# Metodi Matematici per l'Informatica (secondo canale) — 12 Febbraio 2019

Soluzioni di Andrea Princic. Cartella delle soluzioni.

**Es 1.** Per ogni tripla di insiemi $A, B$ e $C$ tali che $A - B = C$ si ha:

☐$_V$ ☑$_F$ **A.** $C \neq \emptyset$

se $A \subseteq B$

☐$_V$ ☑$_F$ **B.** $C \cup A = B$

$C \cup A = A$

☑$_V$ ☐$_F$ **C.** $C \subseteq A$

**Es 2.** Per ogni coppia di insiemi $A$ e $B$ si ha che:

☐$_V$ ☑$_F$ **A.** se $A$ è numerabile allora $A - B$ è numerabile

$A - B$ potrebbe essere finito o vuoto

☐$_V$ ☑$_F$ **B.** se $A$ e $B$ non sono numerabili allora $A \cap B$ non è numerabile

Ad esempio se $A = \mathbb{N} \cup 2^{\mathbb{N}}$ e $B = \mathbb{R}$, allora $A \cap B = \mathbb{N}$

☑$_V$ ☐$_F$ **C.** se $A$ e $B$ sono numerabili allora $A \times B$ è numerabile

**Es 3.** Si consideri la relazione $D = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{N} \wedge a \text{ divide } b\}$.

☐$_V$ ☑$_F$ **A.** $D$ è una relazione d'ordine stretto

Non è antiriflessiva

☑$_V$ ☐$_F$ **B.** $D$ è una relazione d'ordine largo

È riflessiva, antisimmetrica e transitiva

☑$_V$ ☐$_F$ **C.** esiste $x \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $y \in \mathbb{N}$ se $x \neq y$ allora $(y, x) \in D$

$x = 0$

**Es 4.** Scrivere una relazione di ordine stretto sull'insieme $A = \{P, L, M, G\}$

$$\{(P, L), (P, M), (P, G), (L, M), (L, G), (M, G)\}$$

**Es 5.** Scrivere la definizione di *chiusura simmetrica* di una relazione.

La chiusura simmetrica di una relazione $R \subseteq A \times A$ è la più piccola relazione simmetrica $\hat{R}$ tale che $R \subseteq \hat{R} \subseteq A \times A$

**Es 6.** Sia $x$ un numero reale. Dimostrare che per ogni $n \geq 2$ si ha

$$(1-x)\sum_{k=0}^{n-1} x^k = 1 - x^n$$

Caso base $n = 2$:

$$(1-x)\sum_{k=0}^{1} x^k = (1-x)(1+x) = 1 - x^2$$

Passo induttivo $n+1$:

$$\begin{aligned}(1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k &= (1-x)\sum_{k=0}^{n-1} x^k + (1-x)x^n \\ &= 1 - x^n + (1-x)x^n \\ &= 1 - \cancel{x^n} + \cancel{x^n} - x^{n+1} \\ &= 1 - x^{n+1}\end{aligned}$$

**Es 7.** Definire il concetto di *modello* nella logica predicativa.

Un modello è un'interpretazione che rende vera una formula

**Es 8.** Vero o Falso? (N.B. Le lettere $A, B, C, p_1, p_2, p_3$ variano su proposizioni arbitrarie nel linguaggio della logica proposizionale, non necessariamente distinte).

☑$_V$ ☐$_F$ **A.** $((p_1 \wedge \neg p_2) \vee (\neg p_3 \wedge p_2) \vee (\neg p_1 \vee p_3))$ è una tautologia

Basta fare la tavola di verità

☐$_V$ ☑$_F$ **B.** Se $A \vDash B \vee C$ e $B \vDash \neg C$ allora $(A \to C) \vDash \neg B$

| $A$ | $B$ | $C$ | $A \vDash B \vee C$ | $B \vDash \neg C$ | $(A \to C) \vDash \neg B$ | risultato |
|---|---|---|---|---|---|---|
| F | F | F | V | V | V | V |
| F | F | V | V | V | V | V |
| F | V | F | V | V | F | F |
| F | V | V | V | F | F | V |
| V | F | F | F | V | V | V |
| V | F | V | V | V | V | V |
| V | V | F | V | V | V | V |
| V | V | V | V | F | F | V |

Il risultato è dato da $(A \vDash B \vee C) \wedge (B \vDash \neg C) \to ((A \to C) \vDash \neg B)$. Il simbolo $\vDash$ viene trattato allo stesso modo di $\to$ nella tavola di verità.

☐$_V$ ☑$_F$ **C.** Se $A \wedge \neg B$ è soddisfacibile allora $A \to B$ è insoddisfacibile

perché $A \to B = \neg A \vee B = \neg(A \wedge \neg B)$ e il fatto che $A \wedge \neg B$ sia soddisfacibile non implica che la sua negazione non lo possa essere.

☐$_V$ ☑$_F$ **D.** Se esiste $B$ tale che il tableau di $B \wedge \neg A$ ha tutti i rami chiusi allora $A$ è una tautologia

il fatto che $B \wedge \neg A$ abbia tutti i rami chiusi significa che $\neg B \vee A$ è una tautologia, ma questo non significa che anche $A$ debba esserlo

**Es 9.** L'enunciato seguente è una tautologia?

☐$_V$ ☑$_F$ **A.** $\exists x \forall y (A(y) \to \neg B(x))$

Quando $A$ e $B$ sono entrambe tautologie nel dominio

☑$_V$ ☐$_F$ **B.** $\exists y (\neg \exists x \neg A(x) \vee \neg A(y))$

Si può interpretare così: esiste una $y$ per la quale $A$ è falsa, oppure non esiste nessuna $x$ per la quale è falsa. Questo ovviamente è vero perché o $A$ è falsa per qualche $y$ oppure è vera per tutte le $x$

**Es 10.** Formalizzare le proposizioni seguenti con enunciati nel linguaggio predicativo $\mathcal{L}$ composto da un simbolo $<$ di relazione a due argomenti (con la sua ovvia interpretazione).

**A.** La relazione $<$ ha un elemento minimo

$\exists x\ \forall y (x < y)$ "esiste un elemento $x$ che è minore di tutti gli altri"

**B.** La relazione $<$ non ha un elemento massimo

$\neg \exists\ x \forall y (y < x)$ "non esiste un elemento $x$ che è maggiore di tutti gli altri"

**C.** La relazione $<$ è densa, vale a dire che ogni coppia di elementi nella relazione $<$ possiede un elemento intermedio

$\forall x\ \forall y (x < y \to \exists z (x < z \wedge z < y))$

## Tableau

$$\neg\exists x\forall y(A(y) \to \neg B(x))$$
$$|$$
$$\neg\forall y(A(y) \to \neg B(a))$$
$$|$$
$$\neg(A(b) \to \neg B(a))$$
$$|$$
$$A(b)$$
$$|$$
$$B(a)$$

$$\neg\exists y(\neg\exists x\neg A(x) \vee \neg A(y))$$
$$|$$
$$\neg(\neg\exists x\neg A(x) \vee \neg A(a))$$
$$|$$
$$\exists x\neg A(x)$$
$$|$$
$$A(a)$$
$$|$$
$$\neg A(b)$$
$$|$$
$$\neg(\neg\exists x\neg A(x) \vee \neg A(b))$$
$$|$$
$$\exists x\neg A(x)$$
$$|$$
$$A(b)$$
$$|$$
$$\times$$