Metodi Matematici per l'Informatica (secondo canale) — 20 Gennaio 2020

Soluzioni di Andrea Princic. Cartella delle soluzioni.

Es 1. Sia $A = \{2, \{1, 3\}, (3, 5)\}$ e $B = \{(2, 2), 5\}$. Allora:

☐$_V$ ☑$_F$ **A.** $2 \in A \cap B$

$\boxed{A \cap B = \emptyset}$

☐$_V$ ☑$_F$ **B.** $1 \in A \cup B$

$\boxed{A \cup B = \{2, \{1, 3\}, (3, 5), (2, 2), 5\}}$

☑$_V$ ☐$_F$ **C.** $B - A \neq \emptyset$

$\boxed{B - A = B}$

☐$_V$ ☑$_F$ **D.** $\{1, 3\} \subseteq A$

$\boxed{\{1, 3\} \in A}$

☑$_V$ ☐$_F$ **E.** $\exists x, y\ (x \in A \wedge \{(x, y)\} \subseteq B)$

$\boxed{x = y = 2}$

Es 2. Data la relazione $R = \{(1, 2), (6, 7), (2, 3), (5, 6), (3, 4), (8, 9)\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, indichiamo con $\hat{R}$ la sua chiusura transitiva.

$\boxed{\text{Si noti che } \hat{R} = R \cup \{(1, 3), (1, 4), (2, 4), (5, 7)\}}$

☑$_V$ ☐$_F$ **A.** $\hat{R}$ ha 10 elementi

☐$_V$ ☑$_F$ **B.** $\hat{R} = R$

☑$_V$ ☐$_F$ **C.** $R - \hat{R} = \emptyset$

$\boxed{\text{Vale per tutte le chiusure transitive in generale}}$

Es 3. Sia $Q = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3)\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\} \times \{1, 2, 3, 4\}$. Allora

☐$_V$ ☑$_F$ **A.** Q è una funzione iniettiva

☐$_V$ ☑$_F$ **B.** Q è una relazione di equivalenza

☑$_V$ ☐$_F$ **C.** Q è una relazione transitiva

☑$_V$ ☐$_F$ **D.** Q non è una funzione

Es 4. Si consideri la relazione $D = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{N} \wedge a \text{ divide } b\}$.

☐$_V$ ☑$_F$ **A.** D è una relazione d'ordine stretto

$\boxed{\text{Non è antiriflessiva}}$

☑$_V$ ☐$_F$ **B.** D è una relazione d'ordine largo

$\boxed{\text{È riflessiva, antisimmetrica e transitiva}}$

☑$_V$ ☐$_F$ **C.** esiste $x \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $y \in \mathbb{N}$ se $x \neq y$ allora $(x, y) \in D$

$\boxed{x = 1}$

☑$_V$ ☐$_F$ **D.** esiste $x \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $y \in \mathbb{N}$ se $x \neq y$ allora $(y, x) \in D$

$\boxed{x = 0}$

Es 5. Per ogni coppia di insiemi A e B si ha che:

☐$_V$ ☑$_F$ **A.** se A è numerabile allora $A - B$ è numerabile

$A - B$ potrebbe essere finito

☐$_V$ ☑$_F$ **B.** se A e B sono numerabili allora $A - B$ è finito

☐$_V$ ☑$_F$ **C.** se A e B non sono numerabili allora $A \cap B$ non è numerabile

Ad esempio se $A = \mathbb{N} \cup 2^{\mathbb{N}}$ e $B = \mathbb{R}$, allora $A \cap B = \mathbb{N}$

☑$_V$ ☐$_F$ **D.** se A e B sono numerabili allora $A \times B$ è numerabile

Es 6. Sia $\mathbb{P}$ l'insieme dei numeri pari. Scrivere una textbf{relazione di equivalenza} $R \subseteq \mathbb{P} \times \mathbb{P}$ che abbia tre classi di equivalenza, indicandone l'insieme quoziente.

