Metodi Matematici per l'Informatica (secondo canale) — 5 Novembre 2024

Soluzioni di Andrea Princic. Cartella delle soluzioni.

Es 1. Siano $A = \{\{a,a\},(b,a),(a,b),(b,a),\{(a,b),(b,a)\}\}$ e $B = \{a,b\} \times \{b,a\}$. Allora:

> Si consideri che
>
> $$B = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)\}$$
> $$A - B = \{\{a,a\},\{(a,b),(b,a)\}\}$$
> $$B - A = \{(a,a),(b,b)\}$$

- ☐$_V$ ☑$_F$ **A.** $a \subseteq A - B$
- ☑$_V$ ☐$_F$ **B.** $B - A$ è una relazione simmetrica
- ☐$_V$ ☑$_F$ **C.** $B - A$ è una relazione di equivalenza su B

> È una relazione di equivalenza su $\{a,b\}$ ma non su B

Es 2. Per ogni tripla di insiemi A, B, C:

- ☑$_V$ ☐$_F$ **A.** se $C \subseteq A \cap B$ allora $C \cap A = C \cap B$
- ☑$_V$ ☐$_F$ **B.** se $C \subseteq A \cap B$ allora $A \cap B = (C \cup A) \cap (C \cup B)$
- ☑$_V$ ☐$_F$ **C.** $C \subseteq A \cap B$ se $A \cap B = (C \cup A) \cap (C \cup B)$

Es 3. Dato un insieme A ed una relazione di equivalenza $R \subseteq A \times A$ sia f la funzione che associa ad ogni elemento di A la sua classe di equivalenza. Allora:

- ☑$_V$ ☐$_F$ **A.** se f è iniettiva allora R è anche una relazione d'ordine
- ☐$_V$ ☑$_F$ **B.** se f è suriettiva allora è biiettiva
- ☑$_V$ ☐$_F$ **C.** se R è anche una relazione d'ordine allora f è iniettiva

Es 4. Sia $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali.

- ☐$_V$ ☑$_F$ **A.** $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ è equipotente a $\mathbb{R}$ (insieme dei numeri reali)
- ☑$_V$ ☐$_F$ **B.** $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ è equipotente a $\mathbb{Z}$ (insieme dei numeri interi)
- ☑$_V$ ☐$_F$ **C.** $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ è equipotente a $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Es 5. Diciamo che un sottoinsieme A di $\mathbb{N}$ è cofinito se $\mathbb{N} - A$ è finito. Per ogni coppia di insiemi A e B si ha che:

- ☑$_V$ ☐$_F$ **A.** Se A e B sono cofiniti allora $A \cap B$ è cofinito
- ☑$_V$ ☐$_F$ **B.** Se A e B sono cofiniti allora $A \cup B$ è cofinito
- ☐$_V$ ☑$_F$ **C.** Se A e B sono cofiniti allora $A - B$ è cofinito

Es 6. Data la relazione $R \subseteq \{0,1,2,3,4,5\} \times \{0,1,2,3,4,5\}$ seguente:

$$R = \{(2,1),(1,2),(2,3),(4,0)\}$$

si definisca la più piccola relazione di equivalenza S che contiene R, e se ne indichi l'insieme **quoziente**.

$$S = \Big\{\underline{(2,1)}, \underline{(1,2)}, \underline{(2,3)}, (1,1), (2,2), (3,2), (3,3), (3,1), (1,3), \underline{(4,0)}, (0,4), (4,4), (0,0), (5,5)\Big\}$$

L'insieme quoziente è $\{[0],[1],[5]\}$ dove

$$\begin{aligned} [0] &= \{0,4\} \\ [1] &= \{1,2,3\} \\ [5] &= \{5\} \end{aligned}$$

Es 7. Scrivere una funzione $f : \{1,2,3,4,5\} \to \{6,7,8,9,10\}$ che non sia iniettiva.

$$f = \{(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6)\}$$

Es 8. Ricordando che $n!$ (il **fattoriale** di n) è il prodotto dei numeri naturali da 1 a n, dimostrare (per induzione) che

