Metodi Matematici per l'Informatica (secondo canale)

Soluzioni di: Andrea Princic

10 Febbraio 2020

Es 1.

Sia $A = \{2, \{4, 5\}, 4, (5, 1), 3\}$. Allora:

A. $\exists x\,[(x \subset A) \wedge (5 \in x)]$; **Falso**

B. $\{5, 4\} \in A$; **Vero**

C. $\{3, 4\} \subseteq A$; **Vero**

D. $(4, 5) \in A$; **Falso**

Es 2.

Siano A e B tali che $A \cup B = B$. Allora sicuramente:

A. $A = B$; **Falso**

B. $A \subseteq B$; **Vero**

C. $A \notin B$; **Falso**

D. $A \neq \emptyset$; **Falso**

E. A e B hanno la stessa cardinalità; **Falso**

Es 3.

La chiusura transitiva della relazione $R = \{(1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 2)\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ è:

A. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$; **Falso**

B. $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$; **Vero**

C. $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 3), (3, 1)\}$; **Falso**

D. una relazione di equivalenza su $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$; **Falso** non è riflessiva

Es 4.

Sia $Q = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, c)\} \subseteq \{a, b, c, d\} \times \{a, b, c, d\}$; allora

A. Q è una funzione iniettiva; **Falso** non è una funzione

B. Q è una relazione di equivalenza; **Falso** non è né riflessiva né simmetrica

C. Q è una relazione transitiva; **Vero**

Es 5.

Sia dato l'insieme $A = \{a, aa, aaa, aaaa, \dots\}$

A. $\exists x \in A$ tale che $\forall y \in A$ si ha $\ell(y) \leq \ell(x)$, dove $\ell(x)$ indica la lunghezza di x; **Falso** x dovrebbe essere la stringa più lunga di A, che però non ha un massimo

B. A non è numerabile; **Falso**

C. A è in corrispondenza biunivoca con l'insieme $\{2^k \mid k \in \mathbb{N}\}$; **Vero** l'insieme $\{2^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ ha la stessa cardinalità di $\mathbb{N}$

D. A contiene un insieme di parole di lunghezza infinita; **Falso** A **è** un insieme di parole di lunghezza infinita

Es 6.

La relazione $R = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x + y \text{ è pari}\}$ è una relazione di equivalenza? Fornire una giustificazione alla risposta e, nel caso affermativo, indicare l'insieme quoziente della relazione.

L'unico modo per ottenere un numero pari sommando due numeri è se sono entrambi pari o entrambi dispari. Si ha dunque che la relazione è:
riflessiva: $\forall x \in \mathbb{N}$ si ha che $x + x = 2x$ è pari;
simmetrica: $\forall x, y \in \mathbb{N}$ si ha che $x + y = y + x$. Se $x + y$ è pari anche $y + x$ lo è;
transitiva: $\forall x, y, z \in \mathbb{N}$ si ha che se $x + y$ e $y + z$ sono pari, allora anche $x + z$ lo è.
L'insieme quoziente è $\{[0], [1]\}$ perché tutti i numeri con stessa parità stanno in coppia gli uni con gli altri.

Es 7.

Dimostrare per induzione che, dato un insieme V di n punti con $n \geq 2$, possiamo collegarli a due a due con $\frac{n(n-1)}{2}$ segmenti distinti.

Caso base: $n = 2$. Due punti si possono collegare con $1 = \frac{2(2-1)}{2}$ segmento.
Passo induttivo: $n+1$. Sia V un insieme di n punti collegati da $\frac{n(n-1)}{2}$ segmenti. Ora immaginiamo di aggiungere un punto all'insieme V. Quel punto deve essere collegato a tutti gli altri con n nuovi segmenti. Il nuovo numero di segmenti sarà quindi

$$\begin{aligned} \frac{n(n-1)}{2} + n &= \frac{n(n-1) + 2n}{2} \\ &= \frac{n^2 - n + 2n}{2} \\ &= \frac{n^2 + n}{2} \\ &= \frac{(n+1)n}{2} \end{aligned}$$

Es 8.

Formalizzare il seguente problema e verificare la correttezza dell'affermazione finale:
Se la Roma ha vinto la partita, allora il Brescia e il Genoa retrocedono. Se almeno uno tra il Brescia e il Genoa retrocede, allora la Sampdoria si salva. Quindi, se la Sampdoria non si salva, allora la Roma non ha vinto la partita.

Usiamo i simboli predicativi
$V(x) = x$ ha vinto
$R(x) = x$ retrocede
$S(x) = x$ si salva
e le variabili r, b, g, s per Roma, Brescia, Genoa e Sampdoria.
Allora il problema diventa

$$V(r) \to (R(b) \wedge R(g)) \tag{1}$$
$$(R(b) \vee R(g)) \to S(s) \tag{2}$$
$$\neg S(s) \to \neg V(r) \tag{3}$$

L'affermazione finale (3) è vera: sapendo che $\vDash (A \to B) \leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$ allora da (2) segue che

$$\begin{aligned} \neg S(s) &\to \neg(R(b) \vee R(g)) \\ &\to \neg(R(b) \wedge R(g)) \\ &\to \neg V(r) \end{aligned}$$

Es 9.

Decidere se i seguenti enunciati sono validi:

A. $(\forall x A(x) \to \forall x B(x)) \to \forall x(A(x) \to B(x))$; **Falso** con A soddisfacibile ma non tautologia e B insoddisfacibile

B. $(\forall x A(x) \to \exists x B(x)) \leftrightarrow \exists x(A(x) \to B(x))$; **Vero**

I tableau si trovano in fondo al documento.

Es 10.

Formalizzare le proposizioni seguenti con enunciati nel linguaggio predicativo $\mathcal{L}$ composto da un simbolo $<$ di relazione a due argomenti (con la sua ovvia interpretazione).

A. $<$ ha un elemento minimo;
$\exists x \forall y(x < y)$

B. $<$ non ha un elemento massimo;
$\neg\exists x \forall y(y < x)$

C. $<$ è denso, vale a dire che ogni coppia di elementi nella relazione $<$ possiede un elemento intermedio.
$\forall x \forall y(x < y \to \exists z(x < z \wedge z < y))$

Tableau

- $\neg((\forall x A(x) \to \forall x B(x)) \to \forall x (A(x) \to B(x)))$
- $\forall x A(x) \to \forall x B(x)$
- $\neg \forall x (A(x) \to B(x))$
- $\neg (A(a) \to B(a))$
- $A(a)$
- $\neg B(a)$
  - $\neg \forall x A(x)$
    - $\neg A(b)$
  - $\forall x B(x)$

- $\neg((\forall x A(x) \to \exists x B(x)) \leftrightarrow \exists x (A(x) \to B(x)))$
  - $\forall x A(x) \to \exists x B(x)$
    - $\neg \exists x (A(x) \to B(x))$
      - $\neg \forall x A(x)$
        - $\neg A(a)$
        - $\neg (A(a) \to B(a))$
        - $A(a)$
        - $\neg B(a)$
        - $\times$
      - $\exists x B(x)$
        - $B(b)$
        - $\neg (A(b) \to B(b))$
        - $A(b)$
        - $\neg B(b)$
        - $\times$
  - $\neg (\forall x A(x) \to \exists x B(x))$
    - $\exists x (A(x) \to B(x))$
    - $\forall x A(x)$
    - $\neg \exists x B(x)$
    - $A(c) \to B(c)$
    - $\neg B(c)$
    - $A(c)$
      - $\neg A(c)$
        - $\times$
      - $B(c)$
        - $\times$