

# **Отчёта по лабораторной работе № 7**

**Математическое моделирование**

Адебайо Ридвануллахи Айофе

# Содержание

<b>1</b>	<b>Цель работы</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Задание</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>Теоретическое введение</b>	<b>7</b>
<b>4</b>	<b>Выполнение лабораторной работы</b>	<b>10</b>
4.1	Случай 1 . . . . .	10
4.2	Случай 2 . . . . .	12
4.3	Случай 3 . . . . .	14
<b>5</b>	<b>Вопросы к лабораторной работе</b>	<b>16</b>
<b>6</b>	<b>Выводы</b>	<b>19</b>
<b>7</b>	<b>Список литературы</b>	<b>20</b>

## Список иллюстраций

3.1	График решения уравнения модели Мальтуса . . . . .	8
3.2	График логистической кривой . . . . .	9
4.1	Эффективность рекламы №1 (I) . . . . .	11
4.2	Эффективность рекламы №1 (O) . . . . .	11
4.3	Эффективность рекламы №2 (I) . . . . .	13
4.4	Эффективность рекламы №2 (O) . . . . .	13
4.5	Эффективность рекламы №3 (I) . . . . .	15
4.6	Эффективность рекламы №3 (O) . . . . .	15
5.1	График решения уравнения модели Мальтуса . . . . .	17
5.2	График решения уравнения логистической кривой . . . . .	18

## **Список таблиц**

# 1 Цель работы

- Рассмотреть простейшую модель эффективности рекламы.
- Построить модель и визуализировать и анализировать графики эффективности распространения рекламы для трех случаев.
- Визуализировать модель с помощью Julia и OpenModelica

## 2 Задание

Постройте график распространения рекламы, математическая модель которой описывается следующим уравнением:

1.  $\frac{dn}{dt} = (0.55 + 0.0001n(t))(N - n(t))$

2.  $\frac{dn}{dt} = (0.00005 + 0.2n(t))(N - n(t))$

3.  $\frac{dn}{dt} = (0.05 \sin(t) + 0.3 \cos(t)n(t))(N - n(t))$

При этом объем аудитории  $N = 500$ , в начальный момент о товаре знает 5 человек. Для случая 2 определите в какой момент времени скорость распространения рекламы будет иметь максимальное значение.

### 3 Теоретическое введение

Организуется рекламная кампания нового товара или услуги. Необходимо, чтобы прибыль будущих продаж с избытком покрывала издержки на рекламу. Вначале расходы могут превышать прибыль, поскольку лишь малая часть потенциальных покупателей будет информирована о новинке. Затем, при увеличении числа продаж, возрастает и прибыль, и, наконец, наступит момент, когда рынок насытится, и рекламировать товар станет бесполезным.

Предположим, что торговыми учреждениями реализуется некоторая продукция, о которой в момент времени  $t$  из числа потенциальных покупателей  $N$  знает лишь  $n$  покупателей. Для ускорения сбыта продукции запускается реклама по радио, телевидению и других средств массовой информации. После запуска рекламной кампании информация о продукции начнет распространяться среди потенциальных покупателей путем общения друг с другом. Таким образом, после запуска рекламных объявлений скорость изменения числа знающих о продукции людей пропорциональна как числу знающих о товаре покупателей, так и числу покупателей о нем не знающих

Модель рекламной кампании описывается следующими величинами. Считаем, что  $\frac{dn}{dt}$  - скорость изменения со временем числа потребителей, узнавших о товаре и готовых его купить,  $t$  - время, рошедшее с начала рекламной кампании,  $n(t)$  - число уже информированных клиентов. Эта величина пропорциональна числу покупателей, еще не знающих о нем, это описывается следующим образом:  $\alpha_1(t)(N - n(t))$ , где  $N$  - общее число потенциальных платежеспособных покупателей,  $\alpha_1(t) > 0$  - характеризует интенсивность рекламной кампании (зависит от

затрат на рекламу в данный момент времени). Помимо этого, узнавшие о товаре потребители также распространяют полученную информацию среди потенциальных покупателей, не знающих о нем (в этом случае работает т.н. сарафанное радио). Этот вклад в рекламу описывается величиной  $\alpha_2(t)n(t)(N - n(t))$ , эта величина увеличивается с увеличением потребителей узнавших о товаре. Математическая модель распространения рекламы описывается уравнением:

$$\frac{dn}{dt} = (\alpha_1(t) + \alpha_2(t)n(t))(N - n(t))$$

При  $\alpha_1(t) \gg \alpha_2(t)$  получается модель типа модели Мальтуса, решение которой имеет вид'

