{l_1} \right)^3 \right] + \frac{Pl_1^2 l_2}{C}. \quad (28.13)$$

## &29. ỨNG DỤNG ĐỊNH LÝ CASTIGLIANO VÀ ĐỊNH LÝ CÔNG BÉ NHẤT ĐỂ TÍNH KHUNG VÀ THANH CONG.

Việc tính toán khung và thanh cong dựa trên các giả thiết sau

1- chiều cao của tiết diện thanh là rất nhỏ so với bán kính cong của nó, đến mức có thể sử dụng các quan hệ giữa sự thay đổi độ cong thanh và moment uốn của thanh thẳng<sup>1</sup>.

2- Độ cứng của khung và thanh cong là rất lớn, sao cho khi tính moment uốn, lực cắt và lực dọc tại tiết diện bất kỳ, có thể xuất phát từ hình dáng ban đầu của chúng. Điều này cũng đồng nghĩa với việc không tính đến ảnh hưởng của lực dọc đến các yếu tố uốn của thanh cong.

Ta khảo sát một số ví dụ.

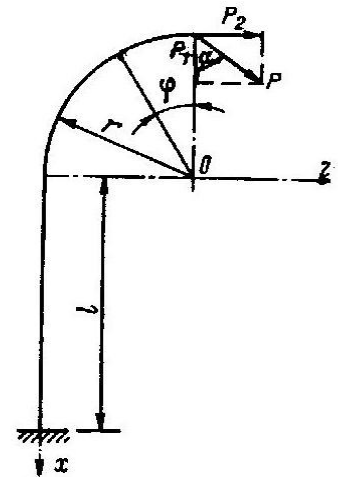
### 1. Ví dụ 1.

Xác định chuyển vị  $v$  của dầm treo xuống (H5.8) dưới tác dụng của lực  $P$ , xiên góc  $\alpha$  so với phương thẳng đứng.

Ta phân lực  $P$  thành hai thành phần, thành phần thẳng đứng  $P_1 = P \cos \alpha$  và thành phần nằm ngang  $P_2 = P \sin \alpha$  và tìm hình chiếu tương ứng của chuyển vị tương đối của chuyển vị toàn phần

$$v_1 = \frac{\partial V}{\partial P_1}; \quad v_2 = \frac{\partial V}{\partial P_2}. \quad (29.1)$$

Tương ứng với (27.7) ta có



<sup>1</sup> Trên thực tế, điều này đúng khi  $\frac{h}{\rho} < \frac{1}{15}$ , trong đó,  $h$  – chiều cao tiết diện, còn  $\rho$  là bán kính cong của dầm.

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \int_{(s)} \left( \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P_1} + \frac{N}{G\omega} \frac{\partial N}{\partial P_1} + \frac{T}{EF} \frac{\partial T}{\partial P_1} \right) ds; \\ v_2 &= \int_{(s)} \left( \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P_2} + \frac{N}{G\omega} \frac{\partial N}{\partial P_2} + \frac{T}{EF} \frac{\partial T}{\partial P_2} \right) ds. \end{aligned} \right\} \quad (29.2) \quad \text{Chọn đầu mút tự do của dầm}$$

treo xuống làm gốc tọa độ  $s$ . Tích phân trong (29.2) được tính cho từng đoạn, thẳng và cong, rồi cộng kết quả tương ứng.

Trên đoạn cong, biến tích phân nên thay bằng góc  $\varphi$ , bởi phép thay biến

$$ds = r d\varphi.$$

Moment uốn, lực cắt và lực dọc trên đoạn dầm

cong được tính theo các công thức sau

$$\left. \begin{aligned} M(s) &= P_1 r \sin \varphi + P_2 r (1 - \cos \varphi); \\ N(s) &= -P_1 \cos \varphi - P_2 \sin \varphi; \\ T(s) &= -P_1 \sin \varphi + P_2 \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (29.3)$$

Trên đoạn thẳng, tương ứng, có

$$\left. \begin{aligned} M(s) &= P_1 r + P_2 (r + x); \\ N(s) &= -P_2; \\ T(s) &= -P_1. \end{aligned} \right\} \quad (29.4)$$

Trên thực tế, khi tính dầm treo xuống, không cần tính đến biến dạng cắt và lượng giãn dài của trục, vì việc này không mang lại hiệu chỉnh đáng kể kết quả cuối cùng. Vì thế cho nên, vứt bỏ các thành phần tương ứng với chúng trong (29.3) và (29.4), tính các đạo hàm  $\frac{\partial M(s)}{\partial P_1}$  &  $\frac{\partial M(s)}{\partial P_2}$  và thay chúng vào (29.2), ta được

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{EI} [P_1 \sin \varphi + P_2 (1 - \cos \varphi)] r^3 \sin \varphi d\varphi + \int_0^l \frac{1}{EI} [P_1 r + P_2 (r + x)] r dx; \\ v_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{EI} [P_1 \sin \varphi + P_2 (1 - \cos \varphi)] r^3 (1 - \cos \varphi) d\varphi + \int_0^l \frac{1}{EI} [P_1 r + P_2 (r + x)] (r + x) dx. \end{aligned} \right\} \quad (29.5)$$

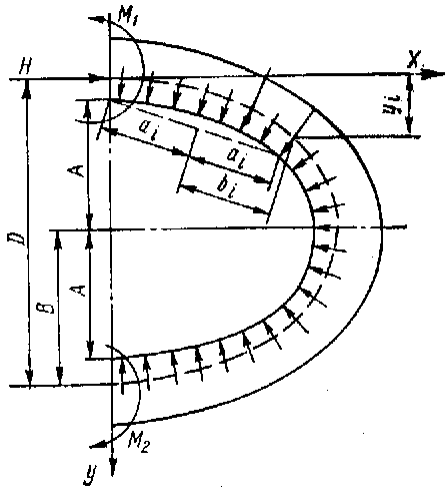
Trong trường hợp riêng, khi  $I = I_0$  tất cả các tích phân đều có thể tính được bằng giải tích.

Sau khi xác định được các thành phần chuyển vị  $v_1$  và  $v_2$ , có thể xác định chuyển vị toàn phần theo công thức  $v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ .

## 2. Ví dụ 2.

Khử siêu tĩnh vành đối xứng, tiết diện ngang thay đổi, chịu tải trọng phân bố đều (H5.9).

Giả thiết là vành đối xứng qua trục thẳng đứng và ta khảo sát một nửa vành. Giả sử  $M_1$  – là moment uốn tiết diện trên của vành, còn  $H$  – là lực dọc trên tiết diện này. Lực cắt bằng 0 vì lý do đối xứng.



Ta hãy xác định biểu thức moment uốn tại tiết diện bất kỳ dưới tác dụng của tải trọng phân bố đều.

Có một điểm nên lưu ý trước là, hợp lực phân bố đều, tác dụng lên một cung hình dạng bất kỳ, có trị số bằng tích số giữa chiều dài dây cung, nối hai đầu mút của cung và hướng vuông góc với dây cung nói trên. Tính đúng đắn của mệnh đề này thể hiện ở chỗ, các vành cung kín sẽ cân bằng dưới tác dụng của tải trọng ngang phân bố đều trên toàn vành. Hợp lực của tải trọng ngang rải đều, tác dụng trên một vành bất kỳ bằng về trị số và ngược hướng với hợp lực của tải trọng tác dụng lên dây cung chịu tác dụng cùng tải trọng nói trên (H5.10).

Như vậy, moment uốn tại tiết diện ngang bất kỳ của vành

H5.9

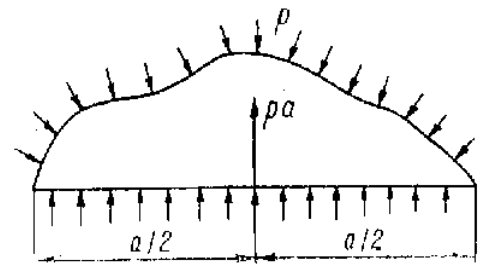
được xác định từ công thức

$$M(s_i) = M_1 - H_1 y_i + 2qa_i b_i, \quad (29.6)$$

trong đó, mọi ký hiệu đều được giải nghĩa trong hình vẽ H5.9, với đường đứt đoạn thể hiện vị trí trục trung hoà.

Trong tính toán, để cho tiện lợi, ta không dùng ẩn số thứ 2 là lực dọc  $H$  mà thay vào đó là moment tại tiết diện dưới  $M_2$ . Nếu không thực hiện điều này, moment  $M_2$  sẽ được tính như là hiệu số của hai đại lượng xấp xỉ nhau trong giai đoạn cuối của quá trình tính toán.

Cho tổng moment tất cả các lực tác dụng lên nửa vành khảo sát, đối với trọng tâm tiết diện dưới, bằng 0, ta thu được



H5.10



$$M_2 - M_1 + HD - 2qAB = 0,$$

từ đó,

$$H = \frac{M_1 - M_2}{D} + 2q \frac{AB}{D}. \quad (29.7)$$

Biểu thức (29.6), xác định moment uốn, có thể viết dưới dạng

$$M(s_i) = 2qABm_0(s_i) + M_1m_1(s_i) + M_2m_2(s_i), \quad (29.8)$$

trong đó,

$$\left. \begin{aligned} m_0(s_i) &= \frac{a_i b_i}{AB} - \frac{y_i}{D}; \\ m_1(s_i) &= 1 - \frac{y_i}{D}; \quad m_2(s_i) = \frac{y_i}{D}. \end{aligned} \right\} \quad (29.9)$$

Nếu không kể đến biến dạng cắt và biến dạng kéo, thì biểu thức thế năng biến dạng được xác định theo công thức [xem (26.22)]

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2(s)}{EI(s)} ds,$$

trong đó,  $l$  – chiều dài của nửa vành.

Trong trường hợp khảo sát, định lý công bé nhất

$$\frac{\partial V}{\partial M_1} = 0; \quad \frac{\partial V}{\partial M_2} = 0$$

dẫn đến hệ phương trình sau

$$\left. \begin{aligned} M_1 \int_0^l \frac{m_1^2(s)}{EI(s)} ds + M_2 \int_0^l \frac{m_1(s)m_2(s)}{EI(s)} ds + 2qAB \int_0^l \frac{m_0m_1(s)}{EI(s)} ds &= 0 \\ M_1 \int_0^l \frac{m_1(s)m_2(s)}{EI(s)} ds + M_2 \int_0^l \frac{m_2^2(s)}{EI(s)} ds + 2qAB \int_0^l \frac{m_0(s)m_2(s)}{EI(s)} ds &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (29.10)$$

Các tích phân trong (29.10) có thể tính bằng phương pháp tích phân số.

Nếu như đường trục của vành là đường tròn bán kính  $r$  và vành là rất mảnh, sao cho chiều cao của nó là rất nhỏ so với bán kính cong, khi đó

$$\begin{aligned} a_i &= b_i = r \sin \frac{\varphi}{2}; \\ y_i &= r(1 - \cos \varphi); S = B = r; \\ D &= 2r; m_0(s) = \sin^2 \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2}(1 - \cos \varphi) = 0. \end{aligned}$$

Và từ các phương trình (29.10) suy ra  $M_0 = M_1 = 0$ , tức, vành không chịu uốn, đồng thời từ quan hệ (29.7) có thể xác định lực dọc

$$H = qr. \quad (29.11)$$

### **&30. PHƯƠNG TRÌNH CHÍNH TẮC CỦA PHƯƠNG PHÁP LỰC.**

Khi tiến hành khử siêu tĩnh cho các hệ như các dầm liên nhịp, các khung đơn giản, các dàn ít dầm. . . , tức trong tất cả các trường hợp mà ẩn số là các ứng lực, để xác định các ẩn số, ta dùng các phương trình, được gọi là *phương trình chính tắc*. Ma trận hệ số của hệ phương trình này đối xứng qua đường chéo chính và khi giải chúng, có thể sử dụng thuật toán Gauss giản đơn. Tính chất chính tắc của các phương trình này không phải là ngẫu nhiên, mà là tính chất có thể chứng minh trong trường hợp tổng quát.

Khi khử siêu tĩnh hệ bằng phương pháp lực, trước tiên, cần chọn *hệ cơ bản*, là hệ hợp thành từ các hệ tĩnh định, chứa trong chúng các đại lượng siêu tĩnh chưa biết, với tư cách là các lực ngoài.

Có rất nhiều phương án khác nhau để chọn hệ cơ bản, như ta đã có dịp bàn đến khi giải các dầm liên nhịp. Tuy nhiên, mục tiêu của sự lựa chọn là sao cho mỗi một đại lượng siêu tĩnh đều gây ra càng ít càng tốt các chuyển vị suy rộng tương ứng với nó. Đây chính là điều kiện để cho ma trận hệ số của hệ phương trình kết quả là thưa (không đầy), và nhờ đó, việc giải chúng đơn giản hơn.

Giả sử  $R_1, R_2, \dots, R_n$  – là các lực suy rộng, đồng thời là các ẩn lực thừa. Khi đó, các chuyển vị suy rộng  $\delta_i$  trong hệ cơ bản tương ứng với các lực suy rộng, có thể xác định, trên cơ sở của phương trình (27.1), dưới dạng

$$\delta_i = \delta_{i1}R_1 + \delta_{i2}R_2 + \dots + \delta_{in}R_n + \Delta_i + \delta_i^{(0)} \quad (30.1)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, n,$$

trong đó, các hệ số ảnh hưởng tuân thủ điều kiện tương đồng

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} \quad (30.2)$$

với,  $\Delta_i$  – là chuyển vị suy rộng thứ  $i$  ở hệ cơ bản, tương ứng với tải trọng cho trước,

$\delta_i^{(0)}$  – giá trị đầu của chuyển vị suy rộng thứ  $i$ .

Nếu ta chọn chính hai ứng lực tác dụng lên các phần vật thể bị “cắt” làm các lực suy rộng, thì chuyển vị suy rộng phải bằng 0, vì khoảng cách giữa hai phía của vết cắt là bằng 0 theo điều kiện liên tục của vật thể khảo sát.

Như vậy, phương trình chính tắc của phương pháp lực có thể viết dưới dạng

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}R_1 + \delta_{12}R_2 + \dots + \delta_{1n}R_n + \Delta_1 + \delta_1^{(0)} &= 0; \\ \delta_{12}R_1 + \delta_{22}R_2 + \dots + \delta_{2n}R_n + \Delta_2 + \delta_2^{(0)} &= 0; \\ &\dots\dots\dots \\ \delta_{n1}R_1 + \delta_{n2}R_2 + \dots + \delta_{nn}R_n + \Delta_n + \delta_n^{(0)} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (30.3)$$

Hệ số  $\delta_{ij}$  của hệ phương trình (30.3) bằng giá trị của chuyển vị suy rộng thứ  $i$  dưới tác dụng của lực suy rộng đơn vị thứ  $j$ ,  $R_j = 1$ , lên hệ cơ bản. Vì hệ cơ bản là tĩnh định nên các hệ số  $\delta_{ij}$  luôn có thể xác định được. Đối với hệ các thanh thẳng, các hệ số  $\delta_{ij}$  có thể xác định nhờ các bảng, còn trong trường hợp tổng quát, tiện lợi nhất là sử dụng công thức Maxwell-Mohr.

Khi lập hệ phương trình chính tắc, cần chọn hệ cơ bản và tiến hành các bước theo trình tự sau:

(1). Tác dụng hệ lực, với  $R_j = 1$ , còn  $R_{i \neq j} = 0$ , vào hệ cơ bản, và tìm tất cả các chuyển vị suy rộng. Đặt  $j = 1, 2, 3, \dots, n$ , lần lượt xác định tất cả các hệ số  $\delta_{ij}$ . Trong khi tính, lưu ý đến tính chất (30.2), chẳng hạn như sau khi xác định các hệ số tương ứng với  $R_1 = 1$ , tức  $\delta_{11}, \delta_{12}, \dots, \delta_{1n}$ , khi xác định các hệ số tương ứng với  $R_2 = 1$ , không cần tính  $\delta_{21}$  vì  $\delta_{21} = \delta_{12}$ , mà chỉ cần tính  $\delta_{22}, \delta_{23}, \dots, \delta_{2n}$ , và v.v..

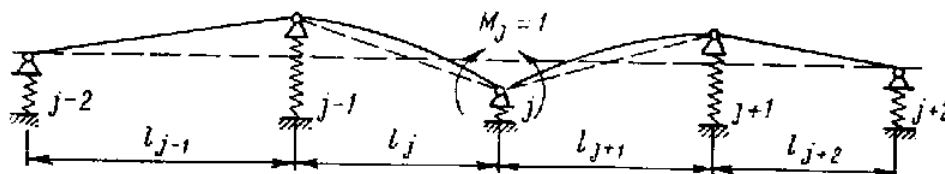
(2). Đặt tải trọng ngoài vào hệ cơ bản, và tìm tất cả các hệ số  $\Delta_i$  - là thành phần có tên là hệ số tải trọng.

Ta minh họa việc lập hệ phương trình chính tắc thông qua ví dụ lập hệ phương trình năm moment cho dầm liên nhịp tựa trên các đế trung gian đàn hồi [xem &7.].

Trong trường hợp khảo sát, hệ cơ bản là tập hợp các dầm một nhịp, tựa tự do trên hai đế đàn hồi, độc lập nhau. Đặt vào hệ cơ bản hai moment  $M_j = 1$ . Các moment này ảnh hưởng đến hai nhịp bên trái và hai nhịp bên phải của đế thứ  $j$  (H5.11).

*Chuyển vị suy rộng, tương ứng với hai moment trực đối nhau, là tổng các góc xoay của các tiết diện đế, trong đó, góc xoay tiết diện bên phải của thanh được coi là dương khi theo chiều kim đồng hồ, còn góc xoay tiết diện bên trái của thanh là dương khi ngược chiều kim đồng hồ, tức theo chiều tác dụng của moment đầu thanh dương.*

Như vậy là, chuyển vị suy rộng sẽ là góc xoay tương đối của các tiết diện giáp nhau của đế, và coi là dương nếu như lực suy rộng - tức hai moment  $M_j$  - gây ra trên đó các công dương.



H5.11

Trước tiên ta tìm độ lún đế  $f_{ij}$  do tác dụng của moment  $M_j = 1$ . Độ lún được coi là dương khi hướng xuống dưới. Sử dụng hệ số mềm đế  $A_j$ .

Từ H5.11, ta có<sup>1</sup>

$$\left. \begin{aligned} f_{j-2,j} &= 0; & f_{j-1,j} &= -A_{j-1} \frac{1}{l_j}; \\ f_{j,j} &= A_j \left( \frac{1}{l_j} + \frac{1}{l_{j+1}} \right); \\ f_{j+1,j} &= -A_{j+1} \frac{1}{l_{j+1}}; & f_{j+2,j} &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (30.4)$$

Các góc xoay tiết diện đế, do uốn, trên các nhịp  $(j-1, j)$  và  $(j, j+1)$ , với qui ước dấu mới, được xác định theo các công thức

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{t,j} &= \frac{l_j}{6EI_j}; & \alpha_{f,j} &= \frac{l_j}{3EI_j}; \\ \alpha_{t,j+1} &= \frac{l_{j+1}}{3EI_{j+1}}; & \alpha_{f,j+1} &= \frac{l_{j+1}}{6EI_{j+1}}. \end{aligned} \right\} \quad (30.5)$$

Hệ số ảnh hưởng  $\delta_{ij}$ , bằng góc xoay tương đối của các tiết diện về hai phía tại mỗi một đế, xác định theo qui ước dấu mới, có thể xác định theo công thức

$$\left. \begin{aligned} \delta_{j-2,j} &= -\frac{f_{j-1,j}}{l_{j-1}}; & \delta_{j+2,j} &= -\frac{f_{j+1,j}}{l_{j+1}}; \\ \delta_{j-1,j} &= \frac{l_j}{6EI_j} + \frac{f_{j-1,j} - f_{j,j}}{l_j} + \frac{f_{j-1,j}}{l_{j-1}}; \\ \delta_{j,j} &= \frac{l_j}{3EI_j} + \frac{l_{j+1}}{3EI_{j+1}} + \frac{f_{j,j} - f_{j-1,j}}{l_j} + \frac{f_{j,j} - f_{j+1,j}}{l_{j+1}}; \\ \delta_{j+1,j} &= \frac{l_{j+1}}{6EI_{j+1}} + \frac{f_{j+1,j} - f_{j-1,j}}{l_{j+1}} + \frac{f_{j+1,j}}{l_{j+2}}; \end{aligned} \right\} \quad (30.6)$$

trong đó,  $f_{ij}$  được xác định từ (30.4).

Để xác định số hạng  $\Delta_j$ , ta đặt tải trọng ngoài vào hệ cơ bản, với  $M_j = 0$ , và cũng xác định góc xoay tương đối của các tiết diện về hai phía của đế thứ  $j$ .

Sử dụng lại các ký hiệu trong §7, ta có thể tính độ lún của 3 đế kế tiếp nhau,  $f_{iq}$ , theo các công thức

<sup>1</sup> Các tiết diện đế trên các nhịp không biểu diễn trên hình vẽ, dưới tác dụng của tải trọng khảo sát, không xoay.

$$\left. \begin{aligned} f_{j-1,q} &= A_{j-1} [R_f(Q_{j-1}) + R_t(Q_j)]; \\ f_{i,q} &= A_j [R_f(Q_j) + R_t(Q_{j+1})]; \\ f_{j+1,q} &= A_{j+1} [R_f(Q_{j+1}) + R_t(Q_{j+2})]. \end{aligned} \right\} \quad (30.7)$$

Nếu ký hiệu  $\alpha_j(Q_j)$  và  $\alpha_j(Q_{j+1})$  là góc xoay do tải trọng trên nhịp thứ  $j$  và nhịp thứ  $j+1$ , ứng với đế thứ  $j$ , theo qui tắc dấu thông thường, ta có

$$\Delta_j = \alpha_j(Q_j) - \alpha_j(Q_{j+1}) + \frac{f_{j,q} - f_{j-1,q}}{l_j} + \frac{f_{j,q} - f_{j+1,q}}{l_{j+1}}. \quad (30.8)$$

Nếu các đế đỡ, từ đầu, không cùng nằm trên một độ cao và ký hiệu  $f_j^0$  - là độ lệch ban đầu khỏi đường trục của dầm, ta có

$$\delta_j^0 = \frac{f_j^0 - f_{j-1}^0}{l_j} + \frac{f_j^0 - f_{j+1}^0}{l_{j+1}}. \quad (30.9)$$

Ta có thể chứng tỏ một cách dễ dàng, rằng, hệ phương trình chính tắc thu được theo cách trên đây trùng với hệ phương trình 5 moment (7.1) mà ta đã lập được trước đây, trong trường hợp tổng quát, với sự có mặt của các đế đỡ trung gian đàn hồi. Trong trường hợp riêng, khi  $A_j = 0$ , ta thu được phương trình 3 moment.

Những điều trình bày trên đây cho thấy, khi chọn hệ cơ bản một cách thích hợp, có thể làm đơn giản bài toán khử siêu tĩnh rất nhiều, vì một loạt các hệ số của hệ phương trình chính tắc bằng 0. Trường hợp ngược lại, trong mỗi phương trình kết quả, có thể có mặt tất cả hoặc một số lớn các ẩn số, là các đại lượng siêu tĩnh cần tìm.

### **&31. PHƯƠNG TRÌNH CHÍNH TẮC CỦA PHƯƠNG PHÁP CHUYỂN VỊ.**

#### **PHƯƠNG PHÁP KẾT HỢP. PHƯƠNG PHÁP HỖN HỢP.**

Khi tính toán theo phương pháp lực, ta chọn hệ cơ bản, lập thành chỉ từ các phần tĩnh định và bao gồm trong đó các đại lượng siêu tĩnh, được coi như các lực ngoài.

Khi tính toán theo phương pháp chuyển vị, trong việc chọn hệ cơ bản, ngược lại, ta áp đặt thêm vào hệ các liên kết bổ sung, sao cho hệ cơ bản bao gồm các hệ siêu tĩnh cơ sở, mà với chúng, việc tính toán có thể tiến hành theo bảng hoặc các công cụ đơn giản khác.

Thông thường, các hệ siêu tĩnh cơ sở nói trên là các dầm một nhịp ngàm cứng trên hai đế không dịch chuyển. Trong một số trường hợp đặc biệt, để cho tiện lợi, hệ cơ sở trên có thể chọn là một hệ siêu tĩnh phức tạp hơn hoặc dầm một nhịp ngàm cứng một đầu và tựa tự do tại đầu kia.

Khi lập phương trình của phương pháp lực, ta cho chuyển vị tương ứng với các ẩn lực chưa biết bằng 0. Khi lập phương trình của phương pháp chuyển vị, ta cho phản lực của liên kết

bổ sung, tức các lực suy rộng, tương ứng với các chuyển vị suy rộng lựa chọn, bằng 0. Chẳng hạn, trong phương pháp chuyển vị góc, ta cho moment phản lực tác dụng lên các nút, bằng 0.

Nếu như trên kết cấu, tại vị trí của liên kết bổ sung, có ngoại lực tác dụng, thì các lực này cần được ghép cùng các ngoại lực. Ngoại lực được coi là dương khi nó thực hiện công dương trên chuyển vị dương.

Sử dụng biểu thức (26.1) và lặp lại các lập luận đã đưa ra trước đây, ta có phương trình chính tắc của phương pháp chuyển vị

$$\left. \begin{aligned} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + \dots + r_{1n}Z_n + r_{1q} &= 0; \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + \dots + r_{2n}Z_n + r_{2q} &= 0; \\ &\dots\dots\dots \\ r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + \dots + r_{nn}Z_n + r_{nq} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (31.1)$$

trong đó,  $r_{ij}$  – phản lực tại liên kết thứ  $i$  ứng với chuyển vị thứ  $j$  bằng đơn vị.

$r_{iq}$  – phản lực thứ  $j$  do tải trọng ngoài, còn gọi là *số hạng tải trọng*.

Các hệ số  $r_{ij}$  tuân thủ tính chất (26.2).

Ta hãy xét xem khi nào dùng phương pháp lực, khi nào dùng phương pháp chuyển vị. Về nguyên tắc, phương pháp được chọn để tính toán là phương pháp có số ẩn cần thiết cho việc khử siêu tĩnh là ít nhất. Mức độ phức tạp trong việc xác định các hệ số ảnh hưởng  $\delta_{ij}$  và  $r_{ij}$  cũng là yếu tố cần quan tâm. Nhiều khi, phương pháp có số ẩn lớn hơn nhưng để xác định các hệ số ảnh hưởng hơn là phương pháp được chọn chứ không phải phương pháp cần ít ẩn số hơn.

Số ẩn số của phương pháp lực được xác định bằng số bậc siêu tĩnh của hệ, trong đó, các ẩn lực thừa của hệ có thể bao gồm cả các phản lực liên kết thừa lẫn các yếu tố nội lực thừa. Số bậc siêu tĩnh là một yếu tố đặc trưng của hệ khảo sát, không phụ thuộc gì vào phương pháp tính được sử dụng đối với hệ này.

Số ẩn số của phương pháp chuyển vị được xác định bằng số liên kết bổ sung cần thiết đưa vào để biến hệ thành tập hợp các hệ siêu tĩnh cơ sở (đó là các dầm ngàm cứng hai đầu hoặc các hệ siêu tĩnh nào khác mà ta có thể xác định các yếu tố uốn một cách trực tiếp), tức phụ thuộc vào *số bậc động* của hệ.

Để làm ví dụ, ta xét một khung phẳng. Khi đó, mỗi một nút của khung, nếu không bị ngàm cứng, sẽ tương ứng với một bậc động đối với góc xoay. Đối với chuyển động tịnh tiến, việc xác định số bậc động thường được xác định trên cơ sở giả thiết không có sự giãn dài của các thanh và bỏ qua sự thay đổi khoảng cách giữa các nút của hệ khi uốn. Nếu giả thiết trên đây không được tuân thủ thì mỗi nút của khung phẳng có thể có 3 bậc động, tương ứng với một góc xoay và hai chuyển vị đường. Để xác định bậc động tương ứng chuyển vị đường, cần phân tích động học khung khảo sát. Với hệ có nhiều liên kết thừa, số bậc động nhỏ hơn số bậc siêu tĩnh nhiều. Ngược lại, kết cấu có số bậc động lớn thường có số bậc siêu tĩnh nhỏ và phương pháp lực nên được áp dụng.

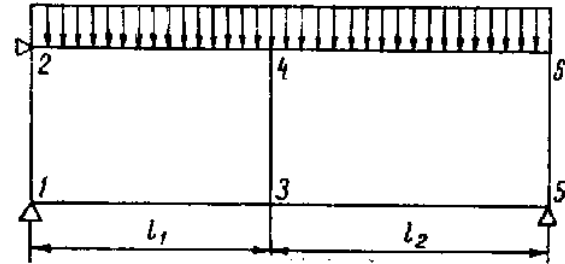
Bây giờ ta hãy xem xét việc xác định các hệ số của hệ phương trình (31.1). Phương pháp tổng quát xác định các hệ số này là như sau:

- (1). tất cả các chuyển vị, ngoài  $Z_j$ , đều đặt bằng 0;
- (2). nhận  $Z_j = 1$  và xác định các phản lực  $r_{ij}$  cho tất cả các liên kết thừa;
- (3). nhận  $Z_j = 0$ , đặt tải trọng ngoài vào hệ và xác định các số hạng  $r_{iq}$  – là các phản lực ứng với tải trọng ngoài cho trước, tác dụng lên hệ.

