Задача A. Проверка на простоту

Воспользуемся простым методом перебора делителей.

Проверим каждое целое число от 2 до $\sqrt{x}$ (включительно), является ли оно делителем числа x. Для этого будем использовать оператор взятия остатка %. Если число x при делении на предполагаемый делитель дает остаток, равный 0, то число является составным. Если ни одно число не дало остаток 0, то число – простое.

Работайте аккуратнее с целочисленными типами и избегайте переполнения!

Асимптотика решения – $O(\sqrt{x})$.

Задача B. ЛОД

В этой задаче мы специально оставили «дыру». Можно заметить, что любые числа a и b делятся на 1. Поэтому можно просто вывести 1, какой бы запрос не пришел.

Асимптотика решения – $O(1)$.

Задача C. Факторизация

Давайте немного модифицируем метод проверки числа на простоту.

Будем перебирать потенциальные делители числа n в порядке возрастания. Если очередное число p является делителем числа n, то запишем его и заменим n на $\frac{n}{p}$. Также, после замены необходимо не переходить на следующую итерацию, потому что первоначальное число n может иметь в разложении несколько чисел p.

Когда очередное число p стало большим, чем $\sqrt{n}$, необходимо завершить цикл и добавить в разложение оставшееся число n, если $n \neq 1$.

Асимптотика решения – $O(\sqrt{n})$.

Задача D. Решето Эратосфена

Давайте вычислим решето Эратосфена для всех чисел от 1 до n. После этого пройдемся циклом по этому решету, и если очередное число – простое, то выведем его.

Асимптотика решения – $O(n \cdot log(logn))$.

Задача E. Простые запросы

Здесь мы можем перед обработкой запросов вычислить решето Эратосфена $sieve$ для чисел от 1 до n. $sieve[i] = 1$, если число i – простое. Иначе $sieve[i] = 0$

После этого, давайте для каждого i ($1 \leqslant i \leqslant n$) вычислим количество простых чисел от 1 до i. Для этого будем использовать метод динамического программирования. Создадим массив dp на $n+1$ элементов, где в i-й ячейке будет лежать количество простых чисел от 1 до i. Заметим, что мы можем заполнить этот массив по возрастанию, используя тот факт, что $dp[0] = 0$, а $dp[i] = dp[i-1] + sieve[i]$ для любого i.

Тогда на любой запрос мы можем отвечать за $O(1)$, используя следующее свойство: количество простых чисел на отрезке $[l, r]$ равно разности кол-ва простых чисел на отрезке $[1, r]$ и кол-ва простых чисел на отрезке $[1, l-1]$.

Асимпотика решения – $O(n \cdot log(log(n)) + q)$.

Примечание

Для $dp[0]$ – это количество простых чисел на отрезке $[1, 0]$. Так как левая граница больше правой, то отрезок пуст.

Задача F. Почти простые числа

Воспользуемся алгоритмом вычисление решета Эратосфена с факторизацией.

Для каждого числа от 2 до n мы знаем его минимальный простой делитель. Пусть мы рассматриваем число p и его минимальный простой делитель равен q. Число будет «почти простым» тогда и только тогда, когда число $s = \frac{p}{q}$ будет простым. Иными словами, когда минимальный простой делитель числа s будет равен s.

Асимптотика решения – $O(n \cdot log(logn))$.

Задача G. Количество делителей

Воспользуемся решетом Эратосфена с факторизацией. Теперь мы можем факторизовывать любое число x из отрезка $[1, n]$ за $O(log(x))$.

После факторизации числа x, мы можем сгруппировать равные простые числа и получить представление в виде $x = {p_1}^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot {p_k}^{\alpha_k}$, где $p_1, \ldots, p_k$ – различные простые числа, $\alpha_i > 0$.

Заметим, что все делители числа x имеют вид ${p_1}^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot {p_k}^{\beta_k}$, где $0 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i$. Тогда количество делителей числа x равно $(\alpha_1 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_k + 1)$.

Асимптотика решения – $O(n \cdot [log(logn) + log(max(x_i))])$

Задача H. Общие делители

Эта задача использует идею решета Эратосфена.

Пусть $m = max(x_i) + 1$. Заведем массив cnt размера m. В i-й ячейке этого массива будет лежать количество чисел, равных i в исходном массиве x.

Заведем еще один массив am размера m. В i-й ячейке массива am будет лежать количество чисел из массива x, которые делятся на i. Очевидно, что ответом к задаче будет являться максимальное i, для которого $am[i] \geqslant 2$.

Будем заполнять массив am с конца. Тогда, для ячейки i нам нужно найти количество всех чисел, которые делятся на i. А именно, это будут следующие числа: $i, 2i, 3i, \ldots$. Мы можем сделать это простым перебором всех возможных кратных числу i чисел в массиве cnt.

Тогда суммарно мы проделаем примерно $n + \frac{n}{2} + \frac{n}{3} + \ldots + 1$ действий, что равно $n \cdot (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n})$. Последний множитель – сумма гармонического ряда, которая стремится к бесконечности со скоростью $O(logn)$. Итого, мы получили приемлимую асимптотику.

Асимпотика решения – $O(max(x_i) \cdot log(max(x_i)))$.