Metodi Matematici per l'Informatica (secondo canale)

Soluzioni di: Andrea Princic. Cartella delle soluzioni

22 Gennaio 2019

Es 1.

Sia $A = \{0, (a, 0), (0, b), \{0, 1\}, a, b, \{0\}\}$. Allora

A. A non è un insieme; **Falso**

B. Esistono $x, y, z, t \in A$ (con $x \neq y$) tali che $x \in z$ e $y \in t$; **Falso**

C. A ha quattro elementi; **Falso**

D. Esistono $x, y, z \in A$ tali che $x \in y$ e $y \subseteq z$; **Vero** $x = 0, y = 0, z = 0, 1$

Es 2.

Dato un insieme X indichiamo con 2^X l'insieme delle parti di X. Indichiamo con T l'insieme dei multipli di 3 e con Q l'insieme dei multipli di 4. Allora

A. $2^T \subseteq 2^Q$; **Falso** $\{3\} \notin 2^Q$

B. $2^T \cap 2^Q \neq \emptyset$; **Vero** $\{12\} \in 2^T \cap 2^Q$

C. Q è numerabile; **Vero**

D. 2^Q è numerabile; **Falso** l'insieme delle parti di un insieme infinito non è numerabile

Es 3.

Quali fra le seguenti affermazioni sono corrette?

A. Per ogni insieme $A \neq \emptyset$ la relazione $A \times A$ non è antisimmetrica; **Falso** se A ha un solo elemento

B. Per ogni insieme $A \neq \emptyset$ la relazione $A \times A$ è una relazione di equivalenza; **Vero**

C. Ogni relazione di equivalenza che contenga una coppia (u, v) con $u \neq v$ è esclusivamente riflessiva, simmetrica e transitiva; **Vero** se contiene (u, v) contiene anche (v, u) essendo simmetrica

D. Per ogni relazione R su A esiste una relazione di equivalenza su A che contiene R; **Vero** $A \times A$ contiene tutte le relazioni su A ed è una relazione di equivalenza

Es 4.

Scrivere una relazione di equivalenza $R \subseteq \{a,b,c,d\} \times \{a,b,c,d\}$ che abbia due classi di equivalenza indicandone l'insieme quoziente.

$$(\{a\} \times \{a\}) \cup (\{b,c,d\} \times \{b,c,d\})$$

si mette a in una classe e tutti gli altri elementi in un'altra classe. Questo si può fare con qualunque coppia di sottoinsiemi disgiunti.
L'insieme quoziente è

$$\{[a],[b]\}$$

Es 5.

Dimostrare che, per ogni $n \geq 1$:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Caso base $n = 1$:

$$\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$$

Passo induttivo $n+1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i(i+1)} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= 1 + \frac{-1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= 1 + \frac{-(n+2)}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= 1 + \frac{-n-2+1}{(n+1)(n+2)} \\
&= 1 - \frac{\cancel{n+1}}{\cancel{(n+1)}(n+2)} \\
&= 1 - \frac{1}{n+2}
\end{aligned}$$

Es 6.

Definire il concetto di soddisfacibilità nella logica proposizionale.

Una formula è soddisfacibile se almeno un'interpretazione la verifica.

Es 7.

Le seguenti formule sono tautologie (T), soddisfacibili (S), falsificabili (F) o insoddisfacibili (I)?

1. $\neg\neg A \wedge A$; **S, F**
2. $\neg A \vee \neg\neg A$; **T, S**
3. $\neg(A \vee B) \leftrightarrow (A \wedge \neg B)$; **S, F**
4. $(A \to B) \leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$; **T, S**
5. $(A \wedge \neg A) \to B$; **T, S**

Es 8.

Definire (se possibile) un'interpretazione che verifichi ed una che falsifichi la formula

$$(\exists y P(y) \wedge \exists z Q(z)) \to \exists x (P(x) \wedge Q(x))$$

La formula significa che se esistono y e z (non necessariamente distinti) che soddisfano rispettivamente P e Q, allora esiste una x che soddisfa sia P che Q. Ovviamente la formula non è valida in un caso basilare come ad esempio:
Dominio: $\mathbb{N}$
$P(x) = x$ è pari
$Q(x) = x$ è dispari
Perché esistono y e z distinti uno pari e l'altro dispari, ma non esiste un numero sia pari che dispari.

Un'interpretazione che verifica la formula può essere:
Dominio: $\mathbb{N}$
$P(x) = x$ è multiplo di 3
$Q(x) = x$ è multiplo di 4
Perché esistono y e z che sono rispettivamente multipli di 3 e 4, ed esistono numeri x che sono multipli sia di 3 che di 4.

Es 9.

Formalizzare le proposizioni A, B, C seguenti con enunciati nel linguaggio predicativo $\mathcal{L}$ composto da un simbolo R di relazione a due argomenti e dal simbolo $=$ di identità.

A. R è una relazione di ordine totale.

Una relazione di ordine totale è riflessiva, antisimmetrica e transitiva. Inoltre, per ogni coppia di elementi, si ha che almeno uno dei due è in relazione con l'altro. Ci basta dunque formalizzare queste quattro condizioni e metterle in $\wedge$:

$$\begin{aligned} &\forall x R(x,x) \wedge && \text{(riflessiva)} \\ &\forall x \forall y (R(x,y) \wedge R(y,x) \to x = y) \wedge && \text{(antisimmetrica)} \\ &\forall x \forall y \forall z (R(x,y) \wedge R(y,z) \to R(x,z)) \wedge && \text{(transitiva)} \\ &\forall x \forall y (R(x,y) \vee R(y,x)) && \text{(totale)} \end{aligned}$$

B. R non è una relazione simmetrica.

Basta scrivere la definizione di proprietà simmetrica e poi negarla:

$$\neg \forall x \forall y (R(x,y) \to R(y,x))$$

C. R non ammette minimo.

Basta scrivere la definizione di minimo e poi negarla:

$$\neg \exists x \forall y R(x,y)$$