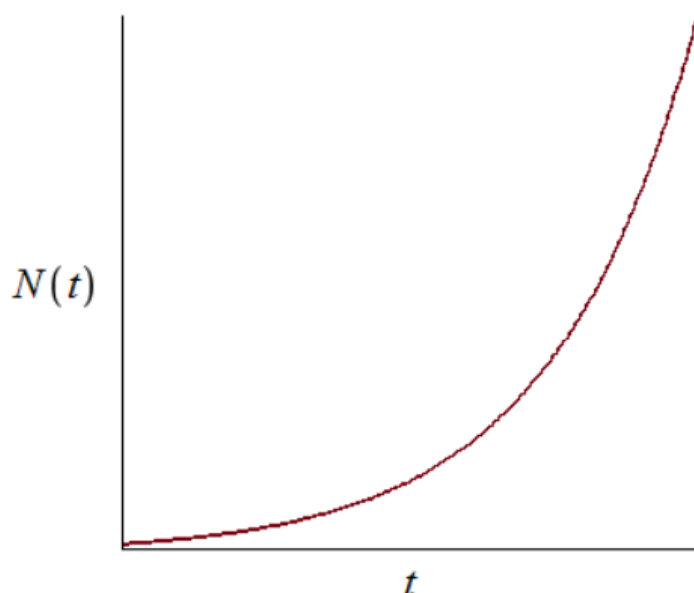


Рис. 3.1: График решения уравнения модели Мальтуса

В обратном случае, при  $\alpha_1(t) \ll \alpha_2(t)$  получаем уравнение логистической кривой:



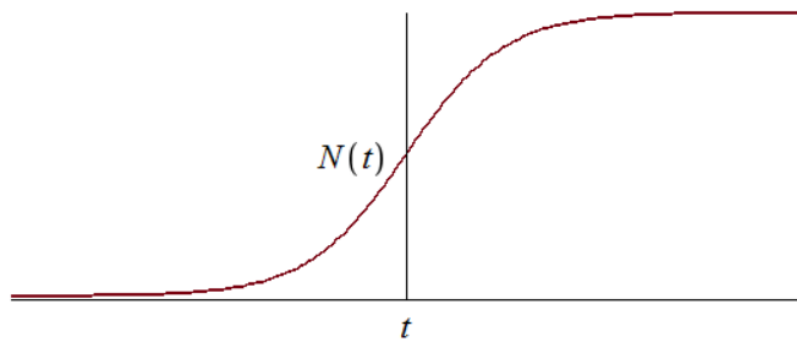


Рис. 3.2: График логистической кривой

## 4 Выполнение лабораторной работы

### 4.1 Случай 1

$$\frac{dn}{dt} = (0.55 + 0.0001n(t))(N - n(t)), \text{ где } \alpha_1 \gg \alpha_2$$

Code on Julia:

```
using DifferentialEquations
using Plots
N=500
n=5
u0=[n]
t0=0
tmax=30
tspan=(t0,tmax)
function F(du, u, p, t)
    du[1]=(0.55+0.0001*u[1])*(N-u[1])
end
prob=ODEProblem(F, u0, tspan)
sol=solve(prob)
plot(sol, title= "Эффективность рекламы №1", lab="n(t)", linewidth=2)
savefig("../report/image/JLab71.png")
```

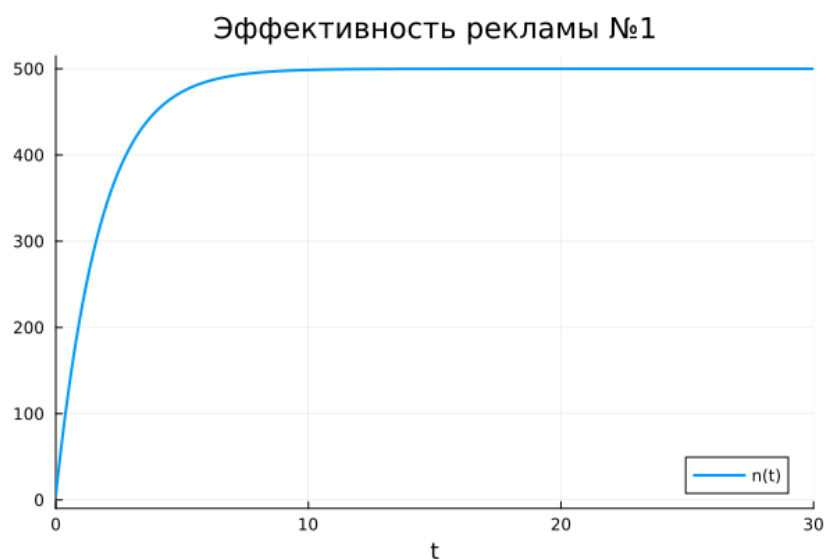


Рис. 4.1: Эффективность рекламы №1 (J)

