# Metodi Matematici per l'Informatica (secondo canale)

Soluzioni di: Andrea Princic. Cartella delle soluzioni

9 Settembre 2019

## Es 1.

Scrivere le definizioni e fornire esempi di *relazione d'ordine stretto* e *relazione d'ordine totale*.

Una relazione d'ordine stretto è una relazione con le proprietà antiriflessiva, antisimmetrica e transitiva. Un esempio di relazione d'ordine stretto è la relazione $<$ su $\mathbb{N}$.

Una relazione d'ordine totale è una relazione con le proprietà riflessiva, antisimmetrica, transitiva, e inoltre per ogni coppia di elementi $a$ e $b$ si ha che $aRb$ oppure $bRa$. Un esempio di relazione d'ordine totale è la relazione $\leq$ su $\mathbb{N}$.

## Es 2.

Sia $Q = \{(a,b),(a,c),(a,d),(b,c)\} \subseteq \{a,b,c,d\} \times \{a,b,c,d\}$; allora

**A.** $Q$ è una funzione;

**Falso** $a$ compare come primo elemento in più di una coppia. In una funzione ogni elemento può apparire al più una volta al primo posto di una coppia

**B.** $Q$ è una relazione di equivalenza;

**Falso** è soltanto transitiva

**C.** $Q$ è una relazione transitiva;

**Vero**

**D.** $Q$ è una relazione d'ordine;

**Vero**

## Es 3.

Dimostrare che l'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi è numerabile.

L'insieme $\mathbb{Z}$ si può mettere in relazione biunivoca con $\mathbb{N}$ nel seguente modo

$$\{\dots,(8,-4),(6,-3),(4,-2),(2,-1),(0,0),(1,1),(3,2),(5,3),(7,4),\dots\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$$

## Es 4.

Qual è il più piccolo numero naturale $k$ per cui $n^2 > 2n + 1$, $\forall n \geq k$? Scrivere una dimostrazione per induzione.

con $k = 1$ si ha $1 \not> 3$
con $k = 2$ si ha $4 \not> 5$
con $k = 3$ si ha $9 > 7$ quindi 3 è il caso base.
Passo induttivo $n + 1$:

$$\begin{aligned}(n+1)^2 &= n^2 + 2n + 1 > 2n + 3 \\ &= n^2 + 2n > 2n + 2 \\ &= \underline{n^2} + 2n > \underline{2n + 1} + 1 \\ \text{Per ipotesi induttiva sappiamo che}\quad & n^2 > 2n + 1 \\ \text{puindi rimane da dimostrare che}\quad & 2n > 1 \\ \text{che è banalmente vero perché}\quad & n > 3\end{aligned}$$

## Es 5.

Vero o Falso? (N.B. Le lettere $A, B, C$ variano su proposizioni arbitrarie nel linguaggio della logica proposizionale, non necessariamente distinte).

**A.** $(A \to B), (C \to \neg A), C \vDash \neg B$; **Falso** se C è vera A è falsa, e quindi non c'è nessuna implicazione su B

**B.** Se $A$ è insoddisfacibile allora per ogni $B$ vale $A \vDash B$; **Vero** se la parte sinistra è (sempre) falsa allora la conseguenza logica è vera

**C.** Se $A \wedge \neg B$ è soddisfacibile allora il tableau di $A \to B$ ha qualche ramo aperto; **Falso** se $A \wedge \neg B$ fosse una tautologia (quindi soddisfacibile) il tableau di $A \to B$ sarebbe chiuso

**D.** Esistono $A$ e $B$ tali che $\neg(A \wedge B) \vee (A \to B)$ è insoddisfacibile; **Falso** $\neg(A \wedge B) \vee (A \to B) = \neg A \vee \underline{\neg B} \vee \neg A \vee \underline{B}$ è una tautologia

**E.** Se il tableau di $A$ e il tableau di $B$ hanno entrambi qualche ramo aperto allora il tableau di $A \wedge B$ ha qualche ramo aperto; **Falso** poniamo $A = \neg B$ entrambi soddisfacibili, allora $\neg(A \wedge B)$ sarebbe una tautologia quindi il tableau di $A \wedge B$ sarebbe chiuso

## Es 6.

I seguenti enunciati sono verità logiche: Vero o Falso?

**A.** $\forall x(P(x) \to \neg Q(x)) \to (\forall x \neg P(x) \to \neg \exists x Q(x))$; **Falso** nel caso in cui $P$ è insoddisfacibile e $Q$ è soddisfacibile

**B.** $\exists x(P(x) \to Q(x)) \leftrightarrow (\forall x P(x) \to \exists x Q(x))$; **Vero**

I tableau si trovano in fondo al documento.

## Es 7.

Un linguaggio predicativo adeguato per la teoria degli insiemi è composto da un singolo simbolo di relazione a due posti: $\in$ (che intuitivamente indica l'appartenenza). Tradurre in questo linguaggio predicativo le seguenti proposizioni. Due insiemi coincidono se e soltanto se hanno esattamente gli stessi elementi.

**A.** Esiste l'insieme vuoto.

$\exists X \neg \exists x (x \in X)$
Esiste un insieme $X$ tale che non esiste un elemento $x$ che gli appartenga

**B.** Per ogni coppia di insiemi esiste la loro intersezione.

$\forall X \forall Y \exists Z \forall x ((x \in X \land x \in Y) \leftrightarrow x \in Z)$
Per ogni coppia di insiemi $X$ e $Y$ esiste un insieme $Z$ tale che ogni elemento $x$ che appartiene a entrambi $X$ e $Y$ appartiene anche a $Z$ e viceversa

## Es 8.

Scrivere la definizione di *modello* nella logica predicativa.

Un modello è un'interpretazione che rende vera una formula

## Tableau

$$
\begin{array}{c}
\neg(\forall x (P(x) \to \neg Q(x)) \to (\forall x \neg P(x) \to \neg \exists x Q(x))) \\
| \\
\forall x (P(x) \to \neg Q(x)) \\
| \\
\neg(\forall x \neg P(x) \to \neg \exists x Q(x)) \\
| \\
\forall x \neg P(x) \\
| \\
\exists x Q(x) \\
| \\
Q(a)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
\neg(\exists x (P(x) \to Q(x)) \leftrightarrow (\forall x P(x) \to \exists x Q(x))) \\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c}
\exists x (P(x) \to Q(x)) \\
| \\
\neg(\forall x P(x) \to \exists x Q(x)) \\
| \\
\forall x P(x) \\
| \\
\neg \exists x Q(x) \\
| \\
P(a) \to Q(a) \\
| \\
\neg Q(a) \\
| \\
P(a) \\
\begin{array}{cc}
\neg P(a) & Q(a) \\
| & | \\
\times & \times
\end{array}
\end{array}
&
\begin{array}{c}
\neg \exists x (P(x) \to Q(x)) \\
| \\
\forall x P(x) \to \exists x Q(x) \\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c}
\neg \forall x P(x) \\
| \\
\neg P(b) \\
| \\
\neg(P(b) \to Q(b)) \\
| \\
P(b) \\
| \\
\neg Q(b) \\
| \\
\times
\end{array}
&
\begin{array}{c}
\exists x Q(x) \\
| \\
Q(c) \\
| \\
\neg(P(c) \to Q(c)) \\
| \\
P(c) \\
| \\
\neg Q(c) \\
| \\
\times
\end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}
$$