Metodi Matematici per l'Informatica (secondo canale)

Soluzioni di: Andrea Princic. Cartella delle soluzioni

17 Giugno 2019

Es 1.

Per ogni tripla di insiemi A, B e C tali che $A - B = C$:

A. se $A \cap B \neq \emptyset$ allora $C \subset A$;

Vero C contiene tutti gli elementi di A esclusi quelli di B. Visto che $A \cap B$ non è vuoto, ci sono alcuni elementi di A che non sono presenti in C, quindi $C \subsetneq A$

B. $C \cup (B - A) = A \cup B$;

Falso

$$\begin{aligned} C \cup (B - A) &= (A - B) \cup (B - A) \\ &= (A \cup B) - (A \cap B) \\ &\neq A \cup B \end{aligned}$$

Vero nel caso in cui $A \cap B = \emptyset$

Es 2.

Dato un insieme X indichiamo con 2^X l'insieme delle parti di X.

A. Una funzione iniettiva da A in B è un sottoinsieme di $A \times B$;

Vero le funzioni sono un tipo particolare di relazioni, quindi sono sottoinsiemi del prodotto cartesiano

B. L'insieme di tutte le funzioni da A in B è un sottoinsieme di $2^{A \times B}$;

Vero per lo stesso motivo di cui sopra

Es 3.

Dimostrare che per ogni $n \geq 2$ si ha

$$\sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1 - x^n}{1 - x}$$

dove x x è un numero reale.

Caso base $n = 2$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{1} x^k &= 1 + x \\ &= \frac{(1 + x)(1 - x)}{1 - x} \\ &= \frac{1 - x^2}{1 - x}\end{aligned}$$

Passo induttivo $n + 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} x^k &= \sum_{k=0}^{n-1} x^k + x^n \\ &= \frac{1 - x^n}{1 - x} + x^n \\ &= \frac{1 - x^n + x^n(1 - x)}{1 - x} \\ &= \frac{1 \cancel{- x^n} \cancel{+ x^n} - x^{n+1}}{1 - x} \\ &= \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}\end{aligned}$$

Es 4.

Scrivere la definizione di *numerabilità* di un insieme e fare un esempio.

Un insieme è numerabile se è finito o se può essere messo in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$. Ad esempio l'insieme $\mathbb{P}$ dei numeri pari è numerabile con la seguente relazione

$$\{(n, p) \mid n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{P}, p = 2n\} = \{(0, 0), (1, 2), (2, 4), (3, 6), \dots\}$$

Es 5.

Definire il concetto di *interpretazione* nella logica predicativa.

Interpretare significa dare un significato ad ogni predicato e scegliere un dominio

Es 6.

Vero o Falso? (N.B. Le lettere A, B, C variano su proposizioni arbitrarie nel linguaggio della logica proposizionale, non necessariamente distinte).

A. Se $A \vDash B \vee C$ e $B \vDash \neg C$ allora $(A \to C) \vDash \neg B$;

Falso nel caso in cui $A = F$ e $B = V$

B. Se $A \wedge \neg B$ è soddisfacibile allora $A \to B$ è insoddisfacibile;

Falso perché $A \to B = \neg A \vee B = \neg(A \wedge \neg B)$ e il fatto che $A \wedge \neg B$ sia soddisfacibile non implica che la sua negazione non lo possa essere

Es 7.

L'enunciato seguente è una tautologia?

A. $\exists x(A(x) \to \neg B(x)) \to \neg\forall x(B(x) \to A(x))$;

Falso si può scrivere anche

$$\exists x(\neg A(x) \vee \neg B(x)) \to \exists x(B(x) \wedge \neg A(x))$$

che è falso nel caso in cui A e B siano insoddisfacibili

Il tableau si trova in fondo al documento.

Es 8.

Formalizzare la proposizione seguente con un enunciato nel linguaggio predicativo $\mathcal{L}$ composto da un simbolo $\in$ di relazione binaria.

A. Ogni insieme X è sottoinsieme di un qualche insieme Y.

$\forall X \exists Y \forall x(x \in X \to x \in Y)$

Tableau

$$\neg(\exists x(A(x) \to \neg B(x)) \to \neg\forall x(B(x) \to A(x)))$$

$$|$$

$$\exists x(A(x) \to \neg B(x))$$

$$|$$

$$\forall x(B(x) \to A(x))$$

$$|$$

$$A(a) \to \neg B(a)$$

$$|$$

$$B(a) \to A(a)$$