# Metodi Matematici per l'Informatica (secondo canale)

Soluzioni di: Andrea Princic. Cartella delle soluzioni

20 Giugno 2024

## Es 1.

Indichiamo con $P(A)$ l'insieme dei sottoinsiemi di un insieme $A$ con $X, Y \in P(A)$. Allora:

**A.** se $\emptyset \in A$ allora $\emptyset \in P(A)$; **Vero** per ogni insieme $A$ vale che $\emptyset \in P(A)$

**B.** se $\emptyset \in P(A)$ allora $\emptyset \in A$; **Falso** per lo stesso motivo di sopra

**C.** $(X \cup Y) \cap X = X$; **Vero**

**D.** $(X \cap Y) \cup X = X$; **Vero**

**E.** se $A \subseteq P(A)$ allora $A = \emptyset$; **Vero**

## Es 2.

Sia $R \subseteq A \times A$ una relazione simmetrica e antisimmetrica. Allora

**A.** non può esistere una tale $R$; **Falso**

**B.** $R = A \times A$; **Falso**

**C.** $R$ è necessariamente anche antiriflessiva; **Falso**

**D.** se per ogni $x \in A$ esiste $y$ tale che $(x, y) \in R$ allora $R$ è un'equivalenza; **Vero**

> Per simmetria: se per ogni $x$ esiste $y$ tale che $(x, y) \in R$ allora $(y, x) \in R$.
> Per antisimmetria: $(x, y) \in R \land (y, x) \in R \to x = y$ quindi la relazione è anche riflessiva.
> Ne deriva una relazione del tipo $\{(x, x) \mid \forall x \in A\}$, quindi una relazione di equivalenza.

## Es 3.

Siano $f : X \to Y$ e $g : Z \to Y$ dove $Z \subseteq X$. Indicare se le seguenti affermazioni sono vere o false. (NB: per un qualunque $S \subseteq X$, con $f(S)$ si denota l'insieme $\{y \in Y \mid \exists s \in S \text{ per cui } f(s) = y\}$. Analogamente per $g(S)$).

**A.** Se $f$ è iniettiva allora $g$ è iniettiva; **Vero**

**B.** $f(X - Z) \subseteq f(X) - f(Z)$; **Falso**

**C.** $Y = f(X) \cup g(Z)$; **Falso**

## Es 4.

L'unione numerabile di insiemi numerabili è numerabile?

> Sì. Per unione numerabile si intende l'unione di una quantità numerabile di insiemi. Questa unione si può dimostrare numerabile con il metodo della diagonale di Cantor.

## Es 5.

## Es 6.

Se so che $A \to B$ ha valore VERO, che cosa posso concludere del valore di verità delle proposizioni seguenti?

**A.** $((A \lor C) \to (B \lor C))$;

| $A$ | $B$ | $C$ | $(\neg A \land \neg C) \lor B \lor C$ |
|---|---|---|---|
| F | F | F | V |
| F | F | V | V |
| F | V | F | V |
| F | V | V | V |
| V | F | F | F |
| V | F | V | V |
| V | V | F | V |
| V | V | V | V |

**B.** $((\neg A \land B) \leftrightarrow (A \lor B))$;

| $A$ | $B$ | $(\neg A \land B)$ | $(A \lor B)$ | $(\neg A \land B) \leftrightarrow (A \lor B)$ |
|---|---|---|---|---|
| F | F | F | F | V |
| F | V | V | V | V |
| V | F | F | V | F |
| V | V | F | V | F |

## Es 7.

La formula seguente è una tautologia?

**A.** $((\exists x P(x)) \to (\exists x Q(x))) \to (\exists x (P(x) \to Q(x)))$; **Vero**

Dividiamo la formula nelle due parti principali:

$$\exists x P(x) \to \exists x Q(x) \tag{1}$$

$$\exists x (P(x) \to Q(x)) \tag{2}$$

Per falsificare la formula dobbiamo trovare un caso in cui (1) è vera mentre (2) è falsa. A questo scopo possiamo esplorare singolarmente i tre possibili casi di soddisfacibilità di $P$.

**Tautologia** Se $P$ è una tautologia allora $\exists x P(x)$ è vera e per soddisfare (1) dobbiamo avere anche $\exists x Q(x)$ vera. In questo caso è facile vedere che anche (2) è vera: basta prendere come $x$ lo stesso $x$ che rende vera $\exists x Q(x)$.

**Insoddisfacibile** Se $P$ è insoddisfacibile possiamo direttamente notare che in (2) $P(x)$ sarà sempre falsa, quindi (2) è vera.

**Soddisfacibile e falsificabile** Se $P$ è falsificabile possiamo fare lo stesso ragionamento fatto al paragrafo precedente per rendere (2) vera, scegliendo come $x$ in (2) una qualunque $x$ che rende $P$ falsa.

Abbiamo visto che in ogni caso di soddisfacibilità di $P$ ci risulta che (2) è vera, quindi la formula è una tautologia.

I tableau si trovano in fondo al documento.

## Es 8.

Formalizzare la frase *Tutti i nipoti amano i propri nonni*, considerando come universo del discorso l'insieme di tutte le persone ed utilizzando il linguaggio formato da due simboli di relazione binari $G$ e $A$ interpretati come segue: $G(x, y)$ se e solo se $x$ è genitore di y, $A(x, y)$ se e solo se $x$ ama $y$.

| |
|---|
| $\forall x \forall y \forall z((G(z, y) \wedge G(y, x)) \rightarrow A(x, z))$ |
| Per ogni tripla di persone $x, y, z$, se $z$ è genitore di $y$ e $y$ è genitore di $x$ (quindi $z$ è nonno di $x$) allora $x$ ama $z$. |

## Tableau

$$
\begin{array}{c}
\neg((\exists x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)) \rightarrow \exists x(P(x) \rightarrow Q(x))) \\
| \\
\exists x P(x) \rightarrow \exists x Q(x) \\
| \\
\neg \exists x(P(x) \rightarrow Q(x)) \\
| \\
\neg(P(a) \rightarrow Q(a)) \\
| \\
P(a) \\
| \\
\neg Q(a) \\
\swarrow \qquad \searrow \\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c}
\neg \exists x P(x) \\
| \\
\neg P(a) \\
| \\
\times \\
\\
\\
\\
\\
\\
\\
\end{array}
&
\begin{array}{c}
\exists x Q(x) \\
| \\
Q(b) \\
| \\
\neg(P(b) \rightarrow Q(b)) \\
| \\
P(b) \\
| \\
\neg Q(b) \\
| \\
\times
\end{array}
\end{array}
\end{array}
$$