Metodi Matematici per l'Informatica (secondo canale)

Soluzioni di: Andrea Princic. Cartella delle soluzioni

11 Gennaio 2024

Es 1.

Sia $A = \{2, \{2, 7, 5\}, 4, (1, 2, 3), 3\}$. Allora:

A. $5 \in A$; **Falso**

B. $\{2, 5, 7\} \in A$; **Vero**

C. $\{2, 3\} \subseteq A$; **Vero**

D. $\exists x, y, z \in A$ tali che $\{x, y\} \subseteq z$; **Vero** $x = y = 2, z = \{2, 7, 5\}$

Es 2.

Siano R e S due relazioni di equivalenza sullo stesso insieme A. Allora $R \cup S$, $R \cap S$ e $R - S$ sono relazioni di equivalenza su A?

1. $R \cup S$ potrebbe non essere una relazione di equivalenza perché potrebbe non essere transitiva:
   $A = \{1, 2, 3\}$
   $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}$
   $S = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 3), (3, 2)\}$
   $R \cup S = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\}$

2. $R \cap S$ è una relazione di equivalenza:
   (a) è riflessiva perché R e S lo sono
   (b) per ogni $(x, y) \in R \cap S$, per simmetria, $(y, x) \in R$ e $(y, x) \in S$, quindi $(y, x) \in R \cap S$
   (c) per ogni $(x, y), (y, z) \in R \cap S$, per transitività, $(x, z) \in R$ e $(x, z) \in S$, quindi $(x, z) \in R \cap S$

3. $R - S$ non è riflessiva

Es 3.

Vero o Falso?

A. Se esiste una funzione $f : X \to Y$ suriettiva, allora esiste una funzione $g : Y \to X$ iniettiva; **Vero**

B. Se esiste una funzione $f : X \to Y$ iniettiva, allora esiste una funzione $g : Y \to X$ suriettiva; **Vero**

C. Per ogni $f : X \to Y$ esiste un insieme Z tale che esistano una funzione $h : Z \to Y$ iniettiva e una funzione $g : X \to Z$ suriettiva per cui $f = h \circ g$; **Falso**

Es 4.

Definiamo **numerabile** un insieme in corrispondenza biunivoca con i naturali, e **S-numerabile** un insieme in corrispondenza biunivoca con un sottoinsieme dei numeri naturali. Le due definizioni coincidono?

No, perché un insieme **S-numerabile** può anche avere cardinalità finita

Es 5.

Dimostrare per induzione che, per ogni $n \geq 1$, se X e Y sono insiemi di n elementi, il numero di funzioni biiettive tra X e Y è $n!$.

Caso base $n = 1$: Se X e Y hanno un solo elemento, allora esiste una sola funzione biiettiva tra X e Y:

$$1! = 1$$

Passo induttivo $n + 1$: X e Y hanno n elementi e aggiungiamo a entrambi un elemento. Tra le nuove funzioni biiettive ci sono le stesse di prima in cui però l'elemento aggiunto in X viene associato all'elemento aggiunto in Y: queste funzioni sono ancora $n!$.
A queste si aggiungono le nuove funzioni biiettive in cui l'elemento aggiunto in X viene associato ad un elemento vecchio di Y: le vecchie funzioni sono $n!$ e i vecchi elementi sono n quindi queste funzioni sono $n! \cdot n$. Quindi il numero di funzioni biiettive tra X e Y è:

$$n! + n! \cdot n = n! \cdot (n + 1) = (n + 1)!$$

Es 6.

I seguenti enunciati sono verità logiche. Vero o Falso?

A. $(\exists x P(x) \to \exists x Q(x)) \to \exists x(P(x) \to Q(x))$; **Vero**

B. $\exists y \exists z \forall x((F(x) \to G(y)) \wedge (G(z) \to F(x)))$; **Falso**

I tableau si trovano in fondo al documento.

Es 7.

Definire (se possibile) un'interpretazione che verifichi ed una che falsifichi la formula

$$\forall y(\neg \exists x A(x) \to \exists x A(y))$$

La formula è falsa in tutte le interpretazioni in cui A sia insoddisfacibile.
La formula è vera in tutte le interpretazioni in cui A sia soddisfacibile.

Es 8.

Un giocatore di strada vi propone la seguente variante del gioco delle tre carte: vi mostra tre carte coperte ciascuna con una scritta. La prima e la seconda dicono “L’asso non è qui”. La terza dice: “L’asso è la carta due”. Sapete che solo una delle carte è un asso e che solo una delle scritte è vera. Formalizzare in logica proposizionale e decidere quale carta è l’asso.

Utilizziamo tre variabili logiche A, B, C per rappresentare rispettivamente che l’asso si trovi sotto la prima, la seconda o la terza carta.
Per le scritte, possiamo rappresentare le prime due come $\neg A$ e $\neg B$, e la terza come B.
Sappiamo che solo una carta è un asso, quindi indichiamo questa condizione con $\oplus(A, B, C)$,
dove $\oplus(x, y, z)$ = solo una tra x, y, z è vera.
Sappiamo che solo una delle scritte è vera, quindi indichiamo questa condizione con $\oplus(\neg A, \neg B, B)$.
A questo punto possiamo rappresentare il problema con la seguente tavola di verità:

A	B	C	$\oplus(A, B, C)$	$\oplus(\neg A, \neg B, B)$	risultato
F	F	F	F	F	F
F	F	V	V	F	F
F	V	F	V	F	F
F	V	V	F	F	F
V	F	F	V	V	V
V	F	V	F	V	F
V	V	F	F	V	F
V	V	V	F	V	F

Quindi l’asso è la prima carta

Tableau

$$
\begin{array}{c}
\neg((\exists x P(x) \to \exists x Q(x)) \to \exists x (P(x) \to Q(x))) \\
| \\
\exists x P(x) \to \exists x Q(x) \\
| \\
\neg \exists x (P(x) \to Q(x)) \\
| \\
\neg (P(a) \to Q(a)) \\
| \\
P(a) \\
| \\
\neg Q(a) \\
\swarrow \qquad \searrow \\
\begin{array}{ccc}
\neg \exists x P(x) & \qquad & \exists x Q(x) \\
| & & | \\
\neg P(a) & & Q(b) \\
| & & | \\
\times & & \neg (P(b) \to Q(b)) \\
 & & | \\
 & & P(b) \\
 & & | \\
 & & \neg Q(b) \\
 & & | \\
 & & \times
\end{array}
\end{array}
$$

$$\neg\exists y\exists z\forall x((F(x)\to G(y))\land(G(z)\to F(x)))$$

$$|$$

$$\neg\exists z\forall x((F(x)\to G(a))\land(G(z)\to F(x)))$$

$$|$$

$$\neg\forall x((F(x)\to G(a))\land(G(a)\to F(x)))$$

$$|$$

$$\neg((F(b)\to G(a))\land(G(a)\to F(b)))$$