Metodi Matematici per l'Informatica (secondo canale)

Soluzioni di: Andrea Princic. Cartella delle soluzioni

12 Febbraio 2019

Es 1.

Per ogni tripla di insiemi A, B e C tali che $A - B = C$ si ha:

A. $C \neq \emptyset$; **Falso** se $A \subseteq B$

B. $C \cup A = B$; **Falso** $C \cup A = A$

C. $C \subseteq A$; **Vero**

Es 2.

Per ogni coppia di insiemi A e B si ha che:

A. se A è numerabile allora $A - B$ è numerabile; **Falso** $A - B$ potrebbe essere finito

B. se A e B non sono numerabili allora $A \cap B$ non è numerabile; **Falso** ad esempio se $A = \mathbb{N} \cup 2^{\mathbb{N}}$ e $B = \mathbb{R}$, allora $A \cap B = \mathbb{N}$

C. se A e B sono numerabili allora $A \times B$ è numerabile; **Vero**

Es 3.

Si consideri la relazione $D = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{N} \text{ e } a \text{ divide } b\}$.

A. D è una relazione d'ordine stretto; **Falso** non è antiriflessiva (è riflessiva)

B. D è una relazione d'ordine largo; **Vero**

C. esiste $x \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $y \in \mathbb{N}$ se $x \neq y$ allora $(y, x) \in D$; **Vero** $x = 0$

Es 4.

Scrivere una relazione di ordine stretto sull'insieme $A = \{P, L, M, G\}$.

$$\{(P, L), (P, M), (P, G), (L, M), (L, G), (M, G)\}$$

Es 5.

Scrivere la definizione di *chiusura simmetrica* di una relazione.

La chiusura simmetrica di una relazione $R \subseteq A \times A$ è la più piccola relazione simmetrica R_1 tale che $R \subseteq R_1 \subseteq A \times A$

Es 6.

Sia x un numero reale. Dimostrare che per ogni $n \geq 2$ si ha

$$(1-x)\sum_{k=0}^{n-1} x^k = 1 - x^n$$

Caso base n=2:

$$(1-x)\sum_{k=0}^{1} x^k = (1-x)(1+x) = 1 - x^2$$

Passo induttivo $n+1$:

$$\begin{aligned}(1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k &= (1-x)\sum_{k=0}^{n-1} x^k + (1-x)x^n \\ &= 1 - x^n + (1-x)x^n \\ &= 1 - \cancel{x^n} + \cancel{x^n} - x^{n+1} \\ &= 1 - x^{n+1}\end{aligned}$$

Es 7.

Definire il concetto di *modello* nella logica predicativa.

Un modello è un'interpretazione che rende vera una formula

Es 8.

Vero o Falso? (N.B. Le lettere A, B, C, p_1, p_2, p_3 variano su proposizioni arbitrarie nel linguaggio della logica proposizionale, non necessariamente distinte).

A. $((p_1 \wedge \neg p_2) \vee (\neg p_3 \wedge p_2) \vee (\neg p_1 \vee p_3))$ è una tautologia; **Vero** basta fare la tavola di verità

B. Se $A \vDash B \vee C$ e $B \vDash \neg C$ allora $(A \to C) \vDash \neg B$; **Falso** nel caso in cui $A = F$ e $B = V$

C. Se $A \wedge \neg B$ è soddisfacibile allora $A \to B$ è insoddisfacibile; **Falso** perché $A \to B = \neg A \vee B = \neg(A \wedge \neg B)$ e il fatto che $A \wedge \neg B$ sia soddisfacibile non implica che la sua negazione non lo possa essere

D. Se esiste B tale che il tableau di $B \wedge \neg A$ ha tutti i rami chiusi allora A è una tautologia; **Falso** il fatto che $B \wedge \neg A$ abbia tutti i rami chiusi significa che $\neg B \vee A$ è una tautologia, ma questo non significa che anche A debba esserlo

Es 9.

I seguenti enunciati sono verità logiche: Vero o Falso?

A. $\exists x \forall y (A(y) \to \neg B(x))$; **Falso** quando A e B sono entrambe tautologie nel dominio

B. $\exists y (\neg \exists x \neg A(x) \vee \neg A(y))$ **Vero** si può interpretare così: esiste una y per la quale A è falsa, oppure non esiste nessuna x per la quale è falsa. Questo ovviamente è vero perché o A è falsa per qualche y oppure è vera per tutte le x

I tableau si trovano in fondo al documento.

Es 10.

Formalizzare le proposizioni seguenti con enunciati nel linguaggio predicativo $\mathcal{L}$ composto da un simbolo $<$ di relazione a due argomenti.

A. La relazione $<$ ha un elemento minimo.

$\boxed{\exists x \forall y (x < y)}$

B. La relazione $<$ non ha un elemento massimo.

$\boxed{\neg \exists x \forall y (y < x)}$

C. La relazione $<$ è *densa*, vale a dire che ogni coppia di elementi nella relazione $<$ possiede un elemento intermedio.

$\boxed{\forall x \forall y (x < y \to \exists z (x < z \land z < y))}$

Tableau

$$
\begin{array}{c}
\neg \exists x \forall y (A(y) \to \neg B(x)) \\
| \\
\neg \forall y (A(y) \to \neg B(a)) \\
| \\
\neg (A(b) \to \neg B(a)) \\
| \\
A(b) \\
| \\
B(a)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
\neg \exists y (\neg \exists x \neg A(x) \lor \neg A(y)) \\
| \\
\neg (\neg \exists x \neg A(x) \lor \neg A(a)) \\
| \\
\exists x \neg A(x) \\
| \\
A(a) \\
| \\
\neg A(b) \\
| \\
\neg (\neg \exists x \neg A(x) \lor \neg A(b)) \\
| \\
\exists x \neg A(x) \\
| \\
A(b) \\
| \\
\times
\end{array}
$$