Metodi Matematici per l'Informatica (secondo canale) — 9 Settembre 2019

Soluzioni di Andrea Princic. Cartella delle soluzioni.

Es 1. Scrivere le definizioni e fornire esempi di *relazione d'ordine stretto* e *relazione d'ordine totale*.

> Una relazione d'ordine stretto è una relazione con le proprietà antiriflessiva, antisimmetrica e transitiva. Un esempio di relazione d'ordine stretto è la relazione $<$ su $\mathbb{N}$.
> Una relazione d'ordine totale è una relazione con le proprietà riflessiva, antisimmetrica, transitiva, e inoltre per ogni coppia di elementi a e b si ha che $(a, b) \in R$ oppure $(b, a) \in R$. Un esempio di relazione d'ordine totale è la relazione $\leq$ su $\mathbb{N}$.

Es 2. Sia $Q = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, c)\} \subseteq \{a, b, c, d\} \times \{a, b, c, d\}$. Allora

- ☐$_V$ ☑$_F$ **A.** Q è una funzione
- ☐$_V$ ☑$_F$ **B.** Q è una relazione di equivalenza
- ☑$_V$ ☐$_F$ **C.** Q è una relazione transitiva
- ☑$_V$ ☐$_F$ **D.** Q è una relazione d'ordine

Es 3. Dimostrare che l'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi è numerabile.

> L'insieme $\mathbb{Z}$ si può mettere in relazione biunivoca con $\mathbb{N}$ nel seguente modo:
> $$\{..., (8, -4), (6, -3), (4, -2), (2, -1), (0, 0), (1, 1), (3, 2), (5, 3), (7, 4), ...\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$$

Es 4. Qual è il più piccolo numero naturale k per cui $n^2 > 2n + 1$, $\forall n \geq k$? Scrivere una dimostrazione per induzione.

> con $k = 1$ si ha $1 \ngtr 3$
> con $k = 2$ si ha $4 \ngtr 5$
> con $k = 3$ si ha $9 > 7$ quindi 3 è il caso base.
> Passo induttivo $n + 1$:
> $$\begin{aligned} (n+1)^2 &= n^2 + 2n + 1 > 2n + 3 \\ &= n^2 + 2n \qquad > 2n + 2 \\ &= \underline{n^2} + 2n \qquad > \underline{2n + 1} + 1 \end{aligned}$$
> $$\begin{aligned} \text{Per ipotesi induttiva sappiamo che } & n^2 > 2n + 1 \\ \text{puindi rimane da dimostrare che } & 2n > 1 \\ \text{che è banalmente vero perché } & n \geq 3 \end{aligned}$$

Es 5. Vero o Falso? (N.B. Le lettere A, B, C variano su proposizioni arbitrarie nel linguaggio della logica proposizionale, non necessariamente distinte).

☐$_V$ ☑$_F$ **A.** $(A \to B),\ (C \to \neg A),\ C \models \neg B$

Se C è vera A è falsa, e quindi non c'è nessuna implicazione su B

☑$_V$ ☐$_F$ **B.** Se A è insoddisfacibile allora per ogni B vale $A \models B$

Se la parte sinistra è (sempre) falsa allora la conseguenza logica è vera

☐$_V$ ☑$_F$ **C.** Se $A \wedge \neg B$ è soddisfacibile allora il tableau di $A \to B$ ha qualche ramo aperto

Se $A \wedge \neg B$ fosse una tautologia (quindi anche soddisfacibile) il tableau di $A \to B$ sarebbe chiuso

☐$_V$ ☑$_F$ **D.** Esistono A e B tali che $\neg(A \wedge B) \vee (A \to B)$ è insoddisfacibile

$\neg(A \wedge B) \vee (A \to B) = \neg A \vee \underline{\neg B} \vee \neg A \vee \underline{B}$ è una tautologia

☐$_V$ ☑$_F$ **E.** Se il tableau di A e il tableau di B hanno entrambi qualche ramo aperto allora il tableau di $A \wedge B$ ha qualche ramo aperto

Poniamo $A = \neg B$ entrambi soddisfacibili, allora $\neg(A \wedge B)$ sarebbe una tautologia quindi il tableau di $A \wedge B$ sarebbe chiuso

Es 6. I seguenti enunciati sono verità logiche: Vero o Falso?

☐$_V$ ☑$_F$ **A.** $\forall x(P(x) \to \neg Q(x)) \to (\forall x \neg P(x) \to \neg \exists x Q(x))$

Nel caso in cui P è insoddisfacibile e Q è soddisfacibile

☑$_V$ ☐$_F$ **B.** $\exists x(P(x) \to Q(x)) \leftrightarrow (\forall x P(x) \to \exists x Q(x))$

Es 7. Un linguaggio predicativo adeguato per la teoria degli insiemi è composto da un singolo simbolo di relazione a due posti: $\in$ (che intuitivamente indica l'appartenenza). Tradurre in questo linguaggio predicativo le seguenti proposizioni. Due insiemi coincidono se e soltanto se hanno esattamente gli stessi elementi.

A. Esiste l'insieme vuoto

$\exists X\ \neg \exists x(x \in X)$
Esiste un insieme X tale che non esiste un elemento x che gli appartenga

B. Per ogni coppia di insiemi esiste la loro intersezione

$\forall X\ \forall Y\ \exists Z\ \forall x((x \in X \wedge x \in Y) \leftrightarrow x \in Z)$
Per ogni coppia di insiemi X e Y esiste un insieme Z tale che ogni elemento x che appartiene a entrambi X e Y appartiene anche a Z e viceversa

Es 8. Scrivere la definizione di *modello* nella logica predicativa.

Un modello è un'interpretazione che rende vera una formula

Tableau

$$\neg(\forall x(P(x) \to \neg Q(x)) \to (\forall x \neg P(x) \to \neg\exists x Q(x)))$$

$$\forall x(P(x) \to \neg Q(x))$$

$$\neg(\forall x \neg P(x) \to \neg\exists x Q(x))$$

$$\forall x \neg P(x)$$

$$\exists x Q(x)$$

$$Q(a)$$

$$\neg(\exists x(P(x) \to Q(x)) \leftrightarrow (\forall x P(x) \to \exists x Q(x)))$$

- $\exists x(P(x) \to Q(x))$
  - $\neg(\forall x P(x) \to \exists x Q(x))$
  - $\forall x P(x)$
  - $\neg\exists x Q(x)$
  - $P(a) \to Q(a)$
  - $\neg Q(a)$
  - $P(a)$
    - $\neg P(a)$
      - $\times$
    - $Q(a)$
      - $\times$
- $\neg\exists x(P(x) \to Q(x))$
  - $\forall x P(x) \to \exists x Q(x)$
    - $\neg\forall x P(x)$
      - $\neg P(b)$
      - $\neg(P(b) \to Q(b))$
      - $P(b)$
      - $\neg Q(b)$
      - $\times$
    - $\exists x Q(x)$
      - $Q(c)$
      - $\neg(P(c) \to Q(c))$
      - $P(c)$
      - $\neg Q(c)$
      - $\times$