Để minh họa cho phương pháp trình bày trên đây, ta tiến hành thiết lập phương trình chính tắc của phương pháp chuyển vị cho khung, biểu diễn trên hình H5.12.

Chọn góc xoay các nút và chuyển vị thẳng đứng của nút 3, ký hiệu bởi  $Z_7$ , làm chuyển vị suy rộng. Đặt  $\alpha_j = Z_j$ .

Các hệ số  $r_{ij}$  với  $i \leq 6$  và  $j \leq 7$  cùng hệ số  $r_{iq}$  với  $i \leq 6$  được xác định nhờ sử dụng quan hệ cơ bản (10.3) của phương pháp chuyển vị góc



H5.12

$$M_{ij} = \overline{M}_{ij} - K_0 k_{ij} (2\alpha_i + \alpha_j - 3\varphi_{ij}), \quad (31.2)$$

trong đó,

$$K_0 = \frac{2EI_0}{l_0}; k_{ij} = \frac{I_{ij}}{I_0} \frac{l_0}{l_{ij}}. \quad (31.3)$$

Nếu ta qui ước coi moment phản lực là dương khi tác dụng ngược chiều kim đồng hồ, thì moment đầu thanh sẽ dương khi tác dụng theo chiều kim đồng hồ và xác định theo công thức

$$M_{ij} = -\overline{M}_{ij} + K_0 k_{ij} (2\alpha_i + \alpha_j - 3\varphi_{ij}). \quad (31.4)$$

Các hệ số  $r_{ij}$  khi  $i \leq 6$  &  $j \leq 6$  được xác định theo công thức ( $\alpha_i = \varphi_{ij} = 0$ ;  $\overline{M}_{ij} = 0$ ;  $\alpha_j = 1$ )

$$r_{ij} = K_0 k_{ij}, \quad (31.5)$$

còn các hệ số  $r_{ii}$  khi  $i \leq 6$  – tính theo công thức ( $\alpha_j = \varphi_{ij} = 0$ ;  $\overline{M}_{ij} = 0$ ;  $\alpha_i = 1$ )

$$r_{ii} = 2K_0 \sum_j k_{ij}, \quad (35.6)$$

trong đó, tổng được lấy theo  $j$ , ứng với số thứ tự các nút quanh điểm  $i$ .

Số hạng tải trọng,  $r_{iq}$ , khi  $i \leq 6$  được xác định theo công thức ( $\alpha_i = \alpha_j = \varphi_{ij} = 0$ )

$$r_{iq} = - \sum_j \overline{\overline{M}}_{ij}. \quad (31.7)$$

Để xác định số hạng  $r_{i7}$  với  $i \leq 6$ , theo công thức (31.6), đặt  $\alpha_i = \alpha_j = 0$ ,  $\overline{\overline{M}}_{ij} = 0$ ; và biểu diễn góc lệch  $\varphi_{ij}$  qua chuyển vị đơn vị  $Z_7 = 1$  của nút 3. Một cách hiển nhiên là

$$\varphi_{12} = \varphi_{34} = \varphi_{56} = 0; \quad \varphi_{13} = \varphi_{24} = \frac{1}{l_1};$$

$$\varphi_{35} = \varphi_{46} = -\frac{1}{l_2}; \quad l_{13} = l_{24} = l_1; \quad l_{46} = l_{35} = l_2.$$

Vì thế cho nên

$$\left. \begin{aligned} r_{17} &= -\frac{3K_0}{l_1} k_{13}; & r_{27} &= -\frac{3K_0}{l_1} k_{24}; & r_{37} &= 3K_0 \left( -\frac{k_{13}}{l_1} + \frac{k_{35}}{l_2} \right); \\ r_{47} &= 3K_0 \left( -\frac{k_{24}}{l_1} + \frac{k_{46}}{l_2} \right); & r_{57} &= \frac{3K_0}{l_1} k_{37}; & r_{67} &= \frac{3K_0}{l_2} k_{46}. \end{aligned} \right\} \quad (31.8)$$

Như vậy là ta chỉ còn cần xác định hệ số  $r_{77}$  và số hạng tải trọng  $\Delta_7$ .

Chiều dương của moment để ta chọn, trùng với chiều dương của góc xoay, theo chiều kim đồng hồ, tức moment để dương sẽ thực hiện công dương trên chuyển vị xoay dương, phù hợp với qui ước dấu trong phương pháp năng lượng. Cũng theo qui ước này, ta phải chọn lực cắt là dương khi chúng thực hiện công dương trên chuyển vị dương  $Z_7$ .

Đối với dầm biểu thị trên hình H5.13 quan hệ giữa chuyển vị đầu mút dầm và lực  $P$  được xác định theo biểu thức

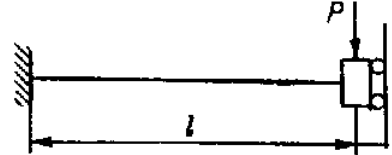
$$f = \frac{Pl^3}{12EI} \quad (31.9)$$

Vì thế cho nên

$$r_{77} = \frac{12EI_0}{l_0^3} (k'_{24} + k'_{13} + k'_{46} + k'_{35}), \quad (31.10)$$

$$\text{trong đó, } k'_{ij} = \frac{I_{ij}}{I_0} \left( \frac{l_0}{l_{ij}} \right)^3. \quad (31.11)$$

H5.13



Ý nghĩa vật lý của  $r_{77}$  rất đơn giản, đó chính là tổng hình chiếu tất cả các lực tác dụng vào thanh 3-4, lên phương nằm ngang, trong điều kiện tất cả các góc xoay đều bằng 0.

Còn đối với số hạng tải trọng,  $\Delta_7$ , ta có thể xác định theo công thức



$$\Delta_7 = \frac{1}{2}q(l_1 + l_2). \quad (31.12)$$

Như vậy là ta đã xác định được tất cả các hệ số của phương trình chính tắc cần tìm.

Tất nhiên là cũng có thể tiến hành tìm các hệ số theo một trình tự khác, chẳng hạn, có thể bắt đầu từ các hệ số liên quan đến chuyển vị cuối cùng, chuyển vị thứ 7, trước. Tuy nhiên, cách này kém phần trực giác hơn cách mà ta thực hành trên đây.

Để các định các hệ số ảnh hưởng và số hạng tải trọng, có thể sử dụng định lý Lagrange . Khi đó, cần khảo sát biểu đồ moment uốn, không phải do các lực đơn vị gây ra, mà là do các chuyển vị đơn vị gây ra.

Nếu như khung còn có tính đối xứng thì, để giảm khối lượng tính toán, nên phân tải trọng ra thành hai thành phần đối xứng và phản xứng.

Việc tính khung chịu tải trọng đối xứng, phương pháp chuyển vị sẽ cho đòi hỏi ít số phương trình cần thiết nhất, còn với tải trọng phản xứng, đó là phương pháp lực. Do đó, khi tính khung đối xứng, nên dùng *phương pháp kết hợp*. Với một số khung phức tạp, nhiều khi sẽ lợi hơn nếu sử dụng cả hai phương pháp, khi đó, bộ phận này của kết cấu, dùng phương pháp lực trong khi bộ phận khác, dùng phương pháp chuyển vị, và như vậy, khi thiết lập hệ cơ bản, đồng thời với việc giải phóng các liên kết ở bộ phận này, lại cần phải bổ sung các liên kết ảo tại bộ phận khác của khung, tức có thể sử dụng *phương pháp hỗn hợp*. Khi đó, đồng thời với việc xác định các hệ số ảnh hưởng của lực đến chuyển vị,  $\delta_{ij}$ , và hệ số ảnh hưởng của chuyển vị đến lực,  $r_{ij}$ , còn cần phải xác định các hệ số ảnh hưởng của chuyển vị đến chuyển vị  $\delta'_{ij}$ , và hệ số ảnh hưởng của lực đến lực,  $r'_{ij}$ . Các số hạng tải trọng, trong từng trường hợp cụ thể, có thể mang ý nghĩa của phương pháp lực hoặc của phương pháp chuyển vị, và được xác định theo một trong các cách tương ứng, đã trình bày trên đây, cho từng phương pháp.

Cũng giống như đã làm trên đây, nếu ta chọn hướng lực dương và chuyển vị dương sao cho, công của lực dương trên chuyển vị dương là dương, thì giữa các hệ số ảnh hưởng  $\delta_{ij}$  và  $r'_{ij}$  tồn tại quan hệ tương đồng  $\delta_{ij} = r'_{ji}$ . (31.13)

CHƯƠNG VI

UỐN PHỨC TẠP - ỔN ĐỊNH CỦA THANH VÀ  
HỆ THANH ĐƠN GIẢN

**&32. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN UỐN PHỨC TẠP VÀ TÍCH PHÂN CỦA NÓ.**

Ta gọi uốn phức tạp của thanh là hiện tượng uốn, mà trong đó, thanh chịu tác động đồng thời của tải trọng ngang và ứng lực kéo hoặc nén dọc tâm<sup>1</sup>. trường hợp nén thanh có độ cong ngang ban đầu cũng được coi là uốn phức tạp.

Trong các kết cấu thân tàu, có rất nhiều thanh (dầm) chịu uốn phức tạp trong quá trình khai thác. Chẳng hạn như, các nẹp dọc đáy, vừa chịu tác dụng của tải trọng ngang dưới dạng áp lực của nước dưới đáy, còn chịu ứng lực dọc xuất hiện do uốn chung, vì nẹp dọc đáy là một kết cấu thuộc thành phần của thanh tương đương, tham gia vào uốn chung thân tàu. Trạng thái của tấm đáy tàu cũng tương tự.

Ảnh hưởng của lực dọc đến các yếu tố uốn (như độ võng, moment nội lực) là khác nhau, tức, trong nhiều trường hợp, ảnh hưởng này nhỏ, có thể bỏ qua, trong khi trong một số trường hợp khác lại không thể bỏ qua.

Nếu bỏ qua ảnh hưởng trượt, là điều cho phép thực hiện trong đại đa số các bài toán mà ta quan tâm, thì phương trình vi phân uốn phức tạp có thể nhận được từ phương trình (14.16), khi cho  $k_0 = 0$ , tức

$$EIw^{IV} - Tw'' = q(x), \quad (32.1)$$

còn tích phân tổng quát của nó có thể viết dưới dạng

$$w_{tg} = A_0 + A_1 kx + A_2 ch kx + A_3 sh kx, \quad (32.2)$$

trong đó,  $A_1, A_0$  – là các hằng số tùy ý, còn

$$k = \sqrt{\frac{T}{EI}}. \quad (32.3)$$

Không đề cập đến việc tìm nghiệm riêng của phương trình (32.1) trong trường hợp tổng quát, khi  $q(x)$  là hàm bất kỳ, ta tìm nghiệm riêng này cho trường hợp quan trọng nhất trong ứng dụng, đó là khi cường độ tải trọng ngang biến đổi tuyến tính

$$q(x) = q_0 + mx.$$

Bằng phép thế trực tiếp, có thể khẳng định, trong trường hợp này,

$$w_r = -\frac{q_0 x^2}{2T} - \frac{mx^3}{6T}. \quad (32.4)$$

Nếu lực dọc là nén, thì trong các công thức trên đây, cần đặt

---

<sup>1</sup> Trạng thái uốn nói trên, đôi khi còn gọi là *uốn dọc-ngang*.

$$T = -T^*, \quad (32.5)$$

trong đó,  $T^*$  là giá trị tuyệt đối của lực nén.

Tích phân tổng quát của phương trình thuần nhất, trong trường hợp này, có dạng sau đây

$$w_{tq} = B_0 + B_1 k^* x + B_2 \cos k^* x + B_3 \sin k^* x, \quad (32.6)$$

trong đó,

$$k = \sqrt{\frac{T^*}{EI}} \quad (32.7)$$

Còn nghiệm riêng, có thể biến đổi về dạng

$$w_r = \frac{q_0 x^2}{2T^*} + \frac{mx^3}{6T^*}. \quad (32.8)$$

Chú ý rằng, nếu như đối với một thanh nào đó, đã có lời giải cho bài toán trong trường hợp lực dọc là kéo, thì lời giải này cũng dùng được trong trường hợp lực dọc là nén, bằng việc thay  $k = ik^*$  vào các công thức kết quả.

Trong các bài toán uốn phức tạp, độ võng ban đầu có ảnh hưởng rất lớn đến các yếu tố uốn.

Nếu như trong trạng thái không chịu lực, thanh không lệch nhiều so với đường thẳng, thì ta nói là *thanh có độ võng ban đầu nhỏ*. Ký hiệu độ võng ban đầu của thanh là  $w_0$  và qui ước độ võng này là dương khi nó hướng theo hướng dương của trục  $z$ . Trường hợp này, cường độ tải trọng bổ sung do lực dọc không phải là  $Tw''$  mà là  $T(w'' + w_0'')$ . Như vậy là, việc tính đến độ võng ban đầu dẫn đến việc thay cường độ tải trọng ngang  $q(x)$  trong phương trình (32.1) bằng cường độ thay thế:

$$q^*(x) = q(x) + Tw_0''; \quad (32.9)$$

(trong trường hợp tác dụng nén, thay  $T = -T^*$ .)

Trong trường hợp uốn phức tạp, một số điều kiện biên sẽ khác với trường hợp uốn ngang, do lực dọc đã làm nảy sinh các tải trọng ngang bổ sung khi xoay các tiết diện ngang đầu thanh trong uốn phức tạp.

Ta khảo sát các trường hợp, khi đầu thanh là ngàm cứng và khi đầu thanh ngàm đàn hồi. Giả sử  $\mathcal{U}_1$  và  $\mathcal{U}_2$  – là các hệ số mềm ngàm, tương ứng tại đế bên trái và đế bên phải, còn  $A^{(1)}$  và  $A^{(2)}$  – là các hệ số mềm đế đỡ đàn hồi tại các tiết diện nói trên. Khi đó, tại đế trái,  $x = 0$ , có thể viết điều kiện biên thứ nhất dưới dạng:

$$w' = \mathcal{U}_1 EI w'', \quad (32.10)$$

tức, mối quan hệ giữa góc xoay và moment uốn vẫn bảo toàn như trong trường hợp uốn ngang.

Điều kiện biên thứ 2, biểu thị quan hệ giữa chuyển vị để đỡ và lực cắt:

tại  $x = 0$ :

$$w = A^{(1)} [T(w'_0 + w') - EIw''] \quad (32.11)$$

Số hạng thứ nhất trong móc vuông của (32.11) là lực cắt bổ sung, bằng hình chiếu của lực dọc lên mặt phẳng tiết diện ngang của thanh.

Tại tiết diện để phải,  $x = l$ , có thể viết:

$$\left. \begin{aligned} w' &= -\mathcal{U}_2 EIw''; \\ w &= A^{(2)} [-T(w'_0 + w') + EIw''] \end{aligned} \right\} \quad (32.12)$$

Từ các quan hệ (32.10) và (32.11) ta có thể có được điều kiện biên cho một số trường hợp đơn giản. Chẳng hạn, nếu đầu mút của thanh là hoàn toàn tự do,  $\mathcal{U} = \infty$ ;  $A = \infty$ , và ta có

$$EIw'' = 0; EIw''' = T(w'_0 + w'). \quad (32.13)$$

Điều kiện thứ 2 của (32.13) biểu thị một điều hiển nhiên, là tại đầu dầm tự do, hình chiếu của lực dọc lên mặt phẳng tiết diện ngang chính bằng lực cắt trên tiết diện này.

Trong các quan hệ (32.11), (32.12), (32.13), lực dọc chính là lực kéo. Trong trường hợp tác dụng của lực nén, cần thay biến  $T = -T^*$ .

### **&33. NHỮNG LỜI GIẢI CƠ BẢN CỦA BÀI TOÁN UỐN PHỨC TẠP DẦM MỘT NHỊP.**

#### **1. Thanh tựa tự do, chịu tải trọng ngang phân bố đều.**

Vì lý do đường đàn hồi của thanh khảo sát đối xứng đối với điểm giữa nhịp., nên ta cho ngay điểm giữa nhịp này làm gốc toạ độ.

Cũng vì tính đối xứng của đường đàn hồi nên trong dạng tích phân tổng quát của phương trình vi phân (39.1) chỉ giữ lại H6.1

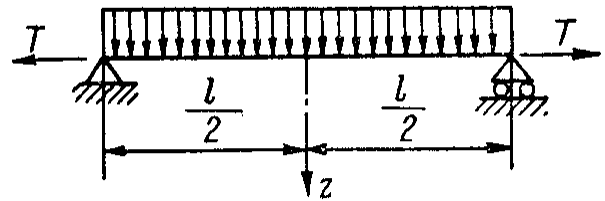
các hàm chẵn. Khi đó,

$$w = -\frac{qx^2}{2T} + A_0 + A_2 \cosh kx. \quad (33.1)$$

Các hằng số tích phân  $A_0$  và  $A_2$  được xác định từ điều kiện biên của một đầu dầm. Khi  $x = +0,5l$ , có

$$w = 0; w'' = 0 \quad (33.2)$$

Buộc (33.1) thoả mãn các điều kiện biên (33.2) với chú ý rằng  $T = EI k^2$ , ta có



$$A_0 = \frac{q}{EI k^2} \left( \frac{k^2 l^2}{8} - 1 \right); A_2 = \frac{q}{EI k^4} \frac{1}{ch \frac{kl}{2}}.$$

Ta sử dụng ký hiệu  $u = \frac{kl}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T}{EI}}.$  (33.3)

Sau khi thay các hằng số tích phân vừa tìm được vào biểu thức (33.1) và với ký hiệu (33.3), ta có

$$w = \frac{ql^2}{EI(2u)^4} \left[ \frac{chkx}{chu} - 1 + \frac{1}{2}(u^2 x^2) \right]. \quad (33.4)$$

Đạo hàm biểu thức (33.4), ta có biểu thức xác định góc xoay của tiết diện ngang

$$w' = \frac{ql^3}{EI(2u)^3} \left( \frac{shkx}{chu} - kx \right). \quad (33.5)$$

Đại lượng moment uốn trên tiết diện ngang bất kỳ được xác định theo công thức

$$M = EI w'' = \frac{ql^2}{(2u)^2} \left( \frac{chkx}{chu} - 1 \right). \quad (33.6)$$

Khi tính toán các thanh khảo sát, các yếu tố uốn sau đây được quan tâm hơn cả: độ võng tại giữa nhịp, moment uốn tại tiết diện giữa nhịp và góc xoay tại các tiết diện đế. Tương ứng, ta có các công thức sau đây:

$$\left\{ \begin{array}{l} w(0) = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI} \frac{24}{5u^4} \left( \frac{u^2}{2} + \frac{1}{chu} - 1 \right); \\ M(0) = - \frac{ql^2}{8} \frac{2}{u^2} \left( 1 - \frac{1}{chu} \right); \\ w'(\pm 0,5l) = \mp \frac{ql^3}{24EI} \frac{3}{u^3} (u - thu). \end{array} \right. \quad (33.7)$$

Như đã thấy từ các công thức trên đây, công thức xác định các yếu tố uốn của dầm trong trường hợp khảo sát khác với các công thức trong trường hợp uốn ngang bởi một thừa số, phụ thuộc vào đối số uốn phức tạp  $u$ . Thừa số này được gọi là *hàm uốn phức tạp*, được đưa ra và được lập thành bảng, lần đầu tiên, bởi I.G. Bubnov.

Đưa vào các ký hiệu tương ứng, các công thức (33.7) có thể được biểu diễn dưới dạng:

$$w(0) = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI} f_0(u); \quad (33.8)$$

$$M(0) = -\frac{ql^2}{8} \varphi_0(u); \quad (33.9)$$

$$w'(\pm 0, 5l) = \mp \frac{ql^3}{24EI} \psi_0(u). \quad (33.10)$$

Các công thức (33.8), (33.9), (33.10) cho thấy rằng các hàm I.G. Bubnov chính là hàm tính đến ảnh hưởng của lực dọc, đến độ võng giữa nhịp, moment uốn lớn nhất và góc xoay tại các tiết diện đế. Hiển nhiên là, khi  $T = 0$ , tức  $u = 0$ , tất cả các hàm trên đều có giá trị bằng đơn vị (tức bằng 1). Điều này có thể xác minh được một cách dễ dàng khi ta khai triển theo chuỗi McLoren các hàm  $1/\text{chu}$  và  $\text{thu}$ . Khi  $u > 0$ , các hàm trên đây giảm và nhỏ hơn đơn vị.

Trong trường hợp tác dụng của lực nén, ta cũng thu được các quan hệ tương tự như trên, nhưng thay cho các hàm  $f_0(u)$ ,  $\varphi_0(u)$  và  $\psi_0(u)$  tương ứng sẽ là các hàm  $f^*_0(u^*)$ ,  $\varphi^*_0(u^*)$  và  $\psi^*_0(u^*)$ , trong đó:

$$u^* = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T^*}{EI}} \quad (33.11)$$

Ta không dẫn ra ở đây các biểu thức của các hàm này, nhưng cần lưu ý rằng, khi  $u^* = 0$ , chúng đều có giá trị bằng đơn vị, và lớn hơn đơn vị khi  $u^* > 0$ . Điều này chứng tỏ rằng, tác dụng nén làm tăng tất cả các yếu tố uốn của thanh so với khi  $T^* = 0$ .

Khi  $u^* = \pi/2$ , tất cả các hàm trên đây đều trở thành vô cùng, tương ứng với trạng thái mất ổn định của thanh một nhịp, tựa tự do mà ta đang khảo sát, khi mà lực nén đạt giá trị:

$$T^* = \frac{\pi^2 EI}{l^2}.$$

Sự việc các yếu tố uốn của thanh biến thành vô hạn khi thanh mất ổn định không nên hiểu theo nghĩa máy móc của từ ngữ, vì đó chỉ là kết quả ta nhận được khi sử dụng lý thuyết gần đúng về uốn các dầm, mà lý thuyết này dựa trên cơ sở của giả thiết biến dạng bé, và do đó, chỉ tin cậy đối với các biến dạng bé mà thôi.

Khi biến dạng tăng, đạt giá trị lớn, lý thuyết gần đúng trên đây không còn đúng nữa, và để có được các kết quả chính xác, cần sử dụng lý thuyết uốn dầm có độ võng lớn. Ngoài ra, khi biến dạng là lớn, cần tính đến tính chất không tuyến tính của quan hệ giữa biến dạng và ứng suất.

Trong các kết cấu thân tàu, biến dạng lớn rất khó xuất hiện, vì sự có mặt trên đó các kết cấu chống lại sự xích lại gần nhau của các đế đỡ, và vì thế cho nên trong trường hợp này, các kết luận của lý thuyết gần đúng về uốn phức tạp là có thể chấp nhận được trên thực tế.

Ở đây, cần nêu ra một chú ý quan trọng: Khi uốn phức tạp, trong điều kiện các lực dọc không còn là không đổi, mà tăng theo sự tăng của tải trọng ngang, các yếu tố uốn thanh tăng

không tỉ lệ theo sự tăng tải trọng ngang, tức không tồn tại mối quan hệ tuyến tính giữa các yếu tố uốn và tải trọng, ngay cả khi giả thiết rằng định luật Hooke vẫn còn nghiệm đúng. Điều này có thể nghiệm thấy qua việc xem xét các quan hệ về uốn dầm thu được trên đây.

Khi tác dụng là kéo, các yếu tố uốn dầm tăng chậm hơn các tải trọng ngang và lực dọc, còn khi tác dụng là nén, sự tăng của các yếu tố uốn là nhanh hơn. Như vậy, hệ khảo sát, trong các điều kiện trên đây, không là hệ biến dạng tuyến tính., và nói chung, không thể áp dụng được nguyên tắc cộng tác dụng lực trong bài toán uốn phức tạp.

*Nguyên tắc cộng tác dụng lực chỉ áp dụng được cho bài toán uốn phức tạp trong trường hợp riêng, khi lực dọc không thay đổi giá trị của nó và không phụ thuộc vào giá trị của tải trọng ngang và vào biến dạng của thanh.*

## **2. Thanh ngàm cứng, chịu tải trọng ngang rải đều.**

Do tính đối xứng, trong trường hợp khảo sát, gốc toạ độ được chọn là điểm giữa nhịp dầm, tích phân tổng quát của phương trình vi phân, được biểu thị dưới dạng (33.1), như trong ví dụ đã đưa ra trên đây.

Các hằng số tích phân được xác định từ các điều kiện biên:

$$\text{Với } x = 0,5l \quad w = 0; \quad w' = 0. \quad (33.12)$$

Bỏ qua các dẫn dắt trung gian, ta viết ngay biểu thức đường đàn hồi của thanh khảo sát

$$w = \frac{ql^4}{EI(2u)^4} \left( \frac{u^2 - kx^2}{2} + \frac{uchkx}{shu} - \frac{u}{thu} \right). \quad (33.13)$$

Moment uốn tại tiết diện ngang bất kỳ sẽ là

$$M = EIw'' = \frac{ql^2}{(2u)^2} \left( \frac{uchkx}{shu} - 1 \right). \quad (33.14)$$

Trên cơ sở của công thức (33.1), với  $x = 0$ , ta có

$$w(0) = \frac{ql^4}{384u^3} \left( \frac{u}{2} - th \frac{u}{2} \right) = \frac{ql^4}{384} f_1(u). \quad (33.15)$$

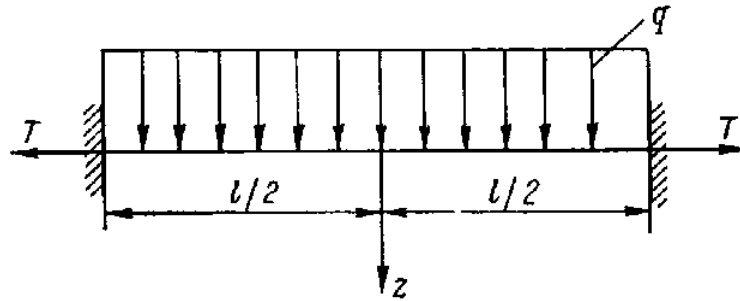
Moment uốn tương ứng tại các tiết diện đế và tại giữa nhịp :

$$M(\pm 0,5l) = \frac{ql^2}{12} \chi(u); \quad (33.16)$$

$$M(0) = -\frac{ql^2}{24} \varphi_1(u). \quad (33.17)$$

Các hàm  $f_1(u)$ ,  $\chi(u)$  và  $\varphi_1(u)$  cũng được đưa ra bởi I.G. Bubnov và cũng có ý nghĩa chỉ ra ảnh hưởng của lực kéo dọc đến các yếu tố uốn tương ứng của dầm. Với tác dụng của lực nén

đọc, ta cũng thu được các công thức tương tự, nhưng thay cho các hàm  $f_1(u)$ ,  $\chi(u)$  và  $\varphi_1(u)$ , phải là các hàm  $f_1^*(u^*)$ ,  $\chi^*(u^*)$  và  $\varphi_1^*(u^*)$ .



H6.2

Tất cả các hàm phụ trợ trên đây cho tính toán uốn phức tạp đều được lập bảng và cho sẵn trong các sổ tay kỹ thuật. Việc khảo sát các bảng trên đây cho phép ta kết luận rằng, dầm ngàm cứng hai đầu ít nhạy cảm trước ảnh hưởng của lực dọc hơn so với dầm tựa tự do hai đầu.

Ví dụ, với  $u = 2,0$

$$f_0(2) = 0,380; \quad f_1(2) = 0,715$$

$$\varphi_0(2) = 0,367; \quad \varphi_1(2) = 0,673;$$

$$\chi_2(2) = 0,806,$$

tức, các yếu tố uốn của dầm ngàm cứng chịu kéo giảm đi ít hơn so với dầm tựa tự do hai đầu.

Nếu lực dọc là nén, thì tất cả các hàm phụ trợ đối với dầm ngàm cứng sẽ tiến đến vô cùng, không phải tại  $u^* = \pi/2$ , mà tại  $u^* = \pi$ , tương ứng với trạng thái mất ổn định

$$T^* = \frac{4\pi^2 EI}{l^2} \quad (33.18)$$

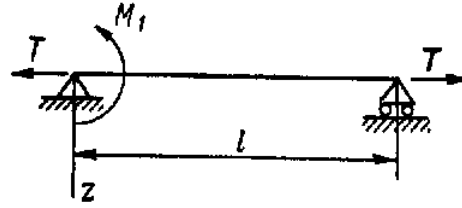
### **3. Dầm tựa tự do, chịu tác dụng của moment tại tiết diện đế.**

Ta khảo sát dầm tựa tự do hai đầu, chịu tác dụng của một moment  $M_1$  tại một tiết diện đế và lực kéo lực dọc  $T$  (H6.3).

Vì trong trường hợp khảo sát,  $q(x) = 0$ , nên tích phân tổng quát của phương trình vi phân (32.1) được viết dưới dạng (32.2):



$$\left. \begin{array}{l} \text{khi } x = 0: \quad w = 0; \\ \quad \quad \quad EIw'' = M_1; \\ \text{khi } x = l \quad w = 0; \\ \quad \quad \quad w'' = 0. \end{array} \right\} \quad (33.19)$$



Buộc biểu thức (32.2) thỏa mãn điều kiện biên (33.19), có thể tìm được tất cả các hằng số tùy ý. H6.3

Bỏ qua các dẫn dắt trung gian, chỉ đưa ra ở đây biểu thức của đường đàn hồi:

$$w = \frac{Ml^2}{EI(2u)^2} \left[ \frac{shk(l-x)}{sh2u} - \frac{k(l-x)}{2u} \right]. \quad (33.20)$$

Moment uốn tại một tiết diện ngang bất kỳ:

$$M = M_1 \frac{shk(l-x)}{sh2u}. \quad (33.21)$$

Ta nhận thấy rằng, trong trường hợp uốn phức tạp, quan hệ giữa mô men uốn và hoành độ  $x$  không còn là tuyến tính như trong trường hợp không có lực dọc  $T$  [khi  $T = 0$ ;  $M = M_1(l-x)/l$ ], mà là một đường cong, có tung độ biến đổi theo qui luật  $shk(l-x)$ .

