

Metodi Matematici per l'Informatica (secondo canale)

Soluzioni di: [Andrea Princic](#). [Cartella delle soluzioni](#)

17 Giugno 2019

Es 1.

Per ogni tripla di insiemi A, B e C tali che $A - B = C$:

A. se $A \cap B \neq \emptyset$ allora $C \subset A$;

Vero C contiene tutti gli elementi di A esclusi quelli di B . Visto che $A \cap B$ non è vuoto, ci sono alcuni elementi di A che non sono presenti in C , quindi $C \subsetneq A$

B. $C \cup (B - A) = A \cup B$;

Falso

$$\begin{aligned} C \cup (B - A) &= (A - B) \cup (B - A) \\ &= (A \cup B) - (A \cap B) \\ &\neq A \cup B \end{aligned}$$

Vero nel caso in cui $A \cap B = \emptyset$

Es 2.

Dato un insieme X indichiamo con 2^X l'insieme delle parti di X .

A. Una funzione iniettiva da A in B è un sottoinsieme di $A \times B$;

Vero le funzioni sono un tipo particolare di relazioni, quindi sono sottoinsiemi del prodotto cartesiano

B. L'insieme di tutte le funzioni da A in B è un sottoinsieme di $2^{A \times B}$;

Vero per lo stesso motivo di cui sopra

Es 3.

Dimostrare che per ogni $n \geq 2$ si ha

$$\sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1-x^n}{1-x}$$

dove x è un numero reale.

Caso base $n = 2$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^1 x^k &= 1 + x \\ &= \frac{(1+x)(1-x)}{1-x} \\ &= \frac{1-x^2}{1-x}\end{aligned}$$

Passo induttivo $n + 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n x^k &= \sum_{k=0}^{n-1} x^k + x^n \\ &= \frac{1-x^n}{1-x} + x^n \\ &= \frac{1-x^n + x^n(1-x)}{1-x} \\ &= \frac{\cancel{1-x^n} + \cancel{x^n} - x^{n+1}}{1-x} \\ &= \frac{1-x^{n+1}}{1-x}\end{aligned}$$

Es 4.

Scrivere la definizione di *numerabilità* di un insieme e fare un esempio.

Un insieme è numerabile se può essere messo in corrispondenza biunivoca con \mathbb{N} . Ad esempio l'insieme \mathbb{P} dei numeri pari è numerabile con la seguente relazione

$$\{(n, p) \mid n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{P}, p = 2n\} = \{(0, 0), (1, 2), (2, 4), (3, 6), \dots\}$$

Es 5.

Definire il concetto di *interpretazione* nella logica predicativa.

Interpretare significa dare un significato ad ogni predicato e scegliere un dominio

Es 6.

Vero o Falso? (N.B. Le lettere A, B, C variano su proposizioni arbitrarie nel linguaggio della logica proposizionale, non necessariamente distinte).

- A. Se $A \models B \vee C$ e $B \models \neg C$ allora $(A \rightarrow C) \models \neg B$;

Falso nel caso in cui $A = F$ e $B = V$

- B. Se $A \wedge \neg B$ è soddisfacibile allora $A \rightarrow B$ è insoddisfacibile;

Falso perché $A \rightarrow B = \neg A \vee B = \neg(A \wedge \neg B)$ e il fatto che $A \wedge \neg B$ sia soddisfacibile non implica che la sua negazione non lo possa essere

Es 7.

L'enunciato seguente è una tautologia?

- A. $\exists x(A(x) \rightarrow \neg B(x)) \rightarrow \neg \forall x(B(x) \rightarrow A(x))$;

Falso si può scrivere anche

$$\exists x(\neg A(x) \vee \neg B(x)) \rightarrow \exists x(B(x) \wedge \neg A(x))$$

che è falso nel caso in cui A e B siano insoddisfacibili

Il tableau si trova in fondo al documento.

Es 8.

Formalizzare la proposizione seguente con un enunciato nel linguaggio predicativo \mathcal{L} composto da un simbolo \in di relazione binaria.

- A. Ogni insieme X è sottoinsieme di un qualche insieme Y .

$$\forall X \exists Y \forall x (x \in X \rightarrow x \in Y)$$

Tableau

$$\begin{array}{c} \neg(\exists x(A(x) \rightarrow \neg B(x)) \rightarrow \neg \forall x(B(x) \rightarrow A(x))) \\ | \\ \exists x(A(x) \rightarrow \neg B(x)) \\ | \\ \forall x(B(x) \rightarrow A(x)) \\ | \\ A(a) \rightarrow \neg B(a) \\ | \\ B(a) \rightarrow A(a) \end{array}$$