Metodi Matematici per l'Informatica (secondo canale) — 10 Febbraio 2020

Soluzioni di Andrea Princic. Cartella delle soluzioni.

Es 1. Sia $A = \{2, \{4, 5\}, 4, (5, 1), 3\}$. Allora:

☐$_V$ ☑$_F$ **A.** $\exists x[(x \subset A) \wedge (5 \in x)]$

☑$_V$ ☐$_F$ **B.** $\{5, 4\} \in A$

☑$_V$ ☐$_F$ **C.** $\{3, 4\} \subseteq A$

☐$_V$ ☑$_F$ **D.** $(4, 5) \in A$

Es 2. Siano A e B tali che $A \cup B = B$. Allora sicuramente:

☐$_V$ ☑$_F$ **A.** $A = B$

☑$_V$ ☐$_F$ **B.** $A \subseteq B$

☐$_V$ ☑$_F$ **C.** $A \notin B$

☐$_V$ ☑$_F$ **D.** $A \neq \emptyset$

☐$_V$ ☑$_F$ **E.** A e B hanno la stessa cardinalità

Es 3. La chiusura transitiva della relazione $R = \{(1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 2)\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ è:

☐$_V$ ☑$_F$ **A.** $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

☑$_V$ ☐$_F$ **B.** $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$

☐$_V$ ☑$_F$ **C.** $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 3), (3, 1)\}$

☐$_V$ ☑$_F$ **D.** una relazione di equivalenza su $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

> perché non è riflessiva su $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Es 4. Sia $Q = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, c)\} \subseteq \{a, b, c, d\} \times \{a, b, c, d\}$. Allora:

☐$_V$ ☑$_F$ **A.** Q è una funzione iniettiva

> non è una funzione perché a compare a sinistra di più di una coppia

☐$_V$ ☑$_F$ **B.** Q è una relazione di equivalenza

> non è né riflessiva né simmetrica

☑$_V$ ☐$_F$ **C.** Q è una relazione transitiva

Es 5. Sia dato l'insieme $A = \{a, aa, aaa, aaaa, ...\}$

☐$_V$ ☑$_F$ **A.** $\exists x \in A$ tale che $\forall y \in A$ si ha $\ell(y) \leq \ell(x)$, dove $\ell(x)$ indica la lunghezza di x

> x dovrebbe essere la stringa più lunga di A, che però non ha un massimo

☐$_V$ ☑$_F$ **B.** A non è numerabile

☑$_V$ ☐$_F$ **C.** A è in corrispondenza biunivoca con l'insieme $\{2^k \mid k \in \mathbb{N}\}$

> l'insieme $\{2^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ ha la stessa cardinalità di $\mathbb{N}$

☐$_V$ ☑$_F$ **D.** A contiene un insieme di parole di lunghezza infinita

> A **è** un insieme di parole di lunghezza infinita

Es 6. La relazione $R = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x + y \text{ è pari}\}$ è una relazione di equivalenza? Fornire una giustificazione alla risposta e, nel caso affermativo, indicare l'insieme quoziente della relazione.

L'unico modo per ottenere un numero pari sommando due numeri naturali è se sono entrambi pari o entrambi dispari. Si ha dunque che la relazione è:

- **riflessiva**: $\forall x \in \mathbb{N}$ si ha che $x + x = 2x$ è pari;
- **simmetrica**: $\forall x, y \in \mathbb{N}$ si ha che $x + y = y + x$. Se $x + y$ è pari anche $y + x$ lo è;
- **transitiva**: $\forall x, y, z \in \mathbb{N}$ si ha che se $x + y$ e $y + z$ sono pari, allora anche $x + z$ è pari perché x, y, z devono essere o tutti pari o tutti dispari.

L'insieme quoziente è $\{[0], [1]\}$ perché tutti i numeri con stessa parità stanno in coppia gli uni con gli altri.

Es 7. Dimostrare per induzione che, dato un insieme V di n punti con $n \geq 2$, possiamo collegarli a due a due con $\frac{n(n-1)}{2}$ segmenti distinti.