Để tiện cho các ứng dụng sau này, ta đưa ra ở đây công thức xác định góc xoay các tiết diện đế của thanh.

Sử dụng công thức (33.20), ta có:

$$w' = - \frac{M_1 l}{EI 2u} \left[ \frac{chk(l-x)}{sh2u} - \frac{1}{2u} \right]. \quad (33.22)$$

Góc xoay tiết diện đế trái được xác định theo biểu thức

$$w'(0) = - \frac{M_1 l}{EI 2u} \left( \frac{1}{th2u} - \frac{1}{2u} \right),$$

hay, thể hiện ở một dạng khác:

$$w'(0) = - \frac{M_1 l}{3EI} \frac{3}{2u} \left( \frac{1}{th2u} - \frac{1}{2u} \right), \quad (33.23)$$

Tại  $x = l$ , có

$$w'(l) = - \frac{M_1 l}{6EI} \frac{6}{2u} \left( \frac{1}{2u} - \frac{1}{sh2u} \right). \quad (33.24)$$

Ký hiệu:

$$\psi_1(u) = \frac{3}{2u} \left( \frac{1}{th2u} - \frac{1}{2u} \right); \quad (33.25)$$

$$\psi_2(u) = \frac{6}{2u} \left( \frac{1}{2u} - \frac{1}{sh2u} \right), \quad (33.26)$$

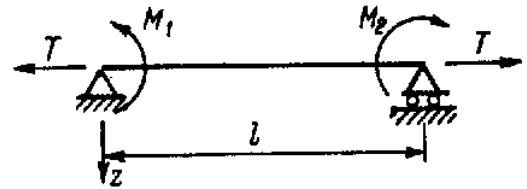
Có thể viết lại biểu thức (33.23) và (33.24) dưới dạng sau:

$$\left. \begin{aligned} w'(0) &= -\frac{M_1 l}{3EI} \psi_1(u); \\ w'(l) &= \frac{M_1 l}{6EI} \psi_2(u). \end{aligned} \right\} \quad (33.27)$$

Giả thiết rằng lực  $T$  là không đổi, và sử dụng qui tắc cộng tác dụng lực, ta tìm được công thức góc xoay tiết diện để cho trường hợp dầm tựa tự do hai đầu, chịu tác dụng của các moment để  $M_1$  và  $M_2$  (H6.4)

$$\left. \begin{aligned} w'(0) &= -\frac{M_1 l}{3EI} \psi_1(u) - \frac{M_2 l}{6EI} \psi_2(u); \\ w'(l) &= \frac{M_1 l}{6EI} \psi_2(u) + \frac{M_2 l}{3EI} \psi_1(u). \end{aligned} \right\} \quad (33.28)$$

Trong trường hợp lực dọc là nén, góc xoay tiết diện để cũng được viết dưới dạng tương tự, nhưng, thay cho các hàm  $\psi_1(u)$  và  $\psi_2(u)$ , sử dụng các hàm:



H6.4

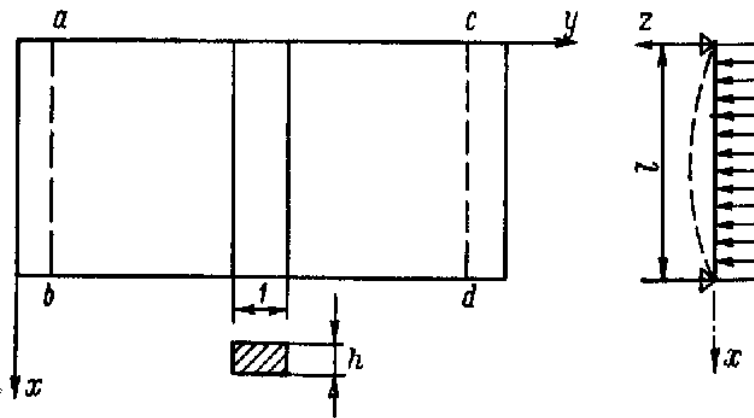
$$\left. \begin{aligned} \psi_1^*(u^*) &= \frac{3}{2u^*} \left( \frac{1}{2u^*} - \frac{1}{th2u^*} \right); \\ \psi_2^*(u^*) &= \frac{6}{2u^*} \left( \frac{1}{sinu^*} - \frac{1}{2u^*} \right). \end{aligned} \right\} \quad (33.29)$$

Ảnh hưởng của uốn phức tạp đối với các thanh trong kết cấu thân tàu là không lớn vì thường thì chúng có độ cứng khá lớn nên đối số  $u$  là rất bé. Tuy nhiên, với các tấm trong kết cấu tàu thủy thì khác. Khi đó, trong nhiều trường hợp, ảnh hưởng này là không thể bỏ qua.

### &34. UỐN PHỨC TẠP CÁC TẤM CHỊU UỐN CONG THEO MẶT TRỤ.

Trong kết cấu thân tàu, thường sử dụng rất nhiều tấm mỏng, tựa trên vành đế hình chữ nhật. Nói chung, khi chịu uốn, các tấm này bị cong theo hai chiều. Tuy nhiên, trong các trường hợp riêng, khi mà một kích thước trong mặt phẳng tấm nhỏ hơn nhiều so với kích thước còn lại, đồng thời, tải trọng ngang phân bố đều dọc theo cạnh dài, mặt trung bình của tấm sẽ bị uốn cong theo mặt trụ. Trên thực tế, điều này xảy ra khi tỉ số giữa hai cạnh của vành đế là lớn hơn 3.

Ta hãy khảo sát tấm có chiều dày  $h$  không đổi, tựa trên vành đế cứng hình chữ nhật, với các kích thước là  $a$  và  $l$ , với  $a \gg l$  (H6.5). Giả thiết thêm rằng, tấm chịu tác dụng của tải trọng rải đều, với áp lực trên một đơn vị diện tích là  $p$ .



H6.5

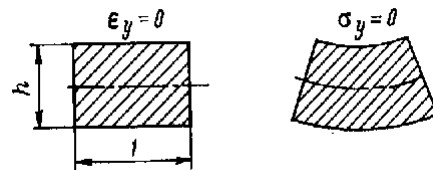
Dĩ nhiên, dạng uốn của tấm trên đây, trừ vùng lân cận hai cạnh ngắn, giới hạn bằng các đường gián đoạn  $ab$  và  $cd$ , có thể coi là theo mặt trụ, tức, mặt đàn hồi của tấm sẽ không cong trong mặt phẳng  $yOz$ . Sự uốn của tấm nói trên được đặc trưng bởi uốn một *dãi- dầm* (dầm bản) bất kỳ, giả tưởng được tách ra từ tấm khảo sát, như thể hiện trên hình H6.5.

Khác biệt duy nhất trong điều kiện uốn dầm-bản tách ra từ tấm và dầm biệt lập (tự do) là dầm-bản chịu kiểm chế sự biến đổi hình dáng tiết diện ngang, do ảnh hưởng của các dầm-bản kế cận (H6,6).

Việc tiết diện ngang không thay đổi hình dáng (chữ nhật) tương đương với điều kiện biến dạng dài theo phương  $Oy$  bằng 0, tức:

$$\epsilon_y = 0.$$

Sử dụng biểu thức quen thuộc của định luật Hooke cho trạng thái ứng suất phẳng:



H6.6

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu \sigma_y); \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu \sigma_x); \end{aligned} \right\} \quad (34.1)$$

Trong đó:

$\sigma_x$  – ứng suất pháp trên tiết diện ngang, vuông góc với trục Ox, của dầm-bản;

$\sigma_y$  – ứng suất pháp trên tiết diện dọc, vuông góc với trục Oy;

$\nu$  - hệ số Poisson.

Khi  $\varepsilon_y = 0$ , ta có:

$$\sigma_y = \nu \sigma_x. \quad (34.2)$$

Sau khi thay (34.2) vào (34.1), ta thu được :

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu^2 \sigma_x) = \frac{1 - \nu^2}{E} \sigma_x. \quad (34.3)$$

Ký hiệu

$$E_1 = \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad (34.4)$$

Ta thấy ngay rằng, với dầm bản, trong thành phần của tấm, giữa ứng suất do uốn và biến dạng đường của các sợi vật chất dọc của nó tồn tại mối quan hệ, như đối với dầm biệt lập, khác biệt duy nhất chỉ là, mô đun đàn hồi  $E$  được thay bằng mô đun đàn hồi thay thế  $E_1$ , xác định theo công thức (34.4) . Vì  $E_1 > E$ , nên dầm-bản trong thành phần của tấm là cứng hơn dầm-bản tự do.

Trong phần tiếp theo, ta sẽ khảo sát cho dầm-bản có chiều rộng bằng đơn vị. tương ứng với điều này, tất cả các ứng lực trên tiết diện ngang của tấm, uốn theo mặt trụ khảo sát đều phải được tính cho một đơn vị chiều rộng.

Vì moment quán tính tiết diện dầm-bản đơn vị (chiều rộng) bằng:

$$I = \frac{1 \cdot h^3}{12},$$

Nên uốn của dầm-bản sẽ là:

$$D = E_1 I = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)}. \quad (34.5)$$

Độ cứng, xác định theo công thức (34.5), được gọi là *độ cứng trụ* của tấm. Đại lượng này chính là độ cứng của dầm-bản, trong thành phần của tấm, có chiều rộng bằng đơn vị. Việc tính toán dầm chịu uốn cong theo mặt trụ đưa về tính uốn dầm tự do , với độ cứng uốn bằng độ cứng trụ của tấm khảo sát.

Nếu tấm chịu uốn phức tạp, cong theo mặt trụ, thì phương trình vi phân uốn tấm có thể viết dưới dạng

$$Dw^{IV} - Tw'' = p, \quad (34.6)$$

Trong đó:

$T$  – lực dọc tác dụng lên dầm-bản có chiều rộng bằng đơn vị;

$p$  – cường độ tải trọng ngang (áp suất).

Giả sử  $p_t$  – là ứng suất tác dụng trên mặt trung bình của tấm, dương khi kéo. Khi đó,

$$T = p_t h. \quad (34.7)$$

Như trên đã thấy, việc khảo sát uốn tấm cong theo mặt trụ có thể sử dụng các kết quả tính thanh, với lưu ý, trong các quan hệ tương ứng, thay độ cứng  $EI$  bởi  $D$ , tải trọng rải  $q$  bởi áp suất  $p$  còn tất cả các ứng lực trên tiết diện ngang là tính cho một đơn vị chiều rộng của tấm.

Giá trị của biến  $u$  [xem (33.3)], là đối số của các hàm phụ trợ trong tính toán uốn phức tạp, được xác định bởi công thức:

$$u = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{T}{D}} = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{hp_t}{Eh^3} 12(1-\nu^2)}. \quad (34.8)$$

Thay  $\nu = 0,3$  (cho trường hợp vật liệu là thép), có:

$$u = 1,65 \frac{l}{100h} \sqrt{\frac{p_t 10^4}{E}}. \quad (34.9)$$

Trong uốn phức tạp tấm cong theo mặt trụ, thì ứng suất tổng cộng trên tiết diện ngang dầm-bản được cộng từ ứng suất  $p_t$  gây ra do lực dọc  $T$ , có tên là ứng suất *xích*, phân bố *đều* theo chiều dày tấm và ứng suất uốn,  $p_u$ , thay đổi trên chiều dày tấm, theo qui tắc tuyến tính, được xác định từ công thức uốn dầm thông thường:

$$p_u = - \frac{Mz}{I}. \quad (34.10)$$

Như vậy, ứng suất tổng cộng sẽ là:

$$\sigma = p_t + p_u = p_t - \frac{Mz}{I} \quad (34.11)$$

Ứng suất tổng cộng trên thớ bìa (trên cùng và dưới cùng) của tấm (và của dầm-bản):

$$\sigma = p_t \mp \frac{6M}{h^2}, \quad (34.12)$$

Trong đó:

$h^2/6$  là mô đun chống uốn của dầm-bản có chiều rộng đơn vị.

Đại lượng moment uốn  $M$  trong công thức (34.12) , trong trường hợp tổng quát, được tính, có kể đến ảnh hưởng của lực dọc, tức với sự tham gia của các hàm phụ trợ, phụ thuộc vào đối số  $u$ .

Vì ứng suất do uốn lớn nhất tại các thớ bìa ngược dấu nhau, nên , độc lập với dấu của ứng suất xích, tại một trong các thớ bìa này, độ lớn của ứng suất tổng cộng có thể xác định bằng tổng số học độ lớn của ứng suất do kéo (nén) tấm,  $p_t$  và ứng suất do uốn tấm,  $p_u$ . Nếu ứng suất xích là nén thì việc tăng ứng suất này luôn làm tăng trị số của moment uốn, và như vậy, tăng ứng suất uốn ,  $p_u$ . Trường hợp lực dọc là kéo thì ngược lại, việc tăng lực kéo dọc , ứng suất do uốn , dưới tác dụng của cùng tải trọng ngang không đổi, sẽ giảm, do ảnh hưởng của chính lực kéo dọc này. Do đó cho nên, trong trường hợp này, dù ứng suất xích có tăng nhưng ứng suất tổng cộng vẫn giảm, trong một phạm vi nào đó.

Để giải thích điều này, ta nghiên cứu ảnh hưởng của sự thay đổi ứng suất kéo dọc đến ứng suất uốn tổng cộng trên tiết diện tấm.

Hãy khảo sát tấm (dầm-bản) tựa tự do, chịu tải trọng ngang rải đều. Trên cơ sở công thức (34.8) , có thể biểu thị  $p_t$  qua đối số  $u$ . Khi đó, ta thu được:

$$p_t = \frac{Eh^2}{3(1-\nu^2)l^2}u^2. \quad (34.13)$$

Đối với tiết diện giữa của dầm-bản, trên cơ sở công thức (34.9), moment uốn được xác định bởi:

$$M = -\frac{pl^2}{8}\varphi_0(u).$$

Ứng suất tổng cộng tại thớ bìa của tiết diện giữa, có giá trị được xác định bằng tổng số học

$$\sigma_{\max} = p_t + p_u = \frac{Eh^2}{3(1-\nu^2)l^2}u^2 + \frac{6}{8}p\frac{l^2}{h^2}\varphi_0(u). \quad (34.14)$$

Trong biểu thức (34.14), khi tăng đối số  $u$  , số hạng thứ nhất tăng, còn số hạng thứ hai giảm.

Ký hiệu:

$$\Phi(u^2, A) = \varphi_0(u) + Au^2, \quad (34.15)$$

Trong đó:

$$A = \frac{4}{9(1-\nu^2)}\frac{E \cdot 10^{-6}}{100p}\left(\frac{100h}{l}\right)^4, \quad (34.16)$$

Trên cơ sở của công thức (34.14), có thể nhận được kết quả:

$$\sigma_{\max} = \frac{3}{4} p \left( \frac{l}{h} \right)^2 \Phi(u^2, A). \quad (34.17)$$

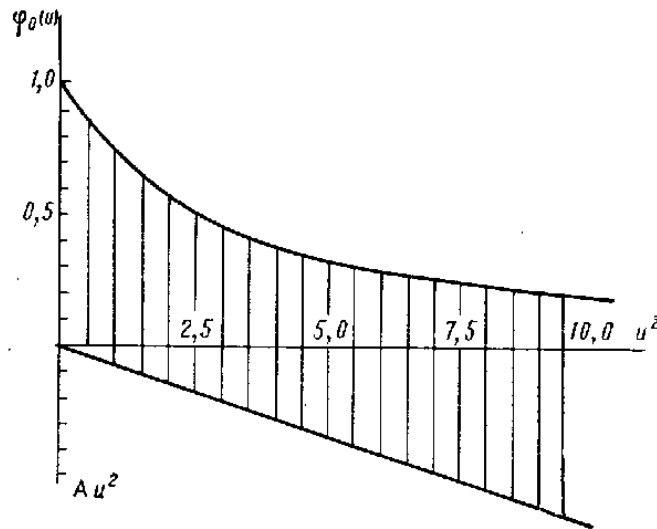
Đại lượng  $\frac{3}{4} p \left( \frac{l}{h} \right)^2$  chính là ứng suất lớn nhất, tại tiết diện giữa dầm-bản, do uốn, khi không có lực dọc. Và như vậy, hàm  $\Phi(u^2, A)$  cho biết tỉ số giữa ứng suất lớn nhất và ứng suất do uốn khi không có lực dọc.

Trên hình H6.7 là đồ thị biến đổi hàm  $\Phi(u^2, A)$ . Trục hoành là đại lượng  $u^2$ , còn trục tung, phía trên là giá trị  $\varphi_0(u)$ , phía dưới là giá trị của  $Au^2$ .

Từ trên đồ thị, thấy rằng, với mỗi giá trị cho trước của  $A$ , luôn có tương ứng một giá trị của  $u$ , và như vậy, là giá trị của  $p_t$  sao cho ứng suất tổng cộng là nhỏ nhất. Giá trị của  $A$  càng lớn, giá trị tương ứng của  $u$  càng nhỏ, tại điểm mà  $\sigma_{\max}$  đạt trị số nhỏ nhất.

Để đánh giá ảnh hưởng có lợi của lực kéo dọc, hãy khảo sát một ví dụ bằng số.

Giả sử tấm khảo sát có tỉ số giữa chiều dài nhịp và chiều dày  $l:h = 100$ , cường độ tải trọng ngang (áp suất)  $p = 1 \text{ kG/cm}^2$ , ứng suất xích, kéo  $p_t = 1000 \text{ kG/cm}^2$ .



H6.7, Đồ thị quan hệ  $\Phi(u^2, A)$

Giá trị của đối số  $u$  xác định theo công thức (34.9):

$$u = 1,65 \sqrt{\frac{10}{2}} = 3,7.$$

Đại lượng  $A$  được xác định theo công thức (34.16):

$$A = \frac{4}{8,19} \cdot \frac{2,15}{100} = 0,0105.$$

Theo bảng, cho trong các sổ tay kỹ thuật, ta có  $\varphi_0(u) = 0,14$ , và như vậy:

$$\Phi(u^2, A) = 0,14 + 0,0105 \cdot 13,7 = 0,284;$$

$$\sigma_{\max} = \frac{3}{4} p \left( \frac{l}{h} \right)^2 \Phi(u^2, A) = 7500 \cdot 0,284 = 2125 \text{ kG/cm}^2.$$

Ứng suất uốn khi không có lực dọc, được xác định bởi:

$$\sigma_{\max} = p_u = \frac{3}{4} p \left( \frac{l}{h} \right)^2 = 7500 \text{ kG/cm}^2$$

Có giá trị lớn hơn giới hạn chảy của thép đóng tàu. Nói cách khác, tấm khảo sát, dưới tác dụng của áp suất  $p = 1 \text{ kG/cm}^2$  dường như sẽ chịu biến dạng dẻo rất lớn.

Nếu như trong ví dụ khảo sát, lấy  $l:h = 70$ , thì kết quả sẽ thay đổi như sau:

$$u = 1,65 \cdot 0,7 \sqrt{\frac{10}{2}} = 2,58; \quad \varphi_0(u) = 0,254; \quad A = 0,0433;$$

$$\Phi(u^2, A) = 0,254 + 0,0433 \cdot 6,67 = 0,543.$$

$$\sigma_{\max} = \frac{3}{4} p \left( \frac{l}{h} \right)^2 \Phi(u^2, A) = 3680 \cdot 0,543 = 2000 \text{ kG/cm}^2$$

Như đã thấy từ ví dụ bằng số trên đây, khi giảm nhịp dầm-bản so với chiều dày (tức giảm tỉ số  $l:h$ ) của nó, ảnh hưởng của ứng suất xích đến ứng suất tổng cộng giảm đi nhanh chóng.

Đối với tấm ngàm cứng hai đầu, ảnh hưởng của ứng suất xích sẽ giảm đi đáng kể so với tấm tựa tự do. Điều này giải thích bởi khi tăng ứng suất xích (tăng  $u$ ), moment uốn trên tiết diện ngàm giảm không nhanh như đối với moment nhịp trên tấm tựa tự do.

Vì sự khác nhau của ảnh hưởng của ứng suất xích đến các yếu tố uốn, moment uốn, độ võng và các yếu tố uốn khác, người ta phân biệt tấm cứng tuyệt đối và tấm có độ cứng hữu hạn..

Tấm cứng tuyệt đối là tấm mà các yếu tố uốn của nó trên thực tế không bị ảnh hưởng của lực dọc. Đối với tấm cong theo mặt trụ, điều này được đánh giá thông qua giá trị của các hàm phụ trợ uốn phức tạp. Trên thực tế có thể coi, nếu như giá trị của hàm phụ trợ khác đơn vị ít hơn 10-15% , thì ta coi thuộc loại cứng tuyệt đối. Trường hợp ngược lại, tấm được coi là có độ cứng hữu hạn nói cách khác, tấm là nhạy với uốn phức tạp.

Như ta thấy trên đây, độ nhạy của tấm với uốn phức tạp phụ thuộc vào nhiều yếu tố: tỉ số  $l:h$  , giá trị tải trọng ngang, giá trị ứng suất xích và kết cấu đế tấm. Điều đó có nghĩa là, cùng



một tấm, nhưng với các điều kiện khác nhau, chẳng hạn như điều kiện biên khác nhau, ứng suất xích khác nhau, . . . , khi có thể coi là tấm cứng tuyệt đối, khi là tấm có độ cứng hữu hạn.

Với điều kiện biên cho trước, ảnh hưởng lớn nhất đến sự làm việc của tấm có lẽ là tỉ số  $l:h$ . Thông thường, khi  $l:h < 60-70$ , tấm được coi là cứng tuyệt đối.

### **&35. GIẢI CÁC BÀI TOÁN UỐN PHỨC TẠP BẰNG CHUỖI.**

Nhằm phục vụ cho việc nghiên cứu sau này, ta biểu diễn đường đàn hồi của dầm-bản, có độ võng ban đầu và chịu uốn phức tạp, không phải dưới dạng kín mà dưới dạng chuỗi lượng giác. Lời giải kiểu này tiện lợi ở chỗ nó bảo toàn dạng giải tích của mình trước sự thay đổi dấu của lực dọc  $T$ , một đặc tính mà lời giải ở dạng khép kín không có.

Để biểu diễn đường đàn hồi dưới dạng chuỗi lượng giác, ta sử dụng phương pháp Bubnov-Galerkin.

Nghiệm của phương trình vi phân uốn phức tạp dầm-bản:

$$Dw^{IV} - Tw'' = p + Tw_0'' \quad (35.1)$$

Sẽ được tìm dưới dạng chuỗi:

$$w = \sum_k a_k \varphi_k(x), \quad (35.2)$$

Trong đó:

$a_k$  – hằng số chưa biết, cần được xác định;

$\varphi_k(x)$  – các hàm cơ sở; ta coi như các hàm này thoả mãn tất cả các điều kiện biên của bài toán.

Thay biểu thức (35.2) vào phương trình (35.1), ta thu được:

$$\sum_k a_k [D\varphi_k^{IV}(x) - T\varphi_k''(x)] = p + Tw_0'' \quad (35.3)$$

Nhân cả hai vế của phương trình trên, lần lượt với các hàm  $\varphi_n(x)dx$ , trong đó,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , và tiến hành tích phân trong giới hạn từ 0 đến  $l$ .

Kết quả, trong trường hợp tổng quát, ta thu được hệ phương trình đại số tuyến tính, xác định các hệ số  $a_k$

$$\sum_k a_k \left[ D \int_0^l \varphi_k^{IV}(x) \varphi_n(x) dx - T \int_0^l \varphi_k''(x) \varphi_n(x) dx \right] = \int_0^l p \varphi_n(x) dx + T \int_0^l w_0''(x) \varphi_n(x) dx, \quad (35.4)$$
$$n = 1, 2, 3, \dots$$

**1. Dầm-bản tựa tự do, chịu tải trọng ngang rải đều và độ võng ban đầu có tính đối xứng đối với điểm giữa nhịp.**

Độ võng ban đầu có dạng:

$$w_0 = \sum_k^{1,3,5,\dots} b_k \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (35.5)$$

Trong trường hợp này, hàm cơ sở  $\varphi_k(x)$  có thể chọn dưới dạng:

$$\varphi_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (35.6)$$

Biểu thức (35.6) thỏa mãn điều kiện biên tại các đầu mút dầm-bản.

Để ý đến các quan hệ:

$$\begin{aligned} \varphi_k''(x) &= -\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \sin \frac{k\pi x}{l}; \quad \varphi_k^{IV}(x) = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^4 \sin \frac{k\pi x}{l}; \\ \int_0^l \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx &= 0 \text{ khi } n \neq k; \\ \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx &= \frac{l}{2}, \quad \int_0^l \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \begin{cases} \frac{2l}{n\pi} & \text{khi } n = 1,3,5,\dots, \\ 0 & \text{khi } n = 2,4,6,\dots \end{cases} \end{aligned}$$

Ta có thể biến đổi biểu thức (35.4) về dạng:

$$a_k \left[ D \left( \frac{k\pi}{l} \right)^4 + T \left( \frac{k\pi}{l} \right)^2 \right] \frac{l}{2} = p \frac{2l}{kl} - T b_k \left( \frac{k\pi}{l} \right)^2 \frac{l}{2},$$

từ đó suy ra

$$a_k = \frac{\frac{4p}{kl} - T b_k \left( \frac{k\pi}{l} \right)^2}{D \left( \frac{k\pi}{l} \right)^4 + T \left( \frac{k\pi}{l} \right)^2}. \quad (35.7)$$

$$\text{Nếu ký hiệu: } \alpha = \frac{Tl^2}{\pi^2 D}, \quad (35.8)$$

Ta có thể viết:

$$a_k = \frac{4pl^4}{D\pi^5 k^3 (k^2 + \alpha^2)} - \frac{b_k \alpha}{k^2 + \alpha} \quad (35.9)$$

Như vậy đường đàn hồi của dầm-bản khảo sát có thể viết dưới dạng:

$$w = \sum_k^{1,3,5,\dots} \left[ \frac{4pl^4}{D\pi^5 k^3(k^2 + \alpha)} - \frac{b_k \alpha}{k^2 + \alpha} \right] \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (35.10)$$

Tham số  $\alpha$ , định nghĩa theo quan hệ (35.8), chính là tỉ số giữa lực nén dọc và trị số tuyệt đối của ứng suất Euler của dầm-bản tựa tự do. Ảnh hưởng của uốn phức tạp đến đường đàn hồi dầm-bản thể hiện ở chỗ trong một số số hạng tương ứng của biểu thức (35.10) xuất hiện đại lượng  $\alpha$ , đương khi tác dụng của lực  $T$  kéo, và âm khi nén.

Chuỗi (35.10), xác định đường đàn hồi, hội tụ khá nhanh, do đó, để đạt các mục đích thực tế, chỉ cần giữ lại 1 số hạng của chuỗi.

## **2. Dầm-bản chịu tải trọng ngang rải đều, ngàm cứng hai đầu.**

Độ võng ban đầu của dầm-bản ngàm cứng hai đầu, giả thiết là đối xứng đối với điểm giữa nhịp, được biểu diễn dưới dạng:

$$w_0 = \sum_k \frac{c_k}{2} \left( 1 - \cos \frac{2k\pi x}{l} \right). \quad (35.11)$$

Trong trường hợp khảo sát, đường đàn hồi của dầm-bản có thể biểu diễn dưới dạng chuỗi:

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{2} \left( 1 - \cos \frac{2k\pi x}{l} \right). \quad (35.12)$$

Biểu thức (35.12) thỏa mãn tất cả các điều kiện biên tại hai đầu dầm-bản, vì:

$$\varphi_k(0) = \varphi_k(l) = 0;$$

$$\varphi'_k(0) = \varphi'_k(l) = 0.$$

Sau khi thay chuỗi với hàm cơ sở (35.12) vào phương trình vi phân (35.1) rồi nhân hai vế kết quả thu được với:

$$\left( 1 - \cos \frac{2n\pi x}{l} \right) dx,$$

và tích phân theo  $x$  từ 0 đến  $l$ , ta thu được:

$$\frac{1}{2} \left[ D \left( \frac{2k\pi}{l} \right)^4 + T \left( \frac{2k\pi}{l} \right)^2 \right] \frac{l}{2} a_k = pl - \frac{1}{2} T c_k \left( \frac{2k\pi}{l} \right)^2 \frac{l}{2},$$

từ đó,

$$a_k = \frac{4p - T c_k \left( \frac{2k\pi}{l} \right)^2}{D \left( \frac{2k\pi}{l} \right)^4 + T \left( \frac{2k\pi}{l} \right)^2}. \quad (35.13)$$

Như vậy, đường đàn hồi của dầm-bản khảo sát có thể biểu diễn dưới dạng:

$$w = \frac{1}{2} \sum_k \left[ \frac{4pl^4}{D(2\pi)^4 k^2 \left( k^2 + \frac{\alpha}{4} \right)} - \frac{\frac{\alpha}{4} c_k}{k^2 + \frac{\alpha}{4}} \right] \left( 1 - \cos \frac{2k\pi x}{l} \right). \quad (35.15)$$

### **3. Uốn phức tạp của tấm (dầm-bản) có độ cong ngang ban đầu.**

Các quan hệ thu được trên đây cho phép ta phân tích ảnh hưởng của độ cong ngang đến các yếu tố uốn của tấm (dầm-bản) chịu tác dụng của lực dọc.

