Metodi Matematici per l'Informatica (secondo canale) — 17 Giugno 2019

Soluzioni di Andrea Princic. Cartella delle soluzioni.

Es 1. Per ogni tripla di insiemi A, B e C tali che $A - B = C$:

☑$_V$ ☐$_F$ **A.** se $A \cap B \neq \emptyset$ allora $C \subset A$

> Per definizione C contiene tutti gli elementi di A esclusi quelli di B. Visto che $A \cup B$ non è vuoto, ci sono alcuni elementi di A che non sono presenti in C, quindi $C \subsetneq A$

☐$_V$ ☑$_F$ **B.** $C \cup (B - A) = A \cup B$

$$\begin{aligned} C \cup (B - A) &= (A - B) \cup (B - A) \\ &= (A \cup B) - (A \cap B) \\ &\neq A \cup B \end{aligned}$$

> Può essere vero nel caso in cui $A \cap B = \emptyset$, ma non in generale

Es 2. Dato un insieme X indichiamo con 2^X l'insieme delle parti di X.

☑$_V$ ☐$_F$ **A.** Una funzione iniettiva da A in B è un sottoinsieme di $A \times B$

> Le funzioni sono un tipo particolare di relazioni, quindi sono sottoinsiemi del prodotto cartesiano

☑$_V$ ☐$_F$ **B.** L'insieme di tutte le funzioni da A in B è un sottoinsieme di $2^{A \times B}$

> Per definizione di funzione, qualunque funzione da A in B è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$. Essendo $2^{A\times B}$ l'insieme di tutti i sottoinsiemi di $A \times B$, questo per definizione contiene tutte le funzioni da A in B.

Es 3. Dimostrare che per ogni $n \geq 2$ si ha

$$\sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1 - x^n}{1 - x}$$

dove x è un numero reale.

Caso base $n = 2$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{1} x^k &= 1 + x \\ &= \frac{(1 + x)(1 - x)}{1 - x} \\ &= \frac{1 - x^2}{1 - x} \end{aligned}$$

Passo induttivo $n + 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} x^k &= \sum_{k=0}^{n-1} x^k + x^n \\ &= \frac{1 - x^n}{1 - x} + x^n \\ &= \frac{1 - x^n + x^n(1 - x)}{1 - x} \\ &= \frac{1 - \cancel{x^n} + \cancel{x^n} - x^{n+1}}{1 - x} \\ &= \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \end{aligned}$$

Es 4. Scrivere la definizione di *numerabilità* di un insieme e fare un esempio.

Un insieme è numerabile se può essere messo in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$. Ad esempio l'insieme $\mathbb{P}$ dei numeri pari è numerabile con la seguente relazione

$$\{(n,p) \mid n \in \mathbb{N},\ p \in \mathbb{P},\ p = 2n\} = \{(0,0),(1,2),(2,4),(3,6),...\}$$

Es 5. Definire il concetto di *interpretazione* nella logica predicativa.

Interpretare significa dare un significato ad ogni predicato e scegliere un dominio

Es 6. Vero o Falso? (N.B. Le lettere A, B, C variano su proposizioni arbitrarie nel linguaggio della logica proposizionale, non necessariamente distinte).

☐$_V$ ☑$_F$ **A.** Se $A \vDash B \vee C$ e $B \vDash \neg C$ allora $(A \to C) \vDash \neg B$

A	B	C	$A \vDash B \vee C$	$B \vDash \neg C$	$(A \to C) \vDash \neg B$	risultato
F	F	F	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	F	F
F	V	V	V	F	F	V
V	F	F	F	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V
V	V	V	V	F	F	V

Il risultato è dato da $(A \vDash B \vee C) \wedge (B \vDash \neg C) \to ((A \to C) \vDash \neg B)$. Il simbolo $\vDash$ viene trattato allo stesso modo di $\to$ nella tavola di verità.

☐$_V$ ☑$_F$ **B.** Se $A \wedge \neg B$ è soddisfacibile allora $A \to B$ è insoddisfacibile

perché $A \to B = \neg A \vee B = \neg(A \wedge \neg B)$ e il fatto che $A \wedge \neg B$ sia soddisfacibile non implica che la sua negazione non lo possa essere.

Es 7. L'enunciato seguente è una tautologia?

☐$_V$ ☑$_F$ **A.** $\exists x(A(x) \to \neg B(x)) \to \neg \forall x(B(x) \to A(x))$

Si può scrivere anche

$$\exists x(\neg A(x) \vee \neg B(x)) \to \exists x(B(x) \wedge \neg A(x))$$

che è falso nel caso in cui A e B siano insoddisfacibili.

Es 8. Formalizzare la proposizione seguente con un enunciato nel linguaggio predicativo $\mathcal{L}$ composto da un simbolo $\in$ di relazione binaria.

A. Ogni insieme X è sottoinsieme di un qualche insieme Y

$\forall X\ \exists Y\ \forall x(x \in X \to x \in Y)$

Tableau

$$\neg(\exists x(A(x) \to \neg B(x)) \to \neg\forall x(B(x) \to A(x)))$$

$$|$$

$$\exists x(A(x) \to \neg B(x))$$

$$|$$

$$\forall x(B(x) \to A(x))$$

$$|$$

$$A(a) \to \neg B(a)$$

$$|$$

$$B(a) \to A(a)$$