Metodi Matematici per l'Informatica (secondo canale)

Soluzioni di: Andrea Princic

20 Gennaio 2020

Es 1.

Sia $A = \{2, \{1, 3\}, (3, 5)\}$ e $B = \{(2, 2), 5\}$. Allora:

A. $2 \in A \cap B$; **Falso** $A \cap B = \emptyset$

B. $1 \in A \cup B$; **Falso** $A \cup B = \{2, \{1, 3\}, (3, 5), (2, 2), 5\}$

C. $B - A \neq \emptyset$; **Vero** $B - A = B$

D. $\{1, 3\} \subseteq A$; **Falso**

E. $\exists x, y\, [(x \in A) \wedge (\{(x, y)\} \subseteq B)]$; **Vero** $x = y = 2$

Es 2.

Data la relazione $R = \{(1, 2), (6, 7), (2, 3), (5, 6), (3, 4), (8, 9)\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, indichiamo con $\widehat{R}$ la sua chiusura transitiva.

A. $\widehat{R}$ ha 10 elementi; **Vero**

B. $\widehat{R} = R$; **Falso**

C. $R - \widehat{R} = \emptyset$; **Vero** per tutte le chiusure in generale

$\widehat{R} = R \cup \{(1, 3), (1, 4), (2, 4), (5, 7)\}$

Es 3.

Sia $Q = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3)\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\} \times \{1, 2, 3, 4\}$; allora

A. Q è una funzione iniettiva; **Falso**

B. Q è una relazione di equivalenza; **Falso**

C. Q è una relazione transitiva; **Vero**

D. Q non è una funzione; **Vero**

Es 4.

Si consideri la relazione $D = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{N} \text{ e } a \text{ divide } b\}$.

A. D è una relazione d'ordine stretto; **Falso** non è antiriflessiva

B. D è una relazione d'ordine largo; **Vero** è riflessiva, antisimmetrica e transitiva

C. esiste $x \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $y \in \mathbb{N}$ se $x \neq y$ allora $(x, y) \in D$; **Vero** $x = 1$

D. esiste $x \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $y \in \mathbb{N}$ se $x \neq y$ allora $(y, x) \in D$; **Vero** $x = 0$

Es 5.

NOTA BENE: un insieme numerabile è un insieme finito oppure può essere messo in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$.
Per ogni coppia di insiemi A e B si ha che:

A. se A è numerabile allora $A - B$ è numerabile; **Vero**

B. se A e B sono numerabili allora $A - B$ è finito; **Falso**

C. se A e B non sono numerabili allora $A \cap B$ non è numerabile; **Falso** ad esempio se $A = \mathbb{N} \cup 2^{\mathbb{N}}$ e $B = \mathbb{R}$, allora $A \cap B = \mathbb{N}$

D. se A e B sono numerabili allora $A \times B$ è numerabile; **Vero**

Es 6.

Sia $\mathbb{P}$ l'insieme dei numeri pari. Scrivere una **relazione di equivalenza** $R \subseteq \mathbb{P} \times \mathbb{P}$ che abbia tre classi di equivalenza, indicandone l'insieme quoziente.

$$R = \{(0,0),(2,2)\} \cup \widehat{\mathbb{P}} \times \widehat{\mathbb{P}}$$

dove $\widehat{\mathbb{P}} = \mathbb{P} - \{0, 2\}$
L'insieme quoziente è $\{[0],[2],[4]\}$ dove $[4] = [a]$ con $a \in \widehat{\mathbb{P}}$

Es 7.

La successione dei cosiddetti *numeri pentagonali* è definita come segue:

$$f(1) = 1$$
$$f(n+1) = f(n) + 3n + 1$$

Dimostrare che per ogni intero $n \geq 1$ vale $f(n) = \frac{n(3n-1)}{2}$

Caso base $n = 1$:

$$f(1) = 1 = \frac{1(3-1)}{2}$$

Passo induttivo $n + 1$:

$$\begin{aligned} f(n+1) &= f(n) + 3n + 1 \\ &= \frac{n(3n-1)}{2} + 3n + 1 \\ &= \frac{n(3n-1) + 6n + 2}{2} \\ &= \frac{3n^2 + 5n + 2}{2} \\ &= \frac{(n+1)(3n+2)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(3n+3-1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(3(n+1)-1)}{2} \end{aligned}$$

Es 8.

Dimostrare che se $\models (A \to B)$ allora $\models ((A \wedge B) \leftrightarrow A)$ e $\models ((A \vee B) \leftrightarrow B)$

		P	F	G	
A	B	$\models (A \to B)$	$\models ((A \wedge B) \leftrightarrow A)$	$\models ((A \vee B) \leftrightarrow B)$	$P \to F \wedge G$
F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V
V	V	V	V	V	V

Traducendo letteralmente la consegna "**se** ... **allora** ... **e** ... " in $P \to F \wedge G$

Es 9.

Decidere se i seguenti enunciati sono validi:

A. $(\forall x(A(x) \vee B(x))) \to (\forall x A(x) \vee \forall x B(x))$; **Falso** con $A(x) = x$ è pari e $B(x) = x$ è dispari

B. $(\exists x A(x) \to \forall x B(x)) \to \forall x(A(x) \to B(x))$; **Vero**

I tableau si trovano in fondo al documento.

Es 10.

Scrivere un enunciato che distingua fra $(\mathbb{N}, <)$ e $(\mathbb{Z}, <)$, vale a dire per il quale $(\mathbb{N}, <)$ sia un modello, mentre $(\mathbb{Z}, <)$ non lo sia. Usare il linguaggio predicativo con i simboli $=, <$ (con le loro ovvie interpretazioni).

Uso la proprietà di avere minimo: vale per $\mathbb{N}$ ma non per $\mathbb{Z}$.

$$\exists x \forall y (x < y \vee x = y)$$

Esiste un x $(x = 0)$ che è minore o uguale a tutti gli altri y.

Es 11.

Formalizzare i seguenti enunciati, usando simboli predicativi ed una loro opportuna interpretazione:

A. Qualche uomo è un genio;

$\exists x(U(x) \wedge G(x))$

B. Nessuna scimmia è un uomo;

$\neg \exists x(S(x) \wedge U(x))$

C. Qualche genio non è una scimmia;

$\exists x(G(x) \wedge \neg S(x))$

Usando i simboli predicativi U, G, S con le loro ovvie interpretazioni.

Tableau

$$\neg(\forall x(A(x) \lor B(x)) \to (\forall x A(x) \lor \forall x B(x)))$$
$$\forall x(A(x) \lor B(x))$$
$$\neg(\forall x A(x) \lor \forall x B(x))$$
$$\neg\forall x A(x)$$
$$\neg\forall x B(x)$$
$$\neg B(a)$$
$$\neg A(b)$$
$$A(a) \lor B(a)$$

- $A(a)$
  - $A(a) \lor B(a)$
    - $A(a)$
    - $B(a)$
- $B(a)$

$$\neg((\exists x A(x) \to \forall x B(x)) \to \forall x(A(x) \to B(x)))$$
$$\exists x A(x) \to \forall x B(x)$$
$$\neg\forall x(A(x) \to B(x))$$
$$\neg(A(a) \to B(a))$$
$$A(a)$$
$$\neg B(a)$$

- $\neg\exists x A(x)$
  - $\neg A(a)$
  - $\times$
- $\forall x B(x)$
  - $B(a)$
  - $\times$