

Es 1. Dato un insieme X , indichiamo con $\mathcal{P}(X)$ l'insieme delle parti di X . Sia $A = \{2, \{4, 5\}, \{4\}, 4\}$. Allora:

☐_V ☒_F **A.** $\{5, 4\} \in \mathcal{P}(A)$

☒_V ☐_F **B.** $\{2, 4\} \in \mathcal{P}(A)$

☒_V ☐_F **C.** $\{\{4\}\} \subseteq \mathcal{P}(A)$

Es 2. Data una relazione binaria R su un insieme A , indichiamo con \hat{R} la relazione:

$$\hat{R} = R \cup \{(a, b) \mid \{(a, c), (c, b)\} \subseteq R\}$$

Allora:

Si noti che la definizione di \hat{R} è la stessa di chiusura transitiva

☐_V ☒_F **A.** R è riflessiva se e solo se lo è \hat{R}

Si prenda $A = \{1, 2\}$ e $R = \{(1, 2), (2, 1)\}$. Allora $\hat{R} = R \cup \{(1, 1), (2, 2)\}$.
 R non è riflessiva ma \hat{R} sì.

☐_V ☒_F **B.** R è simmetrica se e solo se lo è \hat{R}

Si prenda $A = \{1, 2, 3\}$ e $R = \{(1, 2), (3, 1), (2, 3)\}$. Allora
 $\hat{R} = R \cup \{(2, 1), (1, 3), (3, 2), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$.
 R non è simmetrica ma \hat{R} sì.

☐_V ☒_F **C.** R è transitiva se e solo se lo è \hat{R}

La chiusura transitiva serve proprio quando R non è transitiva
 ma la sua chiusura (\hat{R}) ovviamente lo è

Es 3. Scrivere l'insieme delle parti di $A = \{1, 7, \{7\}\}$.

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{7\}, \{\{7\}\}, \{1, 7\}, \{1, \{7\}\}, \{7, \{7\}\}, A\}$$

Es 4. Sia \mathbb{Z} l'insieme dei numeri interi. L'insieme $A = \{y \in \mathbb{Z} \mid x \in \mathbb{Z} \wedge y = 3 - 2x\}$ è numerabile?

Sì perché $y = 3 - 2x$ si può scrivere anche $y = -2x + 3$ che è l'equazione di una retta, e una retta crea una corrispondenza biunivoca tra una sola x e una sola y .

Es 5. Sia D l'insieme dei numeri dispari. Dimostrare per induzione che $\forall n \in D, n^3$ è dispari.

Caso base $n = 1$:

$$1^3 = 1 \text{ che è dispari}$$

Passo induttivo $n > 1$:

$$(n + 2)^3 = n^3 + 6n^2 + 12n + 8$$

Per ipotesi induttiva n^3 è dispari, mentre $6n^2$, $12n$, e 8 sono pari quindi $6n^2 + 12n + 8$ è pari ma sommandolo a n^3 che è dispari il risultato è dispari.

Es 6. Le seguenti formule sono tautologie (**T**), soddisfacibili (**S**), falsificabili (**F**) o insoddisfacibili (**I**)?

T	S	F	I	
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$(A \vee B) \rightarrow B$
<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$B \rightarrow (A \vee B)$
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	$\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \rightarrow B)$
<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$(A \wedge (B \vee C)) \rightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$
<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$(A \leftrightarrow B) \rightarrow (\neg A \vee B)$

Es 7. Se so che $A \rightarrow B$ ha valore **Vero**, che cosa posso concludere del valore di verità delle proposizioni seguenti?

Vero	Falso	Vero/Falso	
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$(A \vee C) \rightarrow (B \vee C)$
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$(A \wedge C) \rightarrow (B \wedge C)$
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	$(\neg A \wedge B) \leftrightarrow (A \vee B)$

Es 8. Per ognuno degli enunciati seguenti descrivere una interpretazione in cui l'enunciato è vero e una in cui è falso.

A. $\forall x \exists y A(x, y) \rightarrow \forall x \exists y A(y, x)$

Vero:
Dominio: qualunque
 $A(x, y) = \text{Vero}$

Falso:
Dominio: \mathbb{N}
 $A(x, y) = x$ è la metà di y

B. $\forall x B(x) \vee \forall x \neg B(x)$

Vero:
Dominio: qualunque
 $B(x) = \text{Vero}$

Vero:
Dominio: \mathbb{N}
 $B(x) = x$ è dispari

Es 9. “Una proprietà P verificata dai multipli di 3 e di 5 è verificata anche dai multipli di 30”. Scrivere quest'affermazione nel linguaggio della logica predicativa e motivare la sua validità.

Siano:

Dominio: insieme delle proprietà dei numeri naturali

$V_i(p)$ = la proprietà p è verificata dai multipli di i

Allora l'affermazione “Una proprietà P verificata dai multipli di 3 e di 5 è verificata anche dai multipli di 30” può essere espressa come:

$$\forall p ((V_3(p) \wedge V_5(p)) \rightarrow V_{30}(p))$$

L'affermazione è valida perché 30 è multiplo sia di 3 che di 5, quindi qualunque multiplo di 30 è anche multiplo sia di 3 che di 5