Metodi Matematici per l'Informatica (secondo canale) — 13 Febbraio 2024

Soluzioni di Andrea Princic. Cartella delle soluzioni.

Es 1.

Es 2. Sia R una relazione riflessiva su A che ha anche la proprietà: $a, b, c \in A$ se $(a, b) \in R$ e $(a, c) \in R$ allora $(b, c) \in R$

☐$_V$ ☑$_F$ **A.** R non è sempre transitiva

☐$_V$ ☑$_F$ **B.** R non è sempre simmetrica

☑$_V$ ☐$_F$ **C.** R è una relazione di equivalenza

Sia **P** la proprietà per cui $\forall a, b, c \in A$ se $(a, b) \in R$ e $(a, c) \in R$ allora $(b, c) \in R$

Introduzione Si può dimostrare che qualunque relazione riflessiva che soddisfi **P** è anche transitiva e simmetrica, e quindi è una relazione di equivalenza. Per farlo partiamo da una relazione di equivalenza e cominciamo ad aggiungere coppie in modo che le proprietà simmetrica e transitiva non valgano più. Vedremo che graze a **P** possiamo tornare a una relazione di equivalenza.

Proprietà riflessiva Partiamo da qualunque insieme A e prendiamo la relazione formata dalle sole coppie del tipo (a, a) per ogni $a \in A$. Questa relazione è riflessiva, è una relazione di equivalenza e soddisfa **P**.

Proprietà simmetrica Ora cominciamo ad aggiungere coppie in modo che la proprietà simmetrica non sia più rispettata. Aggiungiamo prima una coppia (a, b) con $a, b \in A$ e $a \neq b$ così che la relazione non sia più simmetrica. Ora applichiamo la proprietà **P** usando le coppie (a, b) e (a, a), il che ci porta ad aggiungere la coppia (b, a) ristabilendo la proprietà simmetrica. Questo ragionamento può essere fatto con qualunque nuova coppia aggiunta.

Proprietà transitiva Ci troviamo ora in una situazione in cui la relazione è riflessiva e simmetrica. Assumiamo che non sia transitiva e prendiamo quindi due coppie $(a, b), (b, c) \in R$ tali che $(a, c) \notin R$. Dato che la relazione è simmetrica sappiamo che $(b, a) \in R$ e $(c, b) \in R$. Dato che la relazione deve rispettare **P** possiamo applicare la proprietà **P** a (b, a) e (b, c) per ottenere $(a, c) \in R$.

Es 3. Quante sono le funzioni $f : \{a, b, c, d\} \to \{1, 2, 3, 4\}$? Quante sono suriettive? Quante sono iniettive? Quante sono biiettive?

Le funzioni $f : \{a, b, c, d\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ sono 4^4.
Visto che dominio e codominio hanno lo stesso numero di elementi, tutte le funzioni iniettive sono anche suriettive e viceversa, e sono quindi anche biiettive. Il numero di queste funzioni è $4!$

Es 4. Sia R una relazione d'ordine sull'insieme A e sia S una relazione di equivalenza su A

☑$_V$ ☐$_F$ **A.** $R \cap S$ è transitiva

☐$_V$ ☑$_F$ **B.** $R \cup S$ è una relazione di equivalenza

☐$_V$ ☑$_F$ **C.** $R - S$ è riflessiva

Es 5. Sia R una relazione su $A \times A$ con $A = \{1,2,3,4,5\}$. Data la relazione $\hat{R} = \{(1,2),(1,3),(2,3),(4,4),(5,5),(4,5),(5,4)\}$, trovare la più piccola relazione R tale che $\hat{R}$ sia la sua chiusura transitiva.

$$R = \{(1,2),(2,3),(4,5),(5,4)\}$$

Per arrivare alla soluzione si può prendere ogni coppia in $\hat{R}$, rimuoverla, e valutare se sia possibile ottenerla di nuovo con le coppie rimanenti. Se non è possibile, la coppia va tenuta in R.
Le coppie $(4,4)$ e $(5,5)$ si possono ottenere applicando la proprietà transitiva a $(4,5)$ e $(5,4)$, mentre non è vero il contrario. Quindi possiamo rimuovere $(4,4)$ e $(5,5)$ da $\hat{R}$, ma dobbiamo lasciare $(4,5)$ e $(5,4)$.
Le coppie $(1,2)$ e $(2,3)$ non si possono ottenere dalle altre coppie, quindi vanno tenute in R. La coppia $(1,3)$, invece, si può ottenere applicando la proprietà transitiva a $(1,2)$ e $(2,3)$, quindi può essere rimossa.

