Metodi Matematici per l'Informatica (secondo canale) — 10 Settembre 2024

Soluzioni di Andrea Princic. Cartella delle soluzioni.

Es 1. Sia A un insieme non vuoto e B un suo sottoinsieme proprio. Allora

☐$_V$ ☑$_F$ **A.** A e B non possono avere la stessa cardinalità

> Ad esempio $A = \mathbb{N}$ e $B = \mathbb{P}$

☐$_V$ ☑$_F$ **B.** Non è possibile che $B \in A$

> Ad esempio $A = \{1, 2, \{1\}\}$ e $B = \{1\}$

☑$_V$ ☐$_F$ **C.** Esiste sempre una funzione iniettiva da B ad A

> Ad esempio la funzione identità

☑$_V$ ☐$_F$ **D.** Può esistere una funzione suriettiva da B ad A

> Può essere vero nel caso di insiemi infiniti, ad esempio con $A = \mathbb{N}$ e $B = \mathbb{P}$ e $f : B \to A, f(x) = \frac{x}{2}$

Es 2. Sia A un insieme finito e R la relazione che associa ad ogni funzione su A la sua immagine. Quali delle seguenti risposte è esatta?

☐$_V$ ☑$_F$ **A.** R è una relazione d'ordine

☐$_V$ ☑$_F$ **B.** R è una relazione d'equivalenza

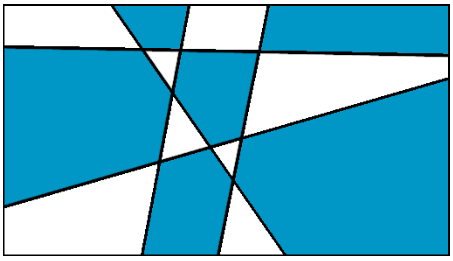
☑$_V$ ☐$_F$ **C.** R non è una relazione su A

☑$_V$ ☐$_F$ **D.** R è un insieme finito

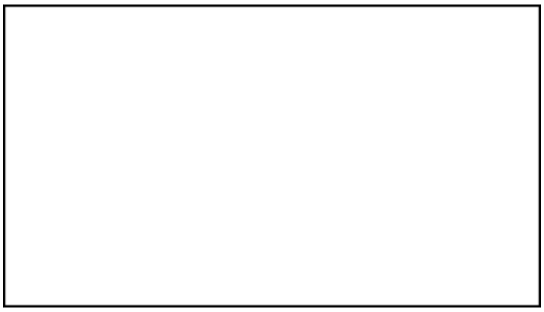
> C'è un numero finito di funzioni su un insieme finito

> Se ho capito bene l'esercizio, la relazione R sarebbe un insieme di coppie che hanno come primo elemento una funzione (quindi un insieme di coppie) e come secondo elemento l'immagine della funzione (quindi un insieme). Verrebbe fuori una cosa del genere:
>
> $$R = \{(\{(x, x), (y, x), (z, y)\}, \{x, y\}), (\{(x, z), (y, z), (z, z)\}, \{z\}), ...\}$$
>
> Se questa interpretazione è corretta, le prime due opzioni sono false perché non c'è modo di applicare la proprietà transitiva su questa relazione.

Es 3. Si consideri qualsiasi insieme finito di linee rette su un piano. Si dimostri per induzione che le regioni nel piano create da queste linee possono essere colorate in modo tale che due regioni qualsiasi che condividono un bordo in comune abbiano colori diversi, come suggerito dall'immagine seguente.



Il caso base è quando ci sono 0 linee: in questo caso non c'è niente da fare perché c'è solo una regione che corrisponde all'intero piano.



Ogni volta che aggiungiamo una linea il piano si divide in due parti. Alcune regioni esistenti potrebbero trovarsi a cavallo di queste due nuove parti, rendendo falsa la condizione. Nel caso della prima linea ci basta invertire una delle due parti del piano.