Code on Openmodelica:

```
model lab7
parameter Real N=500;
Real n(start=5);
equation
der(n)= (0.55+0.0001*n) *(N-n);
end lab7;
```

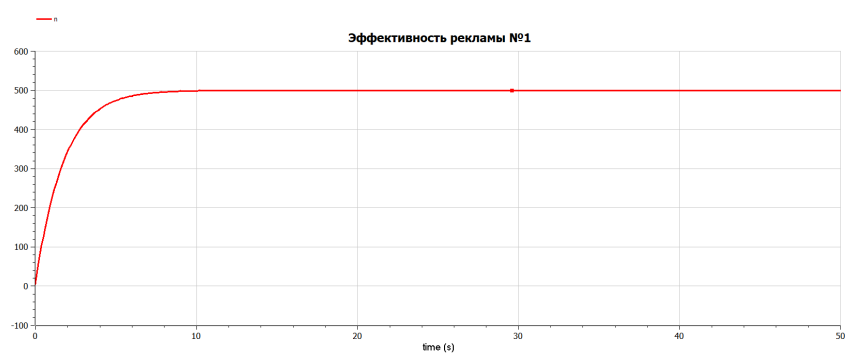


Рис. 4.2: Эффективность рекламы №1 (O)

## 4.2 Случай 2

$$\frac{dn}{dt} = (0.00005 + 0.2n(t))(N - n(t)), \text{ где } \alpha_1 \ll \alpha_2$$

Code on Julia:

```
using DifferentialEquations
using Plots

N=500
n=5
u0=[n]
t0=0
tmax=1
tspan=(t0,tmax)

function F(du, u, p, t)
    du[1]=(0.00005+0.2*u[1])*(N-u[1])
end

prob=ODEProblem(F, u0, tspan)
sol=solve(prob)
plot(sol, title= "Эффективность рекламы №2", lab="n(t)", linewidth=2)
savefig("../report/image/JLab72.png")
```

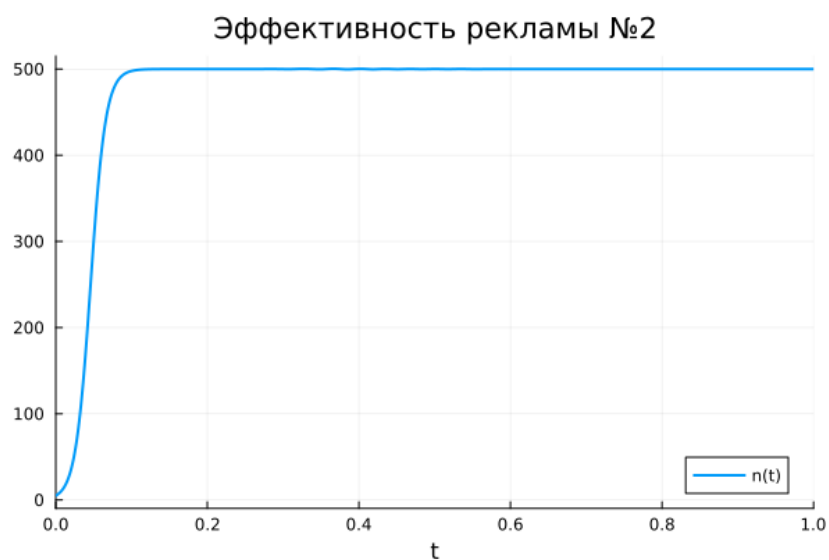


Рис. 4.3: Эффективность рекламы №2 (J)

Code on Openmodelica:

```
model lab7
parameter Real N=500;
Real n(start=5);
equation
der(n)= (0.00005+0.2*n) *(N-n);
end lab7;
```

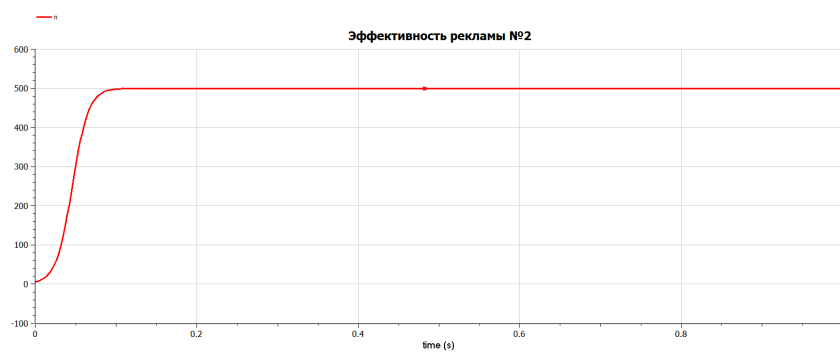


Рис. 4.4: Эффективность рекламы №2 (O)

Максимальное значение  $n$  достигается при  $\text{time}=0.15$ .

