Metodi Matematici per l'Informatica (secondo canale) — 13 Giugno 2022

Soluzioni di Andrea Princic. Cartella delle soluzioni.

Es 1. Sia f una funzione da A a B, dove A e B sono insiemi finiti di cardinalità n e m, rispettivamente.

- ☑$_V$ ☐$_F$ **A.** f è necessariamente suriettiva se $n > 0$ e $m = 1$
- ☐$_V$ ☑$_F$ **B.** f è necessariamente suriettiva se $n > m$
- ☑$_V$ ☐$_F$ **C.** f è necessariamente iniettiva se $n = 0$
- ☑$_V$ ☐$_F$ **D.** f può essere suriettiva se $n > m$

Es 2. Scrivere la definizione di insieme delle parti di un insieme.

> L'insieme delle parti di un insieme A è l'insieme di tutti i sottoinsiemi di A

Es 3. La chiusura transitiva della relazione $R = \{(1,2),(2,1),(1,3),(3,2)\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ è:

- ☐$_V$ ☑$_F$ **A.** $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$
- ☑$_V$ ☐$_F$ **B.** $\{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$
- ☐$_V$ ☑$_F$ **C.** $\{(1,1),(2,2),(3,3),(2,3),(3,1)\}$
- ☐$_V$ ☑$_F$ **D.** una relazione di equivalenza su $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Es 4. Scrivere la definizione di *numerabilità* di un insieme e fare un esempio.

> Un insieme si dice numerabile se può essere messo in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$. Un esempio di insieme numerabile è l'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$, mentre l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ non è numerabile.

Es 5. Dimostrare che per ogni $n \geq 2$ si ha

$$\sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1-x^n}{1-x}$$

dove x è un numero reale.

Caso base $n = 2$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{1} x^k &= 1 + x \\ &= \frac{(1+x)(1-x)}{1-x} \\ &= \frac{1-x^2}{1-x}\end{aligned}$$

Passo induttivo $n+1$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} x^k &= \sum_{k=0}^{n-1} x^k + x^n \\ &= \frac{1-x^n}{1-x} + x^n \\ &= \frac{1-x^n+x^n(1-x)}{1-x} \\ &= \frac{1-\cancel{x^n}+\cancel{x^n}-x^{n+1}}{1-x} \\ &= \frac{1-x^{n+1}}{1-x}\end{aligned}$$

Es 6. Definire il concetto di *interpretazione* nella logica predicativa.

Interpretare significa dare un significato ad ogni predicato e scegliere un dominio.

Es 7. Vero o Falso? (N.B. Le lettere A, B, C variano su proposizioni arbitrarie nel linguaggio della logica proposizionale, non necessariamente distinte).

☐$_V$ ☑$_F$ **A.** Se $A \models B \vee C$ e $B \models \neg C$ allora $(A \to C) \models \neg B$

A	B	C	$A \models B \vee C$	$B \models \neg C$	$(A \to C) \models \neg B$	risultato
F	F	F	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	F	F
F	V	V	V	F	F	V
V	F	F	F	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V
V	V	V	V	F	F	V

Il risultato è dato da $(A \models B \vee C) \wedge (B \models \neg C) \to ((A \to C) \models \neg B)$. Il simbolo $\models$ viene trattato allo stesso modo di $\to$ nella tavola di verità.

☐$_V$ ☑$_F$ **B.** Se $A \wedge \neg B$ è soddisfacibile allora $A \to B$ è insoddisfacibile

perché $A \to B = \neg A \vee B = \neg(A \wedge \neg B)$ e il fatto che $A \wedge \neg B$ sia soddisfacibile non implica che la sua negazione non lo possa essere.

Es 8. L'enunciato seguente è una tautologia?

☐$_V$ ☑$_F$ **A.** $\exists x(A(x) \to \neg B(x)) \to \neg \forall x(B(x) \to A(x))$

Si può scrivere anche

$$\exists x(\neg A(x) \vee \neg B(x)) \to \exists x(B(x) \wedge \neg A(x))$$

che è falso nel caso in cui A e B siano insoddisfacibili.

Es 9. Formalizzare la proposizione seguente con un enunciato nel linguaggio predicativo $\mathcal{L}$ composto da un simbolo $\in$ di relazione binaria.

A. Ogni insieme X è intersezione di una qualche coppia di insiemi Y e Z

$\forall X \; \exists Y \; \exists Z \; \forall x(x \in X \leftrightarrow (x \in Y \wedge x \in Z))$

Tableau

$$\neg(\exists x(A(x) \to \neg B(x)) \to \neg\forall x(B(x) \to A(x)))$$

$$|$$

$$\exists x(A(x) \to \neg B(x))$$

$$|$$

$$\forall x(B(x) \to A(x))$$

$$|$$

$$A(a) \to \neg B(a)$$

$$|$$

$$B(a) \to A(a)$$