Độ cong ngang ban đầu của tấm là kết quả của các tác động công nghệ, khi chế tạo, lắp ráp, hàn nối các kết cấu thân tàu.

Độ cong ngang ban đầu của các tấm trên tàu thủy, về độ lớn cũng như đặc tính, là những tham số ngẫu nhiên và rất khác nhau. Để cho việc nghiên cứu được đơn giản, người ta thường biểu diễn chúng dưới một dạng chuẩn nào đó. Thông thường, các tấm tàu thủy thuộc loại liên nhịp, có thể biểu thị dưới dạng *sine* hoặc *cosine* hoặc cũng có khi dưới dạng tổng của hai dạng này.

Vì lý do đã nêu trên đây, trong các biểu thức (35.10) và (35.15), không cần thiết phải giữ lại nhiều, mà chỉ cần giữ lại một số hạng là đủ.

- a. Nếu dầm-bản có độ cong ngang ban đầu dạng hình *sine*, thì ta biểu diễn độ cong này nhờ biểu thức:

$$w_0 = b_k \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad (35.16)$$

Trong đó:  $b_k$  – đỉnh cong ban đầu.

Khi đó, trên cơ sở của (35.10) ta thu được

$$w = - \frac{b_k \alpha}{k^2 + \alpha} \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (35.17)$$

Moment uốn trên tiết diện dầm-bản sẽ là:

$$M = Dw'' = \frac{Tb_k k^2}{k^2 + \alpha} \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (35.18)$$

Trị số moment lớn nhất:

$$M_{\max} = \frac{Tk^2 b_k}{k^2 + \alpha}. \quad (35.19)$$

Công thức (35.19) cho thấy, moment uốn lớn nhất tỉ lệ thuận với đỉnh vồng ban đầu  $b_k$ .

Dưới tác dụng của lực kéo  $T$  ( $T > 0$ ;  $\alpha > 0$ ), moment uốn tăng chậm hơn nhịp độ tăng của lực kéo. Dưới tác dụng của lực nén ( $T < 0$ ;  $\alpha < 0$ ), khi tăng lực nén  $T$ , moment uốn tăng nhanh hơn. Từ (35.19) cũng có thể thấy rằng, sự tăng moment uốn sẽ nhanh nhất khi  $k = 1$ , tức khi độ cong ban đầu có dạng:

$$w_0 = b_1 \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (35.20)$$

Dạng vồng ban đầu, tương ứng với biểu thức (35.20) trùng với dạng mất ổn định của dầm-bản tựa tự do. Từ đó, có thể kết luận, khi uốn phức tạp, dạng cong ban đầu bất lợi nhất là dạng trùng với dạng mất ổn định của tấm (dầm-bản).

Ứng suất uốn lớn nhất trên tiết diện ngang dầm-bản sẽ là:

$$p_u = \pm \frac{M_{\max}}{W} = \pm \frac{6M_{\max}}{h^2}.$$

Vì  $T = p_t h$ , nên, trên cơ sở (35.19), có:

$$p_u = \pm 6 p_t \frac{b_1}{h} \cdot \frac{1}{1 + \alpha}. \quad (35.21)$$

Như đã thấy từ (35.21), ứng suất uốn lớn nhất tỉ lệ thuận với đỉnh vồng tương đối  $b_1 : h$ .

*b. Khi độ vồng ban đầu có dạng cosin.* Trường hợp xấu nhất, cũng như trên đây, khi độ vồng ban đầu có dạng trùng với dạng mất ổn định. Khi đó, độ vồng có thể biểu thị dưới dạng:

$$w_0 = \frac{c_1}{2} \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right), \quad (35.22)$$

Trong đó:  $c_1$  – đỉnh vồng ban đầu.

Trên cơ sở (35.15) ta có

$$w = - \frac{c_1}{2} \frac{\frac{\alpha}{4}}{1 + \frac{\alpha}{4}} \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right). \quad (35.23)$$

Moment uốn trên tiết diện ngang dầm-bản sẽ là:

$$M = Dw'' = - \frac{1}{2} \frac{Tc_1}{1 + \frac{\alpha}{4}} \cos \frac{2\pi x}{l}. \quad (35.24)$$

Như biểu thức (35.24) cho thấy, moment uốn đạt giá trị lớn nhất tại tiết diện đế ( $x = 0$  và  $x = l$ ), và tại tiết diện nhịp ( $x = l/2$ ). Các moment này bằng nhau về trị số, chỉ khác nhau về dấu

$$M_{\max} = \pm \frac{1}{2} \frac{Tc_1}{1 + \frac{\alpha}{4}}. \quad (35.25)$$

Như có thể thấy từ (35.25), dưới tác dụng nén, ( $T < 0$ ;  $\alpha < 0$ ) moment uốn tăng nhanh hơn lực nén. Dĩ nhiên là ảnh hưởng của uốn phức tạp trong trường hợp khảo sát là không rõ nét bằng trường hợp có độ cong ngang ban đầu dạng hình *sin*, vì trong trường hợp này, ở mẫu số có số hạng  $\alpha/4$  (thay cho số hạng  $\alpha$  trong trường hợp cong dạng hình *sine*).

Ứng suất uốn lớn nhất trên tấm(dầm-bản), khi độ cong ngang ban đầu có dạng *cosine*, được xác định trên cơ sở công thức (35.25) như sau:

$$p_u = \pm \frac{6p_t}{1 + \frac{\alpha}{4}} \frac{c_1}{2h}. \quad (35.26)$$

Cũng như trước đây, giá trị của moment uốn tỉ lệ với đỉnh võng tương đối, nhưng giá trị này là nhỏ hơn so với trường hợp võng dạng hàm *sin*. với cùng một giá trị ứng suất  $p_t$  và của đỉnh võng [xem công thức (35.21)].

### **&36. XÁC ĐỊNH ỨNG LỰC DỌC TRÊN TẤM UỐN CONG THEO MẶT TRỤ.**

Trên đây ta đã khảo sát uốn phức tạp của tấm theo mặt trụ, với giả thiết lực dọc  $T$  (hay, thay cho nó, có thể là đại lượng  $p_t$ ) là đã biết.

Trong tính toán các tấm vỏ tàu ta thường gặp bài toán, trong đó, lực dọc tấm là chưa biết mà phải xác định. Các dầm thuộc cơ cấu vỏ tàu kết hợp với các cơ cấu vành để các dàn trên tàu tạo ra các cơ cấu cản trở sự xích lại gần nhau của các mép tấm, là dịch chuyển có xu hướng xảy ra khi tấm bị uốn dưới tác dụng của tải trọng ngang. Cơ cấu cản trở sự xích lại gần nhau của các mép tấm khi tấm bị uốn được gọi là các *cơ cấu giằng*. Khi có mặt các cơ cấu giằng, lực dọc trên tấm là do tương tác giữa cơ cấu giằng và tấm.

Đối với tấm chịu uốn cong theo mặt trụ, trong hệ thống kết cấu ngang, cơ cấu giằng chính là các dầm dọc (như sống dọc đáy, xà dọc boong...) cùng các cơ cấu dọc làm đế đỡ cho các dàn.

Trong việc xác định ứng lực dọc siêu tĩnh trên các tấm, thường gặp hai loại bài toán chủ yếu sau đây:

1. cho trước lực dọc, tác dụng lên cơ cấu giằng (cơ cấu dọc) khi uốn chung thân tàu.
2. cho trước tổng lực dọc, tác dụng lên cả hệ các cơ cấu dọc (tấm và cơ cấu giằng).

Đối với cả hai loại bài toán trên đều có thể lập được phương trình xác định lực dọc siêu tĩnh.

Hãy bắt đầu từ loại bài toán thứ nhất, khi cho biết lực tác dụng dọc lên thanh giằng.

Ta sử dụng các ký hiệu sau đây:

$p_g$  – ứng suất trên thanh giằng;

$p_t$  – ứng suất xích trên tấm(dầm-bản) theo phương dọc trục dầm-bản;

$p_y$  – ứng suất trên tấm , theo phương vuông góc với trục dọc của dầm-bản;

$l$  – chiều dài nhịp của tấm và của thanh giằng;

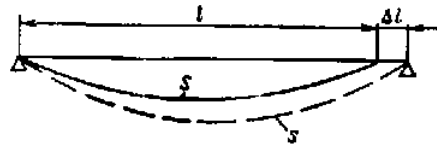
$s$  – chiều dài ban đầu của trục trung hoà tấm, khác với chiều dài nhịp do sự có mặt của độ võng ban đầu  $w_0$  (H6.8).

Để xác định quan hệ giữa  $s$  và

$l$ , ta lưu ý rằng

$$ds = dx \sqrt{1 + w_0'^2};$$

$$s = \int_0^l \sqrt{1 + w_0'^2} dx.$$



H6.7

Giả thiết rằng  $w_0'^2$  là nhỏ so với đơn vị và sử dụng công thức nhị phân Newton, ta có:

$$\sqrt{1 + w_0'^2} = 1 + \frac{1}{2} w_0'^2 + \dots$$

Khi đó:

$$s = \int_0^l \left( 1 + \frac{1}{2} w_0'^2 \right) dx = l + \frac{1}{2} \int_0^l w_0'^2 dx. \quad (36.1)$$

Lượng giãn dài của thanh giằng dưới tác dụng của  $p_g$  là:

$$\Delta l = \frac{p_g l}{E}, \quad (36.2)$$

Và độ dài mới của thanh giằng là:

$$l_1 = l + \Delta l$$

Lượng giãn dài trục trung hoà của tấm (dầm-bản) dưới tác dụng của lực  $p_t$  và  $p_y$  được các định trên cơ sở của định luật Hooke, theo công thức:

$$\Delta s = s_1 - s = \frac{s}{E} (p_t - \nu p_y), \quad (36.3)$$

Trong đó:  $s_1$  – là độ dài trục trung hoà tấm sau biến dạng.

Các đại lượng  $s_1$  và  $l_1$  có quan hệ với nhau theo công thức, tương tự công thức (36.1)

$$s_1 = l_1 + \frac{1}{2} \int_0^l (w'_0 - w')^2 dx, \quad (36.4)$$

Trong đó:  $w$  – tung độ đường đàn hồi của tấm, dưới tác dụng của tải trọng ngang và lực dọc.

Lấy hiệu số giữa biểu thức (36.4) và (36.1), với sự thay đổi nhỏ cận trên của (36.4), mà vẫn bảo đảm độ chính xác cao, ta được:

$$\Delta s = \Delta l + \frac{1}{2} \int_0^l [(w'_0 + w')^2 - w_0'^2] dx.$$

Tính đến các quan hệ (36.2), (36.3) và thay xấp xỉ  $s$  bởi  $l$ , ta được:

$$p_t - \nu p_y = p_g + \frac{E}{2l} \int_0^l [(w'_0 + w')^2 - w_0'^2] dx. \quad (36.5)$$

Phương trình (36.5) cho ta quan hệ giữa  $p_t$  và  $p_g$  trong điều kiện cho trước độ võng ban đầu và lực nén ngang (ứng suất  $p_y$  được coi là đã biết).

Cần chú ý rằng, trong phương trình (36.5), ứng suất xích  $p_t$  cần tìm là hiện ở vế phải nhưng ẩn ở vế trái, trong đại lượng  $w$ , là đại lượng phụ thuộc vào  $p_t$ .

Trong trường hợp cho trước tổng tải trọng tác dụng lên toàn kết cấu, ta sử dụng các ký hiệu sau:

$T$  – ứng lực tổng cộng tác dụng lên cả tấm lẫn thanh giằng;

$p_0$  – ứng suất trung bình tác dụng lên kết cấu;

$T_g$  – ứng lực trên thanh giằng;

$F_t$  – diện tích tiết diện ngang tấm;

$F_g$  – diện tích tiết diện ngang thanh giằng.

Giữa các đại lượng trên tồn tại các quan hệ hiển nhiên sau đây:

$$T_t = p_t F_t; \quad T_g = p_g F_g; \quad T = p_0 (F_t + F_g); \quad T = T_t + T_g;$$

$$p_0 (F_t + F_g) = p_t F_t + p_g F_g. \quad (36.6)$$

Từ (36.6) suy ra:



$$p_g = p_0 \frac{F_t + F_g}{F_g} - p_g F_g$$

hay

$$p_g = p_t + (p_0 - p_t) \frac{F_t + F_g}{F_g}. \quad (36.7)$$

Dùng (36.7) khử  $p_g$  ra khỏi (36.5) và ký hiệu:

$$K = \frac{F_g}{F_g + F_t}, \quad (36.8)$$

Ta được:

$$p_t - \nu K p_y = p_0 + \frac{EK}{2l} \int_0^l \left[ (w_0' + w')^2 - w_0'^2 \right] dx. \quad (36.9)$$

Đại lượng  $K$ , xác định theo công thức (36.8) được giằng và có thể thay đổi giá trị từ 0 ( $F_g = 0$ ) đến đơn vị ( $F_g$  vô cùng lớn). Trong trường hợp hệ số giằng bằng đơn vị, các đế đỡ của tấm không gian sẽ xích lại gần nhau khi tấm bị uốn, vì cơ cấu giằng là cứng tuyệt đối.

Để xác định ứng suất dọc tấm  $p_t$  theo các công thức (36.5) và (36.9), nên biểu diễn đường đàn hồi dưới dạng chuỗi lượng giác.

Ta khảo sát tấm liên nhịp, chịu tải trọng phân bố đều và có độ võng ban đầu dạng hình *cosine* và hình *sine*:

$$w_0 = \frac{1}{2} c_1 \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right) + b_1 \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (36.10)$$

Chỉ giữ lại một số hạng của chuỗi (35.15), sử dụng (35.17), ta có thể thu được công thức đường đàn hồi dầm-bản như sau:

$$w = \frac{1}{2} \left[ \frac{4pl^4}{D(2\pi)^4 \left( 1 + \frac{\alpha}{4} \right)} - \frac{\frac{\alpha}{4} c_1}{1 + \frac{\alpha}{4}} \right] \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right) - \frac{\alpha b_1}{1 + \alpha} \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (36.11)$$

Ta ký hiệu

$$h_1 = \frac{4pl^4}{(2\pi)^4 D}.$$

Đại lượng  $h_1$  rất gần với đỉnh võng của tấm ngàm cứng chịu tải trọng ngang rải đều:

$$\frac{1}{384} \frac{pl^4}{D}$$

Và như vậy, có thể tính theo công thức<sup>1</sup>

$$h_1 = \frac{pl^4 \cdot 12(1 - \nu^2)}{384Eh^3} = 1,32ph \left( \frac{l}{100h} \right)^4 \frac{E_t}{E}. \quad (36.12)$$

Như vậy, đường đàn hồi được tính bằng công thức:

$$w_1 = \frac{1}{2} \left[ \frac{h_1 - \frac{\alpha}{4}c_1}{1 + \frac{\alpha}{4}} \right] \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right) - \frac{\alpha b_1}{1 + \alpha} \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (36.13)$$

Vì rằng, ở tầm liên nhịp, ảnh hưởng của độ võng ban đầu dạng hình *sine* là khác nhau trên hai nhịp liên nhau, nên để tính lực dọc siêu tĩnh, cần so sánh độ giãn dài của cơ cấu giằng và của tấm trên cả hai nhịp liên nhau.

Khi đó, thay cho các công thức (36.5) và (36.9) là các công thức sau:

$$p_t - \nu p_y = p_g + \frac{E}{4l} \int_0^{2l} [(w'_o + w')^2 - w_o'^2] dx; \quad (36.14)$$

$$p_t - \nu Kp_y = p_0 + \frac{EK}{4l} \int_0^{2l} [(w'_o + w')^2 - w_o'^2] dx. \quad (36.15)$$

Thay phương trình đường đàn hồi (36.13) vào (36.14) và (36.15), với độ võng ban đầu (36.10), sau khi tích phân, ta thu được

$$p_t - \nu p_y = p_g + \frac{E}{4} \left( \frac{\pi}{l} \right)^2 \left[ \left( \frac{h_1 + c_1}{1 + \frac{\alpha}{4}} \right)^2 - c_1^2 + \left( \frac{b_1}{1 + \alpha} \right)^2 - b_1^2 \right]; \quad (36.16)$$

$$p_t - \nu Kp_y = p_0 + \frac{EK}{4} \left( \frac{\pi}{l} \right)^2 \left[ \left( \frac{h_1 + c_1}{1 + \frac{\alpha}{4}} \right)^2 - c_1^2 + \left( \frac{b_1}{1 + \alpha} \right)^2 - b_1^2 \right]. \quad (36.17)$$

Để đưa các kết quả trên về dạng không thứ nguyên, ta chia cả hai vế của các phương trình (36.16) và (36.17) cho ứng suất Euler của dầm-bản liên nhịp, tựa tự do

$$p_E = \frac{\pi^2 D}{l^2 h} \quad (36.18)$$

Và ký hiệu:

<sup>1</sup> lấy  $\nu = 0,3$ ;  $E_t = 2,15 \cdot 10^6 \text{ kG/cm}^2$ .

$$\alpha = \frac{p_t}{p_E}; \quad (36.19)$$

$$m = \frac{p_g}{p_E}; \quad (36.20)$$

$$n = \frac{p_0}{p_E}; \quad (36.21)$$

$$r = \frac{v p_y}{p_E}. \quad (36.22)$$

Phương trình (36.16) và phương trình (36.17) có thể biến đổi về dạng:

$$m + r = \alpha - \frac{3(1-v^2)}{h^2} \left[ \left( \frac{h_1 + c_1}{1 + \frac{\alpha}{4}} \right)^2 - c_1^2 + \left( \frac{b_1}{1 + \alpha} \right)^2 - b_1^2 \right]; \quad (36.23)$$

$$n + Kr = \alpha - \frac{3(1-v^2)}{h^2} K \left[ \left( \frac{h_1 + c_1}{1 + \frac{\alpha}{4}} \right)^2 - c_1^2 + \left( \frac{b_1}{1 + \alpha} \right)^2 - b_1^2 \right]. \quad (36.24)$$

Các phương trình (36.23) và (36.24) cho phép tìm được đại lượng ứng lực dọc  $\alpha$  nếu đã biết ứng suất trên cơ cấu giằng ( $m$ ) hoặc ứng suất trung bình trên toàn kết cấu. Đại lượng  $r$  và độ võng ban đầu, giả thiết là đã biết.

Như có thể thấy từ cấu trúc của các phương trình này, trong trường hợp tổng quát, chúng có bậc là 5 đối với ẩn lực dọc, tức, đối với tham số  $\alpha$ . Nếu như không có độ võng ban đầu dạng hình *sine* (tức  $b_1 = 0$ ), thì các phương trình sẽ là bậc 3 đối với  $\alpha$ . Tình hình cũng như trên nếu  $b_1 \neq 0$ , còn  $h_1 = c_1 = 0$ .

Việc giải các phương trình (36.23) và (36.24) thường tiến hành theo bảng đồ thị, như sẽ làm trong phần dưới đây.

### **&37. SỰ THAM GIA CỦA TẤM CHỊU TẢI TRỌNG NGANG VÀ CÓ ĐỘ CONG NGANG BAN ĐẦU VÀO UỐN CHUNG THÂN TÀU. HỆ SỐ THAM GIA**

Phương trình (36.23) có thể dùng để xác định sự tham gia của tấm có độ cong ngang ban đầu và chịu tải trọng ngang vào uốn chung thân tàu. Điều này là quan trọng đối với tàu kết cấu theo hệ thống ngang và có vỏ bao mỏng, như với trường hợp của tàu sông chẳng hạn.

Trong kết cấu theo hệ thống ngang, các tấm vỏ tàu có vành đế, với tỉ số kích thước khá lớn, nên có thể coi là chịu uốn theo mặt trụ. trường hợp này, khoảng cách sườn đóng vai trò chiều dài nhịp  $l$  của dầm-bản.

Bài toán được đặt ra như sau: Khi uốn chung thân tàu, các ứng suất trên cơ cấu cứng, tức đại lượng  $m$  của cơ cấu giằng, được xác định. Trong lần gần đúng thứ nhất, ứng suất này được xác định trên cơ sở giả thiết rằng, các tấm tham gia hoàn toàn vào uốn chung thân tàu. Theo ứng suất đã biết của đại lượng  $m$ , có thể tiến hành xác định ứng suất trên tấm  $p_t$  (tham số  $\alpha$ ). Vì rằng trong trường hợp tổng quát,  $p_t \neq p_g$ , có thể thấy là, sự tham gia của tấm vào uốn chung không như của các cơ cấu cứng.

Mức độ tham gia của tấm vào uốn chung có thể được đặc trưng bởi *hệ số tham gia*. Giả sử  $F_t$  là diện tích tiết diện ngang *thực tế* của tấm mà trên diện tích này, khi uốn chung, ứng suất xuất hiện là  $p_t$ . Ta đưa ra ở đây khái niệm *diện tích thay thế*  $F_{th}$ . Ta hiểu diện tích thay thế là diện tích mà khi chịu lực nén tổng cộng tác dụng lên tấm, trên đó sẽ xuất hiện ứng suất bằng ứng suất trên cơ cấu cứng, có cùng khoảng cách đến trục trung hoà như của tấm.

Như vậy, diện tích thay thế được định nghĩa nhờ phương trình

$$F_{th}p_g = F_t p_t$$

hay

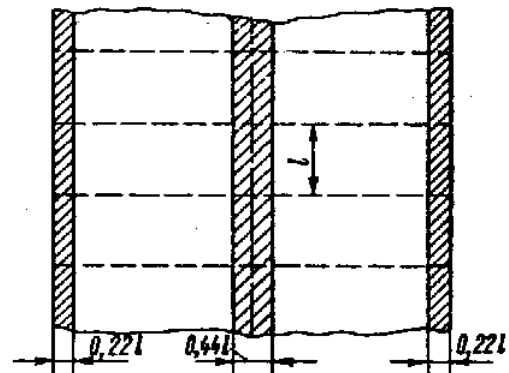
$$F_{th} = \varphi F_t \quad (37.1)$$

trong đó,

$$\varphi = \frac{p_t}{p_g} = \frac{F_{th}}{F_t}. \quad (37.2)$$

Đại lượng  $\varphi$  cũng được gọi là *hệ số cảm ứng* hay *hệ số tham gia*. Hệ số tham gia chỉ ra rằng bao nhiêu phần diện tích tiết diện ngang của tấm sẽ được coi là tham gia vào uốn chung như các cơ cấu cứng tiếp giáp với nó (tức có cùng khoảng cách đến trục trung hoà).

Ứng suất trên tấm có tỉ số kích thước hữu hạn, phân bố không đều theo chiều rộng tấm. như các nghiên cứu cho thấy, tính chất không đồng đều nói trên của ứng suất có thể tính đến, nếu như phần tấm trên chiều rộng  $0,22l$  gần cơ cấu dọc(cạnh ngắn) được ghép vào với cơ cấu cứng (H6.8).



H6.8

Tính đến điều đó, diện tích tấm  $F_t$  cần được trừ đi phần đã được ghép vào với cơ cấu cứng.

Cùng với các ký hiệu (36.190 và (36.20), hệ số cảm ứng được xác định theo quan hệ

$$\varphi = \frac{\alpha}{m} \quad (37.3)$$

Để xác định hệ số cảm ứng  $\varphi$  cần dựng đồ thị quan hệ giữa các tham số  $m$  và  $\alpha$  của tấm khảo sát. Điều này thực hiện được bằng cách cho giả định một số giá trị của  $\alpha$  và tìm, theo phương trình (36.23) các giá trị tương ứng của  $m$ . Khi đó, trong trường hợp tấm tham gia uốn chung, ứng suất  $p_y$ , và như vậy, cả tham số  $r$ , có thể lấy bằng 0.

Các tính tiến hành theo phương pháp đúng dần, với trình tự sau đây:

1. Xác định ứng suất trên cơ cấu cứng

và tham số  $m$  với giả thiết rằng, toàn bộ tấm tham gia vào uốn chung thân tàu;

2. Theo giá trị tìm được của  $m$ , từ đồ thị tương ứng, tìm được giá trị của  $\alpha$ , và sau đó, theo công thức (37.3), tìm giá trị của hệ số cảm ứng  $\varphi$ ;

3. Với các giá trị tìm được của hệ số cảm ứng  $\varphi$  cho các tấm khác nhau của vỏ tàu, ta tiến hành điều chỉnh diện tích tiết diện ngang và điều chỉnh vị trí trục trung hoà cũng như điều chỉnh giá trị moment quán tính tiết diện ngang thân tàu;

4. Xác định giá trị các ứng suất mới (điều chỉnh) trên các cơ cấu cứng  $p_g$ , sau đó, tìm các giá trị mới của  $m_1$ ,  $\alpha_1$  và  $\varphi_1$ .

Quá trình tính đúng dần có thể kết thúc, nếu như kết quả hai lần tính gần nhau, về ứng suất do uốn chung, là ít khác nhau.

Không đi sâu vào các chi tiết tỉ mỉ của phương pháp tính toán thực tế, ta hãy xem xét ảnh hưởng của độ võng ban đầu của tấm đến sự tham gia vào uốn chung thân tàu.

Giả thiết là không có tải trọng ngang ( $h_1 = 0$ ) và tấm có độ võng ban đầu với đặc trưng hình *cosine* ( $b_1 = 0$ ).

Khi đó, từ phương trình (36.23), ta tìm được:

$$m = \alpha + \frac{3(1-\nu^2)}{2} \left( \frac{c_1}{h} \right)^2 \frac{\alpha \left( 1 + \frac{\alpha}{8} \right)}{\left( 1 + \frac{\alpha}{4} \right)^2}. \quad (37.4)$$

Từ phương trình (37.4) thấy rằng, với giá trị dương bất kỳ của  $\alpha$ , đại lượng  $m$  thoả mãn bất đẳng thức:

$$m > \alpha.$$

Điều này có nghĩa là, khi có độ cong ban đầu, ứng suất xuất hiện trên tấm,  $p_t$ , luôn nhỏ hơn ứng suất trên cơ cấu cứng,  $p_g$  kế cận, và do đó, giá trị của hệ số cảm ứng luôn nhỏ hơn 1. Đỉnh võng tương đối,  $c_1$ , càng lớn, hệ số cảm ứng càng bé.

Nếu như ứng suất là nén ( $\alpha < 0$ ;  $m < 0$ ), thì điều kiện sau đây thoả mãn:

$$|m| > |\alpha|,$$

Tức, trong trường hợp này, hệ số cảm ứng nhỏ hơn 1.

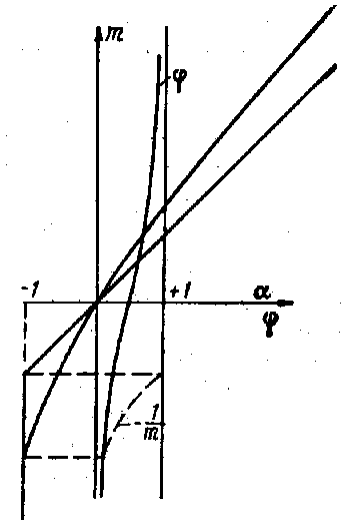
Cần chú ý một điều là, tấm liên nhịp không thể nhận ứng suất nén có giá trị tuyệt đối lớn hơn ứng suất Euler (tức,  $\alpha \geq -1$ ). Nói cách khác, khi  $\alpha = -1$  ( $p_t = p_E$ ) tấm sẽ mất ổn định và cơ cấu cứng nhận toàn bộ tải trọng gia tăng tiếp, tức sau khi tấm đã mất ổn định. Trong trường hợp này, hệ số cảm ứng được xác định theo công thức:

$$\varphi = \frac{1}{m}$$

Và giá trị của nó giảm đi nhanh chóng theo chiều tăng của  $m$ , tức khi ứng suất trên cơ cấu cứng tăng. Hình (H6.9) là đồ thị quan hệ giữa  $\alpha$  với  $m$  và giữa  $\varphi$  với  $m$  khi độ cong ban đầu có đặc trưng cosine.

Về định tính, ảnh hưởng của độ cong ban đầu dạng sine giống như ảnh hưởng của độ cong ngang dạng dạng cosine.

Trên cơ sở những điều trình bày trên đây, có thể đưa ra kết luận, là, trong hệ thống kết cấu ngang, độ cong ngang ban đầu rất có hại cho sự tham gia của tấm vào uốn chung thân tàu và có thể dẫn đến sự phân bố lại một cách đáng kể tải trọng trên các cơ cấu cứng. ngoài ra, trên các tấm có độ cong ngang ban đầu và chịu tác dụng của ứng suất xích,  $p_t$ , do uốn chung, xuất hiện ứng suất uốn bổ sung, và điều này có thể làm xuất hiện ứng suất tổng cộng lớn, dẫn đến biến dạng chảy dẻo.