Sia $\hat{\mathbb{P}} = \mathbb{P} - \{0, 2\}$. Allora possiamo definire:

$$R = \{(0,0), (2,2)\} \cup \hat{\mathbb{P}} \times \hat{\mathbb{P}}$$

L'insieme quoziente è $\{[0], [2], [4]\}$ dove $[4] = [a]$ con $a \in \hat{\mathbb{P}}$

Es 7. La successione dei cosiddetti *numeri pentagonali* è definita come segue:

$$f(1) = 1$$
$$f(n+1) = f(n) + 3n + 1$$

Dimostrare che per ogni intero $n \geq 1$ vale $f(n) = \frac{n(3n-1)}{2}$

Caso base $n = 1$:

$$f(1) = 1 = \frac{1(3-1)}{2}$$

Passo induttivo $n + 1$:

$$\begin{aligned} f(n+1) &= f(n) + 3n + 1 \\ &= \frac{n(3n-1)}{2} + 3n + 1 \\ &= \frac{n(3n-1) + 6n + 2}{2} \\ &= \frac{3n^2 + 5n + 2}{2} \\ &= \frac{(n+1)(3n+2)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(3n+3-1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(3(n+1)-1)}{2} \end{aligned}$$

Es 8. Dimostrare che se $\models (A \to B)$ allora $\models ((A \land B) \leftrightarrow A)$ e $\models ((A \lor B) \leftrightarrow B)$

A	B	$P \equiv\ \models (A \to B)$	$F \equiv\ \models ((A \land B) \leftrightarrow A)$	$G \equiv\ \models ((A \lor B) \leftrightarrow B)$	$P \to F \land G$
F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V
V	V	V	V	V	V

Traducendo letteralmente la consegna "se ... allora ... e ..." in $P \to F \land G$

Es 9. Decidere se i seguenti enunciati sono validi:

☐$_V$ ☑$_F$ **A.** $(\forall x\ (A(x) \vee B(x))) \to (\forall x\ A(x) \vee \forall x\ B(x))$

Con $A(x) = x$ è pari e $B(x) = x$ è dispari

☑$_V$ ☐$_F$ **B.** $(\exists x\ A(x) \to \forall x\ B(x)) \to \forall x\ (A(x) \to B(x))$

Es 10. Scrivere un enunciato che distingua fra $(\mathbb{N}, <)$ e $(\mathbb{Z}, <)$, vale a dire per il quale $(\mathbb{N}, <)$ sia un modello, mentre $(\mathbb{Z}, <)$ non lo sia. Usare il linguaggio predicativo con i simboli $=$ e $<$ (con le loro ovvie interpretazioni).

Uso la proprietà di avere minimo: vale per $\mathbb{N}$ ma non per $\mathbb{Z}$.

$$\exists x\ \forall y\ (x < y \vee x = y)$$

Esiste un x $(x = 0)$ che è minore o uguale a tutti gli altri y.

Es 11. Formalizzare i seguenti enunciati, usando simboli predicativi ed una loro opportuna interpretazione:

Usiamo i simboli predicativi $U(x),\ G(x),\ S(x)$ con le loro ovvie interpretazioni.

A. Qualche uomo è un genio

$\exists x\ (U(x) \wedge G(x))$

B. Nessuna scimmia è un uomo

$\neg\exists x\ (S(x) \wedge U(x))$

C. Qualche genio non è una scimmia

$\exists x\ (G(x) \wedge \neg S(x))$

Tableau

$$\neg(\forall x(A(x) \vee B(x)) \to (\forall x A(x) \vee \forall x B(x)))$$

$$\forall x(A(x) \vee B(x))$$

$$\neg(\forall x A(x) \vee \forall x B(x))$$

$$\neg\forall x A(x)$$

$$\neg\forall x B(x)$$

$$\neg B(a)$$

$$\neg A(b)$$

$$A(a) \vee B(a)$$

$$\begin{array}{cc} A(a) & B(a) \\ | & \\ A(a) \vee B(a) & \\ \begin{array}{cc} A(a) & B(a) \end{array} & \end{array}$$

$$\neg((\exists x A(x) \to \forall x B(x)) \to \forall x(A(x) \to B(x)))$$

$$\exists x A(x) \to \forall x B(x)$$

$$\neg\forall x(A(x) \to B(x))$$

$$\neg(A(a) \to B(a))$$

$$A(a)$$

$$\neg B(a)$$

$$\begin{array}{cc} \neg\exists x A(x) & \forall x B(x) \\ | & | \\ \neg A(a) & B(a) \\ | & | \\ \times & \times \end{array}$$