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$$

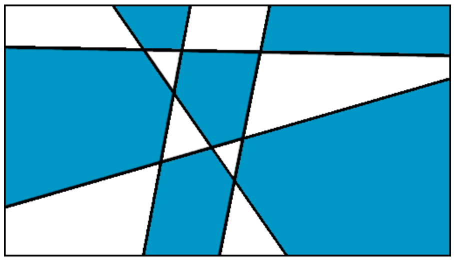
Caso base $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^{1} k \cdot k! = 1 \cdot 1! = 1 = 2! - 1 = 1$$

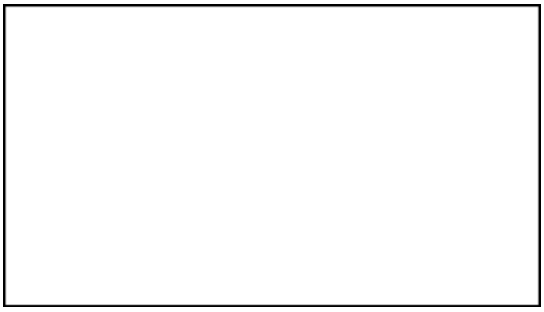
Passo induttivo $n + 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k \cdot k! &= \sum_{k=1}^{n} k \cdot k! + (n+1) \cdot (n+1)! \\ &= (n+1)! - 1 + (n+1) \cdot (n+1)! \\ &= (n+1)! \cdot (1 + n + 1) - 1 \\ &= (n+1)! \cdot (n+2) - 1 \\ &= (n+2)! - 1 \end{aligned}$$

Es 9. Si consideri qualsiasi insieme finito di linee rette su un piano. Si dimostri per induzione che le regioni nel piano create da queste linee possono essere colorate in modo tale che due regioni qualsiasi che condividono un bordo in comune abbiano colori diversi, come suggerito dall'immagine seguente.



Il caso base è quando ci sono 0 linee: in questo caso non c'è niente da fare perché c'è solo una regione che corrisponde all'intero piano.



Ogni volta che aggiungiamo una linea il piano si divide in due parti. Alcune regioni esistenti potrebbero trovarsi a cavallo di queste due nuove parti, rendendo falsa la condizione. Nel caso della prima linea ci basta invertire una delle due parti del piano.

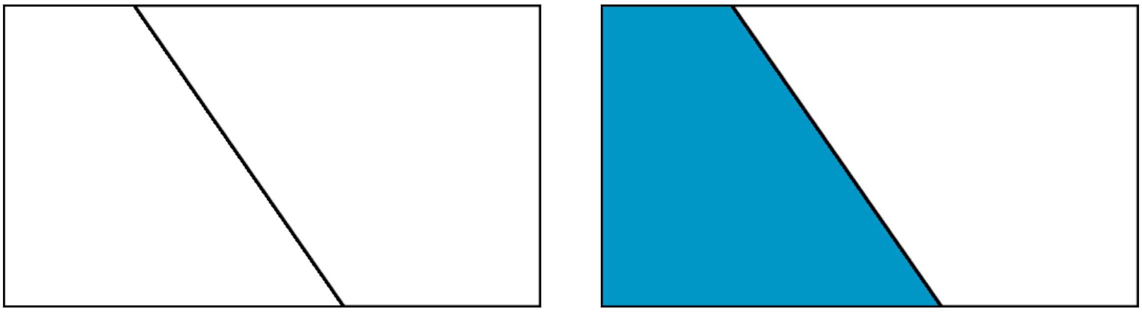


Figure 1: Dopo aver fatto la linea la condizione è falsa, quindi invertiamo il colore di una parte del piano

Aggiungendo una nuova linea la situazione sembra complicarsi ma in realtà non è così. Tutte le regioni che si trovano al confine di una delle due nuove metà sono a contatto con le loro metà dall'altra parte della linea. Per risolvere questo problema ci basta invertire il colore di tutte le regioni che si trovano in una delle due parti appena create con la nuova linea.

