Metodi Matematici per l'Informatica (secondo canale) — 22 Gennaio 2019

Soluzioni di Andrea Princic. Cartella delle soluzioni.

Es 1. Sia $A = \{0, (a, 0), (0, b), \{0, 1\}, a, b, \{0\}\}$. Allora

☐$_V$ ☑$_F$ **A.** A non è un insieme

☐$_V$ ☑$_F$ **B.** Esistono $x, y, z, t \in A$ (con $x \neq y$) tali che $x \in z$ e $y \in t$

☐$_V$ ☑$_F$ **C.** A ha quattro elementi

☑$_V$ ☐$_F$ **D.** Esistono $x, y, z \in A$ tali che $x \in y$ e $y \subseteq z$

$\boxed{x = 0,\ y = \{0\},\ z = \{0, 1\}}$

Es 2. Dato un insieme X indichiamo con 2^X l'insieme delle parti di X. Indichiamo con T l'insieme dei multipli di 3 e con Q l'insieme dei multipli di 4. Allora:

☐$_V$ ☑$_F$ **A.** $2^T \subseteq 2^Q$

$\boxed{\{3\} \notin 2^Q}$

☑$_V$ ☐$_F$ **B.** $2^T \cap 2^Q \neq \emptyset$

$\boxed{\{12\} \in 2^T \cap 2^Q}$

☑$_V$ ☐$_F$ **C.** Q è numerabile

☐$_V$ ☑$_F$ **D.** 2^Q è numerabile

L'insieme delle parti di un insieme infinito non è numerabile

Es 3. Quali fra le seguenti affermazioni sono corrette?

☐$_V$ ☑$_F$ **A.** Per ogni insieme $A \neq \emptyset$ la relazione $A \times A$ non è antisimmetrica

Nel caso in cui A ha un solo elemento

☑$_V$ ☐$_F$ **B.** Per ogni insieme $A \neq \emptyset$ la relazione $A \times A$ è una relazione di equivalenza

☑$_V$ ☐$_F$ **C.** Ogni relazione di equivalenza che contenga una coppia (u, v) con $u \neq v$ è esclusivamente riflessiva, simmetrica e transitiva

Se contiene (u, v) contiene anche (v, u) essendo simmetrica

☑$_V$ ☐$_F$ **D.** Per ogni relazione R su A esiste una relazione di equivalenza su A che contiene R

$A \times A$ contiene tutte le relazioni su A ed è una relazione di equivalenza

Es 4. Scrivere una relazione di equivalenza $R \subseteq \{a, b, c, d\} \times \{a, b, c, d\}$ che abbia due classi di equivalenza indicandone l'insieme quoziente.

$$(\{a\} \times \{a\}) \cup (\{b, c, d\} \times \{b, c, d\})$$

Metto a in una classe e tutti gli altri elementi in un'altra classe. Questo si può fare con qualunque coppia di sottoinsiemi disgiunti.

L'insieme quoziente è $\{[a], [b]\}$

Es 5. Dimostrare che, per ogni $n \geq 1$:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Caso base $n = 1$:

$$\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$$

Passo induttivo $n + 1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i(i+1)} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= 1 + \frac{-1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= 1 + \frac{-(n+2)}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= 1 + \frac{-n-2+1}{(n+1)(n+2)} \\
&= 1 - \frac{\cancel{n+1}}{\cancel{(n+1)}(n+2)} \\
&= 1 - \frac{1}{n+2}
\end{aligned}$$

Es 6. Definire il concetto di soddisfacibilità nella logica proposizionale.

Una formula è soddisfacibile se almeno un'interpretazione la verifica.

Es 7. Le seguenti formule sono tautologie (T), soddisfacibili (S), falsificabili (F) o insoddisfacibili (I)?

T	**S**	**F**	**I**	
☐	☑	☑	☐	$\neg\neg A \land A$
☑	☑	☐	☐	$\neg A \lor \neg\neg A$
☐	☑	☑	☐	$\neg(A \lor B) \leftrightarrow (A \land \neg B)$
☑	☑	☐	☐	$(A \to B) \leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$
☑	☑	☐	☐	$(A \land \neg A) \to B$

Es 8. Definire (se possibile) un'interpretazione che verifichi ed una che falsifichi la formula

$$(\exists y P(y) \land \exists z Q(z)) \to \exists x (P(x) \land Q(x))$$

La formula significa che se esistono y e z (non necessariamente distinti) che soddisfano rispettivamente P e Q, allora esiste una x che soddisfa sia P che Q. Ovviamente la formula non è valida in un caso basilare come ad esempio:
Dominio: $\mathbb{N}$
$P(x) = x$ è pari
$Q(x) = x$ è dispari
Perché esistono y e z distinti uno pari e l'altro dispari, ma non esiste un numero sia pari che dispari.

Un'interpretazione che verifica la formula può essere:
Dominio: $\mathbb{N}$
$P(x) = x$ è multiplo di 3
$Q(x) = x$ è multiplo di 4
Perché esistono y e z che sono rispettivamente multipli di 3 e 4, ed esistono numeri x che sono multipli sia di 3 che di 4.

Es 9. Formalizzare le proposizioni A, B, C seguenti con enunciati nel linguaggio predicativo $\mathcal{L}$ composto da un simbolo R di relazione a due argomenti e dal simbolo $=$ di identità.

A. R è una relazione di ordine totale

Una relazione di ordine totale è riflessiva, antisimmetrica e transitiva. Inoltre, per ogni coppia di elementi, si ha che almeno uno dei due è in relazione con l'altro. Ci basta dunque formalizzare queste quattro condizioni e metterle insieme con $\land$:

$$\begin{aligned}
\forall x\ R(x,x)\ \land &\qquad \text{(riflessiva)}\\
\forall x\ \forall y (R(x,y) \land R(y,x) \to x = y)\ \land &\qquad \text{(antisimmetrica)}\\
\forall x\ \forall y\ \forall z (R(x,y) \land R(y,z) \to R(x,z))\ \land &\qquad \text{(transitiva)}\\
\forall x\ \forall y (R(x,y) \lor R(y,x)) &\qquad \text{(totale)}
\end{aligned}$$

B. R non è una relazione simmetrica

Basta scrivere la definizione di proprietà simmetrica e poi negarla:

$$\neg \forall x\ \forall y (R(x,y) \to R(y,x))$$

C. R non ammette minimo

Basta scrivere la definizione di minimo e poi negarla:

$$\neg \exists x\ \forall y R(x,y)$$