Metodi Matematici per l'Informatica (secondo canale)

Soluzioni di: Andrea Princic. Cartella delle soluzioni

13 Giugno 2022

Es 1.

Sia f una funzione da A a B, dove A e B sono insiemi finiti di cardinalità n e m, rispettivamente.

A. f è necessariamente suriettiva se $n > 0$ e $m = 1$; **Vero**

B. f è necessariamente suriettiva se $n > m$; **Falso**

C. f è necessariamente iniettiva se $n = 0$; **Vero**

D. f può essere suriettiva se $n > m$; **Vero**

Es 2.

Scrivere la definizione di insieme delle parti di un insieme.

L'insieme delle parti di un insieme A è l'insieme di tutti i sottoinsiemi di A.

Es 3.

La chiusura transitiva della relazione $R = \{(1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 2)\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ è:

A. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$; **Falso**

B. $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$; **Vero**

C. $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 3), (3, 1)\}$; **Falso**

D. una relazione di equivalenza su $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$; **Falso**

Es 4.

Scrivere la definizione di *numerabilità* di un insieme e fare un esempio.

Un insieme si dice numerabile se può essere messo in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$. Un esempio di insieme numerabile è l'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$, mentre l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ non è numerabile.

Es 5.

Dimostrare che per ogni $n \geq 2$ si ha

$$\sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1-x^n}{1-x}$$

dove x è un numero reale.

Caso base $n = 2$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{1} x^k &= 1 + x \\ &= \frac{(1+x)(1-x)}{1-x} \\ &= \frac{1-x^2}{1-x}\end{aligned}$$

Passo induttivo $n+1$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} x^k &= \sum_{k=0}^{n-1} x^k + x^n \\ &= \frac{1-x^n}{1-x} + x^n \\ &= \frac{1-x^n+x^n(1-x)}{1-x} \\ &= \frac{1\cancel{-x^n}\cancel{+x^n}-x^{n+1}}{1-x} \\ &= \frac{1-x^{n+1}}{1-x}\end{aligned}$$

Es 6.

Definire il concetto di *interpretazione* nella logica predicativa.

Interpretare significa dare un significato ad ogni predicato e scegliere un dominio.

Es 7.

Vero o Falso? (N.B. Le lettere A, B, C variano su proposizioni arbitrarie nel linguaggio della logica proposizionale, non necessariamente distinte).

A. Se $A \vDash B \vee C$ e $B \vDash \neg C$ allora $(A \to C) \vDash \neg B$; **Falso**

A	B	C	$A \vDash B \vee C$	$B \vDash \neg C$	$(A \to C) \vDash \neg B$	risultato
F	F	F	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	F	F
F	V	V	V	F	F	V
V	F	F	F	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V
V	V	V	V	F	F	V

B. Se $A \wedge \neg B$ è soddisfacibile allora $A \to B$ è insoddisfacibile; **Falso**

perché $A \to B = \neg A \vee B = \neg(A \wedge \neg B)$ e il fatto che $A \wedge \neg B$ sia soddisfacibile non implica che la sua negazione non lo possa essere.

Es 8.

L'enunciato seguente è una tautologia?

A. $\exists x(A(x) \to \neg B(x)) \to \neg\forall x(B(x) \to A(x))$; **Falso**

Si può scrivere anche

$$\exists x(\neg A(x) \vee \neg B(x)) \to \exists x(B(x) \wedge \neg A(x))$$

che è falso nel caso in cui A e B siano insoddisfacibili.

Es 9.

Formalizzare la proposizione seguente con un enunciato nel linguaggio predicativo $\mathcal{L}$ composto da un simbolo $\in$ di relazione binaria.

A. Ogni insieme X è intersezione di una qualche coppia di insiemi Y e Z.

$\forall X \exists Y \exists Z \forall x(x \in X \leftrightarrow (x \in Y \wedge x \in Z))$

Tableau

$$\neg(\exists x(A(x) \to \neg B(x)) \to \neg\forall x(B(x) \to A(x)))$$
$$|$$
$$\exists x(A(x) \to \neg B(x))$$
$$|$$
$$\forall x(B(x) \to A(x))$$
$$|$$
$$A(a) \to \neg B(a)$$
$$|$$
$$B(a) \to A(a)$$