H6.9

Một minh chứng cho nhận xét trên là trường hợp của tàu Oish Vanken, một tàu kết cấu hàn, có chiều dày tấm đáy 16,3 mm. Người ta chú ý thấy tại một số vị trí của đáy tàu có các độ cong ngang ban đầu với đỉnh vồng đạt 4mm, sau một số năm khai thác đỉnh vồng này tăng lên, đạt giá trị 25mm. Các kết quả thống kê đối với các tàu hàng khô với các tấm có độ cong ngang ban đầu ở đáy tàu đã khẳng định ảnh hưởng có hại của độ cong ngang ban đầu, dẫn đến sự tham gia không hoàn toàn của các tấm này vào uốn chung thân tàu và làm tăng ứng suất trên các cơ cấu cứng của tàu.

Dễ thấy là cần hạn chế, làm sao để độ cong ngang ban đầu càng bé càng tốt. Tuy nhiên, cách tốt nhất để loại trừ tận gốc ảnh hưởng xấu này của độ cong ngang là gia cường các tấm bằng các nẹp dọc.

Ảnh hưởng của tải trọng ngang ( $h_1$ ) phức tạp hơn, vì dưới tác dụng của lực kéo, hệ số cảm ứng có tăng lên chút ít, còn dưới tác dụng của lực nén, hệ số này giảm đi. Điều này có thể nhận thấy được từ phương trình (36.23), khi đặt  $h_1 \neq 0$ , còn  $b_1 = c_1 = 0$ .

**&38. UỐN TẮM CÓ ĐỘ CỨNG HỮU HẠN, KHÔNG THAM GIA VÀO  
UỐN CHUNG THÂN TÀU.**

Trong thành phần kết cấu thân tàu có các tấm chịu tải trọng ngang, mà sự xích lại gần nhau của các mép tấm bị hạn chế bởi các thanh giằng. Trong số đó, có các tấm vách, được gia cường bằng các sống, nẹp, và chịu tải trọng ngang, là áp lực thủy tĩnh khi nước tràn vào khoang, trong trạng thái sự cố.

Vì lý do tỉ số kích thước các cạnh của tấm là rất lớn nên chúng có thể coi là uốn theo mặt trụ. Đối với tấm vách, ứng suất trung bình  $p_0$  có thể coi là bằng 0.

Ứng suất  $p_y$ , (xem [&36]), chính là ứng suất do uốn nẹp, trong đó, tấm đóng vai trò mép kèm. Nếu như sống vách tựa tự do hai đầu, còn áp lực nước tác động từ phía đặt sống vách, thì trên tấm tác động ứng lực kéo, tức,  $p_y > 0$  và  $r > 0$ . Đối hướng tác dụng của áp lực nước, ứng lực trên tấm cũng đổi chiều tác dụng.

Để xác định ứng suất xích chưa biết ( $\alpha$ ), cần dùng phương trình (36.24), trong đó, đặt  $n = 0$ . Trường hợp được nghiên cứu nhiều nhất là khi tấm vách không có độ cong ngang, tức,  $b_1 = c_1 = 0$ . Trong trường hợp này, phương trình (35.24) có dạng

$$(\alpha - rK) \left( 1 + \frac{\alpha}{4} \right)^2 = 3(1 - \nu^2) K \left( \frac{h_1}{h} \right)^2. \quad (38.1)$$

Với ký hiệu

$$F(r, \alpha) = (\alpha - rK) \left( 1 + \frac{\alpha}{4} \right)^2, \quad (38.2)$$

có thể viết lại (38.10) dưới dạng

$$F(r, \alpha) = 3(1 - \nu^2) K \left( \frac{h_1}{h} \right)^2 \quad (38.3)$$

Cần nhắc lại, đại lượng  $h_1$ , xác định theo (36.12), là đỉnh vồng của tấm liên nhịp, đối xứng qua nhịp, chịu tải trọng ngang rải đều, ngàm cứng tại các mép (vành đế).

Với tải trọng cho trước thì đại lượng  $h_1$  và  $r$  là đã biết, và nếu như hệ số giằng  $K$  là đã biết, thì từ phương trình (38.30), có thể xác định  $\alpha$ , và như vậy, xác định được ứng suất xích  $p_t$ .

Sau khi xác định ứng suất xích, tìm giá trị của đối số  $u$  của uốn phức tạp tấm

$$u = \frac{\pi}{2} \sqrt{\alpha},$$

sau đó, có thể xác định tất cả các yếu tố uốn theo các công thức của &33.

Từ phương trình (38.1) thấy rằng, khi tăng hệ số giằng  $K$ , ứng suất xích, xuất hiện do việc cản trở sự xích lại gần nhau của các mép tấm, sẽ tăng. tuy nhiên, khi tăng ứng suất xích,

ứng suất do uốn tấm lại giảm, và vì thế, ứng suất tổng cộng trên tấm sẽ rất ít bị ảnh hưởng bởi sự thay đổi của hệ số giằng. Vì trong đa số các trường hợp, hệ số giằng là chưa biết nên trong các tính toán thực tế, có thể lấy hệ số này bằng 0,5.

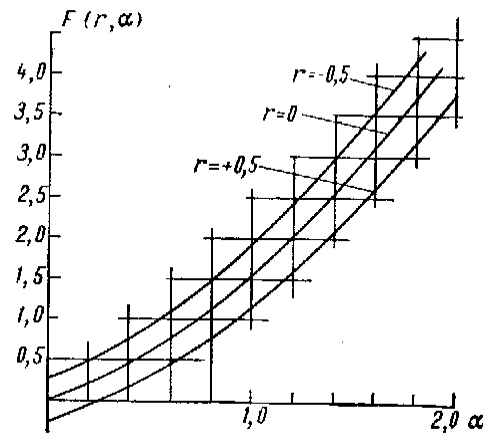
từ phương trình (38.1) cũng nhận thấy rằng, ứng suất xích trên tấm phụ thuộc rất nhiều vào uốn tấm cùng với sống vách ( $p_y$  tham số và  $r$ ).

Khi  $r > 0$ , ứng suất xích tăng, còn khi  $r < 0$ , ứng suất này giảm so với trường hợp  $r = 0$ . Trên hình H6.10 cho đồ thị biểu thị giá trị của  $F(r, \alpha)$  theo các giá trị khác nhau của tham số  $r$  (với  $r = 0,5; r = -0,5; K = 0,5$ ).

Từ đồ thị có thể thấy rằng, với một giá trị cho trước của  $F(r, \alpha)$ , xác định theo vế phải của phương trình (38.3), ứng suất xích có thể thay đổi rất nhiều khi đổi dấu của ứng suất do uốn sống vách ( $r$ ), tức, khi đổi hướng tác dụng của tải trọng ngang (thủy tĩnh). Ảnh hưởng này là rõ nét nhất khi  $F(r, \alpha)$  có các giá trị nhỏ, tức với tải trọng ngang nhỏ.<sup>1</sup>

Đối với các tấm vách ngàm cứng do tính đối xứng, ứng suất uốn lớn nhất và ứng suất tổng cộng lớn nhất đạt tại tiết diện đế.

ứng suất tổng cộng tại tiết diện đế, trên cơ sở của phương trình (33.16), sẽ là



H6.10

$$\sigma_{\max} = p_t + p_u = \frac{Eh^2}{3(1-\nu^2)l^2} u^2 + \frac{1}{2} p \left( \frac{l}{h} \right)^2 \chi(u). \quad (38.4)$$

Đối với các vách kín nước, thường thì ứng suất tổng cộng trên tấm vượt giá trị của giới hạn chảy, tức, với tải trọng tính toán, cho phép xuất hiện biến dạng chảy trên các tiết diện tấm. Trong điều kiện này, giả thiết về tấm ngàm cứng không còn hoàn toàn đúng và ứng suất tổng cộng trên nhịp tấm, trong các tính toán thực tế, thường được xác định bằng trung bình cộng của hai trường hợp, tựa tự do và ngàm cứng tại các mép<sup>2</sup>.

Cách tính trên đây căn cứ trên một nhận xét là, với những điều kiện còn lại như nhau, tấm tựa tự do có ứng suất xích lớn hơn tấm ngàm cứng hai đầu nhiều. Thế nhưng, sự tăng ứng suất xích trên tấm lại dẫn đến việc giảm ứng suất do uốn, và ứng suất tổng cộng tại giữa nhịp không phụ thuộc gì vào điều kiện biên tại các mép.

Đối với trường hợp riêng, khi có  $r = 0$ , người ta đã lập thành các bảng tính, cho phép xác định đại lượng ứng suất xích và ứng suất tổng cộng tại giữa nhịp của tấm, phụ thuộc vào áp lực,

<sup>1</sup>Ảnh hưởng của ứng suất  $p_y$  được nghiên cứu đầu tiên bởi S.V. Simeonov, trong luận văn tiến sĩ của ông vào năm 1957.

<sup>2</sup> Phương pháp tính toán như trên so IU.A. Shimanski đề nghị, vào năm 1916.



tính theo chiều cao, tính ra  $m$  cột nước  $H$  ( $p_{at} = 0,1H$ ), tỉ số nhịp trên chiều dày tấm  $l:h$ , hệ số giảm  $K$  và điều kiện liên kết hai đầu (ngàm cứng và tựa tự do).

Các bảng tính loại này được lập bởi I.G.Bubnov và được bổ sung nhờ IU.A.Shimanski.

### &39. ỔN ĐỊNH TĨNH CỦA SỰ CÂN BẰNG CỦA HỆ ĐÀN HỒI.

Nhiều trạng thái tải trọng khai thác có thể gây ra mất ổn định cho các kết cấu thân tàu. Chẳng hạn như khi tàu rơi vào đỉnh sóng, các cơ cấu dọc phía trên nằm trong trạng thái chịu nén, còn khi nằm trên ngọn sóng, đến lượt các cơ cấu dọc đáy. Sự mất ổn định các cơ cấu chính là một trong những nguyên nhân gây ra hư hỏng nghiêm trọng đối với các kết cấu thân tàu.

Vấn đề bảo đảm tính ổn định cho các thanh, dàn cũng như các tấm, vỏ có một ý nghĩa thực tế to lớn đối với cơ kết cấu tàu thủy. Cũng cần lưu ý là, đối với nhiều kết cấu thân tàu, điều kiện bảo đảm ổn định cũng đồng thời là điều kiện xác định kích thước kết cấu.

Từ giáo trình cơ học lý thuyết ta đã biết, có 3 trạng thái cân bằng sau đây:

(a). Trạng thái *cân bằng bền vững* (hay *cân bằng ổn định*), là trạng thái mà, nếu như bị lệch nhỏ khỏi nó, hệ tự động có thể quay lại trạng thái cân bằng này,

(b). Trạng thái *cân bằng không bền*, là trạng thái mà với các điều kiện trên đây, hệ không tự quay trở lại mà có xu thế lệch thêm khỏi vị trí cân bằng ban đầu,

(c). Trạng thái *cân bằng phiếm định*, là trạng thái mà khi bị lệch khỏi nó, hệ không trở về vị trí ban đầu nhưng cũng không lệch thêm mà cân bằng tại vị trí mới. Nói cách khác, hệ có vô số vị trí cân bằng quanh vị trí khảo sát.

Một điểm đặc biệt của hệ đàn hồi là ở chỗ dưới tác dụng của một lớp các lực đặc biệt, hệ có thể chuyển từ một trạng thái cân bằng này sang một trạng thái cân bằng khác khi thay đổi các lực tác dụng.

Dĩ nhiên là công trình được thiết kế phải nằm trong trạng thái cân bằng bền vững. Việc không bảo đảm đầy đủ tính ổn định của công trình là nguyên nhân của nhiều hư hỏng lớn và nghiêm trọng. Đó cũng chính là động lực to lớn của việc phát triển nhanh chóng của lĩnh vực này của cơ học kết cấu.

Ngay từ nửa sau của thế kỷ XVIII, L.Euler đã đề cập đến những vấn đề cơ bản của ổn định đàn hồi. Tuy nhiên, những lời giải mà nhà bác học lỗi lạc này có được, mãi đến cuối thế kỷ XIX vẫn chưa được đưa vào ứng dụng trong thực tế.

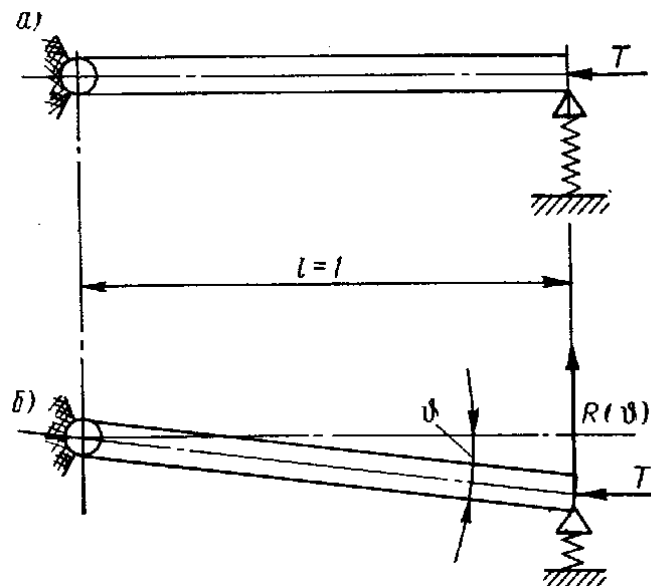
Trong giáo trình này, ta chỉ làm quen với các phương pháp nghiên cứu ổn định tĩnh, cho phép giải quyết những vấn đề mà thực tế đòi hỏi nhiều nhất.

Ta gọi *ổn định tĩnh* là tính chất ổn định của hệ, dưới tác dụng của tải trọng tăng tương đối chậm.

Tác dụng của tải trọng thay đổi nhanh chóng, hay tải trọng va đập, cũng như tải trọng là hàm có chu kỳ của thời gian, là đối tượng của *ổn định động*, không được đề cập đến ở đây.

Phương pháp chung của việc nghiên cứu ổn định tĩnh cũng như một số tính chất chung của cân bằng của hệ đàn hồi sẽ được khảo sát qua ví dụ nghiên cứu tính ổn định của một tay đòn cứng (H6.11).

Tay đòn tựa trên một đế đàn hồi, chịu lực nén  $T$ , đi qua bản lề tại vị trí cân bằng và không thay đổi phương khi điểm mút bên phải của tay đòn di chuyển (H6.11).



H6.11

Tại vị trí bị lệch, tay đòn còn chịu tác dụng thêm của phản lực lò xo  $R(\theta)$  và sẽ nằm trong trạng thái cân bằng nếu như tổng moment tất cả các lực tác dụng, lấy đối với bản lề trái, bằng 0, tức

$$R(\theta) - T\theta = 0 \quad (39.1)$$

Nếu như:

$$R(\theta) - T\theta > 0 \quad (39.2)$$

Thì phản lực sẽ đưa tay đòn về lại vị trí cân bằng, tức cân bằng là bền vững.

Nếu như:

$$R(\theta) - T\theta < 0 \quad (39.3)$$

Thì cân bằng là không bền.

Điều kiện cân bằng (39.1) luôn thỏa mãn khi  $\theta = 0$ , vì khi đó,  $R(\theta) = 0$ , và do đó, để nghiên cứu về đặc tính cân bằng của hệ, cần phải xét xem điều kiện nào trong hai điều kiện (39.2) và (39.3) sẽ xảy ra, với  $\theta$  có giá trị vô cùng bé.

Trong trường hợp tổng quát, phương trình (39.1) có thể có một số nghiệm nào đó. Giả sử một trong các nghiệm này là  $\theta_0$ . Đặt  $\theta = \theta_0 + \delta\theta$ . Khai triển  $R(\theta)$  theo chuỗi Taylor, với việc chỉ giữ lại các số hạng đến vô cùng bé cấp 1, có thể viết lại, chẳng hạn, (39.2) dưới dạng:

$$R'(\theta_0) - T > 0$$

tức:

$$T < R'(\theta_0) \quad (39.4)$$

Tương tự như trên, dấu hiệu ổn định không bền vững (39.3) của trạng thái cân bằng, được biến đổi về dạng

$$T > R'(\theta_0) \quad (39.5)$$

Nếu như:

$$T = R'(\theta_0) \quad (39.6)$$

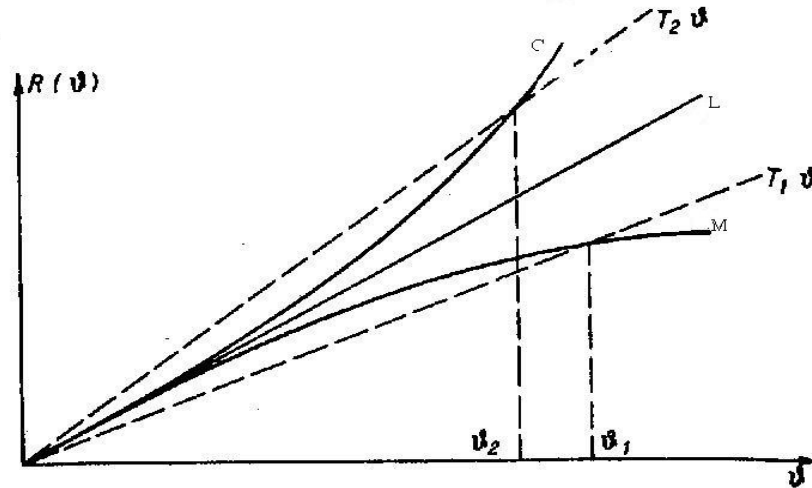
thì cân bằng là phiếm định.

Giá trị của lực  $T$ , ứng với vị trí cân bằng phiếm định (qui ước  $\theta_0 = 0$ ) gọi là *lực Euler*

$$T_E = R'(\theta_0) \quad (39.7)$$

Ta minh họa những vấn đề được nghiên cứu về cân bằng của tay đòn khảo sát qua đồ thị và dùng đồ thị này làm rõ những vấn đề của lý thuyết ổn định tĩnh.

Trên hình (6.12), các đường liên nét tương ứng với 3 đặc tính của lò xo: **(1).** L – tuyến tính, khi mà  $R(\theta) = R'(0)\theta$ , cho trường hợp lò xo có độ cứng không đổi; **(2).** M – mềm, khi  $R(\theta) < R'(0)\theta$ , và **(3).** C. – cứng, khi  $R(\theta) > R'(0)\theta$ . Các đường thẳng đứt đoạn biểu thị hàm  $T\theta$ .



H6.12

Ta xem xét việc tác dụng vào tay đòn một lực  $T_1 < R'(0)$ . Như trên đồ thị (6.12) cho thấy, khi có độ lệch ra khỏi vị trí cân bằng  $\theta = 0$ , moment của phản lực lò xo lớn hơn moment của lực  $T_1$ , tức, tay đòn sẽ có xu thế quay về vị trí cân bằng ban đầu.

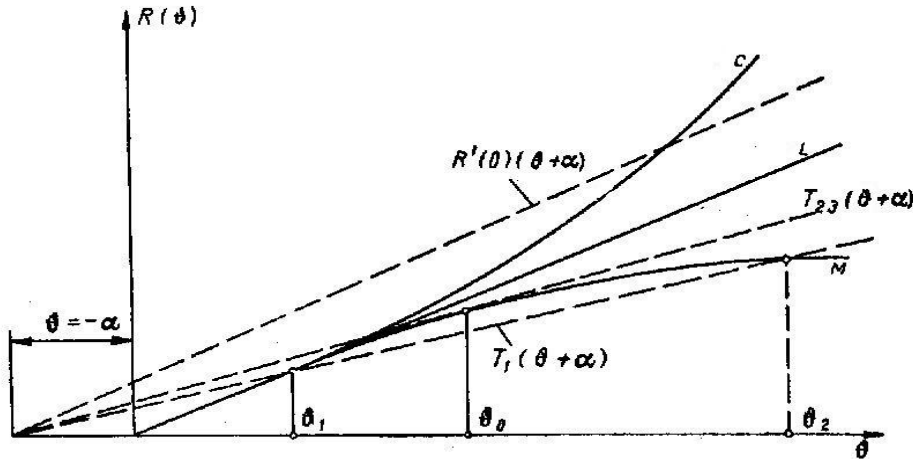
Trong trường hợp lò xo có đặc trưng mềm, tồn tại trạng thái cân bằng tại vị trí  $\theta = \theta_1$ , nhưng đây là cân bằng không bền. Thật vậy, với độ lệch dương, ( $\theta > \theta_1$ ), moment của lực  $T_1$  lớn hơn moment của phản lực và tay đòn sẽ tiếp tục tăng độ lệch chứ không quay về vị trí cân bằng ban đầu. Với độ lệch âm khỏi vị trí cân bằng, ( $\theta < \theta_1$ ), moment của phản lực lớn hơn moment của lực  $T_1$ , và khi đó, tay đòn có xu hướng quay về vị trí cân bằng ban đầu, tức lệch khỏi vị trí cân bằng  $\theta = \theta_1$ .

Nếu tác dụng lên tay đòn một lực  $T_2 > R'(0)$ , thì trạng thái cân bằng tại  $\theta = 0$  cũng sẽ không bền. Khi đó, nếu như lò xo có đặc tính cứng, sẽ tồn tại vị trí cân bằng thứ 2, và vị trí đó là bền vững. Có thể khẳng định điều này từ những lập luận tương tự như trên đây.

Từ hình H6.12 thấy rằng, việc tăng lực nén lớn hơn trị số lực Euler, xác định theo (39.7), đối với hệ tay đòn - lò xo có đặc tính cứng sẽ làm xuất hiện hiện tượng “nhảy” từ vị trí cân bằng này sang một vị trí cân bằng khác.

Đối với hệ có đặc trưng mềm, sự *nhảy* nói trên không xảy ra, và khi  $T > T_E$  sự lệch ra khỏi vị trí cân bằng xảy ra có tính liên tục. Trong trường hợp đặc trưng là tuyến tính, khi  $T = T_E$ , vị trí cân bằng là bất định, vì là vô số.

Bây giờ ta xét một trường hợp riêng, khi hệ có độ lệch ban đầu. Giả sử khi  $T = 0$  vị trí cân bằng của tay đòn ứng với góc lệch  $\theta = \alpha$ . Góc giữa phương nằm ngang và tay đòn tại trạng thái bị lệch của tay đòn là  $\theta + \alpha$ .



H6.13

Trong trường hợp này, phương trình cân bằng (39.1) có thể viết dưới dạng:

$$R(\theta) - T(\theta + \alpha) = 0. \quad (39.8)$$

còn cần đồ thị khảo sát nghiệm và tính ổn định của phương trình cho trên H6.13. Sau đây là một số kết luận, mà ta có thể tự rút ra khi nghiên cứu đồ thị nói trên:

- Với một giá trị bất kỳ của  $T$  trong hệ có đặc trưng cứng tồn tại một vị trí cân bằng ổn định;
- Khi  $T < R'(0)$ , ở hệ có đặc trưng tuyến tính tồn tại một vị trí cân bằng bền, đồng thời tại gần giá trị  $T_E = R'(0)$  độ lệch của hệ tăng không giới hạn;
- Khi  $T < R'(\theta_0)$ , trong đó,  $\theta_0$  là nghiệm kép của phương trình cân bằng (39.8), ở hệ có đặc trưng mềm có khả năng tồn tại hai vị trí cân bằng. Tại  $\theta = \theta_1 < \theta_0$  cân bằng là ổn định còn tại  $\theta = \theta_2 > \theta_0$  là không ổn định;
- Khi tăng giá trị  $T$ , các nghiệm của phương trình cân bằng xích lại gần nhau và khi  $\theta = \theta_2 = \theta_0$  hệ tiến đến một vị trí cân bằng, còn lực  $T$  đạt giá trị lớn nhất, mà với nó, hệ còn có thể có trạng thái cân bằng. Vị trí cân bằng này có đặc điểm là sẽ không ổn định khi tăng độ lệch, và sẽ ổn định nếu giảm độ lệch. Vị trí cân bằng như trên phải coi là không ổn định.

Lực  $T_E$ , xác định theo (39.7) cho hệ, có vị trí cân bằng tại  $\theta = 0$ , được gọi là lực Euler loại 1.

$$\text{Lực: } T_{E2} = R'(\theta_0), \quad (39.9)$$

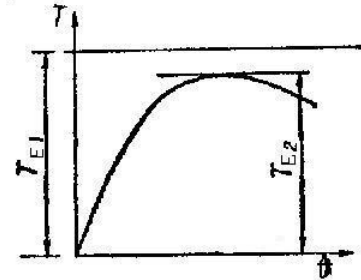
Trong đó:  $\theta_0$  là nghiệm kép của phương trình cân bằng (39.8), được gọi là lực Euler loại 2.

Liên quan đến các loại lực này, trong cơ học kết cấu phân biệt mất ổn định loại 1 và mất ổn định loại 2. Trong mất ổn định loại 1, hệ hoàn toàn không có độ lệch nào ra khỏi vị trí cân bằng ban đầu cho đến khi tải trọng nén đạt giá trị Euler: khi  $T = T_E$ , trạng thái cân bằng

trở thành không ổn định và hệ có thể có độ lệch khỏi vị trí cân bằng này, tức sự mất ổn định được đặc trưng bởi sự phân ly dạng cân bằng. Trong mất cân bằng loại 2, hệ có độ lệch khỏi trạng thái cân bằng ban đầu (khi  $T = 0$ ) ngay từ khi đặt lực  $T$ , đồng thời, độ lớn của góc lệch tăng theo trị số của lực nén. Tại một giá trị xác định của chuyển vị, đại lượng  $T$  sẽ đạt giá trị cực đại (H6.14). Giá trị cực đại này của lực  $T$  là lực Euler loại 2 và đặc trưng cho khả năng chịu lực của hệ.

Sự mất ổn định của thanh thẳng chịu nén, ổn định của tấm không có tải trọng ngang, chịu nén, cũng như của vành tròn chịu tải trọng phân bố đều v. v.. là mất ổn định loại 1.

Sự mất ổn định của thanh có độ cong ngang ban đầu hoặc chịu tải trọng ngang, tấm chịu uốn-xoắn, và một số các kết cấu khác, được làm từ vật liệu đàn hồi-dẻo (tương ứng với đặc trưng mềm), là thuộc loại 2.



H6.14

Chú ý rằng, nếu vấn đề được khảo sát giải quyết trong phạm vi tuyến tính và các đặc trưng đàn hồi của hệ là những đặc trưng tuyến tính, thì sự mất ổn định xảy ra khi xảy ra khi  $T = T_{E1}$ , như đã nêu ra trong điểm (b) trên đây.

Đạo hàm phương trình (39.8), dễ dàng thu được:

$$\frac{dT}{d\theta} = \frac{R'(\theta) - T}{\theta + \alpha},$$

Từ đó, trên cơ sở của phương trình (39.9), ta suy ra rằng, lực Euler loại 2 thoả mãn điều kiện:

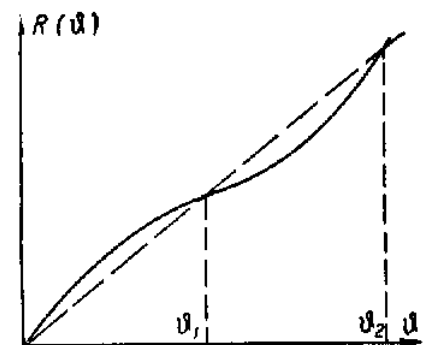
$$\frac{dT}{d\theta} = 0, \quad (39.10)$$

Và đây cũng chính là điều kiện thường được dùng để định nghĩa bản thân lực này.

Cuối cùng, còn có khả năng xảy ra trường hợp, khi mà đặc trưng đàn hồi của lò xo, có thể vừa mềm, vừa cứng, tại các giá trị khác nhau của góc lệch ngoài ra, ngoài mối quan hệ với góc lệch  $\theta$ , phản lực  $R$  còn phụ thuộc vào lực nén  $T$  (H6.15).

Khi đó, có 3 trạng thái cân bằng, trong đó, trạng thái giữa là không ổn định.

Nếu làm lệch khỏi vị trí cân bằng ban đầu  $\theta = 0$  một góc  $\theta > \theta_1$ , thanh sẽ chuyển sang trạng thái cân bằng mới tại vị trí  $\theta = \theta_2$ . Lực  $T$  càng lớn, góc lệch cần thiết để tạo ra cho hệ sự nhảy bậc càng nhỏ. Khi  $T = R'(0)$ , phương trình cân bằng có nghiệm kép.



H6.15

Các ví dụ được xem xét về lời giải của bài toán ổn định cùng các phương pháp giải các bài toán này.

Để giải bài toán ổn định cần phải:

- a. lập phương trình cân bằng tại trạng thái lệch;
- b. Tìm nghiệm của phương trình cân bằng và nghiên cứu tính chất của nghiệm tìm được;
- c. trong trường hợp hệ có đặc trưng tuyến tính, cần tìm giá trị của tải trọng, mà với tải trọng này, phương trình cân bằng có nghiệm khác 0.

Trong phần tiếp theo, ta nghiên cứu một số bài toán quan trọng của ổn định tuyến tính.

### **&40. ỔN ĐỊNH CỦA THANH MỘT NHỊP.**

Ta hãy khảo sát ổn định của thanh một nhịp, mà trục của nó trong trạng thái không chịu tải trọng là một đường thẳng.

Tuy nhiên, ta cần làm rõ lý do của việc đặt bài toán như trên, vì trong thực tế, các thanh hoặc là không thẳng, hoặc là chịu nén lệch tâm, tức tải trọng gây ra không chỉ nén mà còn cả uốn. Nói một cách chính xác, trong tất cả các trường hợp nói trên, cần nghiên cứu sự mất ổn định loại 2, theo phân loại nêu ra trong phần trên đây.

