Отчёта по лабораторной работе № 6

Математическое моделирование

Адебайо Ридвануллахи Айофе

Содержание

1 Цель работы 5

2 Задание 6

3 Теоретическое введение 7

4 Выполнение лабораторной работы 9

5 Выводы 15

6 Список литературы 16

Список иллюстраций

4.1 Модель эпидемии №1(OpenModelica) 10
4.2 Модель эпидемии №1(Julia) 11
4.3 Модель эпидемии №2(OpenModelica) 13
4.4 Модель эпидемии №2(Julia) 14

Список таблиц

1 Цель работы

Построить графики изменения числа особей в группах с помощью простейшей модели эпидемии, рассмотреть, как будет протекать эпидемия в различных случаях.

2 Задание

На одном острове вспыхнула эпидемия. Известно, что из всех проживающих на острове $(N = 20000)$ в момент начала эпидемии $(t = 0)$ число заболевших людей (являющихся распространителями инфекции) $I(0) = 99$, А число здоровых людей с иммунитетом к болезни $R(0) = 5$. Таким образом, число людей восприимчивых к болезни, но пока здоровых, в начальный момент времени $S(0) = N - I(0) - R(0)$.

Постройте графики изменения числа особей в каждой из трех групп.

Рассмотрите, как будет протекать эпидемия в случае:

1. если $I(0) \leq I^*$
2. если $I(0) > I^*$

3 Теоретическое введение

Рассмотрим простейшую модель эпидемии. Предположим, что некая популяция, состоящая из N особей, (считаем, что популяция изолирована) подразделяется на три группы. Первая группа - это восприимчивые к болезни, но пока здоровые особи, обозначим их через S(t). Вторая группа – это число инфицированных особей, которые также при этом являются распространителями инфекции, обозначим их I(t). А третья группа, обозначающаяся через R(t) – это здоровые особи с иммунитетом к болезни.

До того, как число заболевших не превышает критического значения I^*, считаем, что все больные изолированы и не заражают здоровых. Когда $I(t) > I^*$, тогда инфицирование способны заражать восприимчивых к болезни особей.

Таким образом, скорость изменения числа $S(t)$ меняется по следующему закону:

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \begin{cases} -\alpha S, & I(t) > I^* \\ 0, & I(t) \leq I \end{cases}$$

Поскольку каждая восприимчивая к болезни особь, которая, в конце концов, заболевает, сама становится инфекционной, то скорость изменения числа инфекционных особей представляет разность за единицу времени между заразившимися и теми, кто уже болеет и лечится, т.е.:

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \begin{cases} \alpha S - \beta I, & I(t) > I^* \\ -\beta I, & I(t) \leq I \end{cases}$$

А скорость изменения выздоравливающих особей (при этом приобретающие иммунитет к болезни)

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = \beta I$$

Постоянные пропорциональности α, β - это коэффициенты заболеваемости и выздоровления соответственно.

Для того, чтобы решения соответствующих уравнений определялось однозначно, необходимо задать начальные условия. Считаем, что на начало эпидемии в момент времени $t = 0$ нет особей с иммунитетом к болезни $R(0) = 0$, а число инфицированных и восприимчивых к болезни особей $I(0)$ и $S(0)$ соответственно. Для анализа картины протекания эпидемии необходимо рассмотреть два случая: $I(0) \leq I^*$ и $I(0) > I^*$

4 Выполнение лабораторной работы

1. Первый случай где $I(0) > I^*$

$$
\begin{cases}
\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = -\alpha S, \\
\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \alpha S - \beta I, \\
\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = \beta I.
\end{cases}
$$

Code on OpenModelica

```
model lab6

parameter Real a=0.01;

parameter Real b=0.02;

parameter Real N=20000;


Real I;

Real R;

Real S;

initial equation

I=99;

R=5;

S=N-I-R;


equation
```

```
der(S)=-a*S;
der(I)=a*S-b*I;
der(R)=b*I;
end lab6;
```