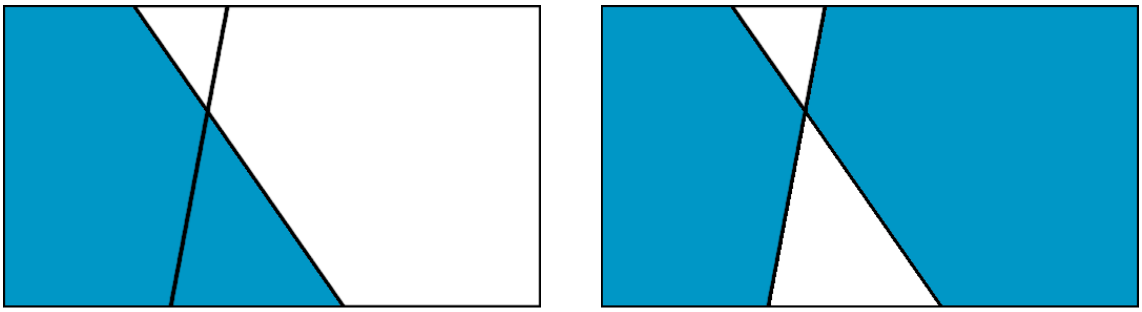


Figure 4: Dopo aver fatto la linea la condizione è falsa, quindi invertiamo il colore di tutte le regioni in una delle due nuove metà del piano (destra)

Aggiungendo un'altra linea possiamo vedere che la strategia di invertire tutte le regioni in una metà del piano continua a funzionare.

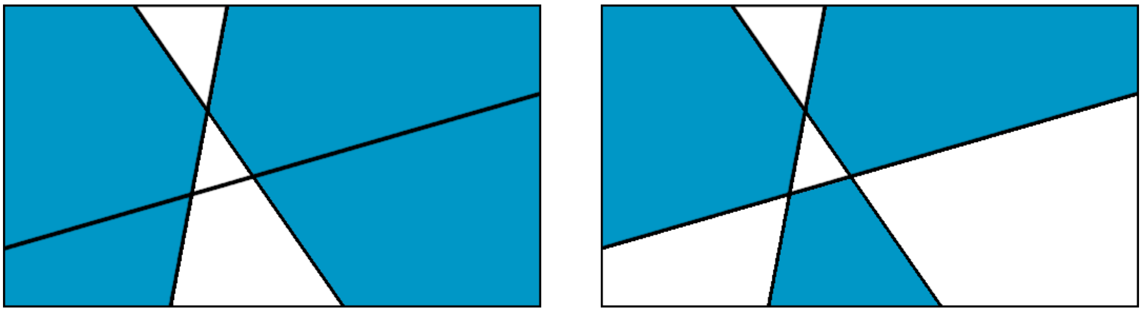


Figure 7: Dopo aver fatto la linea la condizione è falsa, quindi invertiamo il colore di metà piano

La strategia funziona anche nel caso di regioni che non si trovano al confine della nuova linea. Il motivo è che quando viene tracciata una nuova linea, il piano viene diviso in due parti all'interno delle quali, se prese singolarmente, la condizione è valida perché lo era prima di tracciare la linea (**Passo induttivo**). Dopo aver tracciato la linea la condizione viene infranta solo al confine. Invertendo il colore di una delle due nuove metà del piano si ottiene che il conflitto ai bordi viene risolto, e le due nuove metà, che prese singolarmente verificavano entrambe la condizione, continuano a verificarla anche dopo aver invertito i colori perché invertire i colori non falsifica la condizione.

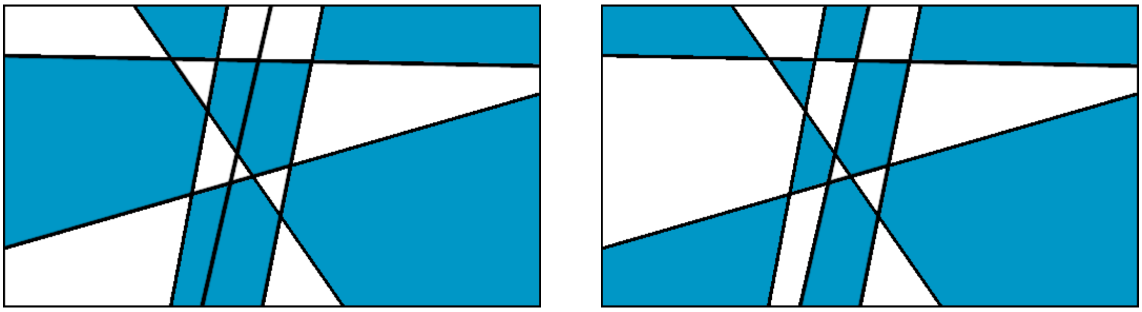


Figure 10: Le due nuove metà soddisfano la condizione se prese singolarmente, e invertire i colori non invalida la condizione nella metà invertita