

# Metodi Matematici per l'Informatica (secondo canale)

Soluzioni di: [Andrea Princic](#)

10 Febbraio 2020

## Es 1.

Sia  $A = \{2, \{4, 5\}, 4, (5, 1), 3\}$ . Allora:

- A.  $\exists x [(x \subset A) \wedge (5 \in x)]$ ; **Falso**
- B.  $\{5, 4\} \in A$ ; **Vero**
- C.  $\{3, 4\} \subseteq A$ ; **Vero**
- D.  $(4, 5) \in A$ ; **Falso**

## Es 2.

Siano  $A$  e  $B$  tali che  $A \cup B = B$ . Allora sicuramente:

- A.  $A = B$ ; **Falso**
- B.  $A \subseteq B$ ; **Vero**
- C.  $A \not\subseteq B$ ; **Falso**
- D.  $A \neq \emptyset$ ; **Falso**
- E.  $A$  e  $B$  hanno la stessa cardinalità; **Falso**

## Es 3.

La chiusura transitiva della relazione  $R = \{(1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 2)\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  è:

- A.  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ; **Falso**
- B.  $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$ ; **Vero**
- C.  $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 3), (3, 1)\}$ ; **Falso**
- D. una relazione di equivalenza su  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ; **Falso** non è riflessiva

## Es 4.

Sia  $Q = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, c)\} \subseteq \{a, b, c, d\} \times \{a, b, c, d\}$ ; allora

- A.  $Q$  è una funzione iniettiva; **Falso** non è una funzione
- B.  $Q$  è una relazione di equivalenza; **Falso** non è né riflessiva né simmetrica
- C.  $Q$  è una relazione transitiva; **Vero**

## Es 5.

Sia dato l'insieme  $A = \{a, aa, aaa, aaaa, \dots\}$

- A.  $\exists x \in A$  tale che  $\forall y \in A$  si ha  $\ell(y) \leq \ell(x)$ , dove  $\ell(x)$  indica la lunghezza di  $x$ ; **Falso**  $x$  dovrebbe essere la stringa più lunga di  $A$ , che però non ha un massimo
- B.  $A$  non è numerabile; **Falso**
- C.  $A$  è in corrispondenza biunivoca con l'insieme  $\{2^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ ; **Vero** l'insieme  $\{2^k \mid k \in \mathbb{N}\}$  ha la stessa cardinalità di  $\mathbb{N}$
- D.  $A$  contiene un insieme di parole di lunghezza infinita; **Falso**  $A$  è un insieme di parole di lunghezza infinita

## Es 6.

La relazione  $R = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x + y \text{ è pari}\}$  è una relazione di equivalenza? Fornire una giustificazione alla risposta e, nel caso affermativo, indicare l'insieme quoziente della relazione.

L'unico modo per ottenere un numero pari sommando due numeri è se sono entrambi pari o entrambi dispari. Si ha dunque che la relazione è:

riflessiva:  $\forall x \in \mathbb{N}$  si ha che  $x + x = 2x$  è pari;

simmetrica:  $\forall x, y \in \mathbb{N}$  si ha che  $x + y = y + x$ . Se  $x + y$  è pari anche  $y + x$  lo è;

transitiva:  $\forall x, y, z \in \mathbb{N}$  si ha che se  $x + y$  e  $y + z$  sono pari, allora anche  $x + z$  lo è.

L'insieme quoziente è  $\{[0], [1]\}$  perché tutti i numeri con stessa parità stanno in coppia gli uni con gli altri.

## Es 7.

Dimostrare per induzione che, dato un insieme  $V$  di  $n$  punti con  $n \geq 2$ , possiamo collegarli a due a due con  $\frac{n(n-1)}{2}$  segmenti distinti.

Caso base:  $n = 2$ . Due punti si possono collegare con  $1 = \frac{2(2-1)}{2}$  segmento.

Passo induttivo:  $n + 1$ . Sia  $V$  un insieme di  $n$  punti collegati da  $\frac{n(n-1)}{2}$  segmenti. Ora immaginiamo di aggiungere un punto all'insieme  $V$ . Quel punto deve essere collegato a tutti gli altri con  $n$  nuovi segmenti. Il nuovo numero di segmenti sarà quindi

$$\begin{aligned} \frac{n(n-1)}{2} + n &= \frac{n(n-1) + 2n}{2} \\ &= \frac{n^2 - n + 2n}{2} \\ &= \frac{n^2 + n}{2} \\ &= \frac{(n+1)n}{2} \end{aligned}$$

## Es 8.

Formalizzare il seguente problema e verificare la correttezza dell'affermazione finale:

*Se la Roma ha vinto la partita, allora il Brescia e il Genoa retrocedono. Se almeno uno tra il Brescia e il Genoa retrocede, allora la Sampdoria si salva. Quindi, se la Sampdoria non si salva, allora la Roma non ha vinto la partita.*

Usiamo i simboli predicativi

$V(x)$  =  $x$  ha vinto

$R(x)$  =  $x$  retrocede

$S(x)$  =  $x$  si salva

e le variabili  $r, b, g, s$  per Roma, Brescia, Genoa e Sampdoria.

Allora il problema diventa

$$V(r) \rightarrow (R(b) \wedge R(g)) \quad (1)$$

$$(R(b) \vee R(g)) \rightarrow S(s) \quad (2)$$

$$\neg S(s) \rightarrow \neg V(r) \quad (3)$$

L'affermazione finale (3) è vera: sapendo che  $\models (A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$  allora da (2) segue che

$$\neg S(s) \rightarrow \neg(R(b) \vee R(g))$$

$$\rightarrow \neg(R(b) \wedge R(g))$$

$$\rightarrow \neg V(r)$$

## Es 9.

Decidere se i seguenti enunciati sono validi:

**A.**  $(\forall x A(x) \rightarrow \forall x B(x)) \rightarrow \forall x (A(x) \rightarrow B(x))$ ; **Falso** con  $A$  soddisfacibile ma non tautologia e  $B$  insoddisfacibile

**B.**  $(\forall x A(x) \rightarrow \exists x B(x)) \leftrightarrow \exists x (A(x) \rightarrow B(x))$ ; **Vero**

## Es 10.

Formalizzare le proposizioni seguenti con enunciati nel linguaggio predicativo  $\mathcal{L}$  composto da un simbolo  $<$  di relazione a due argomenti (con la sua ovvia interpretazione).

**A.**  $<$  ha un elemento minimo;

$$\exists x \forall y (x < y)$$

**B.**  $<$  non ha un elemento massimo;

$$\neg \exists x \forall y (y < x)$$

**C.**  $<$  è denso, vale a dire che ogni coppia di elementi nella relazione  $<$  possiede un elemento intermedio.

$$\forall x \forall y (x < y \rightarrow \exists z (x < z \wedge z < y))$$