Metodi Matematici per l'Informatica (secondo canale)

Soluzioni di: Andrea Princic. Cartella delle soluzioni

12 Settembre 2018

Es 1.

Scrivere la definizione e fornire un esempio di *relazione di equivalenza* ed illustrare (sull'esempio proposto) i concetti di insieme quoziente e classe di equivalenza.

Una relazione di equivalenza è una relazione con le proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 3), (3, 2)\} \subseteq A \times A$$

La classe di equivalenza di un elemento a è l'insieme di elementi con cui a è in relazione. L'insieme quoziente è l'insieme delle classi di equivalenza.
in questo caso l'insieme quoziente è: $\{[1], [2]\}$ dove $[1] = \{1\}$ e $[2] = \{2, 3\}$

Es 2.

Sia $Q = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, c)\} \subseteq \{a, b, c, d\} \times \{a, b, c, d\}$

A. Q è una funzione iniettiva;

Falso non è nemmeno una funzione perché a compare come primo elemento di più di una coppia, e anche se fosse una funzione non sarebbe iniettiva perché c compare come secondo elemento di due coppie

B. Q è una relazione di equivalenza;

Falso è soltanto transitiva

C. Q è una relazione transitiva;

Vero

D. Q non è una funzione;

Vero

Es 3.

L'insieme di tutti i programmi che si possono scrivere in un linguaggio di programmazione è numerabile? Motivare la risposta.

Sì. Ogni programma che si può scrivere in un linguaggio di programmazione è una stringa finita, e un insieme infinito di stringhe finite è numerabile.
Possiamo anche vedere ogni programma come una sequenza finita di cifre binarie. In questo caso è chiaro che l'insieme di sequenze finite di cifre binarie sia numerabile

Es 4.

Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 0$ un insieme di n elementi ha $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ sottoinsiemi con 3 elementi.

Si deve prima di tutto considerare che ogni insieme di n elementi ha $\frac{n(n-1)}{2}$ sottoinsiemi di 2 elementi.
Caso base $n = 0$: l'insieme vuoto ha 0 sottoinsiemi di 3 elementi.
Passo induttivo $n+1$: supponiamo di avere un insieme di n elementi e di aggiungere un nuovo elemento a questo insieme. Per contare i sottoinsiemi di 3 elementi del nuovo insieme si contano tutti i sottoinsiemi di 3 elementi che c'erano prima e poi si sommano i sottoinsiemi di 2 elementi che aveva prima, in cui ad ognuno è stato aggiunto il nuovo elemento. I sottoinsiemi di 3 elementi dopo aver aggiunto l'$n+1$-esimo elemento saranno quindi:

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{3n(n-1) + n(n-1)(n-2)}{6} = \frac{(n+1)n(n-1)}{6}$$

Es 5.

Vero o Falso? (N.B. Le lettere A, B, C variano su proposizioni arbitrarie nel linguaggio della logica proposizionale, non necessariamente distinte).

A. $(A \to B), (C \to \neg A), C \models \neg B$; **Falso** se C è vera A è falsa, e quindi non c'è nessuna implicazione su B

B. Se A è insoddisfacibile allora per ogni B vale $A \models B$; **Vero** se la parte sinistra è (sempre) falsa allora la conseguenza logica è vera

C. Se $A \wedge \neg B$ è soddisfacibile allora il tableau di $A \to B$ ha qualche ramo aperto; **Falso** se $A \wedge \neg B$ fosse una tautologia (quindi soddisfacibile) il tableau di $A \to B$ sarebbe chiuso

D. Esistono A e B tali che $\neg(A \wedge B) \vee (A \to B)$ è insoddisfacibile; **Falso** $\neg(A \wedge B) \vee (A \to B) = \neg A \vee \underline{\neg B} \vee \neg A \vee \underline{B}$ è una tautologia

E. Se il tableau di A e il tableau di B hanno entrambi qualche ramo aperto allora il tableau di $A \wedge B$ ha qualche ramo aperto; **Falso** poniamo $A = \neg B$ entrambi soddisfacibili, allora $\neg(A \wedge B)$ sarebbe una tautologia quindi il tableau di $A \wedge B$ sarebbe chiuso

Es 6.

I seguenti enunciati sono verità logiche: Vero o Falso?

A. $\forall x(P(x) \to \neg Q(x)) \to (\forall x \neg P(x) \to \neg \exists x Q(x))$; **Falso** nel caso in cui P è insoddisfacibile e Q è soddisfacibile

B. $\exists x(P(x) \to Q(x)) \leftrightarrow (\forall x P(x) \to \exists x Q(x))$; **Vero**

I tableau si trovano in fondo al documento.

Es 7.

Un linguaggio predicativo adeguato per la teoria degli insiemi è composto da un singolo simbolo di relazione a due posti: $\in$ (che intuitivamente indica l'appartenenza). Tradurre in questo linguaggio predicativo le seguenti proposizioni. Due insiemi coincidono se e soltanto se hanno esattamente gli stessi elementi.

A. Esiste l'insieme vuoto.

$\exists X \neg \exists x (x \in X)$
Esiste un insieme X tale che non esiste un elemento x che gli appartenga

B. Per ogni coppia di insiemi esiste la loro intersezione.

> $\forall X \forall Y \exists Z \forall x((x \in X \land x \in Y) \leftrightarrow x \in Z)$
> Per ogni coppia di insiemi X e Y esiste un insieme Z tale che ogni elemento x che appartiene a entrambi X e Y appartiene anche a Z e viceversa

Es 8.

Scrivere la definizione di *modello* nella logica predicativa.

> Un modello è un'interpretazione che rende vera una formula

Tableau

$$\neg(\forall x(P(x) \to \neg Q(x)) \to (\forall x \neg P(x) \to \neg \exists x Q(x)))$$
$$\forall x(P(x) \to \neg Q(x))$$
$$\neg(\forall x \neg P(x) \to \neg \exists x Q(x))$$
$$\forall x \neg P(x)$$
$$\neg\neg \exists x Q(x)$$
$$Q(a)$$

- $\neg(\exists x(P(x) \to Q(x)) \leftrightarrow (\forall x P(x) \to \exists x Q(x)))$
  - $\exists x(P(x) \to Q(x))$ | $\neg(\forall x P(x) \to \exists x Q(x))$ | $\forall x P(x)$ | $\neg \exists x Q(x)$ | $P(a) \to Q(a)$ | $\neg Q(a)$ | $P(a)$
    - $\neg P(a)$ | $\times$
    - $Q(a)$ | $\times$
  - $\neg \exists x(P(x) \to Q(x))$ | $\forall x P(x) \to \exists x Q(x)$
    - $\neg \forall x P(x)$ | $\neg P(b)$ | $\neg(P(b) \to Q(b))$ | $P(b)$ | $\neg Q(b)$ | $\times$
    - $\exists x Q(x)$ | $Q(c)$ | $\neg(P(c) \to Q(c))$ | $P(c)$ | $\neg Q(c)$ | $\times$