Metodi Matematici per l'Informatica (secondo canale) — 15 Gennaio 2025

Soluzioni di Andrea Princic. Cartella delle soluzioni.

Es 1. Dato un insieme X, indichiamo con $\mathcal{P}(X)$ l'insieme delle parti di X. Sia A = {2, {4, 5}, {4}, 4}. Allora:

☐$_V$ ☑$_F$ **A.** $\{5,4\} \in \mathcal{P}(A)$

☑$_V$ ☐$_F$ **B.** $\{2,4\} \in \mathcal{P}(A)$

☑$_V$ ☐$_F$ **C.** $\{\{4\}\} \subseteq \mathcal{P}(A)$

Es 2. Data una relazione binaria R su un insieme A, indichiamo con $\hat{R}$ la relazione:

$$\hat{R} = R \cup \{(a,b) \mid \{(a,c),(c,b)\} \subseteq R\}$$

Allora:

Si noti che la definizione di $\hat{R}$ è la stessa di chiusura transitiva

☐$_V$ ☑$_F$ **A.** R è riflessiva se e solo se lo è $\hat{R}$

Si prenda $A = \{1,2\}$ e $R = \{(1,2),(2,1)\}$. Allora $\hat{R} = R \cup \{(1,1),(2,2)\}$. R non è riflessiva ma $\hat{R}$ sì.

☐$_V$ ☑$_F$ **B.** R è simmetrica se e solo se lo è $\hat{R}$

Si prenda $A = \{1,2,3\}$ e $R = \{(1,2),(3,1),(2,3)\}$. Allora $\hat{R} = R \cup \{(2,1),(1,3),(3,2),(1,1),(2,2),(3,3)\}$.
R non è simmetrica ma $\hat{R}$ sì.

☐$_V$ ☑$_F$ **C.** R è transitiva se e solo se lo è $\hat{R}$

La chiusura transitiva serve proprio quando R non è transitiva ma la sua chiusura ($\hat{R}$) ovviamente lo è

Es 3. Scrivere l'insieme delle parti di $A = \{1,7,\{7\}\}$.

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{7\}, \{\{7\}\}, \{1,7\}, \{1,\{7\}\}, \{7,\{7\}\}, A\}$$

Es 4. Sia $\mathbb{Z}$ l'insieme dei numeri interi. L'insieme $A = \{y \in \mathbb{Z} \mid x \in \mathbb{Z} \wedge y = 3 - 2x\}$ è numerabile?

Sì perché $y = 3 - 2x$ si può scrivere anche $y = -2x + 3$ che è l'equazione di una retta, e una retta crea una corrispondenza biunivoca tra una sola x e una sola y.

Es 5. Sia D l'insieme dei numeri dispari. Dimostrare per induzione che $\forall n \in D,\ n^3$ è dispari.

Caso base $n = 1$:

$$1^3 = 1 \text{ che è dispari}$$

Passo induttivo $n > 1$:

$$(n+2)^3 = n^3 + 6n^2 + 12n + 8$$

Per ipotesi induttiva n^3 è dispari, mentre $6n^2$, $12n$, e 8 sono pari quindi $6n^2 + 12n + 8$ è pari ma sommandolo a n^3 che è dispari il risultato è dispari.

Es 6. Le seguenti formule sono tautologie (**T**), soddisfacibili (**S**), falsificabili (**F**) o insoddisfacibili (**I**)?

T	S	F	I	
☐	☑	☑	☐	$(A \lor B) \to B$
☑	☑	☐	☐	$B \to (A \lor B)$
☐	☐	☑	☑	$\neg(A \lor B) \leftrightarrow (\neg A \to B)$
☑	☑	☐	☐	$(A \land (B \lor C)) \to ((A \land B) \lor (A \land C))$
☑	☑	☐	☐	$(A \leftrightarrow B) \to (\neg A \lor B)$

Es 7. Se so che $A \to B$ ha valore **Vero**, che cosa posso concludere del valore di verità delle proposizioni seguenti?

Vero	Falso	Vero/Falso	
☑	☐	☐	$(A \lor C) \to (B \lor C)$
☑	☐	☐	$(A \land C) \to (B \land C)$
☐	☐	☑	$(\neg A \land B) \leftrightarrow (A \lor B)$

Es 8. Per ognuno degli enunciati seguenti descrivere una interpretazione in cui l'enunciato è vero e una in cui è falso.

A. $\forall x\ \exists y\ A(x, y) \to \forall x\ \exists y\ A(y, x)$

Vero:
Dominio: qualunque
$A(x, y)$ = Vero

Falso:
Dominio: $\mathbb{N}$
$A(x, y) = x$ è la metà di y

B. $\forall x\ B(x) \lor \forall x\ \neg B(x)$

Vero:
Dominio: qualunque
$B(x)$ = Vero

Falso:
Dominio: $\mathbb{N}$
$B(x) = x$ è dispari

Es 9. "Una propretà P verificata dai multipli di 3 e di 5 è verificata anche dai multipli di 30". Scrivere quest'affermazione nel linguaggio della logica predicativa e motivare la sua validità.

Siano:
Dominio: insieme delle proprietà dei numeri naturali
$V_i(p)$ = la proprietà p è verificata dai multipli di i
Allora l'affermazione "Una propretà P verificata dai multipli di 3 e di 5 è verificata anche dai multipli di 30" può essere espressa come:

$$\forall p\ ((V_3(p) \land V_5(p)) \to V_{30}(p))$$

L'affermazione è valida perché 30 è multiplo sia di 3 che di 5, quindi qualunque multiplo di 30 è anche multiplo sia di 3 che di 5