При  $t > 0.15$   $n(t)$  стремится к  $N$ .

### 4.3 Случай 3

$\frac{dn}{dt} = (0.05 \sin(t) + 0.3 \cos(t)n(t))(N - n(t))$ , где  $\alpha_1, \alpha_2$  - периодические функции

Code on Julia:

```
using DifferentialEquations
using Plots

N=500
n=5
u0=[n]
t0=0
tmax=1
tspan=(t0,tmax)

function F(du, u, p, t)
    du[1]=(0.5*sin(t)+0.3*cos(t)*u[1])*(N-u[1])
end

prob=ODEProblem(F, u0, tspan)
sol=solve(prob)
plot(sol, title= "Эффективность рекламы №3", lab="n(t)", linewidth=2)
savefig("../report/image/JLab73.png")
```

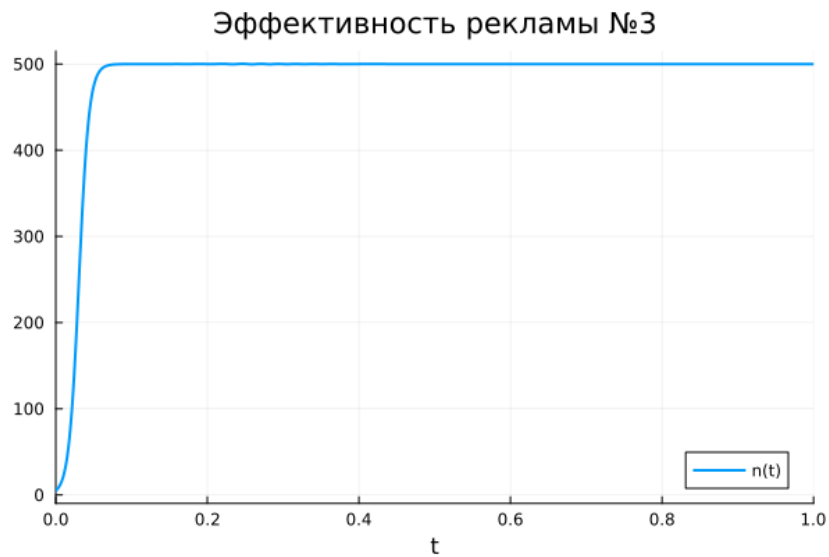


Рис. 4.5: Эффективность рекламы №3 (J)

Code on Openmodelica:

```
model lab7
parameter Real N=500;
Real n(start=5);
equation
der(n)= (0.5 * sin(time)+0.3 * cos(time) * n) *(N-n);
end lab7;
```

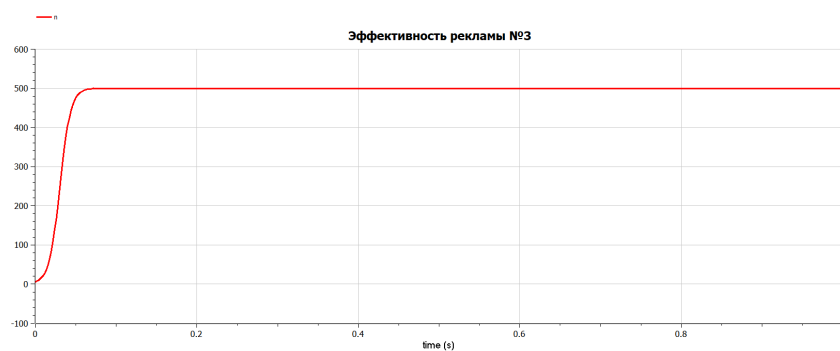


Рис. 4.6: Эффективность рекламы №3 (O)

## 5 Вопросы к лабораторной работе

1. Записать модель Мальтуса (дать пояснение, где используется данная модель).

$$\frac{\partial N}{\partial t} = rN$$

где  $N$  — исходная численность населения,  $r$  — коэффициент пропорциональности, для которого  $r = b - d$  ( $b$  — коэффициент рождаемости,  $d$  — коэффициент смертности),  $t$  — время.