Việc giải các bài toán ổn định loại 2 rất phức tạp, ngoài ra, nó còn phụ thuộc nhiều vào các đại lượng nhỏ, ít được xác định như độ lớn và đặc trưng của độ cong ngang ban đầu, độ lệch tâm của tải trọng tác dụng, ...

Lực Euler loại 1 là giới hạn trên của lực Euler loại 2. Thường trong thiết kế kết cấu, bằng nhiều biện pháp, người ta cố gắng, bằng các biện pháp kết cấu khác nhau, làm cho sự khác biệt giữa hai loại lực này là không lớn.

Biện pháp như trên có thể vạch ra được nếu như có thể xác định cả lực Euler loại 1 lẫn lực Euler loại 2. Ngoài ra, nếu biết được lực Euler loại 1 kết hợp đối chiếu với tải trọng tác dụng lên cơ cấu, trong nhiều trường hợp, ta có thể đánh giá được độ an toàn của kết cấu. Vì thế cho nên, việc nghiên cứu ổn định loại 1 là bước đầu tiên và cần thiết cho việc nghiên cứu ổn định của kết cấu công trình.

Khi lập phương trình vi phân cân bằng của thanh chịu nén trong trạng thái uốn cong, trên cơ sở phương trình (32.1), ta thu được:

$$EIw'''' + Tw'' = 0. \quad (40.1)$$

Về sau, ta qui ước rằng lực  $T$  sẽ dương khi nén.

Tích phân tổng quát của (40.1), để ý đến (32.6), sẽ là:

$$w = B_0 + B_1x + B_2 \cos kx + B_3 \sin kx, \quad (40.2)$$

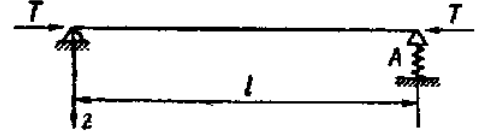
trong đó

$$k = \sqrt{\frac{T}{EI}} \quad (40.3)$$

Theo các lý luận chung trình bày trong phần trên đây, ta tiến hành tìm giá trị của lực  $T$  sao cho với nó, phương trình (40.1) có nghiệm không bằng 0, tức  $w \neq 0$ .

Ta sẽ xét một vài ví dụ cụ thể.

**Ví dụ 1.** Xác định lực Euler cho thanh chịu nén, tựa tự do trên đế cứng bên trái ( $x = 0$ ), tựa đàn hồi trên đế phải ( $x = l$ ), với hệ số mềm bằng  $A$  (H6.16).



Buộc tích phân tổng quát (40.2) thỏa mãn điều kiện biên ở bên trái:

H6.16

$$w(0) = 0; \quad w''(0) = 0,$$

ta tìm được:

$$B_0 = B_2 = 0,$$

và như vậy, trong trường hợp khảo sát:

$$w = B_1 kx + B_3 \sin kx. \quad (40.4)$$

Theo &32, các điều kiện biên tại đế phải có thể viết dưới dạng:

$$w'' = 0; \quad w = A(EIw''' + Tw'). \quad (40.5)$$

Sau khi thay biểu thức (40.4) vào (40.5), ta thu được:

$$\begin{aligned} -B_3 k^2 \sin kl &= 0; \\ B_1 kl + B_3 \sin kl &= A[-EIB_3 k^3 \cos kl + Tk(B_1 + B_3 \cos kl)] \end{aligned}$$

hay, sử dụng ký hiệu (40.3), ta biến đổi hệ phương trình trên (giảm ước phương trình thứ nhất cho  $k^2$ , phương trình thứ 2 cho  $k$  vì  $k \neq 0$ ) về dạng:

$$\left. \begin{aligned} B_3 \sin kl &= 0; \\ B_1(l - AT) + B_3 \frac{1}{k} \sin kl &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (40.6).$$

Phương trình (40.1) có khả năng có nghiệm khác 0 khi  $B_1$  và  $B_2$  không đồng nhất bằng 0, mà điều này chỉ xảy ra khi định thức của phương trình thuần nhất bằng 0, tức:

$$(l - AT) \sin kl = 0. \quad (40.7)$$



Phương trình thu được phân ra thành 2 phương trình:

$$\sin kl = 0; \quad l - AT = 0.$$

Từ phương trình thứ nhất suy ra:

$$kl = n\pi$$

Trong đó:  $n$  - số nguyên, tức, trên cơ sở (40.3), có:

$$T_1 = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2}, \quad (40.8)$$

còn từ phương trình thứ 2, có:

$$T_{E2} = \frac{l}{A} \quad (40.9)$$

Biểu thức (40.9) trùng với biểu thức (39.7) có được trên đây. Điều này có thể nhận thấy dễ dàng, nếu ta chú ý rằng,  $l = l$  và  $R'(0) = l/A$ .

Dễ thấy rằng, khi tăng lực nén  $T$ , hệ có khả năng bị mất ổn định, tức có nghiệm  $w \neq 0$ , nhưng chỉ với điều kiện khi lực này đạt giá trị nhỏ nhất trong hai giá trị xác định bởi (40.8) và (40.9) mà thôi.

Giá trị nhỏ nhất trong số các giá trị các định từ (40.8) là:

$$T_{\min} = T_{E1} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}, \quad (40.10)$$

và như vậy, cần so sánh các giá trị của (40.9) và (40.10).

Nếu hệ số mềm  $A$  là vô cùng lớn, thì  $T_{E2} < T_{E1}$ . Trong trường hợp này,  $\sin kl \neq 0$ , và từ phương trình (40.6) suy ra là  $B_3 = 0$ . Vì thế cho nên:

$$w = B_1 kx$$

và thanh rời khỏi vị trí cân bằng như một tay đòn cứng tuyệt đối.

Khi hệ số mềm của đế đỡ giảm, tức tăng độ cứng của đế, thì lực  $T_{E2}$  sẽ tăng và tại một giá trị  $A_{cr}$  nào đó, gọi là hệ số mềm tới hạn, (H6.17) sẽ có sự bằng nhau của các lực

$$\frac{l}{A_{cr}} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}. \quad (40.11)$$

Tiếp tục giảm hệ số mềm không làm tăng theo nó lực Euler, mà khi đó, lực này xác định bằng công thức (40.10).

Trong trường hợp này,  $\sin kl = 0$ . từ phương trình thứ 2 của (40.6) suy ra là  $B_1 = 0$  và thanh bị uốn theo đường cong

$$w = B_3 \sin kx = B_3 \sin \frac{\pi x}{l}.$$

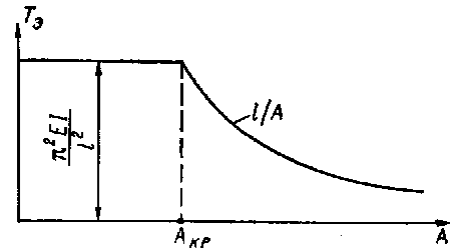
Khi độ cứng đế đỡ bằng độ cứng tới hạn thì có hai khả năng, có hai dạng mất ổn định đồng thời.

Nếu thanh tựa tự do trên đế cứng, thì tập hợp các lực có thể làm cho thanh rơi vào trạng thái cân bằng phiếm định, được xác định theo công thức (40.8). Các lực này tương ứng với đường cong uốn

$$w = B_3 \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (40.12)$$

Hàm  $\sin \frac{n\pi x}{l}$  được gọi là *dạng mất ổn định*, và được xác định với độ chính xác đến một hằng số nhân.

Hằng số nhân bất định về dạng mất ổn định là hệ quả của việc sử dụng phương trình vi phân tuyến tính.



Đồng thời, điều này cho thấy rằng, khi đạt giá trị lực

H6.17

nén Euler, sự cân bằng trở nên bất định, tức, đồng thời với dạng thẳng, thanh có thể có vô số các dạng cân bằng vênh, đặc trưng bởi các độ võng khác nhau. Để nghiên cứu đáng điều của thanh sau khi mất ổn định, với độ võng lớn, cần dùng phương trình vi phân uốn phức tạp dạng phi tuyến. Khi đó, mỗi giá trị  $T > T_E$  tương ứng với một giá trị hoàn toàn xác định của độ võng của thanh và vị trí lệch này của thanh sẽ là ổn định.

**Ví dụ 2.** Xác định lực Euler của thanh tựa tự do một đầu ( $x = 0$ ) và ngàm cứng tại đầu còn lại ( $x = l$ ).

Trong trường hợp khảo sát, các điều kiện biên tại  $x = 0$  trùng với ví dụ đã xét trên đây, nên biểu thức tổng quát của độ võng có thể lấy theo dạng (40.4).

Buộc biểu thức này thỏa mãn điều kiện biên tại mút bên phải:

$$w(l) = 0; \quad w'(l) = 0,$$

ta thu được hệ phương trình thuần nhất đối với  $B_1$  và  $B_3$ :

$$\left. \begin{aligned} B_1 kl + B_3 \sin kl &= 0; \\ B_1 + B_3 \cos kl &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (40.13)$$

Đặt định thức hệ số của hệ phương trình trên bằng 0, ta thu được:

$$kl \cos kl - \sin kl = 0. \quad (40.14)$$

Vì  $\cos kl = 0$  không phải nghiệm của phương trình (khi đó,  $\sin kl = \pm 1$ ) nên sau khi chia hai vế của phương trình cho  $\cos kl$ , ta được:

$$\tan kl = kl. \quad (40.15)$$

Sau khi giải phương trình trên (bằng đồ thị, chẳng hạn) có thể tìm được nghiệm nhỏ nhất của nó:

$$(kl)_{\min} = 4,49$$

Trên cơ sở của (40.3), ta có:

$$T_E = k^2 EI = (kl)^2 \frac{EI}{l^2}$$

hay

$$T_E = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}, \quad (40.16)$$

Trong đó

$$\mu = \frac{\pi}{kl} \quad (40.17)$$

Có tên là *hệ số thay thế*, còn  $\mu l$  là *chiều dài thay thế*.

Có thể nhận thấy rằng, chiều dài thay thế chính là khoảng cách giữa các tiết diện mà khi tanh bị mất ổn định, *moment uốn tại đó bằng 0*.

Trong trường hợp khảo sát, hệ số thay thế :

$$\mu = \frac{\pi}{4,49} = 0,7$$

Còn khi hai đầu ngàm cứng thì hệ số này bằng 0,5, tức, đối với thanh ngàm cứng hai đầu, lực Euler tăng lên 4 lần.

Bạn đọc có thể tự giải bài toán về ổn định của thanh chịu ngàm đàn hồi đối xứng; Trong trường hợp này, gốc toạ độ nên chọn là điểm giữa nhịp thanh. Dưới đây là các kết quả cuối cùng của lời giải nói trên.

Lực Euler cho thanh ngàm đàn hồi có thể biểu diễn dưới dạng:

$$T_E = \frac{(2u_0)^2 EI}{l^2}. \quad (40.18)$$

Đại lượng  $2u_0$  có thể xác định theo bảng 6.1, theo hệ số ngàm  $\chi$ , xác định từ công thức:

$$\frac{1}{\chi} = 1 + \frac{2\mathcal{U}EI}{l^2}, \quad (40.19)$$

Trong đó,  $\mathcal{U}$  là hệ số mềm ngàm đàn hồi.

*Bảng 6.1*

$\chi$	$2u_0$	$\chi$	$2u_0$
0,00	$0,5\pi = 1,57$	0,548	2,10
0,285	1,75	0,82	2,62
0,417	1,92	1,00	$\pi=3,14$

Bảng 6.1 cho thấy rằng, ngàm đàn hồi chỉ làm tăng lực Euler đáng kể khi ngàm gần như là cứng. Chẳng hạn như, với  $\chi = 0,285$ , lực Euler sẽ là  $(1,75 : 1,57) = 1,24$  lần lớn hơn so với trường hợp tựa tự do.

Kết luận trên đây chính là cơ sở cho việc, trong thực tế tính toán ổn định dọc của các dầm tàu thủy, ta coi các dầm này là tựa tự do trên các cơ cấu ngang. Sai số thiên về an toàn chút ít nhưng là để bù trừ cho các yếu tố bất lợi của một số nhân tố mà ta không đề cập đến được như ảnh hưởng của tải trọng ngang, của độ cong ngang ban đầu.

#### **&41. ỔN ĐỊNH CỦA DẦM MỘT NHỊP TRÊN NỀN ĐÀN HỒI. ẢNH HƯỞNG CỦA BIẾN DẠNG TRƯỢT ĐẾN ỔN ĐỊNH.**

Phù hợp với qui ước dấu trên đây, có thể viết lại phương trình vi phân uốn phức tạp, dầm trên nền đàn hồi, dưới dạng:

$$EIw^{IV} + Tw'' + k_0w = 0, \quad (41.1)$$

Trong đó:  $k_0$  – hệ số cứng của nền đàn hồi.

Ta khảo sát một số bài toán xác định tải trọng Euler.

##### **1. Xác định lực Euler cho dầm tựa tự do, nằm trên nền đàn hồi liên tục.**

Việc giải bài toán trên đây khá đơn giản vì trong trường hợp này, phương trình (41.10) cùng các điều kiện biên tựa tự do có thể thoả mãn khi ta đặt:

$$w = A \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (41.2)$$

Ta cần tìm nghiệm của (41.1) dưới dạng (41.2), khác 0. Sau khi thay (41.2) vào (41.1) rồi giản ước cho thừa số khác 0 là  $A \sin \frac{n\pi x}{l}$ , ta thu được phương trình xác định lực Euler

Từ đó suy ra

$$T = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \left( n^2 + \frac{\gamma}{n^2} \right), \quad (41.4)$$

Trong đó

$$\gamma = \frac{k_0 l^4}{\pi^4 EI}. \quad (41.5)$$

Trong biểu thức (41.4), số nửa sóng mất ổn định  $n$  phải chọn sao cho lực  $T$  có giá trị nhỏ nhất.

Nếu  $k_0$ , và như vậy, cả  $\gamma$ , là đủ nhỏ, thì giá trị nhỏ nhất của  $T$  nhận được khi  $n = 1$ , còn nếu  $k_0$  là lớn thì giá trị nhỏ nhất của  $T$  sẽ ứng với  $n \neq 1$ .

Để xác định xem giá trị nào của  $n$  tương ứng với giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $\left( n^2 + \frac{\gamma}{n^2} \right)$ , ta tìm giá trị của  $n$  khiến cho  $\gamma_n$  có giá trị như nhau khi thay  $n$  bởi  $n+1$ , tức:

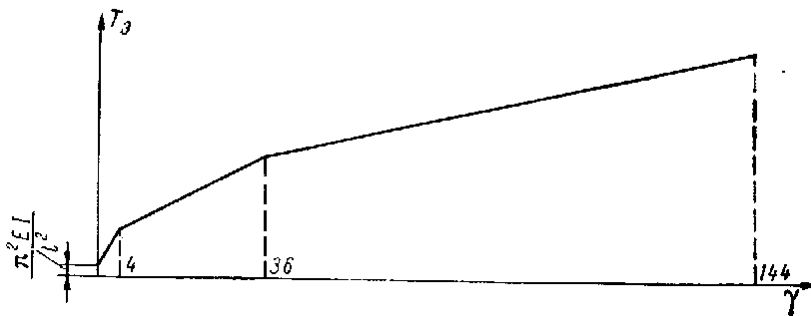
$$n^2 + \frac{\gamma}{n^2} = (n+1)^2. \quad (41.6)$$

Nếu  $\gamma < \gamma_1 = 4$ , thì mất ổn định xảy ra với  $n = 1$ ; nếu  $4 < \gamma < 36$ , thì với  $n = 2$ . Một cách tổng quát, chiều dài thanh sẽ tạo thành  $n$  nửa sóng nếu như:

$$(n-1)^2 n^2 < \gamma < n^2 (n+1)^2. \quad (41.7)$$

Trên hình H6.18 biểu diễn đồ thị quan hệ giữa  $T_E$  và  $\gamma$ .

Cần chú ý rằng, dù thanh đối xứng qua giữa nhịp, dạng mất ổn định, với một giá trị nào đó của  $k_0$  của nền đàn hồi vẫn có thể phản xứng.



H6.18

Nếu giá trị của  $\gamma$  là lớn và giá trị của  $n$  cũng lớn và có thể bỏ qua số 1 trong biểu thức (41.7).

Khi đó, ta có:

$$n = \sqrt[4]{\gamma} = \sqrt[4]{\frac{EOI}{\pi^4 EI} \frac{k_0 l^4}{EI}}. \quad (41.8)$$

Sử dụng (41.8), có thể biến đổi (41.4) về dạng:

$$T_E^0 = 2\sqrt{k_0 EI}. \quad (41.9)$$

Chiều dài nửa sóng  $s$  khi mất ổn định được xác định theo công thức

$$s = \frac{l}{n} = \pi \sqrt[4]{\frac{EI}{k_0}}. \quad (41.)$$

Dễ dàng chứng minh rằng, đối với thanh tựa tự do:

$$T_E \geq T_E^0 \quad (41.11)$$

Đương nhiên là, đối với dầm ngàm cứng, bất đẳng thức trên đây càng thể nghiệm rõ.

Tính đúng đắn của bất đẳng thức (41.11) được suy ra từ một thực tế là biểu thức (41.8) tương ứng với giá trị nhỏ nhất của lực Euler (41.4), tìm được với giả thiết  $n$  là đại lượng biến đổi liên tục. Giá trị của đại lượng này đương nhiên là nhỏ hơn giá trị nhỏ nhất tìm được với giả thiết  $n$  là số nguyên.

## 2. Xác định lực Euler cho thanh ngàm cứng, nằm trên nền đàn hồi liên tục.

Trong trường hợp khảo sát [xem (14.22), trên cơ sở của quan hệ (41.11) và (41.9)]

$$\beta^2 = \left( \frac{T}{2\sqrt{EI k_0}} \right)^2 > 1,$$

và vì  $T < 0$ , nên, đặt:

$$\beta_0 = \left| \frac{T}{2\sqrt{EI k_0}} \right| \quad (41.12)$$

Ta có thể viết tích phân tổng quát của phương trình (41.1) dưới dạng (14.34)

$$w(x) = C_1 \cos px + C_2 \sin px + C_3 \cosh tx + C_4 \sinh tx, \quad (48.13)$$

Trong đó:

$$p = \alpha \sqrt{2(\beta_0 + \sqrt{\beta_0^2 - 1})}; \quad t = \alpha \sqrt{2(\beta_0 - \sqrt{\beta_0^2 - 1})}; \quad (41.14)$$

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{k_0}{4EI}} \quad (41.15)$$

Nhận gốc toạ độ là điểm giữa của nhịp dầm và buộc biểu thức (41.13) thoả mãn các điều kiện biên của dầm ngàm cứng:

$$w(\pm 0,5l) = 0; \quad w'(\pm 0,5l) = 0. \quad (41.16)$$

Sau khi thay biểu thức (41.13) vào các điều kiện biên (48.16) , ta có hệ phương trình

$$\begin{aligned} C_1 \cos P + C_2 \sin P + C_3 \cos T + C_4 \sin T &= 0; \\ C_1 \cos P - C_2 \sin P + C_3 \cos T - C_4 \sin T &= 0; \\ -C_1 P \sin P + C_2 P \cos P - C_3 T \sin T + C_4 T \cos T &= 0; \\ C_1 P \sin P + C_2 P \cos P + C_3 T \sin T + C_4 T \cos T &= 0. \end{aligned}$$

Trong đó:  $P = 0,5pl; \quad T = 0,5tl. \quad (41.17)$

Hai phương trình cuối cùng nhận được khi ta áp đặt các điều kiện biên về góc xoay  $w(\pm 0,5l) = 0$ , sau khi nhân kết quả với  $0,5l$ .

Bằng cách cộng từng cặp và trừ từng cặp, có thể biến đổi hệ phương trình trên đây về dạng hai hệ hai phương trình:

$$\left. \begin{aligned} C_1 \cos P + C_3 \cos T &= 0; \\ C_1 \sin P + C_3 \sin T &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (41.18)$$

$$\left. \begin{aligned} C_2 \sin P + C_4 \sin T &= 0; \\ C_2 \cos P + C_4 \cos T &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (41.19)$$

Nếu đặt định thức của hệ phương trình (4.18) bằng 0, tức:

$$T \sin T \cos P - P \sin P \cos T = 0, \quad (41.20)$$

Thì khi đó, có  $C_2 = C_4 = 0$ ; như vậy, phương trình (41.18) cho nghiệm tương ứng với dạng mất ổn định đối xứng.

Nếu đặt định thức của hệ (41.19) bằng 0, tức:

$$T \sin P \cos T - P \sin T \cos P = 0, \quad (451.21)$$

Ta có:  $C_1 = C_3 = 0$ , và như vậy, phương trình (41.19) tương ứng với dạng mất ổn định phản xứng.

Việc giải các hệ phương trình (41.18) và (41.19) không thể thực hiện bằng giải tích mà chỉ có thể bằng đồ thị hoặc với sự trợ giúp của máy tính điện tử.

Chú ý rằng, trong trường hợp khảo sát cũng như trong trường hợp dầm trên nền đàn hồi , tựa tự do hai đầu, giá trị của lực nén Euler có thể tương ứng với cả dạng mất ổn định đối xứng cũng như dạng mất ổn định phản xứng.

Có thể chứng minh rằng, trong trường hợp dầm khá dài hoặc khi độ cứng nền là lớn, tức khi có đại lượng  $\alpha l$  đủ lớn nghiệm của các phương trình (41.20) và (41.21) khác biệt rất ít so với nghiệm tương ứng với  $\beta_0 = 1$ .

Tuy nhiên,  $\beta_0 = 1$  chỉ xảy ra với giá trị của lực nén, được xác định theo (41.9), nói cách khác, đối với dầm dài trên nền đàn hồi, lực Euler trên thực tế không phụ thuộc vào các điều kiện biên. Điều này được giải thích bởi, trong trường hợp dầm dài, tức khi  $\alpha l$  đủ lớn, sự mất ổn định của thanh trên nền đàn hồi xảy ra với sự tạo thành nhiều nửa sóng, và vì thế, ảnh hưởng của các điều kiện biên, tại hai đầu mút dầm là không đáng kể.

Đối với dầm có chiều dài hữu hạn, trên nền đàn hồi, ngàm cứng hai đầu, lực Euler có khác biệt, so với trường hợp dầm dài, tựa tự do hai đầu. Tuy nhiên, sự khác biệt này là ít hơn trong trường hợp không có nền đàn hồi. Vì thế cho nên, về sau, khi cần kiểm tra ổn định của thanh trên đế đàn hồi, ta chỉ cần kiểm tra thanh tương ứng trên đế cứng là đủ.

## **2. Ảnh hưởng của biến dạng cắt đến ổn định của thanh.**

Để tính đến ảnh hưởng của biến dạng cắt đến trị số của lực Euler của thanh, ta tiến hành như sau đây.

Biểu diễn độ võng tổng cộng của thanh dưới dạng:

$$w = w_1 + w_2$$

Trong đó:  $w_1$  và  $w_2$  – tương ứng là các độ võng do cắt và do uốn.

Khi đó, trong trường hợp thanh chịu nén bởi lực  $T$ , có thể viết biểu thức moment uốn thanh, trong trạng thái bị cong dưới, dạng [xem (14.5) và (14.6)].

$$EIw_1'' = -T(w_1 + w_2) + M_0 + N_0x. \quad (41.22)$$

Đạo hàm phương trình (41.22) hai lần, ta được:

$$EIw_1^{IV} = -T(w_1'' + w_2''). \quad (41.23)$$

Khi có nền đàn hồi, trong vế phải của phương trình trên xuất hiện số hạng tương ứng với phản lực nền, tức ta có:

$$EIw_1^{IV} = -T(w_1'' + w_2'') - k(w_1 + w_2). \quad (41.24)$$

Trên cơ sở của quan hệ (14.10), có thể viết:

$$w_2 = -\frac{EIw_1''}{G\omega} + a; \quad w_2'' = -\frac{EIw_1^{IV}}{G\omega}, \quad (41.25)$$

Trong đó:  $G\omega$  - độ cứng cắt.

Khử bỏ  $w_2$  và  $w_2''$  ra khỏi phương trình (41.24) nhờ quan hệ (41.25), ta được<sup>1</sup>:

$$EI\left(EI - \frac{T}{G\omega}\right)w_1^{IV} + \left(T - k_0 \frac{EI}{G\omega}\right)w_1'' + k_0 w_1 = 0. \quad (41.26)$$

Phương trình (41.26) là phương trình vi phân ổn định nén thanh trên nền đàn hồi, khi kể đến cả ảnh hưởng của biến dạng cắt.

---

<sup>1</sup> nhớ lại rằng, có thể cho hằng số  $a$  bằng 0 mà không làm sai lệch gì đến kết quả bài toán [xem &15].



Trong phần tiếp theo dưới đây, ta chỉ hạn chế khảo sát trường hợp không có nền đàn hồi. Khi đó, trong phương trình (41.26), cần lấy  $k_0 = 0$ .

Khi khảo sát ổn định của thanh tựa tự do hai đầu, ta đặt:

$$w_1 = A \sin \frac{\pi x}{l}, \quad (41.27)$$

Sau khi thay (41.27) vào (41.26), với  $k = 0$ , ta thu được:

$$A \left[ EI \left( EI - \frac{T}{G\theta} \right) \left( \frac{\pi}{l} \right)^4 - T \left( \frac{\pi}{l} \right)^2 \right] = 0. \quad (41.28)$$

Vì khi mất ổn định,  $A \neq 0$ , nên khi cho biểu thức trong dấu móc vuông bằng 0, ta thu được

$$T_E = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{EI}{G\theta} \frac{\pi^2}{l^2}}. \quad (41.29)$$

Công thức (41.29) cho thấy, ảnh hưởng của biến dạng cắt dẫn đến việc giảm lực Euler của thanh. Điều này được giải thích bởi, khi để ý đến ảnh hưởng của biến dạng cắt, ta đã coi độ cứng chống cắt  $G\theta$  là hữu hạn, còn khi bỏ qua biến dạng cắt, ta coi  $G\theta = \infty$ . Khi tính đến cắt, độ cứng chung của hệ giảm đi và vì thế, lực Euler cũng giảm.

Công thức (41.29) còn có thể viết lại dưới dạng:

$$T_E = T_E^0 k, \quad (41.10)$$

Trong đó:  $T_E^0$  - lực Euler, tính trong trường hợp không kể đến ảnh hưởng cắt, tức giả thiết rằng  $G\theta = \infty$ .

$k$  - hệ số điều chỉnh, nhỏ hơn 1.

Trong trường hợp khảo sát:

$$k = \frac{1}{1 + \frac{EI}{G\theta} \frac{\pi^2}{l^2}}. \quad (41.31)$$

Cấu trúc của hệ số  $k$  tương tự cấu trúc tương ứng của các hệ số điều chỉnh trong bài toán uốn dầm (xem &5).

Có thể chứng minh một cách không mấy khó khăn rằng, hệ số  $k$  phụ thuộc nhiều vào tỉ số giữa chiều dài nhịp dầm  $l$  và chiều cao tiết diện ngang dầm  $h$  và vào dạng của tiết diện ngang thanh. Cũng như trong bài toán uốn, ảnh hưởng của biến dạng cắt giảm đi theo chiều tăng của tỉ số  $l:h$ , tức, ảnh hưởng này sẽ rất đáng kể trong trường hợp dầm ngắn. Đối với thanh làm từ thép cán, với  $l:h > 10$  sự giảm lực Euler do ảnh hưởng của biến dạng cắt là không đáng kể. Cần chú ý rằng, ảnh hưởng của biến dạng cắt đối với vật liệu có module đàn hồi nhỏ, như

chất dẻo chẳng hạn, ảnh hưởng của biến dạng này là rất lớn.

**&42. ỔN ĐỊNH CỦA THANH VỚI QUAN HỆ  $\sigma - \varepsilon$  PHI TUYẾN.**

**ẢNH HƯỞNG CỦA SỰ KHÔNG TUÂN THỦ ĐỊNH LUẬT HOOKE ĐẾN ỔN ĐỊNH.**

Tất cả các kết quả thu được trên đây về việc xác định lực Euler đều dựa trên cơ sở của giả thiết rằng cho đến khi bị mất ổn định, định luật Hooke vẫn còn được tuân thủ (nghiệm đúng), tức quan hệ giữa ứng suất và biến dạng luôn là quan hệ tuyến tính. Các kết quả này sẽ là đúng, nếu như ứng suất Euler:

$$\sigma_E = \frac{T_E}{F} \quad (42.1)$$

trong đó,  $F$  – diện tích tiết diện ngang của thanh, không vượt quá *giới hạn tỉ lệ* của vật liệu,  $\sigma_{ll}$ .

Trên cơ sở của (42.1) và (40.16) đại lượng ứng suất Euler sẽ bằng:

$$\sigma_E = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2 F}.$$

Nếu thay  $I = \rho^2 F$ , trong đó,  $\rho$  - bán kính quán tính tiết diện ngang thanh, và ký hiệu:

$$\lambda = \frac{\mu l}{\rho}, \quad (42.2)$$

Ta thu được:

$$\sigma_E = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \quad (42.3)$$

Đại lượng  $\lambda$  có tên là *độ mảnh của thanh*.

Kinh nghiệm tích lũy trong nhiều năm cho thấy rằng, khi  $\sigma_E < \sigma_{ll}$ , các kết quả thực nghiệm trùng với kết quả thu được từ (42.3).