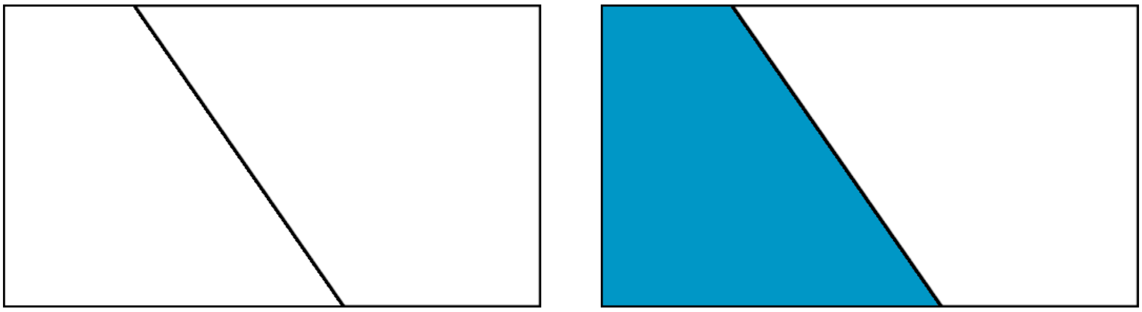


Figure 1: Dopo aver fatto la linea la condizione è falsa, quindi invertiamo il colore di una parte del piano

Aggiungendo una nuova linea la situazione sembra complicarsi ma in realtà non è così. Tutte le regioni che si trovano al confine di una delle due nuove metà sono a contatto con le loro metà dall'altra parte della linea. Per risolvere questo problema ci basta invertire il colore di tutte le regioni che si trovano in una delle due parti appena create con la nuova linea.

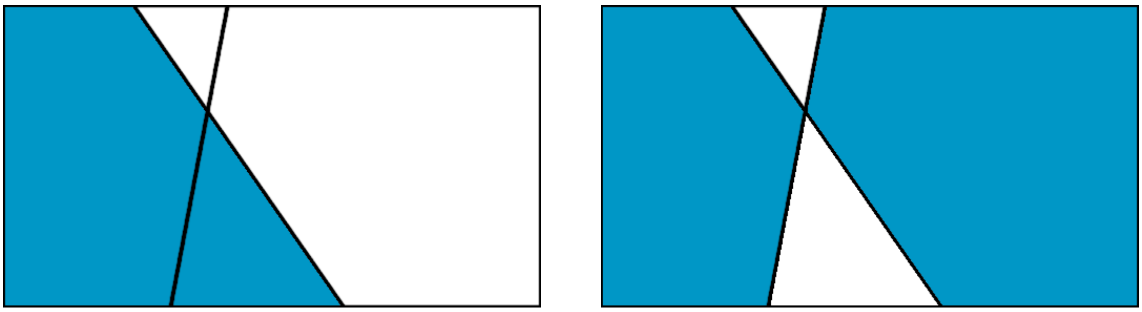


Figure 4: Dopo aver fatto la linea la condizione è falsa, quindi invertiamo il colore di tutte le regioni in una delle due nuove metà del piano (destra)

Aggiungendo un'altra linea possiamo vedere che la strategia di invertire tutte le regioni in una metà del piano continua a funzionare.

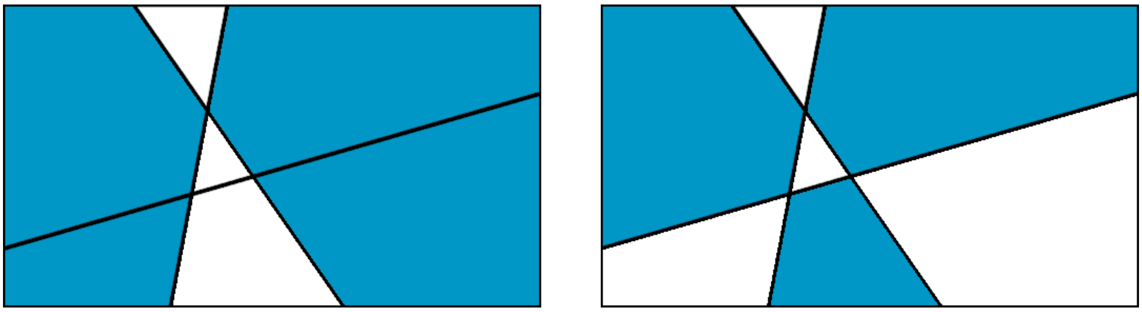


Figure 7: Dopo aver fatto la linea la condizione è falsa, quindi invertiamo il colore di metà piano

La strategia funziona anche nel caso di regioni che non si trovano al confine della nuova linea. Il motivo è che quando viene tracciata una nuova linea, il piano viene diviso in due parti all'interno delle quali, se prese singolarmente, la condizione è valida perché lo era prima di tracciare la linea (**Passo induttivo**). Dopo aver tracciato la linea la condizione viene infranta solo al confine. Invertendo il colore di una delle due nuove metà del piano si ottiene che il conflitto ai bordi viene risolto, e le due nuove metà, che prese singolarmente verificavano entrambe la condizione, continuano a verificarla anche dopo aver invertito i colori perché invertire i colori non falsifica la condizione.