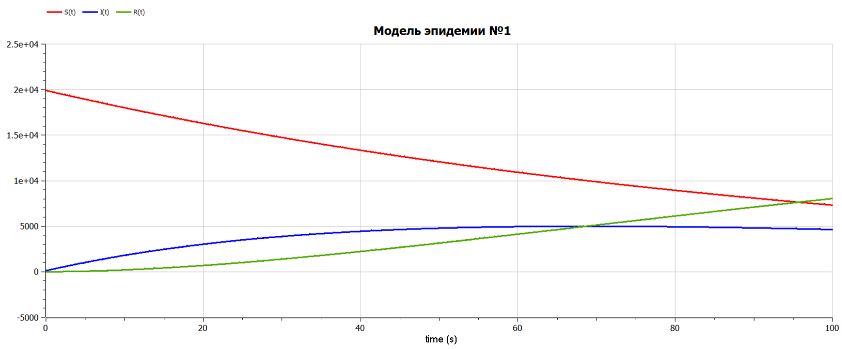

Рис. 4.1: Модель эпидемии №1(OpenModelica)

Code on Julia

```
using DifferentialEquations
using Plots

a=0.01
b=0.02
N=20000
I=99
R=5
S=N-I-R
u0=[S,I,R]
t0=0
tmax=100
tspan=(t0,tmax)
#когда I(t)<=I
```

```julia
function F(du, u, p, t)
    S, I, R = u
    du[1]=-a*u[1]
    du[2]=a*u[1]-b*u[2]
    du[3]=b*u[2]
end
prob1 = ODEProblem(F, u0, tspan)
sol1= solve(prob1)

plot(sol1.t, sol1[1, :], lab="S(t)")
plot!(sol1.t, sol1[2,:], lab="I(t)")
p1=plot!(sol1.t, sol1[3,:], lab=lab="R(t)", title ="Модель эпидемии №1" )
savefig("Jlab61.png")
```

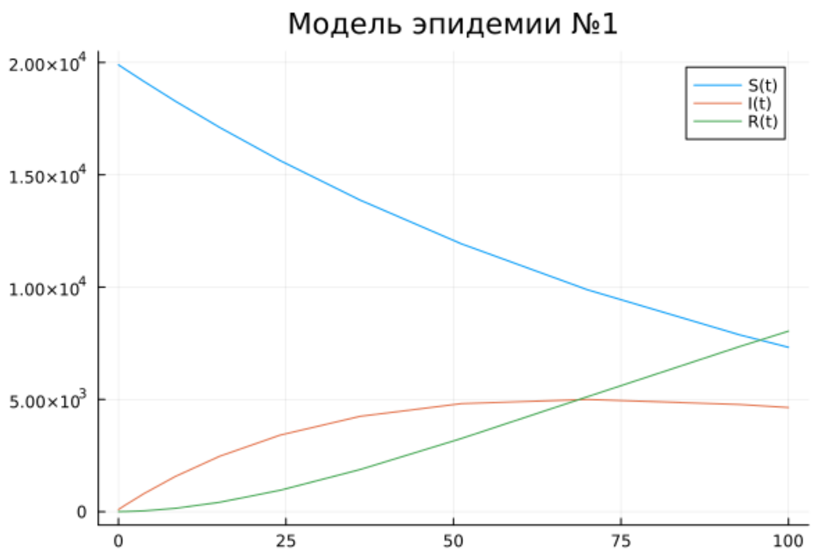

Рис. 4.2: Модель эпидемии №1(Julia)

2. Второй случай где $I(0) \leq I^*$

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = 0, \\ \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = -\beta I, \\ \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = \beta I. \end{cases}$$

Code on OpenModelica

```
model lab61
parameter Real a=0.01;
parameter Real b=0.02;
parameter Real N=20000;

Real I;
Real R;
Real S;
initial equation
I=99;
R=5;
S=N-I-R;

equation
der(S)=0;
der(I)=-b*I;
der(R)=b*I;
end lab61;
```