Thay  $\sigma_E = \sigma_{ll}$  vào công thức (42.3), ta thu được giá trị của độ mảnh  $\lambda(\lambda_0)$ , là tham số đặc trưng cho giới hạn khả dụng của các công thức lý thuyết. Theo cách đó, đối với thép cacbon, lấy

$\sigma_{ll} \cong 2000 \text{ kG/cm}^2$ ,  $E = 2.10^6 \text{ kG/cm}^2$ , thì

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{ll}}} = \sqrt{\frac{10.2.10^6}{2.10^3}} = 100$$

Như vậy là, nếu đối với thanh làm từ thép cacbon mà  $\lambda > 100$ , thì các công thức lý thuyết xác định tải trọng Euler có thể coi là đúng.

Tuy nhiên, đối với đa số các kết cấu thân tàu cũng như các loại kết cấu khác, độ mảnh

tương đối của thanh thường là nhỏ hơn nhiều, và vì thế, công thức lý thuyết, dựa trên cơ sở định luật Hooke, không được ứng dụng được.

Cũng chính vì lý do trên đây, việc nghiên cứu ổn định của thanh trong miền đàn hồi-dẻo có ý nghĩa thực tế vô cùng quan trọng.

Ta qui ước gọi ứng suất mà trên thực tế, dưới tác dụng của nó, thanh hoặc hệ đàn hồi mất ổn định là ứng suất tới hạn ( $\sigma_{th}$ ). Ứng suất này được xác định có kể đến ảnh hưởng của sự lệch khỏi định luật Hooke của vật liệu. Còn thuật ngữ ứng suất Euler ( $\sigma_E$ ) dùng để chỉ ứng suất tính được theo công thức lý thuyết (42.3), với giả thiết là định luật Hooke nghiệm đúng. Điều này cũng có nghĩa là, khi mất ổn định xảy ra trong giới hạn đàn hồi, ta có  $\sigma_E = \sigma_{th}$ .

Cho đến cuối thế kỷ XIX người ta còn dùng các công thức khác nhau cho việc xác định ứng suất tới hạn  $\sigma_{th}$  ngoài giới hạn đàn hồi, dựa vào các số liệu thí nghiệm (trong số đó có công thức Iasinski, công thức Tetmaier, công thức Renkin, v.v...). cơ sở lý thuyết cho việc xác định ứng suất tới hạn  $\sigma_{th}$  trong miền đàn hồi-dẻo, là do F.S. Iasinski, Enghesson tạo dựng nên. Về sau, Rabotnov và Panovko, một lần nữa, quay lại nghiên cứu vấn đề này.

Dưới đây, ta xem xét cơ sở của lời giải lý thuyết của việc xác định ứng suất tới hạn.

### 1. Ý tưởng đầu tiên:

Do Iasinski khởi thảo và sau này Engesson cùng với Karman tiếp tục, dựa trên giả thiết rằng, thanh chịu nén bị mất ổn định tại tải trọng T, không biến đổi khi thanh bị võng.

Chọn sơ đồ nén vật liệu  $\sigma - \varepsilon$  đặc trưng bởi đường cong trên đồ thị H6.19. Cho đến điểm A, đường cong tuân thủ đúng định luật Hooke. Tăng từ từ tải trọng, ta tạo ra trên thanh ứng suất nén, tương ứng với điểm B của biểu đồ: với ứng suất này, thanh bắt đầu bị cong. Khi bị uốn cong, một phía của thanh chịu ứng suất nén bổ sung, còn phía kia, phía lồi, chịu kéo.

Nếu coi là độ cong của thanh rất nhỏ, mối quan hệ giữa  $\sigma$  và  $\varepsilon$  trong vùng nén tăng được đặc trưng bởi một module có tên là *module tiếp tuyến*

$$E_u = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \quad (42.4)$$

Đây chính là tang của góc lệch của tiếp tuyến với đường cong tại điểm B (so với trục hoành).

Trong vùng kia của thanh, có thể sử dụng module E, vì đường hạ tải là đường song song với đường thẳng tương ứng với vùng đàn hồi.

Ta hãy khảo sát tiết diện ngang của thanh. Giả sử vùng tiết diện ứng với  $z > 0$  là vùng tăng ứng suất nén do uốn, còn vùng kia, tại  $z < 0$ , giảm nén.

Sử dụng giả thuyết tiết diện phẳng, có thể viết biểu thức biến dạng dài tương đối của các thớ trên thanh như sau:

$$\varepsilon = - \frac{z}{\rho},$$

trong đó,  $\rho$  -là bán kính cong của trục trung hoà của thanh, còn khoảng cách  $z$  là đo từ trục trung hoà  $y$  của tiết diện. Ứng suất bổ sung trên miền  $z > 0$  sẽ là:

$$\sigma_1 = - \frac{E_{tt} z}{\rho},$$

còn trên miền giảm tải,  $z < 0$ , có:

$$\sigma_2 = - \frac{Ez}{\rho}.$$

H.6.19

Vì đã giả thiết rằng, khi mất ổn định, lực nén  $T$  không đổi, nên vector chính của các lực (ứng suất) bổ sung tác dụng trên tiết diện ngang bằng 0.

Vì thế cho nên:

$$\int_{F_1} \sigma_1 dF + \int_{F_2} \sigma_2 dF = - \frac{E_{tt}}{\rho} \int_{F_1} z dF - \frac{E}{\rho} \int_{F_2} z dF = 0$$

$$E_{tt} S_1 + E S_2 = 0. \quad (42.5)$$

Trong đó,  $S_1$  và  $F_1$ , tương ứng, là ký hiệu của moment tĩnh đối với trục trung hoà và diện tích của phần tiết diện tăng tải trọng nén, còn  $S_2$  và  $F_2$  – là các đại lượng tương ứng của phần tiết diện kia, phần giảm tải trọng nén.

Phương trình (42.5) xác định vị trí trục trung hoà của thanh khi uốn. Trong trường hợp đang xét, trục này không đi qua trọng tâm của tiết diện ngang.

So sánh tổng moment nội lực (tạo nên bởi các ứng suất pháp) với moment ngoại lực  $M$ , ta được:

$$- \frac{E_{tt}}{\rho} \int_{F_1} z^2 dF - \frac{E}{\rho} \int_{F_2} z^2 dF = - M$$

hay

$$\frac{1}{\rho} (E_{tt} I_1 + E I_2) = M, \quad (42.6)$$

Trong đó:  $I_1$  và  $I_2$  là moment quán tính của hai phần tiết diện nói trên đối với trục trung hoà.

Nếu đưa vào ký hiệu:

$$E_e = \frac{E_t I_1 + E I_2}{I}, \quad (42.7)$$

Trong đó:  $I$  – là moment quán tính toàn thể tiết diện ngang đối với trục đi qua trọng tâm.

Thay cho (42.6) ta có:

$$\frac{1}{\rho} = w'' = \frac{M}{E_e I}. \quad (42.8)$$

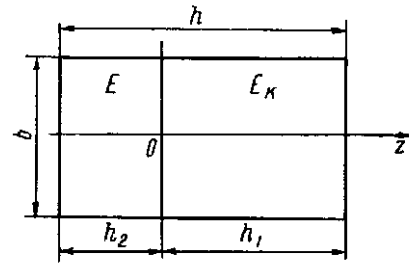
Đại lượng  $E_e$  được gọi là *module đàn hồi thay thế* hay *module đàn hồi tương đương*. Như có thể thấy từ biểu thức (42.8), khi mất ổn định ngoài giới hạn đàn hồi, trong tất cả các quan hệ về uốn thanh, thay chỗ cho module đàn hồi  $E$ , ta dùng module đàn hồi thay thế  $E_e$ . Vì thế cho nên, tải trọng tới hạn và ứng suất tới hạn cũng được xác định theo cùng các công thức như trước đây, có điều là trong đó,  $E_e$  thay chỗ cho  $E$ .

Như vậy, ta có

$$T_{th} = \frac{\pi^2 E_e I}{(\mu l)^2}; \quad (42.9)$$

$$\sigma_{th} = \frac{\pi^2 E_e}{\lambda^2}; \quad (42.10)$$

$$\eta = \frac{\sigma_{th}}{\sigma_E} = \frac{E_e}{E}. \quad (42.11)$$



H6.20

Đại lượng module thay thế  $E_e$  phụ thuộc vào ứng suất tới hạn  $\sigma_{th}$  và dạng tiết diện ngang của thanh.

Các kết quả nghiên cứu cho thấy rằng, ảnh hưởng của hình dạng tiết diện ngang thanh không lớn, vì thế cho nên thường người ta sử dụng module thay thế của tiết diện ngang hình chữ nhật  $E_u$  thay cho các hình dạng khác.

Đối với tiết diện ngang hình chữ nhật có các các cạnh là  $b$  và  $h$  (H6.20) phương trình (42.5) sẽ là:

$$E_u b \frac{h_1^2}{2} - E b \frac{h_1^2}{2} = 0,$$

từ đó:

$$\frac{h_1}{h_2} = \sqrt{\frac{E}{E_u}}.$$

Vì  $h_1 + h_2 = h$  nên ta có:

$$h_1 = h \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{E} + \sqrt{E_u}}; \quad h_2 = h \frac{\sqrt{E_k}}{\sqrt{E} + \sqrt{E_u}}.$$

Sử dụng module thay thế theo công thức (42.7), ta có

$$E_e = \frac{E_u \frac{bh_1^3}{3} + E \frac{bh_2^3}{3}}{\frac{bh^3}{12}} = \frac{4EE_u}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_u})^2}. \quad (42.12)$$

Để vẽ biểu đồ quan hệ giữa ứng suất tới hạn với độ mảnh  $\lambda$ , theo công thức (42.10), cần tiến hành như sau: Đo trị số của module tiếp tuyến  $E_u$  tại nhiều điểm khác nhau trên biểu đồ nén vật liệu và xây dựng đường cong quan hệ giữa  $E_u$  và  $\sigma$ . Trên cơ sở các số liệu từ đường cong này, dùng công thức (42.12), có thể tính trị số  $E_e$  ứng với các giá trị khác nhau của  $\sigma$ .

Sau đó, bằng việc đặt  $\sigma_{th} = \sigma$ , có thể tính được các giá trị của độ mảnh  $\lambda$  ứng với mỗi  $\sigma$  và dựng được biểu đồ  $\sigma_{th} - \lambda$ , xác định quan hệ giữa độ mảnh của thanh và ứng suất tới hạn.

## **2. Ý tưởng thứ 2.**

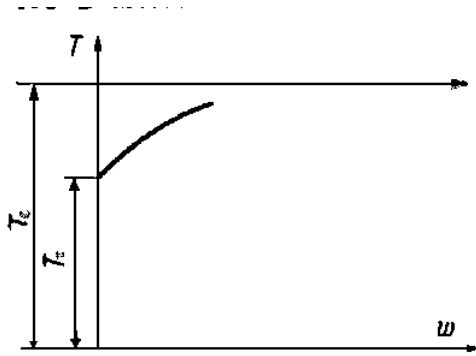
Được Shenly đề xuất vào năm 1946, xuất phát từ giả thiết rằng, khi mất ổn định, lực nén  $T$  không còn là không đổi, mà nó nhận thêm một giá số nào đó.

Đặc điểm của sự mất ổn định trong trường hợp này là, tại thời điểm thanh bị cong, trên thực tế, gần như toàn bộ tiết diện ngang của thanh được giảm tải, chỉ trừ tại vùng, mà từ đó phát sinh độ võng, là tăng tải. Có thể chứng minh rằng, với việc sử dụng giả thiết trên, tải trọng tới hạn có thể tính được thông qua module đàn hồi  $E_u$ , tức:

$$T_{th} = \frac{\pi^2 E_u I}{(\mu l)^2}; \quad (42.13)$$

$$\sigma_{th} = \frac{\pi^2 E_u}{\lambda^2}. \quad (42.14)$$

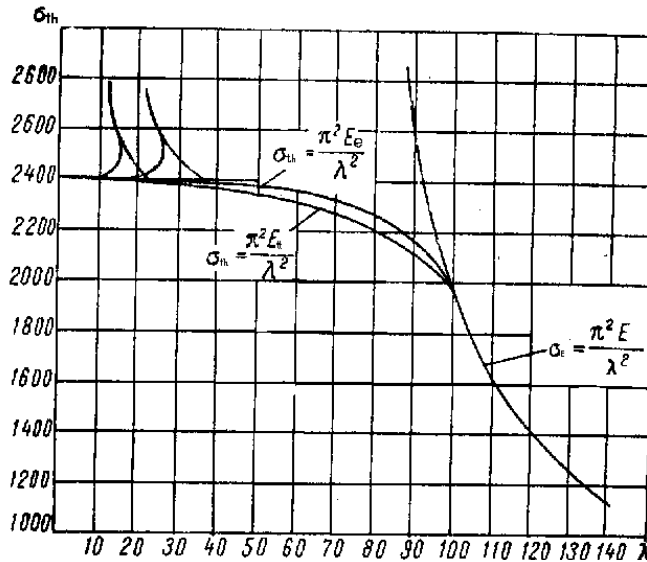
Tất nhiên là tải trọng tới hạn tìm được trên cơ sở mô đun đàn hồi tiếp tuyến, theo công thức (42.13), sẽ nhỏ hơn tải trọng xác định qua mô đun thay thế, theo công thức (42.9), vì  $E_e > E_u$ .



Quan hệ giữa độ võng và tải trọng có dạng cho trên hình vẽ (H6.21). Trên trục tung của hình này có đánh dấu hai vị trí lực tới hạn, xác định theo module thay thế  $E_e$  (ký hiệu là  $T_e$ ) và theo module tiếp tuyến  $T_u$  (ký hiệu là  $T_u$ ), còn trục hoành biểu diễn độ võng của thanh.

Nếu thanh mất ổn định trong điều kiện tải trọng không đổi, thì lực  $T_e$  tương ứng với cân bằng phiếm định và độ võng  $w$  sẽ là bất định. Trong dạng mất ổn định có sự gia tăng tải trọng, sự cân bằng bị phân nhánh tại điểm có tiếp tuyến nghiêng, khi mà  $T = T_u$ , và mỗi giá trị  $T > T_u$  ứng với một độ võng xác định.

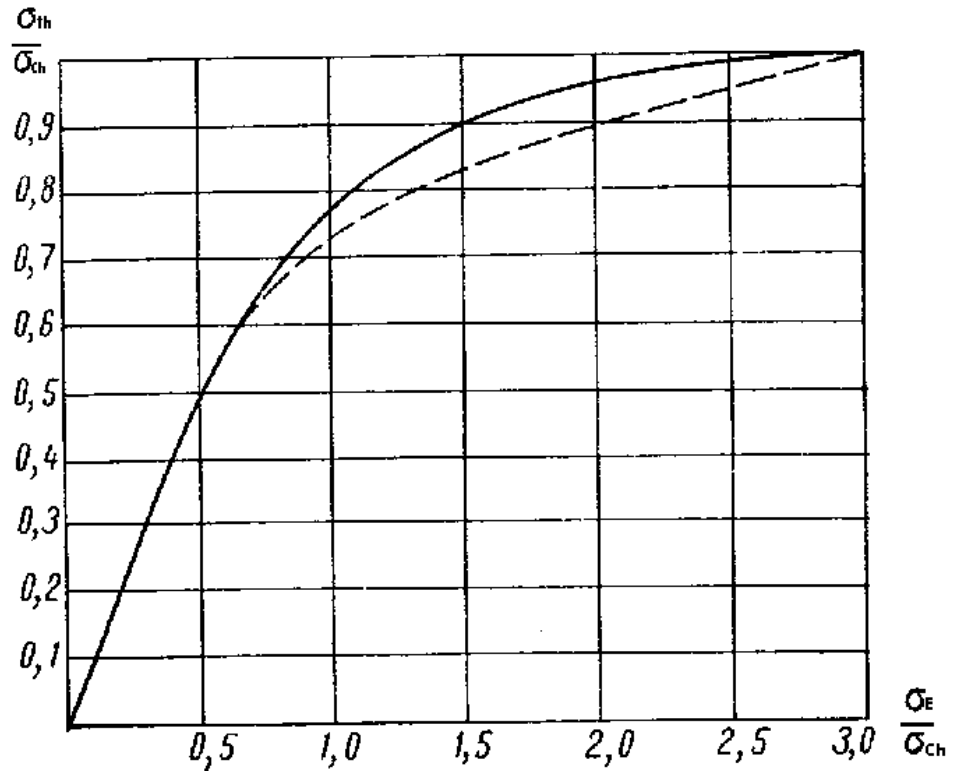
H6.21 Mối quan hệ giữa ứng suất tới hạn và độ mảnh  $\lambda$ , tính theo các công thức (42.10) và (42.14) cho vật liệu có diện tích chảy dẻo, (như thép các bon thường chẳng hạn), được biểu thị trên hình (H6.22).



H6.22

### 3. Áp dụng thực tế.

Ngày nay, trong ngành đóng tàu, các tính toán thực tế xác định ứng suất tối hạn và tải trọng tối hạn người ta thường sử dụng các đường cong được xây dựng trên các số liệu thí nghiệm, cho các loại vật liệu khác nhau. Trên hình H6.23 là các đường cong xây dựng cho thép và hợp kim nhôm-manghê sử dụng trong đóng tàu.



H6.23

Trên trục hoành của đồ thị biểu thị tỉ số không thứ nguyên  $\sigma_E : \sigma_{ch}$ , còn trên trục tung là tỉ số  $\sigma_{th} = \sigma_{ch}$ , với  $\sigma_{ch}$  là ứng suất chảy của vật liệu.

Nếu như ứng suất Euler, tính theo công thức (42.3), là đã biết, thì sau khi tính tỉ số  $\sigma_E : \sigma_{ch}$  ta có thể xác định tỉ số  $\sigma_{th} : \sigma_{ch}$  từ biểu đồ, và như vậy, có thể xác định được chính ứng suất tối hạn  $\sigma_{th}$ .

Như có thể thấy từ biểu đồ,  $\sigma_{th} \leq \sigma_{ch}$ , đồng thời, trị số của ứng suất tối hạn đạt giá trị ứng suất chảy khi ứng suất Euler lý thuyết lớn hơn ứng suất chảy 3 lần. như vậy, để ứng suất tối hạn của thanh đạt giá trị của giới hạn chảy, cần phải bảo đảm  $\sigma_E \cong (2,8 - 3,0)\sigma_{ch}$ .

Nếu như vấn đề đặt ra là chọn tiết diện của thanh bảo đảm điều kiện cho trước về ổn định, cần tiến hành theo cách sau đây:



(1)\* từ giá trị của  $\sigma_{th}$  cho trước, theo đồ thị, xác định  $\sigma_E$ , và như vậy, xác định được  $\eta = \sigma_{th} : \sigma_E$ ;

(2)\* sử dụng công thức:

$$\sigma_{th} = \eta \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2 F}.$$

Xác định được moment quán tính cần thiết của tiết diện ngang thanh.

Vì chính diện tích  $F$  cũng vẫn còn là chưa biết nên bài toán có thể giải bằng cách lựa chọn. Vấn đề là cần nhớ rằng, trong thành phần của thanh thiết kế, phải kể cả mép kèm từ tấm vỏ và như vậy, moment quán tính của tiết diện ngang thanh cần tính cả sự tham gia của mép kèm.

### **&43. ỔN ĐỊNH CỦA DẦM LIÊN NHỊP, TỰA TỰ DO TRÊN CÁC ĐẾ TRUNG GIAN ĐÀN HỒI TRUNG GIAN**

Bài toán ổn định của dầm liên nhịp có ý nghĩa thực tế to lớn vì đây chính là cơ sở của việc giải bài toán ổn định dầm tàu thủy.

Để nghiên cứu ổn định của dầm liên nhịp, ta khảo sát vị trí lệch của thanh, trong đó, các đế trung gian đàn hồi có các độ lún nhất định nào đó.

Giả tưởng tách thanh liên nhịp ra thành tập hợp các thanh một nhịp, chịu các moment uốn tại hai đầu. Lập phương trình bằng nhau về góc xoay của tiết diện ngang bên phải và tiết diện ngang bên trái của mỗi một đế đàn hồi, ta thu được hệ phương trình, tương tự như hệ thu được trong &7 khi tính uốn dầm liên nhịp. Khi thanh không bị mất ổn định, moment tại các đầu thanh phải bằng 0.

Tải trọng Euler của thanh được tìm như là tải trọng nhỏ nhất trong các tải trọng, mà với chúng, moment và độ lún tại các đế trung gian đàn hồi khác 0, tức thanh bị uốn.

Để xác định góc xoay tại các tiết diện đế, ta dùng công thức (33.28) trong &33 nhưng thuận với các giả thiết trong &40, theo đó, lực  $T$  sẽ là dương khi nén. Như vậy, công thức (33.29) có thể viết lại dưới dạng:

$$\left. \begin{aligned} \psi_1^*(u) &= \frac{3}{2u} \left( \frac{1}{2u} - \frac{1}{th2u} \right); \\ \psi_2^*(u) &= \frac{6}{2u} \left( \frac{1}{\sin u} - \frac{1}{2u} \right). \end{aligned} \right\} \quad (43.1)$$

Trong đó:

$$u = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{T}{\eta Ei}} \quad (43.2)$$

$\eta$  - hệ số, đưa ra từ mục 42, tính đến tính chất phi tuyến tính của quan hệ  $\sigma - \varepsilon$ .

Trong phần tiếp theo đây, ta sẽ khảo sát thanh tiết diện ngang không đổi, chịu nén theo chiều dài bởi lực  $T$  không đổi, tựa tự do trên các đế trung gian đàn hồi với hệ số cứng như nhau  $K$  và tựa tự do trên đế cứng tại hai đầu mút.

Ký hiệu khoảng cách giữa các đế là  $a$  còn moment quán tính tiết diện ngang thanh là  $I$ .

Khi đó, ta có thể tính đối số  $u$  theo công thức:

$$u = \frac{\pi}{2} \sqrt{\lambda} \quad (43.3)$$

Trong đó

$$\lambda = \frac{Ta^2}{\eta \pi^2 Ei} \quad (43.4)$$

Nếu lưu ý rằng:

$$T_{th}^0 = \eta \frac{\pi^2 Ei}{a^2} \quad (43.5)$$

Chính là lực tối hạn của thanh một nhịp tựa tự do hai đầu, có chiều dài bằng  $a$ , tức bằng khoảng cách giữa các đế đàn hồi, thì công thức (43.4) có thể viết lại dưới dạng:

$$\lambda = \frac{T}{T_{th}^0} = \frac{\sigma}{\sigma_{th}^0}, \quad (43.6)$$

Trong đó:  $\sigma$  - ứng suất nén;

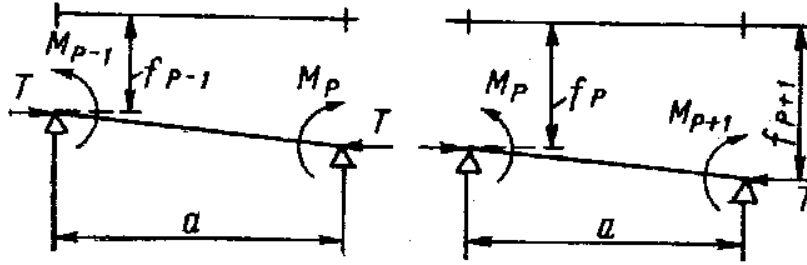
$\sigma_{th}^0$  - ứng suất tối hạn đối với thanh một nhịp.

Tham số  $\lambda$ , xác định theo các công thức (43.4) và (43.6), chính bằng tỉ số giữa lực tối hạn  $T$  và lực tối hạn của thanh một nhịp, tính với giả thiết là đế đàn hồi không có độ lún. Một cách hiển nhiên rằng, đại lượng  $T_{th}^0$  chính là giới hạn trên của tải trọng tối hạn của thanh khảo sát, với độ cứng  $Ei$  và khoảng cách  $a$  cho trước.

Do đó, giá trị của tham số  $\lambda$  không thể lớn hơn 1, tức

$$\lambda \leq 1.$$

Tách từ thanh ra hai nhịp liền nhau và lập phương trình góc xoay bằng nhau cùng với phương trình cân bằng của đế tựa (H6.24):



H6.24

Phương trình bằng nhau của các góc xoay, trên cơ sở của công thức (33.28) có thể viết dưới dạng:

$$\begin{aligned} & \frac{M_{p-1}a}{\eta Ei} \frac{1}{2u} \left( \frac{1}{\sin 2u} - \frac{1}{2u} \right) + \frac{M_p a}{\eta Ei} \frac{1}{2u} \left( \frac{1}{2u} - \frac{1}{\tan 2u} \right) + \\ & + \frac{f_p - f_{p-1}}{a} = - \frac{M_p a}{\eta Ei} \frac{1}{2u} \left( \frac{1}{2u} - \frac{1}{\tan 2u} \right) - \frac{M_{p+1}a}{\eta Ei} \frac{1}{2u} \left( \frac{1}{\sin 2u} - \frac{1}{2u} \right) + \frac{f_{p+1} - f_p}{a} \end{aligned} \quad (43.7)$$

Khi lập phương trình cân bằng để tựa, phản lực để tựa khi để dịch chuyển phụ thuộc không chỉ vào moment tại để tựa mà còn phụ thuộc cả vào lực nén dọc thanh, vì lực này tại các để cạnh nhau ở khác độ cao so với nhau.

Vì thế cho nên, sau khi so sánh phản lực của để tựa  $Kf$  với áp lực từ thanh lên để, ta có:

$$Kf = \frac{M_p - M_{p-1}}{a} + T \frac{f_p - f_{p-1}}{a} + \frac{M_p - M_{p+1}}{a} + T \frac{f_p - f_{p+1}}{a}. \quad (43.8)$$

Trên cơ sở của (43.4) và (43.3):

$$T = \left( \frac{2u}{a} \right)^2 \eta Ei, \quad (43.9)$$

Nên có thể viết lại (43.8) và (43.7), sau một vài biến đổi, dưới dạng:

$$\left. \begin{aligned} (2u - \sin 2u)(M_{p-1} + M_{p+1}) + 2M_p(\sin 2u - 2u \cos 2u) + \left(\frac{2u}{a}\right)^2 \eta Ei(Eif_p - f_{p-1} - f_{p+1}) &= 0; \\ 2M_p - M_{p-1} - M_{p+1} + \left(\frac{2u}{a}\right)^2 \eta Ei \left[ Ei \left( Ei - \frac{1}{8} \frac{Ka^{au}}{Eiu^2} \right) f_p - f_{p-1} - f_{p+1} \right] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (43.10)$$

Hệ phương trình thu được chính là hệ phương trình sai phân hữu hạn với hệ số hằng số, vì các hệ số ở đây không phụ thuộc vào số thứ tự của các để đỡ.

Nếu như dầm khảo sát có  $n$  để trung gian đàn hồi, thì ta có:

$$a = \frac{l}{n+1} \quad (43.11)$$

Trong đó,  $l$  là chiều dài của thanh.

Trong trường hợp nói trên, nghiệm của hệ phương trình (43.10) tìm được dưới dạng

$$M_p = \alpha \sin \frac{pj\pi}{n+1}; \quad f_p = \beta \sin \frac{pj\pi}{n+1}, \quad (43.12)$$

Trong đó,  $j$  là số nguyên, biến đổi trong khoảng  $1 \leq j \leq n$ ; Về ý nghĩa vật lý của ràng buộc này ta sẽ nói đến ở phần dưới.

Nghiệm (43.12) thỏa mãn các điều kiện biên tự do tại hai đầu mút, vì:

$$M_o = M_{n+1} = 0; \quad f_o = f_{n+1} = 0.$$

Để xác định các hệ số  $\alpha$  và  $\beta$ , thay biểu thức (43.12) vào (43.10), với lưu ý rằng:

$$\sin \frac{(p+1)j\pi}{n+1} + \sin \frac{(p-1)j\pi}{n+1} = 2 \sin \frac{pj\pi}{n+1} \cos \frac{j\pi}{n+1}, \quad (43.13)$$

Sau một số biến đổi, ta thu được hệ phương trình tuyến tính thuần nhất:

$$\left. \begin{aligned} \alpha \left[ (2u - \sin 2u) \cos \frac{j\pi}{n+1} + (\sin 2u - 2u \cos 2u) \right] + \beta \left( \frac{2u}{a} \right)^2 \eta Ei \left( 1 - \cos \frac{j\pi}{n+1} \right) \sin 2u &= 0; \\ \alpha \left( 1 - \cos \frac{j\pi}{n+1} \right) + \beta \left( \frac{2u}{a} \right)^2 \eta Ei \left[ \left( 1 - \frac{1}{8} \frac{Ka^3}{\eta Eiu^2} \right) - \cos \frac{j\pi}{n+1} \right] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (43.14)$$

Thanh mất ổn định nếu như hệ (43.14) có nghiệm khác 0, tức định thức hệ số của hệ phương trình này phải bằng 0.

Cho định thức hệ số của (43.14) bằng 0, giải phương trình thu được đối với hệ số để đỡ đàn hồi  $K$ , ta có:

$$K = \eta \frac{\pi^4 Ei}{a^3} \chi_j(\lambda), \quad (43.15)$$

Trong đó:

$$\left. \begin{aligned} \chi_j(\lambda) &= a(u) \frac{\cos \frac{j\pi}{n+1} - \cos 2u}{\cos \frac{j\pi}{n+1} + b(u)} \left( 1 - \cos \frac{j\pi}{n+1} \right); \\ a(u) &= \frac{2}{\pi^4} \frac{(2u)^3}{2u - \sin 2u}; \\ b(u) &= \frac{\sin 2u - 2u \cos 2u}{2u - \sin 2u}, \end{aligned} \right\} \quad (43.16)$$

Đối số  $u$  xác định theo công thức (43.3).