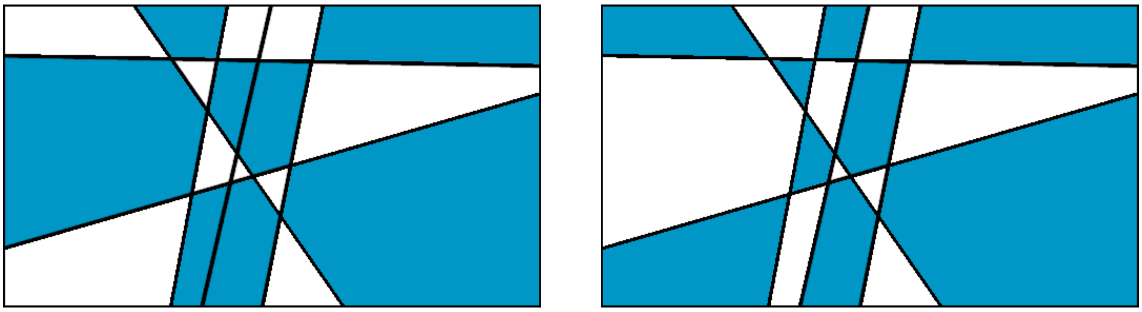


Figure 10: Le due nuove metà soddisfano la condizione se prese singolarmente, e invertire i colori non invalida la condizione nella metà invertita

Es 4. La formula seguente è valida?

☑$_V$ ☐$_F$ **A.** $(C \to (A \land B)) \to (C \to A)$

Si può riscrivere così

$$\begin{aligned}(C \to (A \land B)) \to (C \to A) &= (\neg C \lor (A \land B)) \to (\neg C \lor A)\\ &= \neg(\neg C \lor (A \land B)) \lor (\neg C \lor A)\\ &= C \lor \neg(A \land B) \lor \neg C \lor A\end{aligned}$$

Grazie a $C \lor \neg C$ la formula è una tautologia.

Es 5. Si scriva una formula soddisfacibile della logica dei predicati in cui appaiono due simboli predicativi ed un simbolo funzionale, indicando una sua possibile interpretazione.

$$\exists x D(x) \vee \exists x Z(x)$$

Dominio: $\mathbb{N}$

$D(x) = x$ è dispari

$Z(x) = x$ è uguale a 0

Es 6. La formula $(\forall x \forall y P(x, y) \vee \exists y \exists x Q(y, x)) \to (P(a, a) \vee Q(a, a))$ è valida? Motivare la risposta.

La formula non è valida. Per invalidarla si deve avere che la parte a sinistra $\forall x \forall y P(x, y) \vee \exists y \exists x Q(y, x)$ sia vera e la parte a destra $P(a, a) \vee Q(a, a)$ sia falsa.

Se a sinistra mettiamo $\forall x \forall y P(x, y)$ vero, la formula viene valida perché poi ci basterebbe scegliere qualunque valore per a per rendere vero $P(a, a)$. Quindi mettiamo $\forall x \forall y P(x, y)$ falso (facciamo $P(x, y) =$ falso per comodità) e $\exists y \exists x Q(y, x)$ vero. In questo modo abbiamo che la parte a sinistra $\forall x \forall y P(x, y) \vee \exists y \exists x Q(y, x)$ è vera.

Ora falsifichiamo la parte di destra $P(a, a) \vee Q(a, a)$. Come detto sopra abbiamo già che $P(a, a)$ è falso. Inoltre sappiamo che $Q(x, y)$ è vero per qualche x, y. Per falsificare $Q(a, a)$ ci basta assumere che il dominio abbia almeno 2 elementi distinti ad esempio $\{1, 2\}$, e che $Q(x, y)$ sia vero solo per una coppia $x \neq y$, ad esempio $x = 1, y = 2$. A questo punto scegliamo $a = 1$ e otteniamo che $Q(1, 1)$ è falso (vale anche con $a = 2$).

Ricapitolando:

- abbiamo reso vera la parte sinistra assumendo che $P(x, y) =$ falso e $\exists y \exists x Q(y, x)$ vero;
- abbiamo fissato il dominio $\{1, 2\}$ e deciso che $Q(1, 2)$ è l'unico modo per verificare $\exists y \exists x Q(y, x)$;
- ora in qualunque modo scegliamo $a \in \{1, 2\}$, $Q(a, a)$ è falso;
- abbiamo ottenuto un'interpretazione che falsifica la formula, che quindi non è valida;