Metodi Matematici per l'Informatica (secondo canale) — 16 Luglio 2024

Soluzioni di Andrea Princic. Cartella delle soluzioni.

Es 1. Indichiamo con $P(A)$ l'insieme dei sottoinsiemi di un insieme A con $X, Y \in P(A)$. Allora:

☑$_V$ ☐$_F$ **A.** se $\emptyset \in A$ allora $\emptyset \in P(A)$;

Per ogni insieme A vale che $\emptyset \in P(A)$

☐$_V$ ☑$_F$ **B.** se $\emptyset \in P(A)$ allora $\emptyset \in A$

Per lo stesso motivo di sopra

☑$_V$ ☐$_F$ **C.** $(X \cup Y) \cap X = X$

☑$_V$ ☐$_F$ **D.** $(X \cap Y) \cup X = X$

☑$_V$ ☐$_F$ **E.** se $A \subseteq P(A)$ allora $A = \emptyset$

Es 2. Sia $R \subseteq A \times A$ una relazione simmetrica e antisimmetrica. Allora

☐$_V$ ☑$_F$ **A.** non può esistere una tale R

☐$_V$ ☑$_F$ **B.** $R = A \times A$

☐$_V$ ☑$_F$ **C.** R è necessariamente anche antiriflessiva

☑$_V$ ☐$_F$ **D.** se per ogni $x \in A$ esiste y tale che $(x, y) \in R$ allora R è un'equivalenza

Per simmetria: se per ogni x esiste y tale che $(x, y) \in R$ allora $(y, x) \in R$.
Per antisimmetria: $(x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \to x = y$ quindi la relazione è anche riflessiva.
Ne deriva una relazione del tipo $\{(x, x) \mid \forall x \in A\}$, quindi una relazione di equivalenza.

Es 3. L'insieme $\{(x, y) \mid x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}, 3x + y = 4\}$ è una funzione da $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$?

Sì. La formula $3x + y = 4$ si può scrivere anche $y = 4 - 3x$ che è l'equazione di una retta. Tutti e soli i punti del piano $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ in cui passa questa retta sono elementi dell'insieme sopra definito. L'insieme è dunque una funzione biiettiva da $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$.

Es 4. **L'unione di una quantità numerabile di insiemi numerabili è numerabile.** Sostanziare questa affermazione con un esempio.

Sia $\mathbb{N}_p$ l'insieme dei numeri naturali multipli di p dove p è un numero primo. Per ogni p abbiamo che $\mathbb{N}_p$ è numerabile ed esiste una quantità numerabile di questi insiemi, uno per ogni numero primo, tutti distinti. L'unione di tutti questi insiemi è chiaramente uguale a $\mathbb{N} - \{0, 1\}$, che è numerabile.

$$\bigcup_p \mathbb{N}_p = \mathbb{N} - \{0, 1\}$$

Es 5. Dimostrare usando il Principio di Induzione la seguente proposizione: per ogni $n > 0$, $(n+1)^2 - (n-1)^2 = 4n$.

Caso base $n = 1$:

$$4 - 0 = 4$$

Passo induttivo $n + 1$:

$$\begin{aligned}((n+1)+1)^2 - ((n-1)+1)^2 &= \underline{(n+1)^2} + 1 + 2(n+1)\underline{-(n-1)^2} - 1 - 2(n-1)\\ &= \underline{4n} + 1 + 2(n+1) - 1 - 2(n-1)\\ &= 4n + 1 + 2n + 2 - 1 - 2n + 2\\ &= 4n + 4\\ &= 4(n+1)\end{aligned}$$

Es 6. Consideriamo la seguente proposizione: $p \oplus (q \to (p \otimes q))$.
Per quale scelta di connettivi da sostituire a $\oplus$ e $\otimes$ la proposizione risultate è una tautologia?

Le sostituzioni seguenti sono alcune soluzioni valide:

$$\begin{aligned}p \lor (q \to (p \lor q)) &= p \lor (\neg q \lor (p \lor q))\\ &= p \lor \neg q \lor p \lor q\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p \to (q \to (p \lor q)) &= \neg p \lor (\neg q \lor (p \lor q))\\ &= \neg p \lor \neg q \lor p \lor q\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p \to (q \to (p \land q)) &= \neg p \lor (\neg q \lor (p \land q))\\ &= \neg p \lor \neg q \lor (p \land q)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p \to (q \to (p \to q)) &= \neg p \lor (\neg q \lor (\neg p \lor q))\\ &= \neg p \lor \neg q \lor \neg p \lor q\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p \to (q \to (p \leftrightarrow q)) &= \neg p \lor (\neg q \lor (p \leftrightarrow q))\\ &= \neg p \lor \neg q \lor (p \leftrightarrow q)\end{aligned}$$

Es 7. La formula seguente è una tautologia?

☐$_V$ ☑$_F$ **A.** $(\exists x P(x) \to \exists x Q(x)) \leftrightarrow \exists x (P(x) \to Q(x))$

È falsa quando P è soddisfacibile ma non tautologia e Q è insoddisfacibile. In tale situazione si avrebbe infatti che la parte destra è vera ma la parte sinistra è falsa.

Es 8. Si esprimano le premesse:

a. Tutti coloro che devono prendere il treno e sono in ritardo devono correre.
b. Paolo deve prendere il treno
c. Paolo non è in ritardo

in un opportuno linguaggio della logica predicativa e si stabilisca se è corretto dedurne che

d. Paolo non deve correre

Si utilizza il seguente linguaggio della logica predicativa con una variabile e tre simboli unari:

- $p =$ Paolo
- $T(x) = x$ deve prendere il treno
- $R(x) = x$ è in ritardo
- $C(x) = x$ deve correre

a. $\forall x(T(x) \land R(x)) \to C(x)$
b. $T(p)$
c. $\neg R(p)$
d. $\neg C(p)$

Non è corretto dedurre che Paolo non debba correre perché, nonostante Paolo non sia in ritardo, questo non significa che lui non debba comunque correre per altri motivi. Sarebbe invece stato corretto dedurlo se (a.) fosse stata “tutti e soli coloro che devono prendere il treno e sono in ritardo devono correre”

Tableau

$\neg((\exists x P(x) \to \exists x Q(x)) \leftrightarrow \exists x(P(x) \to Q(x)))$

- $\neg(\exists x P(x) \to \exists x Q(x)) \wedge \exists x(P(x) \to Q(x))$
  - $\neg(\exists x P(x) \to \exists x Q(x))$
  - $\exists x(P(x) \to Q(x))$
  - $\exists x P(x)$
  - $\neg \exists x Q(x)$
  - $P(c)$
  - $P(d) \to Q(d)$
  - $\neg Q(a)$
    - $\neg P(d)$
      - $\neg Q(a)$
    - $Q(d)$
- $(\exists x P(x) \to \exists x Q(x)) \wedge \neg \exists x(P(x) \to Q(x))$
  - $\exists x P(x) \to \exists x Q(x)$
  - $\neg \exists x(P(x) \to Q(x))$
  - $\neg(P(a) \to Q(a))$
  - $P(a)$
  - $\neg Q(a)$
    - $\neg \exists x P(x)$
      - $\neg P(a)$
      - $\times$
    - $\exists x Q(x)$
      - $Q(b)$
      - $\neg(P(b) \to Q(b))$
      - $P(b)$
      - $\neg Q(b)$
      - $\times$