Модель используется в экологии для расчета изменения популяции особей животных.

2. Записать уравнение логистической кривой (дать пояснение, что описывает данное уравнение)

$$\frac{\partial P}{\partial t} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right)$$

где  $r$  — характеризует скорость роста (размножения),  $K$  — поддерживающая ёмкость среды (то есть, максимально возможная численность популяции).

Исходные предположения для вывода уравнения при рассмотрении популяционной динамики выглядят следующим образом:

скорость размножения популяции пропорциональна её текущей численности, при прочих равных условиях;



скорость размножения популяции пропорциональна количеству доступных ресурсов, при прочих равных условиях. Таким образом, второй член уравнения отражает конкуренцию за ресурсы, которая ограничивает рост популяции.

3. На что влияют коэффициенты  $\alpha_1(t)$  и  $\alpha_2(t)$  в модели распространения рекламы.

$\alpha_1(t)$  — интенсивность рекламной кампании, зависящая от затрат.

$\alpha_2(t)$  — интенсивность рекламной кампании, зависящая от сарафанного радио.

4. Как ведет себя рассматриваемая модель при  $\alpha_1(t) \gg \alpha_2(t)$

При данных условиях получается модель типа модели Мальтуса, решение которой имеет вид:

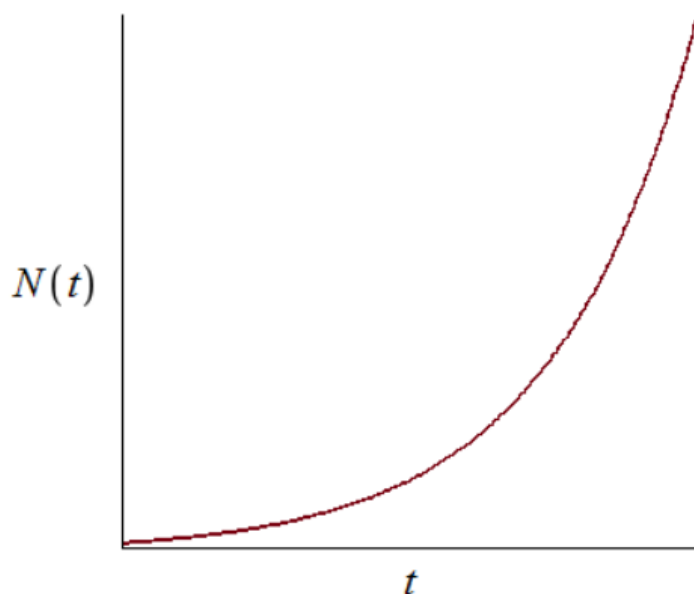


Рис. 5.1: График решения уравнения модели Мальтуса

5. Как ведет себя рассматриваемая модель при  $\alpha_1(t) \ll \alpha_2(t)$

При данных условиях получаем уравнение логистической кривой:

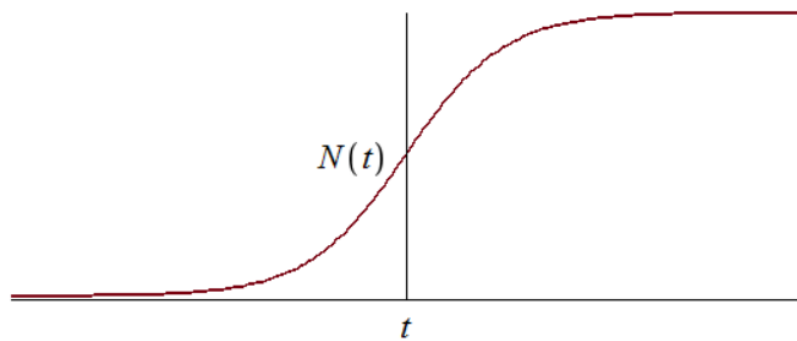


Рис. 5.2: График решения уравнения логистической кривой

## 6 Выводы

В ходе выполнения лабораторной работы я научился строить графики распространения рекламы, определять в какой момент времени скорость распространения рекламы будет иметь максимальное значение.

## 7 Список литературы

1. Кулябов Д. С. *Лабораторная работа №7* : <https://esystem.rudn.ru/course/view.php?id=5930>
2. Mango Office. (23 March 2023 г.). Mango Office. Получено из <https://www.mango-office.ru/products/calltracking/glossary/effektivnost-reklamy/>