Caso base: $n = 2$. Due punti si possono collegare con $1 = \frac{2(2-1)}{2}$ segmento.
Passo induttivo: $n + 1$. Sia V un insieme di n punti collegati da $\frac{n(n-1)}{2}$ segmenti. Ora immaginiamo di aggiungere un punto all'insieme V. Quel punto deve essere collegato a tutti gli altri con n nuovi segmenti. Il nuovo numero di segmenti sarà quindi

$$\begin{aligned} \frac{n(n-1)}{2} + n &= \frac{n(n-1) + 2n}{2} \\ &= \frac{n^2 - n + 2n}{2} \\ &= \frac{n^2 + n}{2} \\ &= \frac{(n+1)n}{2} \end{aligned}$$

Es 8. Formalizzare il seguente problema e verificare la correttezza dell'affermazione finale:
Se la Roma ha vinto la partita, allora il Brescia e il Genoa retrocedono. Se almeno uno tra il Brescia e il Genoa retrocede, allora la Sampdoria si salva. Quindi, se la Sampdoria non si salva, allora la Roma non ha vinto la partita.

Usiamo i simboli predicativi

- $V(x) = x$ ha vinto
- $R(x) = x$ retrocede
- $S(x) = x$ si salva

e le variabili r, b, g, s per Roma, Brescia, Genoa e Sampdoria. Allora il problema diventa

$$\begin{gathered} V(r) \to (R(b) \land R(g)) \\ (R(b) \lor R(g)) \to S(s) \\ \neg S(s) \to \neg V(r) \end{gathered}$$

L'affermazione finale è vera: infatti sapendo che $\vDash (A \to B) \leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$ allora possiamo dedurre che

$$\begin{aligned} \neg S(s) &\to \neg(R(b) \lor R(g)) \\ &\to \neg(R(b) \land R(g)) \\ &\to \neg V(r) \end{aligned}$$

Es 9. Decidere se i seguenti enunciati sono validi:

☐$_V$ ☑$_F$ **A.** $(\forall x A(x) \to \forall x B(x)) \to \forall x(A(x) \to B(x))$

con A soddisfacibile ma non tautologia e B insoddisfacibile

☑$_V$ ☐$_F$ **B.** $(\forall x A(x) \to \exists x B(x)) \leftrightarrow \exists x(A(x) \to B(x))$

Es 10. Formalizzare le proposizioni seguenti con enunciati nel linguaggio predicativo $\mathcal{L}$ composto da un simbolo $<$ di relazione a due argomenti (con la sua ovvia interpretazione).

A. $<$ ha un elemento minimo

$\exists x \forall y (x < y)$ "esiste un elemento x che è minore di tutti gli altri"

B. $<$ non ha un elemento massimo

$\neg \exists x \forall y (y < x)$ "non esiste un elemento x che è maggiore di tutti gli altri"

C. $<$ è denso, vale a dire che ogni coppia di elementi nella relazione $<$ possiede un elemento intermedio

$\forall x \forall y (x < y \to \exists z (x < z \land z < y))$

Tableau

- $\neg((\forall x A(x) \to \forall x B(x)) \to \forall x (A(x) \to B(x)))$
- $\forall x A(x) \to \forall x B(x)$
- $\neg \forall x (A(x) \to B(x))$
- $\neg (A(a) \to B(a))$
- $A(a)$
- $\neg B(a)$
  - $\neg \forall x A(x)$
    - $\neg A(b)$
  - $\forall x B(x)$

- $\neg((\forall x A(x) \to \exists x B(x)) \leftrightarrow \exists x (A(x) \to B(x)))$
  - $\forall x A(x) \to \exists x B(x)$
  - $\neg \exists x (A(x) \to B(x))$
    - $\neg \forall x A(x)$
    - $\neg A(a)$
    - $\neg (A(a) \to B(a))$
    - $A(a)$
    - $\neg B(a)$
    - $\times$

    - $\exists x B(x)$
    - $B(b)$
    - $\neg (A(b) \to B(b))$
    - $A(b)$
    - $\neg B(b)$
    - $\times$

  - $\neg (\forall x A(x) \to \exists x B(x))$
  - $\exists x (A(x) \to B(x))$
  - $\forall x A(x)$
  - $\neg \exists x B(x)$
  - $A(c) \to B(c)$
  - $\neg B(c)$
  - $A(c)$
    - $\neg A(c)$
    - $\times$

    - $B(c)$
    - $\times$