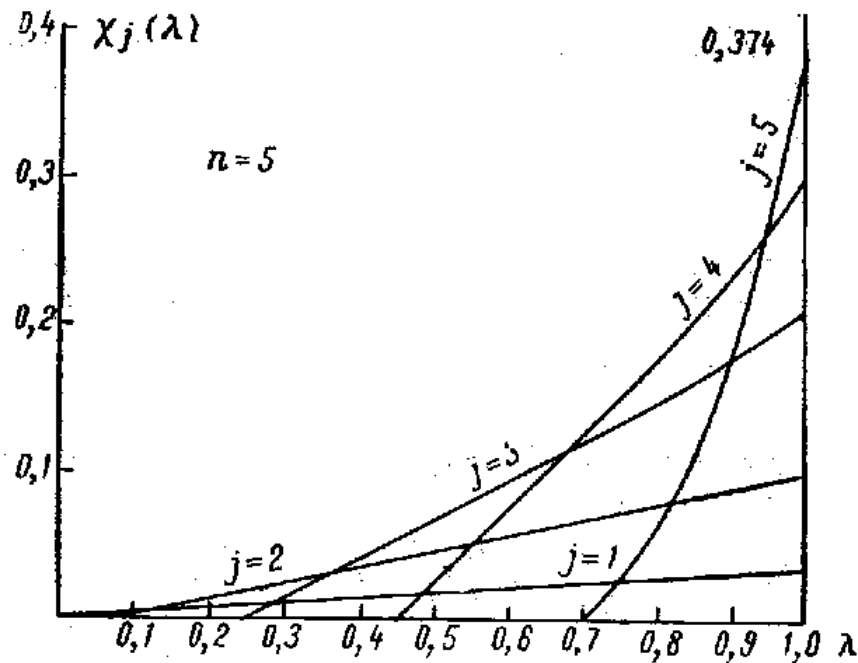
Phương trình (43.15) chính là phương trình ổn định thanh, tựa trên các đế trung gian đàn hồi và trên hai đế cứng tại hai đầu mút, mà ta cần tìm.

Để xác định tải trọng tối hạn (tham số  $\lambda$ ) theo trị số độ cứng nền đàn hồi  $K$  cho trước, ta cần chọn đại lượng  $j$  sao cho tải trọng thu được là *nhỏ nhất*. Khi cần xác định đại lượng  $K$ , bảo đảm một ứng suất cho trước thì  $j$  phải chọn sao cho đại lượng  $K$  là lớn nhất.

Điều này suy ra được từ một kết luận có ý nghĩa vật lý hiển nhiên là, khi giảm hệ số cứng của đế đàn hồi, tải trọng không thể tăng. Như vậy là, với một tải trọng  $T_{th}$  cho trước mà không xác định giá trị  $K_{max}$  thì thanh sẽ mất ổn định với tải trọng nhỏ hơn.

Giá trị của hàm  $\chi_j(\lambda)$  cho trong bảng (), trong đó giá trị  $\chi_{jmax}(\lambda)$  đặt ngay bên phải của đường tô đậm. Từ bảng này thấy rằng,  $\chi_j(\lambda)$  là

hàm tăng của đối số  $\lambda$ .



H6.25

Đồ thị của hàm  $\chi_j(\lambda)$  cho trường hợp  $n = 5$  biểu thị trên hình H6.25

Từ đồ thị có thể thấy rằng, ứng với  $\chi_j(\lambda) = 0,15$ , ta có  $\lambda_{\min} = 0,73$  tại  $j = 4$ . Nhưng nếu cũng với  $\lambda = 0,73$  ta lại chọn  $j$  khác, chẳng hạn  $j = 2$ , sẽ có  $\chi_j(\lambda) = 0,075$ , ứng với  $\lambda_{\min} = 0,52$ . Điều này có nghĩa là thanh sẽ bị mất ổn định sớm nhất với tải trọng nhỏ hơn so với trường hợp chọn  $j = 4$ .

Bây giờ ta hãy nói đến ý nghĩa vật lý của mối ràng buộc  $1 \leq j \leq n$ . Sự thay đổi giá trị của  $j$  trong biểu thức (43.12) tương ứng với sự thay đổi dạng mất ổn định, đặc trưng bởi số điểm nút (tức điểm có độ võng bằng 0) theo chiều dài thanh. Khi không có đế đàn hồi, tức khi  $K = 0$ , có  $j = 1$ , vì thanh sẽ mất ổn định với một nửa sóng tạo nên giữa các đế cứng tại hai đầu thanh. Số nửa sóng mất ổn định lớn nhất, với sự tham gia vào biến dạng của các đế đỡ đàn hồi, tương ứng với  $j = n$ , vì với  $j = n+1$  các điểm nút trùng với các đế đỡ đàn hồi.

Độ cứng của đế đàn hồi, mà với độ cứng này, thanh bị mất ổn định giữa các đế, không có sự tham gia của các đế này, được gọi là *độ cứng tới hạn*. Khi đó, giá trị của  $\lambda$  sẽ bằng đơn vị còn  $T = T_{th}^0$ . Việc tăng giá trị của độ cứng đế đỡ lên lớn hơn độ cứng tới hạn không làm tăng ổn định của thanh, vì trong điều kiện nói trên, đế xử sự như đế cứng.

Ta hãy xác định độ cứng của đế, tương ứng với giá trị của tham số  $\lambda = 1$ . Trong trường hợp này,  $2u = \pi$ ,  $\cos 2u = -1$ ;  $a(u) = 2/\pi^2$ ;  $b(u) = 1$ , và như vậy:

$$\chi_j(\lambda) = \frac{2}{\pi^2} \left( 1 - \cos \frac{j\pi}{n+1} \right).$$

Hàm  $\chi_j(\lambda)$  đạt giá trị lớn nhất khi  $j = n$ :

$$\chi_n(1) = \frac{2}{\pi^2} \left( 1 + \cos \frac{\pi}{n+1} \right). \quad (43.17)$$

Độ cứng tới hạn của đế đỡ được xác định theo công thức (43.15) như sau:

$$K_{th} = \eta \frac{2\pi^2 Ei}{a^3} \left( 1 + \cos \frac{\pi}{n+1} \right). \quad (43.18)$$

Trên cơ sở của (43.5), có thể biểu viết công thức độ cứng tới hạn dưới dạng sau đây:

$$K_{th} = \frac{2T_{th}^0}{a} \left( 1 + \cos \frac{\pi}{n+1} \right). \quad (43.19)$$

Dưới đây là các công thức gần đúng cần dùng.

Nếu  $j$  nhỏ hơn nhiều so với  $n$ , tức khi mất ổn định chỉ có rất ít đế đỡ nằm gần các nút của dạng mất ổn định, bài toán về ổn định dầm trên đế đỡ đàn hồi có thể thay gần đúng bằng bài toán ổn định dầm trên nền đàn hồi liên tục, với độ cứng nền:

$$k_0 = \frac{K}{a} \quad (43.20)$$

Sử dụng các công thức (41.5) và (41.5), kết hợp với (43.20), với  $n = j$ ,  $I = I$  và thay  $E$  bởi  $\eta E$ , ta thu được:

$$K = a \left( \frac{j\pi}{l} \right)^2 \left[ T - \eta \frac{\pi^2 Ei}{l^2} j^2 \right]. \quad (43.21)$$

So sánh (43.21) với (43.15) ta có công thức gần đúng sau đây:

$$i\chi_j(\lambda) = \frac{a^4}{\eta E \pi^4} \left( \frac{j\pi}{l} \right)^2 \left( T - \eta \frac{n^2 Ei}{l^2} j^2 \right) \quad (43.22)$$

Sử dụng công thức (43.4) với lưu ý rằng  $l = (n+1)a$ , ta có:

$$i\chi_j(\lambda) = iz(\lambda - z) \quad (43.23)$$

Trong đó: 
$$z = \left( \frac{j}{n+1} \right)^2. \quad (43.24)$$

Từ (43.23) suy ra rằng:

$$\chi_j(\lambda) = z(\lambda - z) \quad (43.25)$$

Với  $n$  lớn, có thể coi là  $z$  biến đổi liên tục và khi đó việc xác định  $\chi_i(\lambda)$  hoàn toàn không khó. Cho đạo hàm của (43.25) theo  $z$  bằng 0, tức:

$$\frac{\partial \chi_j}{\partial z} = \lambda - 2z = 0$$

Từ đó

$$z = 0,5\lambda \text{ và } |\chi_j|_{\max} = \frac{1}{4}\lambda^2. \quad (43.26)$$

Khi  $\lambda \leq 0,7$  và  $n \geq 4$  công thức (43.26) có thể coi là chính xác. Công thức (43.25) cũng rất chính xác, đặc biệt là với các giá trị nhỏ của  $\lambda$ . Chẳng hạn như với  $n = 5$  và  $j = 3$  đại lượng  $z = 0,25$  và  $\lambda = 0,6$ , theo công thức (43.26) có  $\chi_3(0,6) = 0,25 \cdot 0,35 = 0,0875$ , trong khi tra theo bảng, giá trị này là 0,0898.

#### **&44. ỔN ĐỊNH CỦA DÀN PHẪNG**

Việc tính ổn định của dàn boong tựa tự do tại mạn và tại các vách ngang là vấn đề rất được thực tế quan tâm. Trong rất nhiều trường hợp, yêu cầu về đảm bảo ổn định chính là điều kiện quyết định kích thước của kết cấu dọc cũng như kết cấu ngang của boong.

Kết cấu thực tế của dàn boong là khá phức tạp, ở đây ta chỉ hạn chế xem xét các loại dàn đơn giản nhất. Tuy nhiên các kết quả thu được có thể dùng một cách đáng tin cậy cho việc đánh giá ổn định của cả các dàn thực tế.

Ta khảo sát dàn có hình chiếu bằng là chữ nhật, với các xà ngang giống nhau, đặt cách đều nhau cùng một số xà dọc hình lăng trụ, chịu nén và tựa tự do hai đầu. Bài toán này có thể giải được nhờ áp dụng kết quả thu được bên trên. Ta bắt đầu từ trường hợp đơn giản, khi trong thành phần của dàn chỉ có một dầm chịu nén.

Xà ngang boong, với tư cách là một đế đỡ, có độ cứng xác định theo công thức:

$$K = \frac{Ei}{\gamma L^3}, \quad (44.1)$$

Trong đó:

$I$  - moment quán tính tiết diện ngang xà ngang boong;

$L$  - chiều dài xà ngang boong;

$\gamma$  - hệ số ảnh hưởng.

Thay  $K$  xác định theo (44.1) vào phương trình ổn định (43.15), ta được:

$$I = \gamma \pi^4 \eta i \left( \frac{L}{a} \right)^3 \chi_j(\lambda). \quad (44.2)$$

Công thức (44.2) xác định moment quán tính cần thiết của xà ngang boong từ điều kiện ổn định của dầm dọc khảo sát.

Bài toán trên đây có thể được giải theo phương pháp tổng quát của bài toán ổn định dàn, tuy lời giải này có phức tạp hơn chút ít.

Khi dầm liên nhịp mất ổn định, phản lực  $Kf$  của đế dàn hồi hướng ngược hướng chuyển vị  $f$ . Từ đó suy ra rằng, tác dụng từ lực dọc lên tiết diện ngang chịu phản lực  $Kf$  có chiều cùng chiều với chuyển vị  $f$ .

Ta xét bài toán dao động của khối lượng  $M$  trên dầm không trọng lượng.

Phương trình vi phân dao động của dầm, trên cơ sở của nguyên lý D'alambert được viết dưới dạng

$$- M \ddot{f}(t) - Kf(t) = 0, \quad (44.3)$$

Trong đó:  $f(t)$  - chuyển vị của khối lượng;

$\ddot{f}(t)$  - gia tốc của khối lượng.

Đặt:



$$f(t) = f_0 \cos \omega t,$$

Trong đó:  $\omega$  - tần số dao động tự do của khối lượng. Sau khi thay vào phương trình dao động tự do (44.3) ta thu được:

$$(M\omega^2 - K)f_0 = 0, \quad (44.4)$$

Từ đó, với  $f_0 \neq 0$  ta có:

$$K = M\omega^2. \quad (44.5)$$

(44.5) cho thấy, hệ số cứng có thể xác định bằng tích số của khối lượng với bình phương tần số dao động tự do. Từ các công thức (44.5) và (43.15) ta thu được:

$$M = \frac{K}{\omega^2} = \eta \frac{\pi^4 Ei}{a^3 \omega^2} \chi_j(\lambda). \quad (44.6)$$

Nếu có một số dầm dọc thì cần khảo sát dao động của xà ngang boong không trọng lượng, mang một số tương ứng các khối lượng tập trung tại vị trí xà ngang giao nhau với dầm dọc. Các khối lượng tập trung này xác định theo công thức (44.6).

Giả sử  $i_r$  - moment quán tính tiết diện ngang dầm dọc thứ  $r$ ,  $T_r$  - lực dọc tác dụng lên dầm dọc nói trên. Khi đó:

$$\lambda_r = \frac{T_r a^2}{\pi^2 \eta Ei} = \frac{\sigma_{th} F_r a^2}{\pi^2 \eta Ei_r}. \quad (44.7)$$

Ta giả thiết rằng ứng suất nén không thay đổi dọc theo chiều rộng dàn, sao cho  $\eta = \text{const}$ .

$F_r$  được coi là diện tích tiết diện ngang có kể cả mép kèm, còn  $i_r$  là moment quán tính trung tâm của tiết diện này. Khi số các dầm dọc là nhiều và đặt cách đều nhau, thì mép kèm nói trên chính bằng khoảng cách giữa các dầm dọc này.

Sử dụng hai lần công thức (44.6), một lần cho dầm dọc thứ  $i$ , một lần cho dầm dọc thứ nhất, ta có:

$$M_r = M_1 \frac{i_r \chi_j(\lambda_r)}{i_1 \chi_j(\lambda_1)}, \quad (44.8)$$

Trong đó, chỉ số  $j$  là như nhau cho mọi dầm dọc.

Kết luận trên đây là dựa trên nhìn nhận sau: Dịch chuyển của dầm dọc thứ  $r$  khi mất ổn định xảy ra theo dạng:

$$f_{pr} = \beta_r \sin \frac{pj\pi}{n+1}, \quad (44.9)$$

Từ đó suy ra tỉ số:

$$f_{pr} : f_{p1} = \beta_r : \beta_1 \quad (44.10)$$

Không phụ thuộc gì vào  $p$ , tức sẽ như nhau đối với mọi dầm dọc. Nếu chọn  $j$  khác nhau cho dầm thứ nhất và dầm thứ  $r$  thì tỉ số trên không tồn tại.

Trên cơ sở công thức (44.10) có thể chứng minh rằng, tại tất cả các nút của dàn, điều kiện bằng nhau của độ võng của các dầm dọc và dầm ngang luôn thoả mãn. Từ công thức (44.7) và (44.8) thấy rằng, với  $F_r : i_r = const$ , các khối lượng tương ứng tỉ lệ với trị số moment quán tính tiết diện ngang dầm dọc.

Nếu như trên dầm không trọng lượng phân bố có mang một số khối lượng tập trung, ta có được hệ  $n$  bậc tự do và tương ứng có  $n$  tần số dao động tự do, với  $n$  là số khối lượng tập trung.

Vì khi nghiên cứu ổn định của dàn, ta quan tâm đến giá trị nhỏ nhất của độ cứng để đỡ, nên trong bài toán đang xét, cần tìm giá trị nhỏ nhất của tần số dao động tự do (cấp 1)  $\omega_1$  của xà ngang không trọng lượng phân bố, mang các khối lượng tập trung tại các điểm nút, biểu diễn qua  $M_1$ . Khi đó, độ cứng  $K_1$  được tính theo công thức:

$$K_1 = M_1 \omega_1^2. \quad (44.11)$$

Cần lưu ý rằng, để xác định độ cứng theo công thức (44.11) không cần thiết phải biết các khối lượng tập trung, mà chỉ cần biết tỉ số giữa chúng, theo công thức (44.8), vì tích số  $M_1 \omega_1^2$  không phụ thuộc vào bản thân  $M_1$ .

Trên cơ sở (44.6), phương trình ổn định dàn có thể viết dưới dạng:

$$M_1 \omega_1^2 = \eta \frac{\pi^4 E i}{a^3} \chi_j(\lambda_1). \quad (44.12)$$

Từ công thức (44.8) suy ra rằng, trong bài toán khảo sát:

$$\frac{M_r \omega_1^2}{i_r \chi_j(\lambda_r)} = const.$$

Một số trong các  $M_r$ , xác định theo (44.8) có thể âm. Thực vậy, với các giá trị  $\lambda$  rất nhỏ, từ công thức (43.25) có thể thấy ngay rằng,  $\chi_j(\lambda) < 0$ . Về mặt vật lý, điều này có nghĩa là dầm dọc tương ứng không tăng tải mà đóng vai trò để đỡ xà ngang.

Như vậy, bài toán ổn định dàn được phân ra thành hai:

- a. Bài toán ổn định của thanh chịu nén tựa trên các đế đỡ dàn hồi;
- b. Bài toán về xác định tần số dao động riêng nhỏ nhất của dầm (xà ngang boong) không khối lượng phân bố mang các khối lượng tập trung tại chỗ giao nhau với các dầm dọc chịu nén; thông qua các tần số dao động tự do, xác định độ cứng tới hạn của đế đỡ dàn hồi.

Cách thức nêu trên lần đầu tiên được P.F. Pavlovitch nêu ra khi nghiên cứu dàn có nhiều dầm dọc chịu nén. Về sau, vấn đề này được A.A. Kiurdiumov mở rộng cho trường hợp tổng quát.

Cần chú ý một điều là độ cứng của đế đỡ đàn hồi phụ thuộc cả vào điều kiện liên kết tại hai đầu dầm, và như vậy, ảnh hưởng đến trị số của tải trọng tới hạn của dầm.

### **&45-KHÁI NIỆM VỀ PHƯƠNG PHÁP ĐỘNG LỰC HỌC NGHIÊN CỨU ỔN ĐỊNH TĨNH**

Phương pháp động lực học nghiên cứu ổn định của hệ đàn hồi dựa trên việc khảo sát dao động bé tự do của hệ quanh vị trí cân bằng. Cần chú ý rằng, phương pháp động lực học là phương pháp tổng quát nhất vì nó cho phép giải bài toán ổn định của cả hệ dưới tác dụng của các tải trọng không bảo toàn, tức các tải trọng không có thế.

Thực chất của phương pháp động lực học hay phương pháp dao động bé có thể được minh họa qua ví dụ đã xét trên đây về ổn định của dầm chịu nén, tựa tự do hai đầu.

Ta lập phương trình vi phân dao động ngang của dầm chịu nén. Khi đó, trong vế phải của phương trình (40.1) sẽ là lực quán tính của khối lượng thanh, đóng vai trò như tải trọng ngoài.

Khi đó, ta có:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (45.1)$$

Trong đó:  $m$  – khối lượng trên một đơn vị chiều dài dầm.

Khi lập phương trình (45.1) đã lưu ý rằng  $w$  là hàm của hai biến, đó là tọa độ  $x$  và thời gian  $t$ .

Ta sẽ tìm nghiệm của phương trình trên dưới dạng:

$$w(x, t) = \sum_n w_n(x) \sin \lambda_n t, \quad (45.2)$$

Trong đó,  $w_n$  – chính dạng dao động tự do của thanh;

$\lambda_n$  – tần số dao động chính.

Thay (45.2) vào (45.1) rồi so sánh hệ số của  $\sin \lambda t$ , ta thu được phương trình sau đây đối với dạng dao động  $w_n(x)$ :

$$EI w_n^{IV}(x) + T w_n''(x) - m \lambda_n^2 w_n(x) = 0$$

hay

$$w_n^{IV}(x) + k^2 w_n''(x) - \left( \frac{\mu_n}{l} \right)^4 w_n(x) = 0 \quad (45.3)$$

Trong đó, ký hiệu:

$$k^2 = \frac{T}{EI}; \quad \left( \frac{\mu_n}{l} \right)^4 = \frac{m\lambda_n^2}{EI}; \quad (45.4)$$

$\mu_n$  – tham số tần số không thứ nguyên.

Vì hai nghiệm của phương trình đặc trưng là thực còn hai nghiệm kia là ảo nên tích phân tổng quát của (45.3) được viết dưới dạng:

$$w_n(x) = A_n \cosh \alpha_n x + B_n \sinh \alpha_n x + C_n \cos \beta_n x + D_n \sin \beta_n x, \quad (45.5)$$

Trong đó:

$$\alpha_n = \sqrt{-\frac{k^2}{2} + \sqrt{\frac{k^4}{4} + \left( \frac{\mu_n}{l} \right)^4}}; \\ \beta_n = \sqrt{\frac{k^2}{2} + \sqrt{\frac{k^4}{4} + \left( \frac{\mu_n}{l} \right)^4}}. \quad (45.6)$$

Điều kiện biên trong trường hợp khảo sát sẽ là:

Tại  $x = 0$  và  $x = l$ :  $w(x, t) = 0$ ;  $\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} = 0$ , tương đương với điều kiện:

$$w_n(0) = w_n''(0) = 0; \quad w_n(l) = w_n''(l) = 0. \quad (45.7)$$

Thay (45.5) vào (45.7), ta thu được:

$$\left. \begin{aligned} A_n &= C_n = 0; \\ B_n \sinh \alpha_n l + D_n \sin \beta_n l &= 0; \\ B_n \alpha_n^2 \sinh \alpha_n l - D_n \sin \beta_n l &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (45.8)$$

Hệ phương trình đại số thuần nhất (45.8) cho nghiệm khác 0, với hằng số tùy ý, là nghiệm mà ta quan tâm, khi định thức hệ số của nó bằng 0.

Đặt định thức hệ số của hệ (45.8) bằng 0, ta được

$$(\alpha_n^2 + \beta_n^2) \sinh \alpha_n l \sin \beta_n l = 0. \quad (45.9)$$

Vì  $\alpha_n^2 + \beta_n^2 \neq 0$ , còn  $\sinh \alpha_n l = 0$  chỉ khi  $\alpha_n l = 0$ , ta được:

$$\sin \beta_n l = 0$$

Từ đó:

$$\beta_n l = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots$$

Sử dụng các ký hiệu (45.4) và (45.6), ta tìm được:

$$\lambda_n^2 = \left( \frac{n\pi}{l} \right)^4 \frac{EI}{m} \left( 1 - \frac{Tl^2}{n^2 \pi^2 EI} \right). \quad (45.10)$$

Công thức (45.10) xác định bình phương tần số dao động chính tự do cấp  $n$  của thanh lẳng trụ tựa tự do hai đầu, chịu nén bởi lực dọc  $T$ . Từ công thức trên có thể thấy là lực dọc  $T$  làm giảm tần số dao động tự do. Nếu khảo sát tần số dao động tự do cấp 1 ( $n = 1$ ), ta có:

$$\lambda_1^2 = \left( \frac{\pi}{l} \right)^4 \frac{EI}{m} \left( 1 - \frac{Tl^2}{\pi^2 EI} \right). \quad (45.11)$$

Tiêu chuẩn mất ổn định khi xét dao động có thể xây dựng trên cơ sở lập luận sau đây. Nếu  $T < T_E$  thì thanh, khi bị lệch ra khỏi vị trí cân bằng thẳng, sẽ thực hiện dao động quanh vị trí cân bằng này, đồng thời tất cả các tần số  $\lambda_n$  đều là thực. Dấu hiệu của sự mất cân bằng là việc biến tần số  $\lambda_1$  về 0; Ứng lực nén tương ứng sẽ là ứng lực Euler. Khi  $T > T_E$ , tần số  $\lambda_1$  trở thành số ảo.

Quay lại với công thức (45.11) và đặt  $\lambda_1 = 0$ , ta thu được:

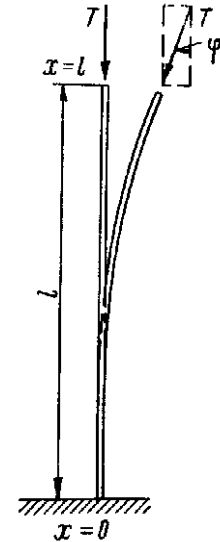
$$T_E = \frac{\pi^2 EI}{l^2},$$

Kết quả này trùng với kết quả thu được trước đây.

Chú ý rằng việc cho tần số  $\lambda_1 = 0$  chỉ cho ta tiêu chuẩn xác định tải trọng Euler khi lực tác dụng là bảo toàn.

Để làm ví dụ của việc tính toán ổn định khi tải trọng tác dụng không bảo toàn, ta xét ổn định của thanh con son dưới tác dụng của lực “theo”  $T$

là lực luôn tác dụng theo phương tiếp tuyến với trục thanh tại tiết diện đầu thanh (H6.26).



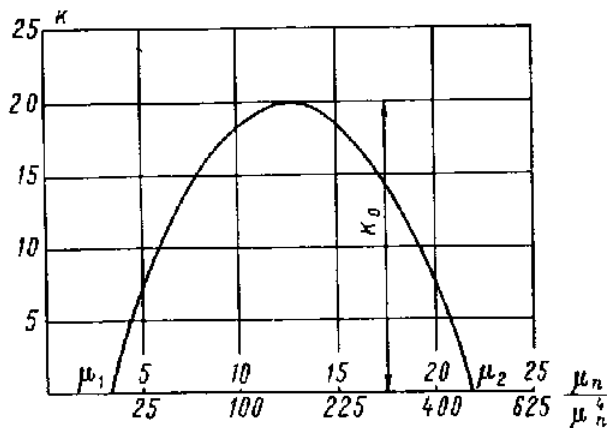
H6.26

Trên cơ sở giả thiết độ võng bé của thanh, có  $T \cos \varphi \approx T$ , và phương trình vi phân dao động tự do của thanh khảo sát được viết dưới dạng (45.1). Nhận nghiệm dưới dạng (45.2) như trên đây, ta thu được phương trình dao động của thanh dưới dạng (45.5).

Điều kiện biên tại tiết diện đầu thanh sẽ là:

Tại  $x = 0$ :

$$w(x, t) = 0 \quad \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} = 0. \quad (45.12)$$



H6.27

Vì lực  $T$  tại tiết diện  $x = l$  hướng pháp tuyến với tiết diện ngang của thanh nên tại đó có:

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} &= 0; \\ EI \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^3} &= 0. \end{aligned} \quad (45.13)$$

Các điều kiện (45.12) và (45.13) tương đương với các điều kiện sau đây đối với hàm  $w_n(x)$

$$w_n(0) = w'_n(0) = 0; \quad (45.14)$$

$$w''_n(l) = w'''_n(l) = 0. \quad (45.15)$$

Buộc  $w_n(x)$  thỏa mãn điều kiện (45.14), ta được:

$$A_n + C_n = 0; \quad \alpha_n B_n + \beta_n D_n = 0. \quad (45.16)$$

Sử dụng điều kiện (45.15) cùng các kết quả (45.16) ta thu được hệ phương trình xác định các hằng số  $A_n$  và  $B_n$ .

$$\left. \begin{aligned} (\alpha_n^2 \operatorname{ch} \alpha_n l + \beta_n^2 \cos \beta_n l) A_n + \alpha_n (\alpha_n \operatorname{sh} \alpha_n l + \beta_n \sin \beta_n l) B_n &= 0; \\ (\alpha_n^3 \operatorname{sh} \alpha_n l - \beta_n^3 \sin \beta_n l) A_n + \alpha_n (\alpha_n^2 \operatorname{ch} \alpha_n l + \beta_n^2 \cos \beta_n l) B_n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (45.17)$$

Cho định thức của hệ (45.17) bằng 0, sau một số biến đổi, ta được:

$$k^2 + 2\mu_n^4 + 2\mu_n^4 \operatorname{ch} u_n \cos v_n + \mu_n^2 k \operatorname{sh} u_n \sin v_n = 0, \quad (45.18)$$

Trong đó:

$$k = \frac{TI^2}{EI}; \quad u_n = \alpha_n l; \quad v_n = \beta_n l.$$

Trên hình H6.27 biểu diễn quan hệ giữa tham số  $k$  và  $\mu_n^4$  theo phương trình (45.18). Nếu như lực nén  $T$  không tồn tại thì  $k = 0$  và nghiệm của phương trình (45.18) là thực. Các nghiệm này tương ứng với các tần số dao động tự do của dầm con son không chịu nén. Khi lực nén  $k$  tăng (về trị số), hai nghiệm bé nhất  $\mu_1$  và  $\mu_2$  xích lại gần nhau và đến một giá trị nào đó, tại  $k = k_0$  sẽ có nghiệm kép.

Tiếp tục tăng lực  $T$ , cũng có nghĩa là tăng  $k$ , các nghiệm nói trên trở thành phức, có nghĩa là dao động điều hoà quanh vị trí cân bằng đã chuyển thành chuyển vị lệch khỏi vị trí nói trên. Như vậy, giá trị  $k = k_0$  tương ứng với tải trọng Euler của thanh.

Trong trường hợp đang xét,  $k_0 \cong 20$ , và từ đó,

$$T_E \cong \frac{2\pi^2 EI}{l^2}. \quad (45.19)$$

Công thức (45.18) cho thấy, giá trị Euler của lực “theo” vào khoảng 8 lần lớn hơn so với lực Euler của dầm conson với lực nén dọc trục thanh, với  $T_E \cong \frac{\pi^2 EI}{4l^2}$ .