Es 6. Dimostrare per induzione la seguente proposizione: Per ogni $n \geqslant 1$

$$(n+1)^2 - (n-1)^2 = 4n$$

Caso base $n = 1$:

$$2^2 - 0^2 = 4$$

Passo induttivo $n+1$:

$$\begin{aligned}
(n+2)^2 - n^2 &= n^2 + 4n + 4 - n^2 \\
&= n^2 + 2n + 2n + 4 - n^2 + 1 - 1 \\
&= (n^2 + 2n + 1) - (n^2 - 2n + 1) + 4 \\
&= (n+1)^2 - (n-1)^2 + 4 \\
&= 4n + 4
\end{aligned}$$

Es 7. La seguente proposizione è una tautologia?

☑ $_V$ ☐ $_F$ **A.** $((a \to (b \wedge d)) \wedge ((c \vee d) \to e) \wedge ((b \wedge e) \to f)) \to (a \to f)$

Es 8. Vero o Falso?

☑ $_V$ ☐ $_F$ **A.** $(\exists x P(x)) \to (\exists x Q(x)) \vDash (\exists x (P(x) \to Q(x)))$

Basta fare il tableau trattando il $\vDash$ come un'implicazione

Es 9. Si esprimano le premesse:

(a) Ogni numero primo è un numero irriducibile

(b) 24 non è un numero primo

in un opportuno linguaggio della logica dei predicati e si stabilisca, motivando la risposta, se è corretto trarne la deduzione che

(c) 24 non è un numero irriducibile

Siano $P(x)$ e $I(x)$ rispettivamente le proposizioni "x è un numero primo" e "x è un numero irriducibile".