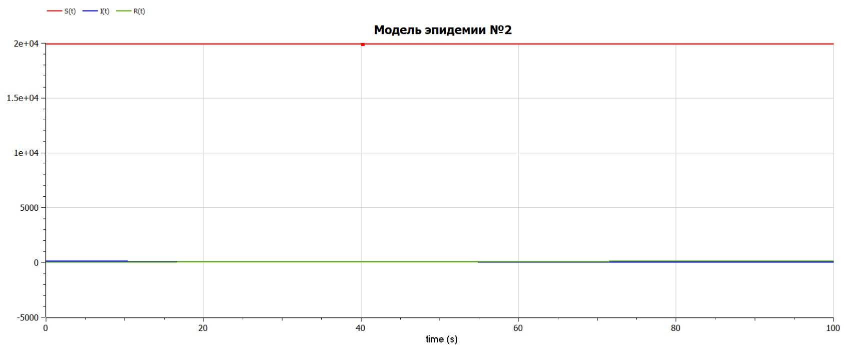

Рис. 4.3: Модель эпидемии №2(OpenModelica)

Code on Julia

```
using DifferentialEquations
using Plots

a=0.01
b=0.02
N=20000
I=99
R=5
S=N-I-R
u0=[S,I,R]
t0=0
tmax=100
tspan=(t0,tmax)

function F2(du, u, p, t)
    du[1]=0
    du[2]=-b*u[2]
    du[3]=b*u[2]
end
```

```
prob2=ODEProblem(F2, u0, tspan)
sol2=solve(prob2)

plot(sol2.t, sol2[1, :], lab="S(t)")
plot!(sol2.t, sol2[2,:], lab="I(t)")
p1=plot!(sol2.t, sol2[3,:], lab=lab="R(t)", title ="Модель эпидемии №2" )
savefig("Jlab62.png")
```

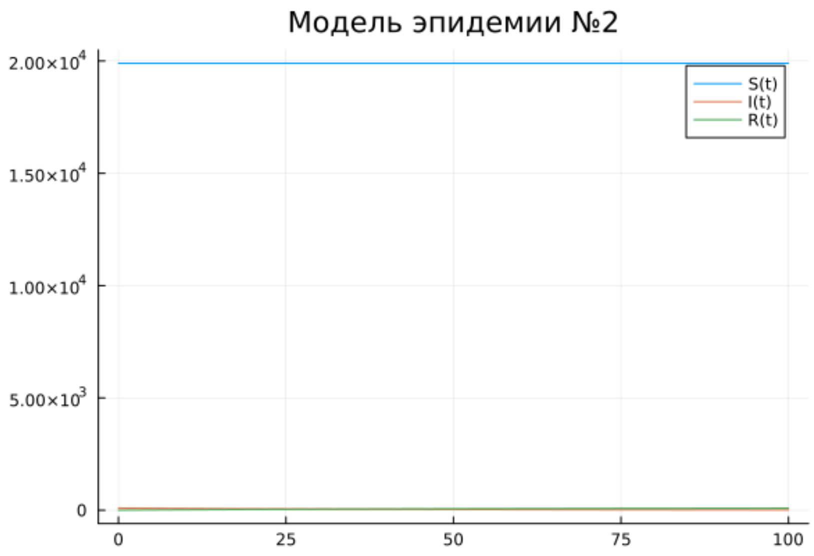

Рис. 4.4: Модель эпидемии №2(Julia)

5 Выводы

В ходе выполнения лабораторной работы я научился строить графики изменения числа особей в группах с помощью простейшей модели эпидемии, рассмотрел, как будет протекать эпидемия в различных случаях.

6 Список литературы

1. Кулябов Д. С. *Лабораторная работа №6* : https://esystem.rudn.ru/course/view.php?id=5930

2. https://math.meta.stackexchange.com/questions/21841/how-to-type-greater-than-or-equal-to-symbols