Metodi Matematici per l'Informatica (secondo canale)

Soluzioni di: Andrea Princic. Cartella delle soluzioni

9 Settembre 2019

Es 1.

Scrivere le definizioni e fornire esempi di *relazione d'ordine stretto* e *relazione d'ordine totale*.

Una relazione d'ordine stretto è una relazione con le proprietà antiriflessiva, antisimmetrica e transitiva. Un esempio di relazione d'ordine stretto è la relazione $<$ su $\mathbb{N}$.

Una relazione d'ordine totale è una relazione con le proprietà riflessiva, antisimmetrica, transitiva, e inoltre per ogni coppia di elementi a e b si ha che aRb oppure bRa. Un esempio di relazione d'ordine totale è la relazione $\leq$ su $\mathbb{N}$.

Es 2.

Sia $Q = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, c)\} \subseteq \{a, b, c, d\} \times \{a, b, c, d\}$; allora

A. Q è una funzione;

Falso a compare come primo elemento in più di una coppia. In una funzione ogni elemento può apparire al più una volta al primo posto di una coppia

B. Q è una relazione di equivalenza;

Falso è soltanto transitiva

C. Q è una relazione transitiva;

Vero

D. Q è una relazione d'ordine;

Vero

Es 3.

Dimostrare che l'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi è numerabile.

L'insieme $\mathbb{Z}$ si può mettere in relazione biunivoca con $\mathbb{N}$ nel seguente modo

$$\{\dots, (8, -4), (6, -3), (4, -2), (2, -1), (0, 0), (1, 1), (3, 2), (5, 3), (7, 4), \dots\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$$

Es 4.

Qual è il più piccolo numero naturale k per cui $n^2 > 2n + 1$, $\forall n \geq k$? Scrivere una dimostrazione per induzione.

con $k = 1$ si ha $1 \not> 3$
con $k = 2$ si ha $4 \not> 5$
con $k = 3$ si ha $9 > 7$ quindi 3 è il caso base.
Passo induttivo $n + 1$:

$$\begin{aligned}(n+1)^2 &= n^2 + 2n + 1 > 2n + 3 \\ &= n^2 + \cancel{2n} \quad > \cancel{2n} + 2\end{aligned}$$

Es 5.

Vero o Falso? (N.B. Le lettere A, B, C variano su proposizioni arbitrarie nel linguaggio della logica proposizionale, non necessariamente distinte).

A. $(A \to B), (C \to \neg A), C \vDash \neg B$; **Falso** se C è vera A è falsa, e quindi non c'è nessuna implicazione su B

B. Se A è insoddisfacibile allora per ogni B vale $A \vDash B$; **Vero** se la parte sinistra è (sempre) falsa allora la conseguenza logica è vera

C. Se $A \wedge \neg B$ è soddisfacibile allora il tableau di $A \to B$ ha qualche ramo aperto; **Falso** se $A \wedge \neg B$ fosse una tautologia (quindi soddisfacibile) il tableau di $A \to B$ sarebbe chiuso

D. Esistono A e B tali che $\neg(A \wedge B) \vee (A \to B)$ è insoddisfacibile; **Falso** $\neg(A \wedge B) \vee (A \to B) = \neg A \vee \underline{\neg B} \vee \neg A \vee \underline{B}$ è una tautologia

E. Se il tableau di A e il tableau di B hanno entrambi qualche ramo aperto allora il tableau di $A \wedge B$ ha qualche ramo aperto; **Falso** poniamo $A = \neg B$ entrambi soddisfacibili, allora $\neg(A \wedge B)$ sarebbe una tautologia quindi il tableau di $A \wedge B$ sarebbe chiuso

Es 6.

I seguenti enunciati sono verità logiche: Vero o Falso?

A. $\forall x(P(x) \to \neg Q(x)) \to (\forall x \neg P(x) \to \neg \exists x Q(x))$; **Falso** nel caso in cui P è insoddisfacibile e Q è soddisfacibile

B. $\exists x(P(x) \to Q(x)) \leftrightarrow (\forall x P(x) \to \exists x Q(x))$; **Vero**

I tableau si trovano in fondo al documento.

Es 7.

Un linguaggio predicativo adeguato per la teoria degli insiemi è composto da un singolo simbolo di relazione a due posti: $\in$ (che intuitivamente indica l'appartenenza). Tradurre in questo linguaggio predicativo le seguenti proposizioni. Due insiemi coincidono se e soltanto se hanno esattamente gli stessi elementi.

A. Esiste l'insieme vuoto.

$\exists X \neg \exists x (x \in X)$
Esiste un insieme X tale che non esiste un elemento x che gli appartenga

B. Per ogni coppia di insiemi esiste la loro intersezione.

$\forall X \forall Y \exists Z \forall x((x \in X \wedge x \in Y) \leftrightarrow x \in Z)$
Per ogni coppia di insiemi X e Y esiste un insieme Z tale che ogni elemento x che appartiene a entrambi X e Y appartiene anche a Z e viceversa

Es 8.

Scrivere la definizione di *modello* nella logica predicativa.

Un modello è un'interpretazione che rende vera una formula

Tableau

$$
\begin{array}{c}
\neg(\forall x(P(x) \to \neg Q(x)) \to (\forall x \neg P(x) \to \neg \exists x Q(x))) \\
| \\
\forall x(P(x) \to \neg Q(x)) \\
| \\
\neg(\forall x \neg P(x) \to \neg \exists x Q(x)) \\
| \\
\forall x \neg P(x) \\
| \\
\exists x Q(x) \\
| \\
Q(a)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccc}
\multicolumn{5}{c}{\neg(\exists x(P(x) \to Q(x)) \leftrightarrow (\forall x P(x) \to \exists x Q(x)))} \\
\multicolumn{3}{c}{\exists x(P(x) \to Q(x))} & \multicolumn{2}{c}{\neg \exists x(P(x) \to Q(x))} \\
\multicolumn{3}{c}{|} & \multicolumn{2}{c}{|} \\
\multicolumn{3}{c}{\neg(\forall x P(x) \to \exists x Q(x))} & \multicolumn{2}{c}{\forall x P(x) \to \exists x Q(x)} \\
\multicolumn{3}{c}{|} & & \\
\multicolumn{3}{c}{\forall x P(x)} & \neg \forall x P(x) & \exists x Q(x) \\
\multicolumn{3}{c}{|} & | & | \\
\multicolumn{3}{c}{\neg \exists x Q(x)} & \neg P(b) & Q(c) \\
\multicolumn{3}{c}{|} & | & | \\
\multicolumn{3}{c}{P(a) \to Q(a)} & \neg(P(b) \to Q(b)) & \neg(P(c) \to Q(c)) \\
\multicolumn{3}{c}{|} & | & | \\
\multicolumn{3}{c}{\neg Q(a)} & P(b) & P(c) \\
\multicolumn{3}{c}{|} & | & | \\
\multicolumn{3}{c}{P(a)} & \neg Q(b) & \neg Q(c) \\
 & & & | & | \\
\neg P(a) & & Q(a) & \times & \times \\
| & & | & & \\
\times & & \times & &
\end{array}
$$