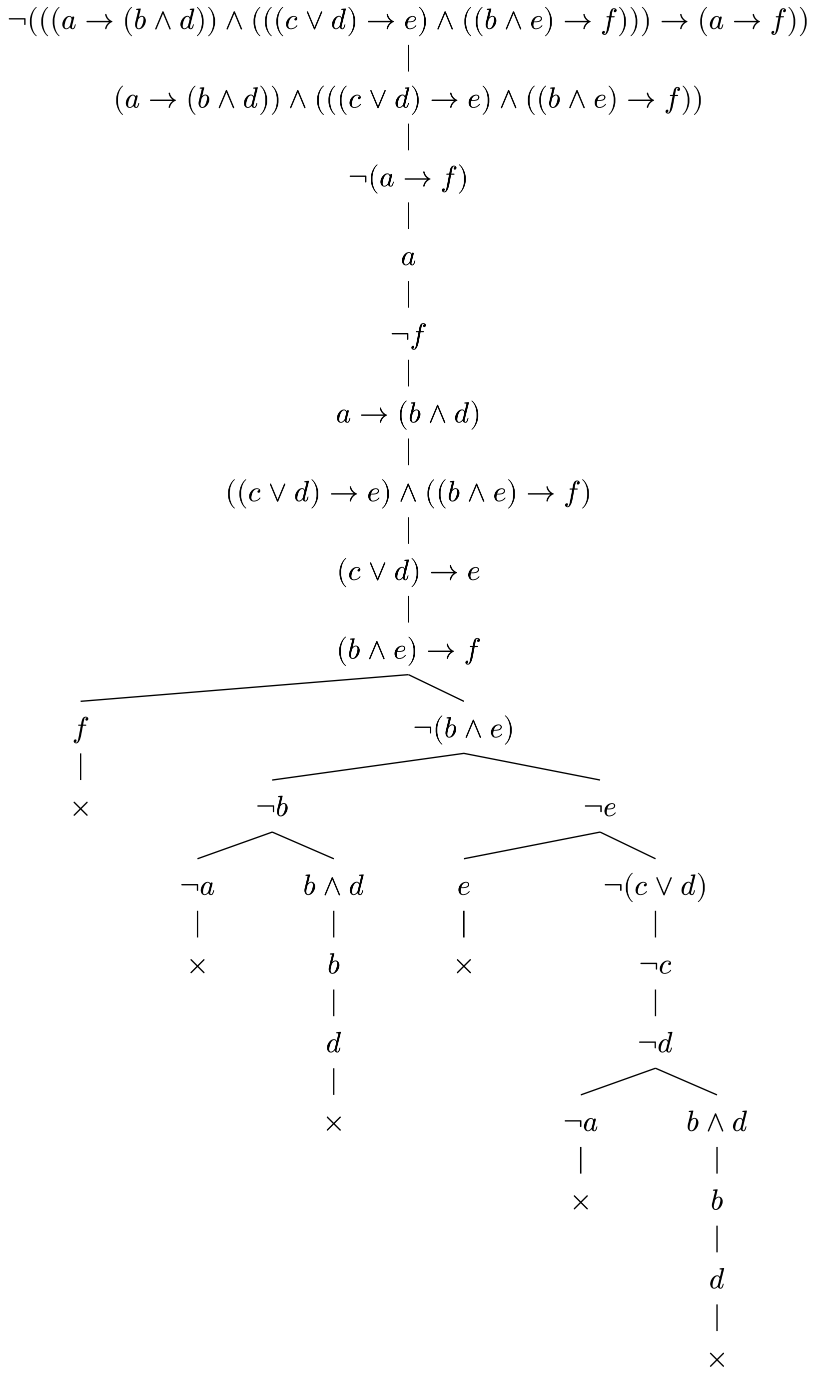
(a) $\forall x(P(x) \to I(x))$

(b) $\neg P(24)$

(c) $\neg I(24)$

La deduzione non è corretta in quanto da una premessa del tipo $A \to B$ si può dedurre solo $\neg B \to \neg A$ e non $\neg A \to \neg B$. La premessa **(a)** ci dice che ogni numero primo è irriducibile, ma non che ogni numero irriducibile è per forza anche primo. Basandoci su queste informazioni risulta infatti che $P(24) \to I(24)$ è vero indipendentemente da $I(24)$ dal momento che $P(24)$ è falso per **(b)**. Non possiamo quindi fare nessuna deduzione su $I(24)$.

Tableau


$\neg(((a \to (b \wedge d)) \wedge (((c \vee d) \to e) \wedge ((b \wedge e) \to f))) \to (a \to f))$
$(a \to (b \wedge d)) \wedge (((c \vee d) \to e) \wedge ((b \wedge e) \to f))$
$\neg(a \to f)$
a
$\neg f$
$a \to (b \wedge d)$
$((c \vee d) \to e) \wedge ((b \wedge e) \to f)$
$(c \vee d) \to e$
$(b \wedge e) \to f$
f
$\neg(b \wedge e)$
$\times$
$\neg b$
$\neg e$
$\neg a$
$b \wedge d$
e
$\neg(c \vee d)$
$\times$
b
$\times$
$\neg c$
d
$\neg d$
$\times$
$\neg a$
$b \wedge d$
$\times$
b
d
$\times$

$$\neg((\exists x P(x)) \to (\exists x Q(x)) \vDash (\exists x (P(x) \to Q(x))))$$

$$|$$

$$\exists x P(x) \to \exists x Q(x)$$

$$|$$

$$\neg \exists x (P(x) \to Q(x))$$

$$|$$

$$\neg (P(a) \to Q(a))$$

$$|$$

$$P(a)$$

$$|$$

$$\neg Q(a)$$

$$\begin{array}{cc}
\diagup & \diagdown \\
\neg \exists x P(x) & \exists x Q(x) \\
| & | \\
\neg P(a) & Q(b) \\
| & | \\
\times & \neg (P(b) \to Q(b)) \\
 & | \\
 & P(b) \\
 & | \\
 & \neg Q(b) \\
 & | \\
 & \times
\end{array}$$